

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ КОДИРОВАНИЯ

УДК 519.725

ПИРАМИДАЛЬНАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ
ВЕЙВЛЕТ-КОДОВ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Д. В. Литичевский

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Конструктивным образом доказывается существование биортогонального разбиения векторного пространства V размерности n над полем $\text{GF}(q)$, а именно двух его представлений в виде прямых сумм подпространств $V = W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_J \oplus V_J$ и $V = \tilde{W}_0 \oplus \tilde{W}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{W}_J \oplus \tilde{V}_J$, таких, что на j -м уровне разложения ($0 < j \leq J$) $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$, $\tilde{V}_{j-1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j$, подпространство V_j ортогонально \tilde{W}_j , а подпространство W_j ортогонально V_j . Для этого используются пары биортогональных фильтров (h, g) и (\tilde{h}, \tilde{g}) . Разбиение пространства на j -м уровне разложения осуществляется при помощи пар уровневых фильтров (h^j, g^j) и $(\tilde{h}^j, \tilde{g}^j)$, для построения которых разработаны и теоретически обоснованы соответствующие алгоритмы. На основе многоуровневой схемы вейвлет-разложения строится новое семейство биортогональных вейвлет-кодов со скоростью кодирования 2^{-L} , где L — количество использованных уровней разложения, и приводятся примеры таких кодов.

Ключевые слова: дискретные биортогональные вейвлет-преобразования, мультиразрешения, вейвлет-коды.

DOI 10.17223/20710410/51/5

PYRAMID SCHEME FOR CONSTRUCTING BIORTHOGONAL
WAVELET CODES OVER FINITE FIELDS

D. V. Litichevskiy

*Chelyabinsk state university, Chelyabinsk, Russia***E-mail:** litichevskiydv@gmail.com

The existence of a biorthogonal decomposition of the space V of dimension n over the field $\text{GF}(q)$ is constructively proved, namely, two representations of it are obtained as direct sums of subspaces $V = W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_J \oplus V_J$ and $V = \tilde{W}_0 \oplus \tilde{W}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{W}_J \oplus \tilde{V}_J$, such that at the j -th level of the decomposition, for $0 < j \leq J$, $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$, $\tilde{V}_{j-1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j$, the subspace V_j is orthogonal to \tilde{W}_j , and the subspace W_j is orthogonal to V_j . The partition of the space at the j -th level is made with the help of pairs of level filters (h^j, g^j) and $(\tilde{h}^j, \tilde{g}^j)$, for the construction of which the corresponding algorithms have been developed and theoretically proved. A new family of biorthogonal wavelet codes is built on the basis of the multilevel wavelet decomposition scheme with coding rate 2^{-L} , where L is the number of used decomposition levels, and examples of such codes are given.

Keywords: discrete biorthogonal wavelet transforms, multiresolutions, wavelet codes.

Введение

В то время как теории непрерывных и дискретных вейвлет-преобразований над полями вещественных и комплексных чисел интенсивно разрабатываются в течение многих лет [1, 2] и широко применяются для анализа сигналов различной природы во многих областях науки, теории вейвлет-преобразований над конечными полями уделяется не слишком много внимания ввиду ограниченности возможностей её применения. Первое видение теории ортогональных вейвлет-преобразований над конечными полями представлено в [3], однако случай конечных полей характеристики два в данной работе считается исключительным и потому не рассмотрен. Дальнейшее развитие представленная теория получила в [4], где учитывается также и случай полей характеристики два. Однако, в отличие от [3], авторы [4] не строят описанную в [1] цепочку вложенных подпространств и ограничиваются лишь одним уровнем разложения.

Первые прикладные результаты использования построенной теории ортогональных вейвлет-преобразований над конечными полями представлены в [5, 6], где описан подход к построению кодов, корректирующих ошибки и названных ортогональными вейвлет-кодами. Этот подход базируется на одном уровне вейвлет-разложения и имеет ряд конструктивных особенностей, ограничивших впоследствии практическое применение ортогональных вейвлет-кодов. Кроме того, построение ортогональных вейвлет-преобразований над конечными полями является вычислительно сложной задачей, эффективное решение для её упрощенной версии было в дальнейшем представлено в [7].

