

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/69/11

**Х.Х. Худойназаров, Р.И. Халмурадов, Б.Ф. Ялгашев****ПРОДОЛЬНО-РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ  
УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ  
С ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ**

Исходя из точной трехмерной постановки задачи и ее решения в преобразованиях, выведены общие уравнения продольно-радиальных колебаний цилиндрической оболочки, содержащей вязкую сжимаемую жидкость, из которых можно получить типа классических и уточненных приближенные уравнения колебаний. На основе полученных уточненных уравнений колебаний решена задача о гармонических продольно-радиальных колебаниях цилиндрической оболочки.

**Ключевые слова:** *цилиндрическая оболочка, вязкая жидкость, колебания, уточненные уравнения, напряжения, перемещения.*

Для приведения трехмерной по пространственным координатам задачи теории оболочек к двумерной используют различные методы и подходы. При этом в качестве основных неизвестных функций берутся перемещения срединной поверхности оболочки [1] и применяются различного рода упрощающие гипотезы и предпосылки механического и геометрического характера [2]. Примененные при построении теории гипотезы и предпосылки вместе с упрощениями приводят к существенным недостаткам и погрешностям. В теории оболочек Кирхгофа – Лява указанные недостатки являются существенными. На это в свое время обратили внимание В.В. Новожилов и Р.М. Финкельштейн [2], Х.М. Муштари [3], В.М. Даревский [4], У.К. Нигуль [5], поэтому «более тщательное соблюдение гипотез Кирхгофа – Лява все же не гарантирует получение более точных уравнений колебания» [6].

Кроме этого, можно указать еще три направления в теории оболочек, где плохо работают известные классические теории. Во-первых, при расчете многослойных оболочек и оболочек, находящихся в деформируемой среде, условия на контактной поверхности целесообразно сформулировать относительно перемещений контактирующей, а не срединной поверхности. При этом динамические контактные условия должны быть сформулированы в напряжениях. Общеизвестно, что в теории Кирхгофа – Лява пренебрегаются напряжения  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$ ,  $\sigma_{z\theta}$  и, естественно, при этом нельзя точно сформулировать контактные условия в напряжениях. Поэтому, при решении контактных задач теории оболочек появляется необходимость построения уточненной теории. В этом направлении С.А. Амбарцумяном [7] и Ю.И. Юаном [8] развиты теории, в которых пренебрегается напряжением  $\sigma_{rr}$  и приближенно учитываются напряжения  $\sigma_{r\theta}$  и  $\sigma_{z\theta}$ .

Во-вторых, при расчете толстостенных цилиндрических оболочек погрешность при применении теории Кирхгофа – Лява может оказаться большей даже при напряженном состоянии со сравнительно небольшим показателем изменчивости [9].

В-третьих, при исследованиях нестационарного колебания цилиндрических оболочек, в частности при исследовании быстропротекающих переходных процессов, применение классической теории нежелательно, если иметь в виду, то обстоятельство, что «развитие классической теории стимулировалось, главным образом, запросами задач на собственные частоты колебаний» [10]. Указанные недостатки теории Кирхгофа – Лява и других классических теорий побудили многих исследователей предпринимать попытки уточнения уравнений колебаний теории оболочек и, в частности цилиндрических оболочек и стержней кругового поперечного сечения.

С другой стороны, несмотря на погрешности, вызываемые различными гипотезами, применяемыми при выводе уравнений колебаний, исследователи вынуждены их применять при решении тех или иных задач о колебаниях механических систем. Не составляют исключение и теории типа теорий Тимошенко, которые также используют упрощающие гипотезы. Из большого числа уточненных теорий цилиндрических оболочек можно привести теорию Г. Германна и И. Мирски [11]. Она считается наиболее правильной и простой для решения динамических задач цилиндрической оболочки. При разработке этой теории используются гипотезы и предположения, которые существенно упрощают построение теории и окончательных разрешающих уравнений колебаний [12].

При построении уточненных теорий стараются вывести уточненные уравнения колебаний, учитывающих те или иные факторы физического, механического или геометрического характера. В зависимости от учитываемых факторов методы вывода уравнений колебаний, основанные на динамической теории упругости, разделяются на три основные направления.

К первому из них можно отнести методы, которые основаны на использовании вариационных принципов в динамике.

Ко второму направлению относят методы, основанные на разложении составляющих поля упругих перемещений в ряды, в том числе в степенные. Существенное развитие такой метод получил в работах российских ученых. На его основе В.З. Власовым был разработан метод начальных функций применительно к оболочечным системам. Строгое математическое обоснование метода разложения упругих смещений в степенные ряды на примере динамической задачи о слое в случае плоской деформации дано Г.И. Петрашенем [10].

Наконец к третьему направлению относится метод использования общих решений в преобразованиях трехмерных задач теории упругости. Существенное и успешное применение к задачам динамики этот метод получил в работах И.Г. Филиппова и его учеников [13–15]. Сущность метода сводится к изучению построенных решений при различных типах внешних воздействий и к выяснению условий, при выполнении которых смещения или их «главные части» удовлетворяют несложным уравнениям колебаний, и к нахождению алгоритма, позволяющего по полю этих «главных частей» вычислять приближенные значения полей смещений и напряжений в любом сечении для произвольного момента времени [16, 17].

В работах [18, 19] решения задачи о переходном процессе деформации в цилиндрической оболочке получены с привлечением приближенной теории. В них в рамках теории Тимошенко рассмотрены задачи о распространении нестационарных волн и о переходных волновых процессах в линейно-вязкоупругой круговой цилиндрической оболочке конечной длины при динамическом нагружении одного из ее торцов.

В последнее время исследователями уделяется особое внимание нестационарным задачам о колебаниях цилиндрических тел с жидкостями. К таким относится работа [20], в которой предложен подход к определению собственных частот и мод составных систем оболочек, включающий построение математической модели, основанной на теории Кирхгофа – Лява, уточненной теории типа Тимошенко и теории пространственной упругости. Работа [21] посвящена разработке подхода для определения характеристик волнового процесса в цилиндрической полости, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью, возбуждаемой вибрирующим сферическим телом, размещенным на оси полости. Численно-аналитический метод нахождения собственных частот и форм колебаний трубопровода, транспортирующего идеальную жидкость, предложен в [22]. Метод позволяет определить собственные частоты и формы, когда натяжение или сжатие, а также диаметр являются произвольными функциями продольной координаты. Авторами [23] задача взаимодействия двухфазной жидкости с трубопроводом решена на основе стержневой теории. Построена математическая модель колебаний горизонтальных вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих двухфазную среду, учитывающая внутреннее давление.

Ниже рассматривается задача о продольно-радиальных колебаниях круговой цилиндрической упругой оболочки с внутренним  $r_1$ , внешним  $r_2$  радиусами и содержащей покоящуюся вязкую сжимаемую жидкость. Без применения дополнительных гипотез и предпосылок физического или механического характера выведены общие уравнения колебаний такой оболочки, из которых можно получить типа классических и уточненных уравнения колебаний. Предложен алгоритм, позволяющий по полю искомых функций однозначно определить напряженно-деформированное состояние точек произвольного сечения рассматриваемой гидроупругой системы по значениям искомых функций. Полученные уточненные уравнения колебаний применены для исследования гармонических колебаний цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью.