Помимо ортогональных вейвлет-преобразований, в теории цифровой обработки сигналов существует более гибкая конструкция биортогональных вейвлет-преобразований, адаптация которой для случая конечных полей произведена в [8]. Термин «биортогональное вейвлет-преобразование» введён в [1], хотя и в [8], и в данной работе предлагается иная конструкция биортогональных вейвлетов. Отметим, что, так же как в [4], автор в [8] не строит цепочку вложенных подпространств, ограничиваясь одним уровнем вейвлет-разложения. Полученные результаты, тем не менее, позволили расширить класс вейвлет-кодов биортогональными вейвлет-кодами, схема помехоустойчивого кодирования которых изображена на рис. 1. Данная схема описывает код с длиной кодовых и информационных слов n и $n/2$, определённый над полем $\text{GF}(q)$, $q = p^m$, где p — простое число, m — натуральное. Основная идея, лежащая в её основе, заключается в том, что кодовое слово c восстанавливается по векторам вейвлет-коэффициентов a и d :

$$c = H^T a + G^T d,$$

которые, в свою очередь, получают из информационного слова v при помощи соотношений

$$a = v, \quad d = \lambda_1 P v.$$

Матрицы H , G , \tilde{H} , \tilde{G} являются 2-циркулянтными матрицами размера $n/2 \times n$, определяемыми как

$$\begin{aligned} H &= \text{cir}_2(h_0, h_1, \dots, h_{n-1}), & G &= \text{cir}_2(g_0, g_1, \dots, g_{n-1}), \\ \tilde{H} &= \text{cir}_2(\tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_{n-1}), & \tilde{G} &= \text{cir}_2(\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{n-1}). \end{aligned}$$

2-Циркулянтная матрица задаётся первой строкой, последующая строка получается из предыдущей циклическим сдвигом на две позиции вправо. Последовательности элементов поля $\text{GF}(q)$ длины n , $h = (h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$, $g = (g_0, g_1, \dots, g_{n-1})$ и $\tilde{h} = (\tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_{n-1})$, $\tilde{g} = (\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{n-1})$, далее именуемые фильтрами синтеза и

анализа соответственно, задают две масштабирующих последовательности и два вейвлета биортогонального вейвлет-преобразования. Матрица Π — циркулянтная матрица размера $n/2 \times n/2$, первая строка которой имеет вид $(0, 0, 0, \dots, 1)$. Условие биортогональности, которому должны удовлетворять фильтры анализа и синтеза, записанное с использованием введённых матриц, имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}H^T &= I_{n/2}, & \tilde{G}G^T &= I_{n/2}, \\ \tilde{H}G^T &= O_{n/2}, & \tilde{G}H^T &= O_{n/2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Условие точного восстановления записывается в виде

$$\begin{bmatrix} H^T & G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H} \\ \tilde{G} \end{bmatrix} = I_n. \quad (2)$$

Символами I и O обозначены единичная и нулевая матрицы соответственно, нижний индекс указывает их размерность. В [8] доказано, что фильтры анализа и синтеза удовлетворяют условию биортогональности (1) тогда и только тогда, когда они удовлетворяют условию точного восстановления (2).

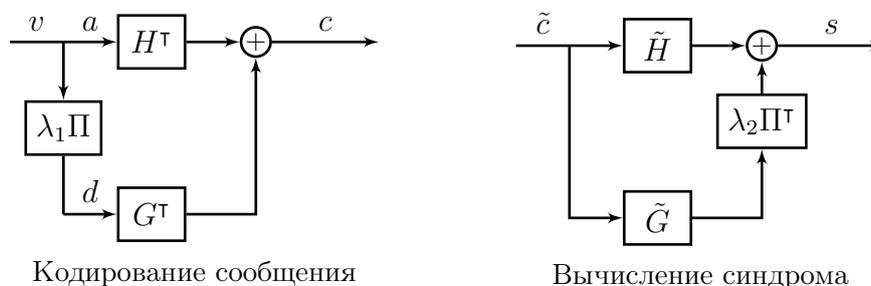


Рис. 1. Схема помехоустойчивого кодирования биортогональных вейвлет-кодов

Биортогональные вейвлет-коды, определяемые схемой помехоустойчивого кодирования на рис. 1, являются линейными кодами, порождающая и проверочная матрицы которых равны

$$H^T + \lambda_1 G^T \Pi \quad \text{и} \quad \tilde{H} + \lambda_2 \Pi^T \tilde{G}$$

соответственно, параметры λ_1 и λ_2 — элементы поля $\text{GF}(q)$, такие, что

$$\lambda_1 \lambda_2 = (p - 1) \bmod p.$$

Кодовое слово c получается из информационного слова v при помощи соотношения

$$c = (H^T + \lambda_1 G^T \Pi) v,$$

синдром s принятого зашумлённого кодового слова \tilde{c} находится как

$$s = (\tilde{H} + \lambda_2 \Pi^T \tilde{G}) \tilde{c}.$$

Согласно [9], описанные биортогональные вейвлет-коды относятся к подклассу квазициклических кодов с циклическим сдвигом кодовых слов на две позиции.

Дальнейшие исследования биортогональных вейвлет-кодов были связаны с изучением их отдельных подклассов, а именно представленных в [10–12] кодов с максимально возможным и заданным кодовым расстоянием, в которых также используется один уровень вейвлет-разложения. Целью данной работы является углубление теории биортогональных вейвлет-преобразований над конечными полями, а именно построение описанной в [1] цепочки вложенных подпространств и создание биортогональных вейвлет-кодов, использующих несколько уровней вейвлет-разложения.

1. Биортогональные вейвлет-преобразования над конечными полями

Через $V = (\text{GF}(q))^n$ обозначим векторное пространство размерности n над полем $\text{GF}(q)$. Тогда, согласно результатам [8], векторное пространство V представимо в виде прямой суммы подпространств

$$V = \tilde{V}_0 \oplus \tilde{W}_0 = V_0 \oplus W_0, \quad (3)$$

при этом базисы подпространств V_0, W_0 и \tilde{V}_0, \tilde{W}_0 образуют строки ранее упомянутых 2-циркулянтных матриц H, G и \tilde{H}, \tilde{G} соответственно, удовлетворяющих условию биортогональности (1). Согласно [1], для построения цепочки вложенных подпространств при использовании биортогональных вейвлет-преобразований для каждого допустимого значения j необходимо уметь строить представления

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad \text{и} \quad \tilde{V}_{j-1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j,$$

такие, что подпространство W_j ортогонально \tilde{V}_j , тогда как подпространство \tilde{W}_j ортогонально V_j .

В классической схеме биортогонального вейвлет-преобразования (рис. 2) векторы вейвлет-коэффициентов a^j и d^j вычисляются по a^{j-1} с помощью пары фильтров анализа \tilde{h} и \tilde{g} с последующей двоичной неполной выборкой (операция обозначена символом « $\downarrow 2$ »), вектор вейвлет-коэффициентов a^{j-1} восстанавливается при помощи пары фильтров синтеза h и g по векторам a^j и d^j , между компонентами которых подставлены нули (операция обозначена символом « $\uparrow 2$ »). Исходный сигнал имеет бесконечную длину, а его компоненты являются вещественными либо комплексными числами, поэтому для построения указанных представлений используются пары фильтров синтеза и анализа h, g и \tilde{h}, \tilde{g} соответственно. Однако в рассматриваемом случае исходный сигнал имеет конечную длину и состоит из элементов поля $\text{GF}(q)$, поэтому на каждом уровне разложения последовательности вейвлет-коэффициентов имеют половинную длину. Это означает, что на j -м уровне разложения необходимо использовать свои пары фильтров h^j, g^j и \tilde{h}^j, \tilde{g}^j длины $n_j = n/2^j$, удовлетворяющие условию биортогональности, $h^0 = h, g^0 = g$ и $\tilde{h}^0 = \tilde{h}, \tilde{g}^0 = \tilde{g}$.

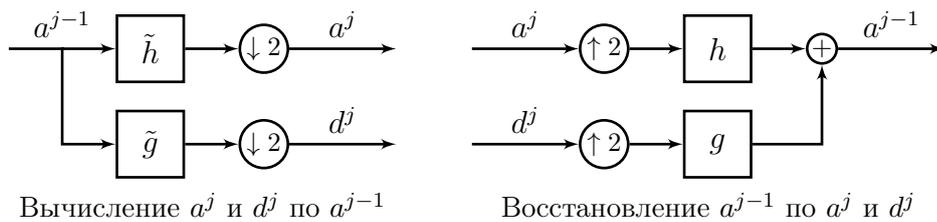


Рис. 2. Схема быстрого биортогонального вейвлет-преобразования

Для того чтобы описать процедуры вычисления вейвлет-коэффициентов и восстановления сигнала на j -м уровне вейвлет-разложения, парам фильтров h^j, g^j и \tilde{h}^j, \tilde{g}^j поставим в соответствие 2-циркулянтные матрицы H_j, G_j и \tilde{H}_j, \tilde{G}_j размера $n_j/2 \times n_j$, являющиеся аналогами матриц H, G и \tilde{H}, \tilde{G} для j -го уровня разложения. Тогда векторы вейвлет-коэффициентов a^j и d^j вычисляются по a^{j-1} при помощи соотношений

$$a^j = \tilde{H}_j a^{j-1}, \quad d^j = \tilde{G}_j a^{j-1}, \quad (4)$$

вектор вейвлет-коэффициентов a^{j-1} восстанавливается по a^j и d^j по формуле

$$a^{j-1} = H_j^T a^j + G_j^T d^j. \quad (5)$$

Записанное с использованием введённых матриц условие биортогональности для пар фильтров h^j, g^j и \tilde{h}^j, \tilde{g}^j имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}_j H_j^T &= I_{n_j/2}, & \tilde{G}_j G_j^T &= I_{n_j/2}, \\ \tilde{H}_j G_j^T &= O_{n_j/2}, & \tilde{G}_j H_j^T &= O_{n_j/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Условие точного восстановления для j -го уровня разложения записывается как

$$\begin{bmatrix} H_j^T & G_j^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}_j \\ \tilde{G}_j \end{bmatrix} = I_{n_j}. \quad (7)$$