### Постановка задачи

Считается, что рассматриваемая цилиндрическая оболочка, как трехмерное тело, строго подчиняется математической линейной теории упругости и в точной постановке описывается трехмерными уравнениями. При этом она отнесена к цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$ , где ось  $z$  направлена по оси симметрии цилиндра (рис. 1).

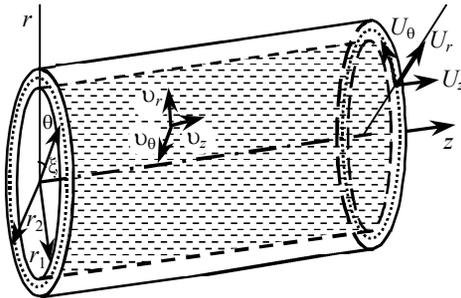


Рис. 1. Геометрия оболочки  
Fig. 1. Shell geometry

Предполагается, что колебания слоя, как и жидкости малы. При этом малость колебаний подразумевает малости смещений точек оболочки и жидкости. Зависимости между напряжениями и деформациями в точках цилиндрического слоя считаются заданными в виде соотношений закона Гука для изотропного тела. Уравнения движения точек оболочки как цилиндрического слоя используются в виде

$$\mu \Delta \bar{\Psi} = \rho \ddot{\bar{\Psi}}; \quad (\lambda + 2\mu) \Delta \bar{\Phi} = \rho \ddot{\bar{\Phi}}, \quad (1)$$

где  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Ламэ;  $\rho$  – плотность материала оболочки;  $\Delta$  – трехмерный оператор Лапласа. При этом потенциалы продольных  $\bar{\Phi}$  и поперечных  $\bar{\Psi}$  волн введены по формуле

$$\bar{U} = \text{grad } \bar{\Phi} + \text{rot} [\bar{e}_z \Psi_1 + \text{rot} (\bar{e}_z \Psi_2)]. \quad (2)$$

Аналогично уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости при продольных колебаниях имеют вид [24]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( 1 + \frac{4\nu'}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right] G = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu' \Delta \right) \chi_2 = 0, \quad (r, \theta, z) \in \Omega, \quad (3)$$

где  $\Omega$  – объем пространства, занятый жидкостью;  $a_0$  – скорость звука в покоящейся жидкости;  $\nu'$  – кинематический коэффициент вязкости;  $\mu'$  – коэффициент вязкости  $\mu' = \rho'_0 \nu'$ ;  $\rho'_0$  – плотность покоящейся жидкости;

$$\bar{V} = \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } G + \text{rot} [\bar{e}_z \chi_1 + \text{rot} (\bar{e}_z \chi_2)]). \quad (4)$$

Считается, что колебания цилиндрической оболочки возбуждаются усилиями на её внешней поверхности при  $r = r_2$ , т.е. граничные условия задачи имеют вид [25]

$$\sigma_{rr}(r, z, t)|_{r=r_2} = f_r(z, t); \quad \sigma_{rz}(r, z, t)|_{r=r_2} = f_{rz}(z, t). \quad (5)$$

Будут иметь место следующие динамические и кинематические условия на поверхности контакта взаимодействующих сред

$$\sigma_{rr}(r, z, t)|_{r=r_1} = -P_{rr}(r, z, t)|_{r=r_1}, \quad \sigma_{rz}(r, z, t)|_{r=r_1} = -P_{rz}(r, z, t)|_{r=r_1}; \quad (6)$$

$$V_z(r, z, t)|_{r=r_1} = \frac{\partial}{\partial t} U_z(r, z, t)|_{r=r_1}, \quad V_r(r, z, t)|_{r=r_1} = \frac{\partial}{\partial t} U_r(r, z, t)|_{r=r_1}, \quad (7)$$

где  $P_{ij}$  ( $i, j = r, \theta, z$ ) – компоненты тензора напряжений в жидкости; Начальные условия задачи считаются нулевыми.

### Уравнения колебаний

Для решения задачи (1), (3) – (7), функции внешних воздействий рассматриваются в классе функций, представимых в виде [26]

$$f_r(z, t) = \int_0^\infty \left. \begin{matrix} \sin kz \\ -\cos kz \end{matrix} \right\} dk \int_{(t)} f_r^{(0)}(k, p) e^{pt} dp, \\ f_{rz}(z, t) = \int_0^\infty \left. \begin{matrix} \cos kz \\ \sin kz \end{matrix} \right\} dk \int_{(t)} f_{rz}^{(0)}(k, p) e^{pt} dp, \quad (8)$$

где  $(l)$  – разомкнутый контур в плоскости  $p$ , прилегающий справа к участку  $(-i\omega_0, i\omega_0)$  мнимой оси. Кроме того, функции  $f_r(z, t)$  и  $f_{rz}(z, t)$  предполагаются такими, что функции  $f_r^{(0)}(k, p)$  и  $f_{rz}^{(0)}(k, p)$  пренебрежимо малы вне области,  $0 \leq k \leq k_0, \text{Im}|p| < \omega_0$ .

При представлении вектора перемещения в виде (2) крутильное составляющее перемещения зависит только от потенциальной функции  $\psi_1$ , а продольная и радиальная составляющие зависят только от потенциальных функций  $\Phi$  и  $\psi_2$ . Поэтому задача изучения продольно-радиальных колебаний цилиндрической оболочки может быть рассмотрена отдельно от задачи о крутильных колебаниях [27]. Аналогичное утверждение имеет место и для содержащейся в оболочке жидкости.

Исходя из этого, представив потенциалы  $\Phi, \Psi_2, G$  и  $\chi_2$  аналогично (8) и подставив их в уравнения (1), (3), получаем обыкновенные дифференциальные уравнения, общие решения которых, учитывающие ограниченности решений при  $r = 0$  и  $r \rightarrow \infty$ , выражаются через модифицированные функции Бесселя и равны

$$\Phi_0(r) = A_1 I_0(\alpha r) + A_2 K_0(\alpha r), \quad \Psi_{20}(r) = B_1 I_0(\beta r) + B_2 K_0(\beta r), \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad (9)$$

$$G_0(r) = C I_0(\delta r), \quad \chi_{20}(r) = D I_0(\gamma r), \quad (10)$$

где  $A_i, B_i, C$  и  $D$  – постоянные интегрирования;

$$\alpha^2 = k^2 + \rho p^2 / (\lambda + 2\mu), \quad \beta^2 = k^2 + \rho p^2 / \mu,$$

$$\delta^2 = k^2 + 3p^2 / (3a_0^2 + 4\nu'), \quad \gamma^2 = k^2 + p / \nu'.$$

Аналогично представив напряжения  $\sigma_{ij}, P_{ij}$ , преобразуются граничные и контактные условия (5) – (7). Подставив в преобразованные граничные условия решения (9), (10), получим

$$\begin{aligned} & [2\mu\alpha^2 + (\alpha^2 - k^2)\lambda][I_0(\alpha r)A_1 + K_0(\alpha r)A_2] - \frac{2\alpha}{r}\mu[I_1(\alpha r)A_1 - K_1(\alpha r)A_2] - \\ & - 2\mu k\beta^2[I_0(\beta r)B_1 + K_0(\beta r)B_2] + \frac{2k\beta}{r}\mu[I_1(\beta r)B_1 - K_1(\beta r)B_2] = f_r^{(0)}(k, p), \quad (11) \end{aligned}$$

$$2\alpha k[I_1(\alpha r)A_1 - K_1(\alpha r)A_2] - \beta(\beta^2 + k^2) \times [I_1(\beta r)B_1 - K_1(\beta r)B_2] = \frac{1}{\mu} f_{rz}^{(0)}(k, p).$$