Воспользовавшись результатами работы [8], получаем, что фильтры анализа и синтеза для j -го уровня вейвлет-разложения удовлетворяют условию биортогональности (6) тогда и только тогда, когда они удовлетворяют условию точного восстановления (7). Стоит также отметить, что из условия (7) следует обратимость матриц

$$\begin{bmatrix} H_j^T & G_j^T \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \tilde{H}_j \\ \tilde{G}_j \end{bmatrix},$$

из чего, в свою очередь, следует линейная независимость их столбцов и строк соответственно, а также то, что ранг матриц H_j, G_j и \tilde{H}_j, \tilde{G}_j равен $n_j/2$.

Лемма 1. При помощи пар фильтров анализа и синтеза для уровней вейвлет-разложения с 0 по j , удовлетворяющих условию биортогональности (6), могут быть построены представления подпространств V_{j-1} и \tilde{V}_{j-1} размерности n_j в виде прямой суммы подпространств V_j, W_j и \tilde{V}_j, \tilde{W}_j соответственно размерности $n_j/2$, таких, что подпространство W_j ортогонально \tilde{V}_j , подпространство \tilde{W}_j ортогонально V_j , кроме того, $V_j \subset V_{j-1}$ и $\tilde{V}_j \subset \tilde{V}_{j-1}$.

Доказательство. Из (5) получаем, что вектор $v \in V$ представим в виде

$$v = H_0^T a^0 + G_0^T d^0 = v^0 + w^0,$$

где $v^0 \in V_0, w^0 \in W_0$. Ещё раз воспользовавшись соотношением (5), заменим в этом выражении вектор a^0 на его представление через векторы a^1 и d^1 :

$$\begin{aligned} v &= H_0^T a^0 + G_0^T d^0 = H_0^T (H_1^T a^1 + G_1^T d^1) + G_0^T d^0 = H_0^T \cdot H_1^T a^1 + H_0^T \cdot G_1^T d^1 + G_0^T d^0 = \\ &= v^1 + w^1 + w^0, \end{aligned}$$

где $v^1 \in V_1, w^1 \in W_1$. Применив аналогичную процедуру к векторам вейвлет-коэффициентов a^1, \dots, a^{j-1} , получим соотношение

$$v = H_0^T \cdot \dots \cdot H_j^T a^j + H_0^T \cdot \dots \cdot H_{j-1}^T \cdot G_j^T d^j + \dots + G_0^T d^0 = v^j + w^j + \dots + v^0,$$

где $v^j \in V_j, w^j \in W_j$. Примем, что базисами V_j и W_j являются строки матриц $H_j \cdot \dots \cdot H_0$ и $G_j \cdot H_{j-1} \cdot \dots \cdot H_0$ соответственно размера $n_j/2 \times n$.

Из соотношений (4) для векторов вейвлет-коэффициентов a^j, \dots, a^0 и d^j, \dots, d^0 получаем, что

$$a^j = \tilde{H}_j \cdot \dots \cdot \tilde{H}_0 v, \quad d^j = \tilde{G}_j \cdot \tilde{H}_{j-1} \cdot \dots \cdot \tilde{H}_0 v.$$

Примем, что базисами \tilde{V}_j и \tilde{W}_j являются строки матриц $\tilde{H}_j \cdot \dots \cdot \tilde{H}_0$ и $\tilde{G}_j \cdot \tilde{H}_{j-1} \cdot \dots \cdot \tilde{H}_0$ соответственно размера $n_j/2 \times n$.

Ранги матриц H_j, H_{j-1}, \dots, H_0 равны $n_j/2, n_j, \dots, n$ соответственно, все строки каждой из них линейно независимы, следовательно, все строки матрицы $H_j \cdot \dots \cdot H_0$ также линейно независимы, а это значит, что её строки могут являться базисом подпространства V_j . Схожие утверждения для матриц $G_j \cdot H_{j-1} \cdot \dots \cdot H_0, \tilde{H}_j \cdot \dots \cdot \tilde{H}_0$ и $\tilde{G}_j \cdot \tilde{H}_{j-1} \cdot \dots \cdot \tilde{H}_0$ доказываются аналогичным образом.

В силу того, что столбцы матрицы $\begin{bmatrix} H_j^T & G_j^T \end{bmatrix}$ линейно независимы, строки матрицы

$$\begin{bmatrix} H_j \\ G_j \end{bmatrix} \cdot H_{j-1} \cdot \dots \cdot H_0$$

также линейно независимы. Поскольку базисами подпространств V_j и W_j являются строки матриц $H_j \cdot \dots \cdot H_0$ и $G_j \cdot H_{j-1} \cdot \dots \cdot H_0$ соответственно, их пересечение — нулевое подпространство, что означает, что $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$. Поскольку базисные векторы подпространства V_j суть невырожденные линейные комбинации базисных векторов подпространства V_{j-1} , то $V_j \subset V_{j-1}$. Схожие утверждения для подпространств $\tilde{V}_{j-1}, \tilde{V}_j$ и \tilde{W}_j доказываются аналогично.

Без ограничения общности докажем ортогональность подпространств V_j и \tilde{W}_j , ортогональность подпространств \tilde{V}_j и W_j доказывается аналогично. Рассмотрим скалярное произведение произвольных векторов $v^j \in V_j, \tilde{w}^j \in \tilde{W}_j$ и покажем, что оно равно нулю. Согласно выбору базиса подпространств V_j и \tilde{W}_j , векторы v^j и \tilde{w}^j представимы в виде

$$v^j = H_0^T \cdot \dots \cdot H_j^T x, \quad \tilde{w}^j = \tilde{H}_0^T \cdot \dots \cdot \tilde{H}_{j-1}^T \cdot \tilde{G}_j^T y,$$

где x и y — векторы длины $n_j/2$, состоящие из элементов поля $\text{GF}(q)$. Тогда

$$\langle \tilde{w}^j, v^j \rangle = \left\langle \tilde{H}_0^T \cdot \dots \cdot \tilde{H}_{j-1}^T \cdot \tilde{G}_j^T y, H_0^T \cdot \dots \cdot H_j^T x \right\rangle = y^T \tilde{G}_j \cdot \tilde{H}_{j-1} \cdot \dots \cdot \tilde{H}_0 \cdot H_0^T \cdot \dots \cdot H_j^T x = 0$$

в силу того, что пары фильтров анализа и синтеза каждого из уровней разложения удовлетворяют условию биортогональности (6). ■

Не освещённым остался единственный вопрос, а именно: какое количество уровней вейвлет-разложения может быть построено или, другими словами, каков диапазон допустимых значений для параметра j . Согласно (3), разложение начинается с нулевого шага, поэтому наименьшим значением для j является 0. С другой стороны, длина последовательностей вейвлет-коэффициентов на j -м шаге разложения равна $n_j/2$, поэтому максимально возможное значение j должно быть таким, что 2^{j+1} делит n , обозначим это значение через J . Таким образом, номер уровня разложения j удовлетворяет условию

$$0 \leq j \leq J. \quad (8)$$

На основании сказанного приходим к следующему утверждению.

Теорема 1 (о биортогональном разбиении векторного пространства).

Существуют представления векторного пространства V

$$\begin{aligned} V &= W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_J \oplus V_J, \\ V &= \tilde{W}_0 \oplus \tilde{W}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{W}_J \oplus \tilde{V}_J, \end{aligned}$$

такие, что для каждого j , удовлетворяющего условию (8), подпространство V_j ортогонально \tilde{W}_j , а подпространство W_j ортогонально \tilde{V}_j .

Доказательство. Имея для каждого уровня вейвлет-разложения от 0 до J пары фильтров анализа и синтеза, удовлетворяющие условию биортогональности (6), и применяя на каждом из уровней лемму 1, в явном виде строим представления, описанные в условии теоремы. ■

Таким образом, задача построения цепочки вложенных подпространств сводится к задаче построения фильтров h^j , g^j и \tilde{h}^j , \tilde{g}^j j -го уровня вейвлет-разложения, для решения которой автором разработаны два подхода. В первом из них фильтр h^j выбирается заново для каждого уровня разложения, а фильтры g^j , \tilde{h}^j , \tilde{g}^j достраиваются по нему при помощи методики, описанной в [10]. Второй подход основывается на использовании модифицированной версии алгоритма построения фильтров j -го уровня разложения, представленного в [3] для ортогональных вейвлет-преобразований. Суть модификации заключается в отказе от использования преобразования Фурье. Доказана корректность проделанной модификации, а также применимость модифицированного алгоритма для построения фильтров j -го уровня разложения биортогональных вейвлет-преобразований. Далее оба подхода рассмотрены более подробно.