При классическом исследовании колебаний цилиндрической оболочки за искомые величины принимаются смещения точек срединной поверхности оболочки. Однако такой выбор не единственный [28]. Например, рассматривая цилиндрическую оболочку, необходимо выбирать такую поверхность, которая для стержня переходит в осевую линию, а для тонких оболочек – в срединную поверхность. С другой стороны, в экспериментальных исследованиях получают информацию о смещениях точек внешней или внутренней поверхности оболочки, по которым необходимо определить напряженно-деформированное состояние самой оболочки. В связи с этим за искомые величины примем перемещения и напряжения в точках некоторой промежуточной поверхности цилиндрической оболочки, радиус

которой определяется по формуле

$$\xi = \frac{r_1}{2} \left( \chi - \frac{r_1}{r_2} \right), \quad 2 + \frac{r_1}{r_2} \leq \chi \leq 2 \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{r_2}.$$

Заметим, что  $\xi$  может быть радиусом внутренней, срединной или внешней поверхности цилиндрической оболочки, при значениях  $\chi$ .

В дальнейшем, используя стандартные разложения модифицированных функций Бесселя, введя новые искомые функции  $U_{z,j}$  и  $U_{r,j}$  ( $j = 0, 1$ ), которые являются главными частями соответственно продольного и радиального перемещений поверхности оболочки, контактирующей с жидкостью, и, осуществляя обратное преобразование, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (C_{r0} - C_{r0}^R)U_{r,0} + (C_{z0} - C_{z0}^R) \frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} - (C_{r1} - C_{r1}^R)U_{r,1} + (C_{z1} - C_{z1}^R) \frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} &= 0, \\ (d_{r0} - d_{r0}^R) \frac{\partial U_{r,0}}{\partial z} + (d_{z0} - d_{z0}^R)U_{z,0} - (d_{r1} - d_{r1}^R) \frac{\partial U_{r,1}}{\partial z} - d_{z1}U_{z,1} &= 0, \\ e_{r0}U_{r,0} + e_{z0} \frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} - e_{r1}U_{r,1} + e_{z1} \frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} &= \frac{1}{\mu} f_r(z, t), \\ d_{r0} \frac{\partial U_{r,0}}{\partial z} + d_{z0}U_{z,0} - d_{r1} \frac{\partial U_{r,1}}{\partial z} - d_{z1}U_{z,1} &= \frac{1}{\mu} f_{rz}(z, t), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $C_{ij}, C_{ij}^R, d_{ij}, d_{ij}^R, e_{ij}$  – операторы типа

$$\begin{aligned} C_{roi} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[ (m(1-q_1) - q_1) \lambda_2^m - \left( \lambda_1 - (m+1) \left( \lambda_2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right) q_1 P_m \right] \frac{(r_i/2)^{2m}}{m!(m+1)!}, \\ P_m &= \sum_{k=0}^n \lambda_1^{(n-k-1)} \lambda_2^k, \quad \lambda_1^m = \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^m, \\ C_{r0}^R &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{2\mu'}{3\mu} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} \right] \frac{\partial^2}{\partial z^2} q_1 P_m \frac{(r_1/2)^{2m}}{(m!)^2} + \\ &\sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{2\mu'}{3r_1\mu} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\rho_0' a_0^2}{r_1\mu} \right] \left[ \lambda_2^m + \lambda_1 q_1 P_m \right] \frac{(r_1/2)^{2m+1}}{m!(m+1)!}, \quad \lambda_2^m = \left( \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^m, \end{aligned} \quad (13)$$

$a, b$  – скорости распространения соответственно продольных и поперечных волн в материале оболочки.

Полученная система уравнений (12) является системой общих уравнений продольно-радиальных колебаний круговой цилиндрической упругой оболочки, содержащей вязкую сжимаемую жидкость, относительно главных частей перемещений точек внутренней поверхности, контактирующей с поверхностью содержащейся жидкости. При этом операторы  $C_{kl}^R$  и  $d_{kl}^R$  из (13) представляют собой реакцию вязкой жидкости на колебания оболочки. Из (12) можно получить уравнения для оболочки: а) с несжимаемой вязкой жидкостью; б) сжимаемой идеальной жидкостью; в) с несжимаемой идеальной жидкостью. Кроме того, в случае отсут-

ствия жидкости, полученные уравнения колебаний (12) в частных случаях переходят в классическое уравнение продольных колебаний кругового стержня, в уравнение Релея или в уточненное уравнение типа С.П. Тимошенко. Наряду с уравнениями колебаний выведены формулы для всех компонент тензора напряжений и вектора перемещений. Например, при нулевом приближении эти формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(r, z, t) &= \mu \left\{ (1 - q_1) \frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} - (1 + q_1) U_{r,0} - r_1 \left( \ln \frac{r}{r_1} + \frac{1}{2} \right) \left[ (1 - 2q_2) \frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} + (1 + 2q_2) \lambda_2 U_{r,1} \right] \right\}; \\ \sigma_{rr}(r, z, t) &= -\mu \left[ q_1 U_{r,0} + (1 + q_1) \frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} \right] + \\ & \mu r_1 \left\{ \left[ \left( q_2 \ln \frac{r}{r_1} - \frac{1}{2} \right) \lambda_2 + \frac{2}{r^2} \right] U_{r,1} + \left[ (1 + q_2) \ln \frac{r}{r_1} + \frac{1}{2} \right] \frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} \right\}; \\ U_z(r, z, t) &= U_{z,0} - \left( \ln \frac{r}{r_1} + \frac{1}{2} \right) (r_1 U_{z,1}); \\ U_r(r, z, t) &= \frac{r}{2} \left\{ U_{r,0} - r_1 \left[ (1 + q_2) \lambda_2 \ln \frac{r}{r_1} + \frac{2}{r^2} \right] U_{r,1} - r_1 q_2 \ln \left( \frac{r}{r_1} \right) \frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} \right\}, \\ q_2 &= -\frac{1}{1 - 2\nu}. \end{aligned} \quad (14)$$

Формулы (14) позволяют определить напряженно-деформированное состояние произвольной точки оболочки по значениям искомым функций  $U_{z,j}$  и  $U_{r,j}$  ( $j = 0, 1$ ), по результатам решения уравнений (12).

### Гармонические колебания цилиндрической оболочки с вязкой сжимаемой жидкостью

Ниже на основе полученных уравнений колебаний исследуются гармонические продольно-радиальные колебания упругой цилиндрической оболочки, содержащей вязкую сжимаемую жидкость. Для описания поведения цилиндрического слоя с вязкой жидкостью применяются приближенные уравнения колебаний, полученные из общих уравнений (12), ограничиваясь в них нулевым приближением. При этом предполагается, что поверхности оболочки свободны от внешних нагрузок. Тогда правые части уравнений колебаний будут равны нулю. В полученных приближенных уравнениях перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$\begin{aligned} t &= t^* r_1 / a, \quad z = r_1 z^*, \quad r = r^* r_1, \quad U_{r,0} = U_{r,0}^*, \\ U_{r,1} &= r_1 U_{r,1}^*, \quad U_{z,0} = r_1 U_{z,0}^*, \quad U_{z,1} = U_{z,1}^* \end{aligned} \quad (15)$$

и, в дальнейшем, для простоты записи, опустим «звездочки» над буквами. Тогда система уравнений колебаний в безразмерных координатах, с учетом равенства нулю функций внешних воздействий, принимает вид

$$\left\{ \frac{1}{6} \frac{\mu' a}{\mu r_1} \frac{\partial}{\partial t} - q_1 - \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} \right\} U_{r,0} + \left\{ -\frac{4}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} \frac{\partial}{\partial t} - (1 + q_1) - \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} \right\} \frac{\partial}{\partial z} U_{z,0} -$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \frac{a^2}{2b^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2\rho_0' a_0^2}{\mu} - 2 \right\} U_{r,1} + \\
& + \left\{ \left( \frac{1}{12} q_2 \frac{\mu' a}{\mu r_1} - \frac{1}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} q_2 \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} + \frac{\rho_0' a_0^2}{2\mu} \right\} \frac{\partial}{\partial z} U_{z,1} = 0, \\
& \left\{ \left( \frac{2}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} + \frac{\mu' a}{\mu r_1} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} (1 - q_1) + \frac{r_1}{2} \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} \right\} \frac{\partial}{\partial z} U_{r,0} + \\
& + \left\{ \left( \frac{1}{2} (1 - q_1) + \frac{\rho_0' a_0^2}{2\mu} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} \frac{\partial^3}{\partial t \partial z^2} - \left( \frac{1}{2} (1 - q_1) + \frac{\rho_0' a_0^2}{2\mu} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} U_{z,0} - \\
& - \left\{ \left( \frac{4}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} - 2 \frac{\mu' a}{\mu r_1} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} \right\} \frac{\partial}{\partial z} U_{r,1} - \left\{ \frac{\rho_0' a^2}{4\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left( q_2 \frac{\mu' a}{3\mu r_1} + q_2 \frac{\mu' a}{\mu r_1} - \frac{\mu' a}{3\mu r_1} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\rho_0' a_0^2}{4\mu} + \left( 1 + \frac{1}{4} q_2 \right) \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} \right\} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Big\} U_{z,1} = 0; \tag{16} \\
& -q_1 U_{r,0} + \left[ \left( \frac{a^2}{2b^2} - \frac{q_2 a^2}{b^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left( \frac{1}{2} - q_2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2r_1}{r_2^2} \right] U_{r,1} - \\
& - (1 + q_1) \frac{\partial}{\partial z} U_{z,0} + \left( (1 - q_2) \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} U_{z,1} = \frac{1}{\mu} f_r(r, t), \\
& \frac{r_2}{2r_1} (1 - q_1) \frac{\partial}{\partial z} U_{r,0} + \left( \frac{r_2}{2r_1} (1 - q_1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{r_2}{2r_1} (1 - q_1) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U_{z,0} - \\
& - \left[ \frac{r_2}{2r_1} (1 + 2q_2) \ln \frac{r_2}{r_1} \left( \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{r_1}{r_2} \right] \frac{\partial}{\partial z} U_{r,1} - \\
& - \left[ \frac{r_2}{2r_1} \frac{a^2}{b^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{r_2}{2r_1} (1 - 2q_2) \ln \frac{r_2}{r_1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{r_1}{r_2} \right] U_{z,1} = \frac{1}{\mu} f_{rz}(r, t).
\end{aligned}$$

Решение дифференциальных уравнений (16) будем искать в виде

$$U_{r,0} = \bar{U}_{r,0} e^{\omega t - kz}, \quad U_{z,0} = \bar{U}_{z,0} e^{\omega t - kz}, \quad U_{r,1} = \bar{U}_{r,1} e^{\omega t - kz}, \quad U_{z,1} = \bar{U}_{z,1} e^{\omega t - kz}, \tag{17}$$

где  $\omega$  – частота колебаний;  $k$  – волновое число. Подставляя (17) в уравнения (16) будем иметь систему четырех однородных алгебраических уравнений относительно  $\bar{U}_{r,0}$ ,  $\bar{U}_{z,0}$ ,  $\bar{U}_{r,1}$ ,  $\bar{U}_{z,1}$

$$\begin{aligned}
& [a_{11}\omega + a_{10}] \bar{U}_{r,0} + [b_{11}\omega + b_{10}] \bar{U}_{z,0} + [c_{12}\omega^2 + c_{11}\omega + c_{10}] \bar{U}_{r,1} + \\
& \quad + [d_{11}\omega + d_{10}] \bar{U}_{z,1} = 0; \\
& [a_{21}\omega + a_{20}] \bar{U}_{r,0} + [b_{22}\omega^2 + b_{21}\omega + b_{20}] \bar{U}_{z,0} + [c_{21}\omega + c_{20}] \bar{U}_{r,1} + \\
& \quad + [d_{22}\omega^2 + d_{21}\omega + d_{20}] \bar{U}_{z,1} = 0; \\
& a_{30} \bar{U}_{r,0} + b_{30} \bar{U}_{z,0} + [c_{12}\omega^2 + c_{11}\omega + c_{10}] \bar{U}_{r,1} + [d_{11}\omega + d_{10}] \bar{U}_{z,1} = 0; \\
& a_{40} \bar{U}_{r,0} + [b_{42}\omega^2 + b_{20}] \bar{U}_{z,0} + [c_{42}\omega^2 + c_{40}] \bar{U}_{r,1} + [d_{42}\omega^2 + d_{20}] \bar{U}_{z,1} = 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{6} \frac{\mu' a}{\mu r_1}; \quad a_{12} = -q_1 - \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu}; \quad b_{11} = \frac{4}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} k; \quad b_{10} = \left( (1+q_1) + \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} \right) k; \quad c_{12} = -\frac{a^2}{2b^2}; \\
 c_{11} &= -\frac{1}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1}; \quad c_{10} = \frac{1}{2} k^2 + \frac{2\rho_0' a_0^2}{\mu} + 2; \quad d_{11} = -\left( \frac{1}{12} q_2 \frac{\mu' a}{\mu r_1} - \frac{1}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} \right) k; \\
 d_{10} &= -\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} q_2 \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} + \frac{\rho_0' a_0^2}{2\mu} \right); \quad a_{21} = -\frac{5}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} k; \quad b_{22} = \left( \frac{1}{2} (1-q_1) + \frac{\rho_0' a^2}{2\mu} \right); \\
 b_{21} &= -\frac{2}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} k^2; \quad b_{20} = -\left( \frac{1}{2} (1-q_1) + \frac{\rho_0' a_0^2}{2\mu} \right) k^2; \quad c_{21} = -\frac{2}{3} \frac{\mu' a}{\mu r_1} k; \quad c_{20} = \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} k; \\
 d_{22} &= -\frac{\rho_0' a^2}{4\mu}; \quad d_{21} = -\left( q_2 \frac{\mu' a}{3\mu r_1} + q_2 \frac{\mu' a}{\mu r_1} - \frac{\mu' a}{3\mu r_1} \right) k^2; \quad d_{20} = \frac{\rho_0' a_0^2}{4\mu} k^2 - \frac{1}{4} q_2 \frac{\rho_0' a_0^2}{\mu} k^2 - 1; \\
 a_{30} &= -q_1; \quad b_{30} = (1+q_1) k; \quad c_{32} = \left( \frac{a^2}{2b^2} - \frac{q_2 a^2}{b^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right); \quad c_{30} = \frac{1}{2} k^2 - q_2 \ln \frac{r_2}{r_1} k^2 + \frac{2r_1}{r_2^2}; \\
 d_{30} &= -\left( (1-q_2) \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2} \right) k; \quad a_{40} = -\frac{r_2}{2r_1} (1-q_1) k; \quad b_{42} = \frac{r_2}{2r_1} (1-q_1); \\
 b_{40} &= -\frac{r_2}{2r_1} (1-q_1) k^2; \quad c_{42} = \frac{r_2}{2r_1} \frac{a^2}{b^2} (1+2q_2) k \ln \frac{r_2}{r_1}; \quad c_{40} = \frac{r_1}{r_2} k - \frac{r_2}{2r_1} k^3 (1+2q_2) \ln \frac{r_2}{r_1}; \\
 d_{42} &= -\frac{r_2}{2r_1} \frac{a^2}{b^2} \ln \frac{r_2}{r_1}; \quad d_{40} = \frac{r_2}{2r_1} k^2 (1-2q_2) \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1}{r_2}.
 \end{aligned}$$