2. Построение уровневых фильтров при помощи алгоритма Евклида

Пусть j удовлетворяет условию (8). Поставим уровневым фильтрам h^j , g^j и \tilde{h}^j , \tilde{g}^j длины n_j в соответствие многочлены

$$\begin{aligned} h^j(x) &= \sum_{i=0}^{n_j-1} h_i^j x^i, & g^j(x) &= \sum_{i=0}^{n_j-1} g_i^j x^i, \\ \tilde{h}^j(x) &= \sum_{i=0}^{n_j-1} \tilde{h}_i^j x^i, & \tilde{g}^j(x) &= \sum_{i=0}^{n_j-1} \tilde{g}_i^j x^i, \end{aligned}$$

степени которых не превосходят $n_j - 1$, и представим эти многочлены в виде суммы полифазных компонент. Многочлены $h_e^j(x) = \sum_{k=0}^{n_j/2-1} h_{2k}^j x^k$ и $h_o^j(x) = \sum_{k=0}^{n_j/2-1} h_{2k+1}^j x^k$ называются полифазными компонентами многочлена $h^j(x)$ и содержат только его чётные и нечётные компоненты соответственно. Тогда многочлен $h^j(x)$ представим в виде суммы полифазных компонент $h_e^j(x)$ и $h_o^j(x)$:

$$h^j(x) = h_e^j(x^2) + x h_o^j(x^2).$$

Аналогичное представление существует и для многочленов $g^j(x)$, $\tilde{h}^j(x)$, $\tilde{g}^j(x)$. Степени полифазных компонент не превосходят $n_j/2 - 1$, и в дальнейшем эти компоненты рассматриваются как элементы кольца многочленов $\text{GF}(q)[x]/(x^{n_j/2} - 1)$.

По аналогии с [8], при помощи полифазных компонент для пар фильтров h^j , g^j и \tilde{h}^j , \tilde{g}^j введём полифазные матрицы

$$P_j(x) = \begin{bmatrix} h_e^j(x) & g_e^j(x) \\ h_o^j(x) & g_o^j(x) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{P}_j(x) = \begin{bmatrix} \tilde{h}_e^j(x) & \tilde{g}_e^j(x) \\ \tilde{h}_o^j(x) & \tilde{g}_o^j(x) \end{bmatrix}.$$

Как уже было отмечено, пары фильтров h^j , g^j и \tilde{h}^j , \tilde{g}^j должны удовлетворять условию биортогональности (6), которое эквивалентно условию точного восстановления (7). Для полифазных матриц, согласно [8], условие точного восстановления (7) переписывается в виде

$$P_j(x) \tilde{P}_j^T(x^{n_j/2-1}) = I_2. \quad (9)$$

На основании результатов работы [10], пара фильтров \tilde{h}^j, \tilde{g}^j может быть построена по паре h^j, g^j при помощи соотношений

$$\tilde{h}^j(x) = -xg(-x^{n_j-1}), \quad \tilde{g}^j(x) = xh(-x^{n_j-1}). \quad (10)$$

Таким образом, задача построения уровневых фильтров h^j, g^j и \tilde{h}^j, \tilde{g}^j сводится к задаче построения пары фильтров h^j, g^j , которая решается при помощи алгоритма построения комплементарных фильтров над конечными полями [10]. Пара фильтров называется комплементарной, если определитель соответствующей им полифазной матрицы равен единице. Согласно [10], полифазные компоненты $h_e^j(x)$ и $h_o^j(x)$ многочлена $h^j(x)$ при помощи алгоритма Евклида нахождения НОД из [13] представимы в виде

$$\begin{bmatrix} h_e^j(x) \\ h_o^j(x) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{L_j} \begin{bmatrix} q_i^j(x) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_j \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где $q_i^j(x)$, $i = 1, \dots, L_j$, — неполные частные; K_j — наибольший общий делитель многочленов $h_e^j(x)$ и $h_o^j(x)$. Заметим, что в силу специфики определения операции деления в кольце $\text{GF}(q)[x]/(x^{n_j/2} - 1)$ ответ, возвращаемый алгоритмом, не является единственно возможным. Таким образом, если K_j является обратимым в $\text{GF}(q)[x]/(x^{n_j/2} - 1)$, то при помощи полученного представления для фильтра h^j всегда может быть построен комплементарный ему фильтр g^j , причём их полифазная матрица $P_j(x)$ определяется как

$$P_j(x) = \begin{bmatrix} h_e^j(x) & g_e^j(x) \\ h_o^j(x) & g_o^j(x) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{L_j} \begin{bmatrix} q_i^j(x) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_j & 0 \\ 0 & (-1)^{L_j}(1/K_j) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где (-1) — элемент, обратный 1 по сложению в поле $\text{GF}(q)$; $(1/K_j)$ — элемент, обратный K_j по умножению в кольце $\text{GF}(q)[x]/(x^{n_j/2} - 1)$. Стоит отметить, что фильтр g^j , комплементарный фильтру h^j , определяется не однозначно. В самом деле, пусть $s^j(x) \in \text{GF}(q)[x]/(x^{n_j/2} - 1)$ — некоторый многочлен, тогда фильтр g_s^j , которому соответствует многочлен $g_s^j(x) = g^j(x) + h^j(x)s^j(x^2) \bmod (x^{n_j} - 1)$, также комплементарен фильтру h^j .