Приравняв нулю определитель, элементы которого являются коэффициентами при неизвестных функциях этой системы, получим частотное уравнение

$$\begin{vmatrix}
 [a_{11}\omega + a_{10}] & [b_{11}\omega + b_{10}] & [c_{12}\omega^2 + c_{11}\omega + c_{10}] & [d_{11}\omega + d_{10}] \\
 [a_{21}\omega + a_{20}] & [b_{22}\omega^2 + b_{21}\omega + b_{20}] & [c_{21}\omega + c_{20}] & [d_{22}\omega^2 + d_{21}\omega + d_{20}] \\
 a_{30} & b_{30} & [c_{32}\omega^2 + c_{31}\omega + c_{30}] & [d_{31}\omega + d_{30}] \\
 a_{40} & [b_{42}\omega^2 + b_{20}] & [c_{42}\omega^2 + c_{40}] & [d_{42}\omega^2 + d_{20}]
 \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19) решалось численно с помощью программы “Maple 17”. При этом расчеты производились для различных материалов оболочки при следующих значениях физико-механических их параметров:

- сталь:  $E = 2.0 \cdot 10^{11}$  Па;  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>;  $\nu = 0.25$ ;
- медь:  $E = 10^{11}$  Па;  $\rho = 8940$  кг/м<sup>3</sup>;  $\nu = 0.31$ ;
- алюминий:  $E = 7.0 \cdot 10^{10}$  Па;  $\rho = 2750$  кг/м<sup>3</sup>;  $\nu = 0.35$ .

В качестве содержащейся среды приняты следующие жидкости со следующими характеристиками:

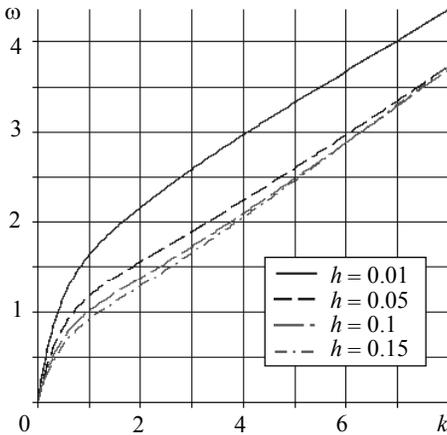
- тяжелая нефть:  $\mu' = 128 \cdot 10^{-3}$  Па·с,  $\rho = 914$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu' = 140 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>·с<sup>-1</sup>;
- керосин:  $\mu' = 2.17 \cdot 10^{-3}$  Па·с,  $\rho = 800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu' = 2.7 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>·с<sup>-1</sup>.

Геометрические характеристики оболочки следующие:

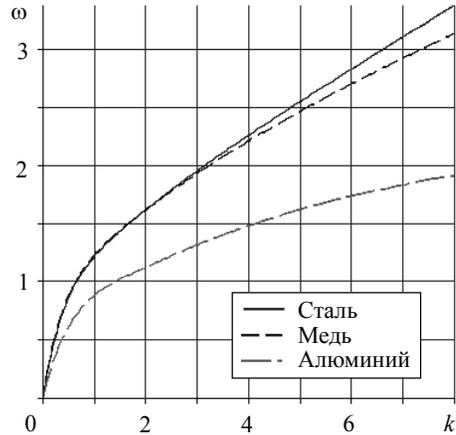
$$r_1 = 1; \quad r_2 = r_1 + h; \quad h = 0.01; 0.05; 0.1; 0.15.$$

### Численные результаты

Результаты проведенных расчетов приведены на рис. 2 – 6 в виде зависимостей наименьшей частоты  $\omega$  от волнового числа  $k$ . На рис. 2 приведены графики зависимостей частоты от волнового числа при различных значениях толщины оболочки:  $h = 0.01; 0.05; 0.1; 0.15$ . Приведенные графики (рис. 2 – 6) показывают, что при значениях волнового числа  $k \leq 3$  зависимости частоты  $\omega$  от волнового числа  $k$  носят нелинейный характер, а в дальнейшем, с ростом  $k$  эти зависимости становятся линейными. Значения частоты тонкой оболочки при  $h = 0.01$  резко отличается от остальных. Например, при  $k = 2$  эта разница для  $h = 0.05$  составляет порядка 30.4 %; для  $h = 0.1$  – порядка 41.3 %; для  $h = 0.15$  – порядка 43.8 %. При увеличении значений волнового числа указанные различия уменьшаются.



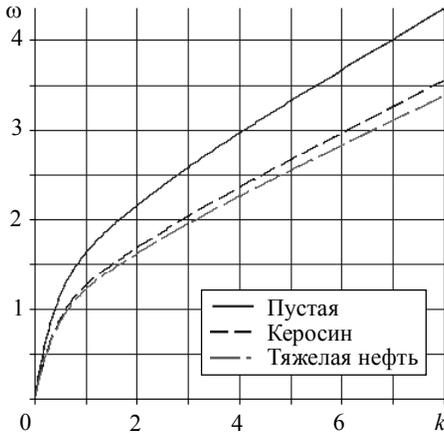
**Рис. 2.** Зависимости  $\omega$  от  $k$  для оболочек из стали при различных значениях толщины  $h$   
**Fig. 2.** Dependences of  $\omega$  on  $K$  for steel shells at various thicknesses  $h$



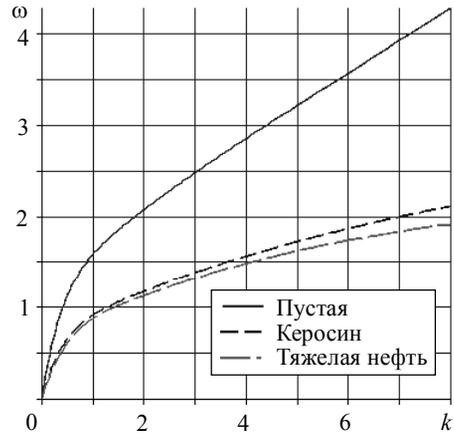
**Рис. 3.** Зависимости  $\omega$  от  $k$  для заполненных оболочек из различных материалов  
**Fig. 3.** Dependences of  $\omega$  on  $k$  for the filled shells made of various materials