Таким образом, алгоритм, позволяющий генерировать пары уровневых фильтров h^j, g^j и \tilde{h}^j, \tilde{g}^j длины n_j , состоит из следующих шагов:

- 1) в качестве фильтра h^j выбрать последовательность произвольных элементов поля $\text{GF}(q)$ длины n_j , такую, что наибольший общий делитель полифазных компонент $h_e^j(x)$ и $h_o^j(x)$ многочлена $h^j(x)$ является одночленом;
- 2) при помощи полученного алгоритмом Евклида представления (11), воспользовавшись соотношением (12), построить фильтр g^j , комплементарный h^j ;
- 3) при помощи соотношений (10) построить пару фильтров \tilde{h}^j, \tilde{g}^j .

3. Построение уровневых фильтров при помощи модифицированного алгоритма Кайре — Гроссмана — Пура

Обратимся к описанию второго подхода к построению уровневых фильтров, который, в отличие от первого, для построения пар фильтров h^j, g^j и \tilde{h}^j, \tilde{g}^j использует исходные фильтры h, g и \tilde{h}, \tilde{g} и основан на модифицированной версии алгоритма [3]. Пусть j удовлетворяет условию (8), проиллюстрируем шаги исходного алгоритма Кайре — Гроссмана — Пура на примере построения фильтра h^j с длиной n_j :

- 1) построить поле $\text{GF}(q^r)$, такое, что оно содержит элемент α_0 порядка $n/2$;

- 2) для полифазных компонент $h_e(x)$ и $h_o(x)$ фильтра h вычислить последовательности значений

$$\left\{ h_e \left(\alpha_0^{\frac{n}{n_j} i} \right) \right\}_{i=0}^{n_j/2-1} \quad \text{и} \quad \left\{ h_o \left(\alpha_0^{\frac{n}{n_j} i} \right) \right\}_{i=0}^{n_j/2-1}; \quad (13)$$

- 3) применить обратное преобразование Фурье к полученным последовательностям и с его помощью вычислить полифазные компоненты $h_e^j(x)$ и $h_o^j(x)$ фильтра h^j ;
 4) восстановить фильтр h^j по его полифазным компонентам $h_e^j(x)$ и $h_o^j(x)$.

Несмотря на простоту шагов, применимость данного алгоритма ограничена, так как используемое в нём преобразование Фурье не существует для исходных фильтров произвольной длины n , поэтому основная цель проделанных модификаций заключается в отказе от преобразования Фурье.

Рассмотрим сумму $\sum_{k=0}^{n/2-1} a_k \alpha_0^{\frac{n}{n_j} ik}$, где a_k , $k = 0, \dots, n/2 - 1$, — элементы расширения поля $\text{GF}(q)$, в котором находится α_0 . С учётом того, что элемент α_0^{n/n_j} имеет порядок $n_j/2$, в последовательности значений

$$\left\{ \alpha_0^{\frac{n}{n_j} ik} \right\}_{k=0}^{n/2-1}$$

можно выделить повторяющиеся участки длиной $n_j/2$, что позволяет представить исходную сумму в виде двух сумм:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n/2-1} a_k \alpha_0^{\frac{n}{n_j} ik} &= \sum_{k=0}^{n/2-1} a_k \left(\alpha_0^{\frac{n}{n_j} k} \right)^i = a_0 \left(\alpha_0^{\frac{n}{n_j} 0} \right)^i + \dots + a_{n_j/2-1} \left(\alpha_0^{\frac{n}{n_j} (n_j/2-1)} \right)^i + \\ &+ a_{n_j/2} \left(\alpha_0^{\frac{n}{n_j} n_j/2} \right)^i + \dots + a_{2n_j/2-1} \left(\alpha_0^{\frac{n}{n_j} (2n_j/2-1)} \right)^i + \dots + \\ &+ a_{n/2-n_j/2} \left(\alpha_0^{\frac{n}{n_j} (n/2-n_j/2)} \right)^i + \dots + a_{n/2-1} \left(\alpha_0^{\frac{n}{n_j} (n/2-1)} \right)^i = \\ &= a_0 \left(\alpha_0^{\frac{n}{n_j} 0} \right)^i + \dots + a_{n_j/2-1} \left(\alpha_0^{\frac{n}{n_j} (n_j/2-1)} \right)^i + \\ &+ a_{n_j/2} \left(\alpha_0^{\frac{n}{n_j} 0} \right)^i + \dots + a_{2n_j/2-1} \left(\alpha_0^{\frac{n}{n_j} (n_j/2-1)} \right)^i + \dots + \\ &+ a_{n/2-n_j/2} \left(\alpha_0^{\frac{n}{n_j} 0} \right)^i + \dots + a_{n/2-1} \left(\alpha_0^{\frac{n}{n_j} (n_j/2-1)} \right)^i = \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} \alpha_0^{\frac{n}{n_j} ik_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} a_{(n_j/2)k_2+k_1}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись результатами выкладок, получаем, что последовательности значений (13) могут быть записаны как