Например, при  $k = 7$  эта разница для  $h = 0.05$  составляет 16 %, а для  $h = 0.1$  и  $h = 0.15$  разница почти одинаковая и составляет примерно 17.5 %. Для толстостенных оболочек ( $h = 0.05; 0.1; 0.15$ ) при значениях  $k > 7$ , значения частот мало отличаются друг от друга. Отсюда следует, что чем тоньше оболочка, тем выше частота ее колебаний, что соответствует физической сущности задачи. На рис. 4 представлены зависимости от  $k$  для заполненных тяжелой нефтью тонких оболочек ( $h = 0.01$ ) из различных материалов: стали, меди и алюминия. Из графиков следует, что чем больше значение модуля упругости материала, тем выше частота колебаний. Например, при  $k = 4$  разница между частотами колебаний для оболочек из алюминия и стали равна приблизительно 33.3 %. Значение этой разницы увеличивается в сторону высоких частот, т.е. для коротковолновых процессов. Для заполненных стальной и медной оболочек, значения модулей упругости которых близки друг к другу по сравнению с алюминиевой оболочкой, значения частот при  $k \leq 3$  совпадают и начинают различаться при  $k > 3$ , и достигают 12 % при  $k = 8$ . Это указывает на то, что более коротковолновые процессы приводят к большей разнице значений частот колебаний, которая возрастает с ростом числа  $k$ .

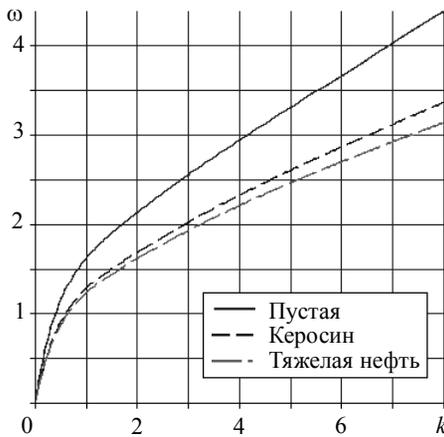
На рис. 4 – 6 приведены зависимости  $\omega$  от  $k$  для заполненных керосином и тяжелой нефтью стальных (рис. 4), алюминиевых (рис. 5) и медных (рис. 6) оболочек толщиной  $h = 0.01$ . Из них следует общее заключение, что содержащиеся в оболочке жидкости приводят к уменьшению частоты колебаний. Это имеет место для оболочек из стальных, алюминиевых и медных оболочек, т.е. содержащаяся жидкость уменьшает частоту колебаний оболочки независимо от материала оболочки. При этом уменьшение частоты происходит по разному для разных материалов оболочки.



**Рис. 4.** Зависимости  $\omega$  от  $k$  для стальных оболочек, заполненных вязкими жидкостями  
**Fig. 4.** Dependences of  $\omega$  on  $k$  for the steel shells filled with viscous fluids



**Рис. 5.** Зависимости  $\omega$  от  $k$  для алюминиевых оболочек, заполненных вязкими жидкостями  
**Fig. 5.** Dependences of  $\omega$  on  $k$  for the aluminum shells filled with viscous fluids



**Рис. 6.** Зависимости  $\omega$  от  $k$  для медных оболочек, заполненных вязкими жидкостями  
**Fig. 6.** Dependences of  $\omega$  on  $k$  for the copper shells filled with viscous fluids

Например, при  $k = 8$  разница между частотами стальной (рис. 4) пустой и заполненной керосином оболочки составляет 15.6 %, а для заполненной тяжелой нефтью оболочки равен 23 %. Повторяя расчет для алюминиевой (рис. 5) и медной (рис. 6) оболочек находим, что указанные показатели равны соответственно 49.8 % и 55.6 % для алюминиевой и 23.5 % и 35 % для медной оболочек.

### Выводы

Таким образом:

- предложены приближенные уравнения продольно-радиальных колебаний упругой круговой цилиндрической оболочки, содержащей вязкую сжимаемую жидкость. Полученные уравнения пригодны для решения прикладных задач инженерной практики. Наряду с уравнениями колебаний предложены формулы для всех компонент тензора напряжений и вектора перемещений, позволяющие определить напряженно-деформированное состояние произвольной точки оболочки с заданной точностью по координатам  $r$ ,  $z$  и времени  $t$ . Выведены также формулы для всех компонент тензора напряжений и вектора скоростей частиц взаимодействующей вязкой жидкости;

- проведенный, в целях проверки достоверности полученных результатов, сравнительный анализ показал, что предложенные в работе общие и уточненные уравнения осесимметричных колебаний рассматриваемой гидроупругой системы, в частном случае отсутствия взаимодействующей вязкой жидкости, совпадают по структуре, но отличаются по коэффициентам с соответствующими результатами работ [27–29];

- в качестве примера решена задача о гармонических колебаниях тонкой цилиндрической оболочки, содержащей вязкую жидкость, в частности керосина или тяжелой нефти. Полученные результаты по исследованию зависимости частоты от волнового числа показали, что чем тоньше оболочка, тем выше частота ее колебаний; содержащаяся в оболочке жидкость приводит к уменьшению частоты колебаний оболочки из всех трех (сталь, медь, алюминий) материалов. При этом величина влияния зависит от значения модуля упругости применяемого материала.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Общая теория оболочек. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. 784 с.
2. Новожиллов В.В., Финкельштейн Р.М. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек // ПММ. 1943. Т. 7. № 5. С. 331–340.
3. Муштару Х.М. Об области применимости приближенной теории оболочек Кирхгофа – Лява // ПММ. 1947. Т. 11. № 5. С. 517–520.
4. Даревский В.М. Об основных соотношениях теории тонких оболочек // ПММ. 1961. Т. 25. № 3. С. 519–535.
5. Нигуль У.К. Асимптотическая теория статики и динамики упругих круговых цилиндрических оболочек и анализ точности различных вариантов в теории Кирхгофа – Лява // Теория пластин и оболочек. Ереван, 1964. С. 738–742.
6. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика тверд. деформируемых тел. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
7. Амбарцумян С.А. К вопросу построения приближенных теорий расчета пологих цилиндрических оболочек // ПММ. 1954. Т. 18. № 3. С. 303–312.
8. Yi-Yuan Yu. Vibrations of cylindrical shells analyzed by means of Donnell-type equations // Aero/Space Sci. 1958. V. 11. P. 699–715.

9. *Низуль У.К.* Линейные уравнения динамики упругой круговой цилиндрической оболочки, свободные от гипотез // Тр. Таллинск. политехн. ин-та. Серия А. 1960. № 7. С. 67–76.
10. *Петрашень Г.И.* Проблемы инженерной теории колебаний вырожденных систем // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966. №5. С. 3–33.
11. *Herrmann G., Mirsky I.* Three-dimensional and shell theory analysis of axially symmetric motions of cylinders // J.Appl. Mech. 1956. V. 23. No. 4. P. 563–568.
12. *Худойназаров Х.Х., Ялгашев Б.Ф.* Осесимметричные колебания вязкоупругого цилиндрического слоя, заполненного вязкой сжимаемой жидкостью // Проблемы архитектуры и строительства. 2016. № 1. С. 119–125.
13. *Filippov I.G., Kudainazarov K.* General transverse vibrations equations for a circular cylindrical viscoelastic shell // Soviet Applied Mechanics. 1990. V. 26(4). P. 351–357. DOI: 10.1007/bf00887127.
14. *Khudoynazarov Kh., Khudoyberdiyev Z.B.* Unsteady vibrations of a three-layer plate with an asymmetric structure // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 2020. V. 614. 012061. DOI: 10.1088/1755-1315/614/1/012061.
15. *Худойназаров Х.Х., Абдирашидов А., Буркутбоев Ш.М.* Моделирование крутильных колебаний вязкоупругого круглого стержня, вращающегося с постоянной угловой скоростью // Математическое моделирование и численные методы. 2016. № 1 (9). С. 38–51.
16. *Khudoynazarov Kh., Yaxshiboyev Sh.R.* The mathematical model of transverse vibrations of the three-layer plate // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 2020. V. 614. 012062. DOI: 10.1088/1755-1315/614/1/012062.
17. *Худойназаров Х.Х., Буркутбоев Ш.М.* Математическая модель крутильных колебаний цилиндрического слоя с учетом протекающей жидкости и вращения // Математическое моделирование и численные методы. 2017. № 4. С. 38–56.
18. *Нетребко А.В., Пиелничнов С.Г.* Некоторые задачи динамики линейно-вязкоупругих цилиндрических оболочек конечной длины // Проблемы прочности и пластичности 2015. Т. 77. № 1.
19. *Khalmuradov R.I., Yalgashev B.F.* Frequency analysis of longitudinal-radial vibrations of a cylindrical shell // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 2020. V. 614. 012087. DOI: 10.1088/1755-1315/614/1/012087.
20. *Беспалова Е.И., Борейко Н.П.* Определение собственных частот составных анизотропных оболочечных систем с использованием различных моделей деформации // Int. Appl. Mech. 2019. V. 55. P. 41–54. DOI: 10.1007/s10778/019/00932/8.
21. *Кубенко В.Д.* Определение динамических характеристик вязкой жидкости в цилиндрической полости под действием сферического излучателя // Int. Appl. Mech. 2019. V. 55. P. 296–304. DOI: 10.1007/s10778/019/00955/1.
22. *Акуленко Л.Д., Гавриков А.А., Несеров С.В.* Собственные колебания трубопровода на упругом основании, транспортирующего жидкость // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 123–133.
23. *Худаяров Б.А., Комилова Х.М.* Численное моделирование колебаний вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих двухфазную среду в режиме пробкового течения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 61. С. 95–110. DOI: 10.17223/19988621/61/9.
24. *Гузь А.Н.* Распространение волн в цилиндрической оболочке с вязкой сжимаемой жидкостью // Прикл. мех. Киев, 1980. Т. 16. № 10. С. 10–20.
25. *Худойназаров Х.Х., Ялгашев Б.Ф.* О нестационарных задачах гидроупругости для цилиндрического слоя с вязкой сжимаемой жидкостью // Проблемы архитектуры и строительства. 2007. № 2. С. 119–125.
26. *Khudoynazarov K., Yalgashev B.F., Mavlonov T.* Mathematical modelling of torsional vibrations of the three-layer cylindrical viscoelastic shell // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 2021. V. 1030. 012098. DOI: 10.1088/1757-899X/1030/1/012098.
27. *Худойназаров Х.Х.* Нестационарное взаимодействие круговых цилиндрических оболочек и стержней с деформируемой средой. Ташкент: Изд-во им. Абу Али ибн Сино, 2003. 325 с.

28. Filippov I.G., Kudainazarov K. Refinement of equations describing longitudinal-radial vibrations of a circular cylindrical viscoelastic shell // Soviet Applied Mechanics. 1990/ V. 26(2). P. 161–168. DOI: 10.1007/bf00887110.
29. Filippov I.G., Kudainazarov K. Boundary-value problems of longitudinal vibrations of circular cylindrical shells // International Applied Mechanics. 1998. V. 34(12). P. 1204–1210. DOI: 10.1007/bf02700874.

Статья поступила 04.03.2020

Khudoynazarov Kh.Kh., Kholmuradov R.I., Yalgashev B.F. (2021) LONGITUDINAL-RADIAL VIBRATIONS OF THE ELASTIC CYLINDRICAL SHELL FILLED WITH A VISCOUS COMPRESSIBLE FLUID. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. pp. 139–154

DOI 10.17223/19988621/69/11

Keywords: cylindrical shell, viscous fluid, vibrations, refined equations, stresses, displacements.

In this paper, the longitudinal-radial vibrations of the elastic cylindrical shell filled with a viscous compressible fluid are studied using the mathematical model proposed. The general equations for the longitudinal-radial vibrations of the shell made of the homogeneous and isotropic material are derived. These equations can be used to obtain refined equations of vibrations. The proposed algorithm allows one to uniquely determine the stress-strain state of points in any section of the considered hydroelastic system using the field of the required functions in coordinates and time. The benchmark problem of harmonic oscillations in a cylindrical shell with a viscous fluid is solved. The dependences of the frequency on the wave number are obtained for various shell- fluid interaction cases.

*Khayrulla Kh. KHUDOYNAZAROV* (Doctor of Technical Sciences, Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan). E-mail: kh.khudoyn@gmail.com

*Rustam I. KHALMURADOV* (Doctor of Technical Sciences, Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan). E-mail: rustami@list.ru

*Burkhon F. YALGASHEV* (Candidate of Technical Sciences, Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan). E-mail: byalgashev@bk.ru

#### REFERENCES

1. Vlasov V.Z. (1949) *Obshchaya teoriya obolochek* [General theory of shells]. Moscow; Leningrad: GITTL.
2. Novozhilov V.V., Finkel'shtein R.M. (1943) O pogreshnosti gipotez Kirkhgofa v teorii obolochek [On the error of the Kirchhoff hypotheses in the theory of shells]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 7(5). pp. 331–340.
3. Mushtari Kh.M. (1947) Ob oblasti primenimosti priblizhennoy teorii obolochek Kirkhgofa–Lyava [On the scope of the approximate theory of shells of the Kirchhoff–Love]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 11(5). pp. 517–520.
4. Darevskiy V.M. (1961) Ob osnovnykh sootnosheniyakh teorii tonkikh obolochek [On the main relations in the theory of thin shells]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 3(25). pp. 519–535.
5. Nigul' U.K. (1964) *Asimptoticheskaya teoriya statiki i dinamiki uprugikh krugovykh tsilindricheskikh obolochek i analiz tochnosti razlichnykh variantov v teorii Kirkhgofa–Lyava* [Asymptotic theory of statics and dynamics of elastic circular cylindrical shells and the accuracy analysis for various options in the Kirchhoff–Love theory]. *Teoriya plastin i obolochek*. Yerevan. pp. 738–742.

6. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. (1973) *Neklassicheskie teorii kolebaniy sterzhney, plastin i obolochek* [Non-classical theories of oscillations of rods, plates, and shells]. Itogi nauki i tekhniki. Seriya Mekhanika tverdykh deformiruemykh tel. Volume 5. Moscow: VINITI.
7. Ambartsumyan S.A. (1954) K voprosu postroeniya priblizhennykh teoriy rascheta pologikh tsilindricheskikh obolochek [To the issue of developing approximate theories for calculating shallow cylindrical shells]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 18(3). pp. 303–312.
8. Yi-Yuan Yu. (1958) Vibrations of cylindrical shells analyzed by means of Donnell-type equations. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*. 11. pp. 699–715. DOI: 10.2514/8.7849.
9. Nigul' U.K. (1960) Lineynye uravneniya dinamiki uprugoy krugovoy tsilindricheskoj obolochki svobodnye ot gipotez [Linear equations for the dynamics of an elastic circular cylindrical shell free from hypotheses]. *Trudy Tallinskogo politekhnicheskogo instituta. Seriya A*. 7. pp. 67–76.
10. Petrashen' G.I. (1966) *Problemy inzhenernoy teorii kolebaniy vyrozhdennykh sistem* [Problems of the engineering theory of vibrations of degenerate systems]. Issledovaniya po uprugosti i plastichnosti. Leningrad: LSU Publishing House. 5. pp. 3–33.
11. Herrmann G., Mirsky I. (1956) Three-dimensional and shell theory analysis of axially symmetric motions of cylinders. *Journal of Applied Mechanics*. 23(4). pp. 563–568.
12. Khudoynazarov Kh.Kh., Yalgashev B.F. (2016) Osesimmetrichnye kolebaniya vyazkoupругogo tsilindricheskogo sloya, zapolnennogo vyazkoy szhimaemoy zhidkost'yu [Axisymmetric vibrations of a viscoelastic cylindrical layer filled with a viscous compressible fluid]. *Problemy arkhitektury i stroitel'stva – Problems of Architecture and Construction*. 1. pp. 119–125.
13. Filippov I.G., Kudainazarov K. (1990) General transverse vibrations equations for a circular cylindrical viscoelastic shell. *Soviet Applied Mechanics*. 26(4). pp. 351–357. DOI: 10.1007/bf00887127.
14. Khudoynazarov Kh., Khudoyberdiyev Z.B. (2020) Unsteady vibrations of a three-layer plate with an asymmetric structure. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 614(012061) DOI: 10.1088/1755-1315/614/1/012061.
15. Khudoynazarov Kh.Kh., Abdirashidov A., Burkutboev Sh.M. (2016) Modelirovanie krutil'nykh kolebaniy vyazkoupругogo sterzhnya, vrashchayushchegosya s postoyannoy uglovoy skorost'yu [Modeling of torsional vibrations of a viscoelastic round rod rotating at a constant angular velocity]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*. 9(1). pp. 38–51.
16. Khudoynazarov Kh., Yaxshiboyev Sh.R. (2020) The mathematical model of transverse vibrations of the three-layer plate. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 614(012062). DOI: 10.1088/1755-1315/614/1/012062.
17. Khudoynazarov Kh., Burkutboev Sh.M. (2017) Matematicheskaya model' krutil'nykh kolebaniy tsilindricheskogo sloya s uchetom protekayushchey zhidkosti i vrashcheniya [A mathematical model of torsional vibrations of a cylindrical layer with account for the flowing fluid and rotation]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*. 4. pp. 38–56.
18. Netrebko A.V., Pshenichnov S.G. (2015) Nekotorye zadachi dinamiki lineynovyazkoupругikh tsilindricheskikh obolochek konechnoy dliny [Some problems of dynamics of linearly viscoelastic cylindrical shells of finite length]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*. 77(1). pp. 57–61.
19. Khalmuradov R.I., Yalgashev B.F. (2020) Frequency analysis of longitudinal-radial vibrations of a cylindrical shell. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 614(012087). DOI: 10.1088/1755-1315/614/1/012087.
20. Bepalova E.I., Boreyko N.P. (2019) Opredelenie sobstvennykh chastot sostavnykh anizotropnykh obolocheknykh sistem s ispol'zovaniem razlichnykh modeley deformatsii [Determination of the natural frequencies of compound anisotropic shell systems using

- various deformation models]. *International Applied Mechanics*. 55. pp. 41–54. DOI: 10.1007/s10778/019/00932/8.
21. Kubenko V.D. (2019) Opredelenie dinamicheskikh kharakteristik vyazkoy zhidkosti v tsilindricheskoy polosti pod deystviem sfericheskogo izluchatelya [Determining the dynamic characteristics of viscous liquid in a cylindrical cavity acted upon by a spherical radiator]. *Mezhdunarodnyy zhurnal "Prikadnaya mekhanika" – International Applied Mechanics*. 55. pp. 296–304. DOI: 10.1007/s10778/019/00955/1.
  22. Akulenko L.D., Gavrikov A.A., Nesterov S.V. (2018) Sobstvennyye kolebaniya truboprovoda na uprugom osnovanii, transportiruyushchego zhidkost' [Natural vibrations of a liquid-transporting pipeline on an elastic base]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 53(1). pp. 101–110. DOI: 10.3103/S0025654418010120.
  23. Khudayarov B.A., Komilova Kh.M. (2019) Chislennoe modelirovanie kolebaniy vyazkoupругikh truboprovodov, transportiruyushchikh dvukhfaznuyu sredyu v rezhime probkovogo techeniya [Numerical simulation of vibrations of viscoelastic pipelines conveying two-phase medium in a slug flow regime]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 61. pp. 95–110. DOI: 10.17223/19988621/61/9.
  24. Guz' A.N. (1980) Rasprostranenie voln v tsilindricheskoy obolochke s vyazkoy szhimaemoy zhidkost'yu [Wave propagation in a cylindrical shell with a viscous compressible fluid]. *Prikadnaya mekhanika – International Applied Mechanics*. 16(10), pp. 10–20.
  25. Khudoynazarov Kh., Yalgashev B.F. (2007) O nestatsionarnykh zadachakh gidrouprugosti dlya tsilindricheskogo sloya s vyazkoy szhimaemoy zhidkost'yu [On non-stationary problems of hydroelasticity for a cylindrical layer with a viscous compressible fluid]. *Problemy arkhitektury i stroitel'stva – Problems of Architecture and Construction*. 2. pp. 119–125.
  26. Khudoynazarov K., Yalgashev B.F., Mavlonov T. (2021) Mathematical modelling of torsional vibrations of the three-layer cylindrical viscoelastic shell. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 1030(012098). DOI: 10.1088/1757-899X/1030/1/012098.
  27. Khudoynazarov Kh.Kh. (2003) Nestatsionarnoe vzaimodeystvie krugovykh tsilindricheskikh obolochek i sterzhney s deformiruemoy sredoy [Non-stationary interaction of circular cylindrical shells and rods with a deformable medium]. Tashkent: Publishing House Named after Abu Ali ibn Sino.
  28. Filippov I.G., Kudainazarov K. (1990) Refinement of equations describing longitudinal-radial vibrations of a circular cylindrical viscoelastic shell. *Soviet Applied Mechanics*. 26(2). pp. 161–168. DOI: 10.1007/bf00887110.
  29. Filippov I.G., Kudainazarov K. (1998) Boundary-value problems of longitudinal vibrations of circular cylindrical shells. *International Applied Mechanics*. 34(12). pp. 1204–1210. DOI: 10.1007/bf02700874.

Received: March 4, 2020