$$\left\{ \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} \alpha_0^{\frac{n}{n_j} ik_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{e,(n_j/2)k_2+k_1} \right\}_{i=0}^{n_j/2-1} \quad \text{и} \quad \left\{ \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} \alpha_0^{\frac{n}{n_j} ik_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{o,(n_j/2)k_2+k_1} \right\}_{i=0}^{n_j/2-1}$$

и являются спектрами многочленов

$$\sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{e,(n_j/2)k_2+k_1} \quad \text{и} \quad \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{o,(n_j/2)k_2+k_1}$$

соответственно, степени которых не превосходят $n_j/2 - 1$; через $h_{e,k}$ и $h_{o,k}$ обозначены коэффициенты многочленов $h_e(x)$ и $h_o(x)$ при степени k . Это означает, что многочлены $h_e^j(x)$ и $h_o^j(x)$, соответствующие спектрам (13), могут быть получены в виде

$$\begin{aligned} h_e^j(x) &= \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{e,(n_j/2)k_2+k_1} = \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{2((n_j/2)k_2+k_1)}, \\ h_o^j(x) &= \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{o,(n_j/2)k_2+k_1} = \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{2((n_j/2)k_2+k_1)+1}. \end{aligned}$$

Восстановим многочлен $h^j(x)$ по его полифазным компонентам $h_e^j(x)$ и $h_o^j(x)$:

$$h^j(x) = \sum_{k_1=0}^{n_j-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{n_j k_2+k_1}. \quad (14)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} h^j(x) &= h_e^j(x^2) + x h_o^j(x^2) = \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{2k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{2((n_j/2)k_2+k_1)} + \\ &+ x \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{2k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{2((n_j/2)k_2+k_1)+1} = \\ &= \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{2k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{n_j k_2+2k_1} + \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{2k_1+1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{n_j k_2+2k_1+1} = \sum_{k_1=0}^{n_j-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{n_j k_2+k_1}. \end{aligned}$$

Построение уровневых фильтров g^j , \tilde{h}^j , \tilde{g}^j описывается аналогичными соотношениями. Отметим, что в (14) для построения уровневого фильтра h^j используется фильтр h , однако его можно переписать таким образом, чтобы для построения h^j использовался фильтр h^{j-1} :

$$h^j(x) = \sum_{k=0}^{n_j-1} \left(h_k^{j-1} + h_{n_j+k}^{j-1} \right) x^k. \quad (15)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n_j-1} \left(h_k^{j-1} + h_{n_j+k}^{j-1} \right) x^k = \sum_{k_1=0}^{n_j-1} x^{k_1} \left(h_{k_1}^{j-1} + h_{n_j+k_1}^{j-1} \right) = \\ &= \sum_{k_1=0}^{n_j-1} x^{k_1} \left(\sum_{k_2=0}^{(n/n_j)-1} h_{n_{j-1}k_2+k_1} + \sum_{k_2=0}^{(n/n_j)-1} h_{n_{j-1}k_2+n_j+k_1} \right) = \\ &= \sum_{k_1=0}^{n_j-1} x^{k_1} \left(\sum_{k_2=0}^{(n/(2n_j))-1} h_{2n_j k_2+k_1} + \sum_{k_2=0}^{(n/(2n_j))-1} h_{2n_j k_2+n_j+k_1} \right) = \\ &= \sum_{k_1=0}^{n_j-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{(n/(2n_j))-1} \left(h_{2n_j k_2+k_1} + h_{n_j(2k_2+1)+k_1} \right) = \sum_{k_1=0}^{n_j-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{n_j k_2+k_1}. \end{aligned}$$

Докажем две леммы, обосновывающих корректность использования описанного подхода для построения уровневых фильтров биортогонального вейвлет-преобразования.

Лемма 2. Если пары фильтров h^{j-1} , g^{j-1} и \tilde{h}^{j-1} , \tilde{g}^{j-1} являются комплементарными, то полученные из них при помощи соотношения (15) пары h^j , g^j и \tilde{h}^j , \tilde{g}^j также являются комплементарными.

Доказательство. Без ограничения общности докажем утверждение только для пары фильтров h^j, g^j , доказательство для пары \tilde{h}^j, \tilde{g}^j аналогично. В связи с использованием соотношения (15) представим полифазные компоненты фильтров h^{j-1}, g^{j-1} в виде

$$\begin{aligned} h_e^{j-1}(x) &= h_{e,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2} h_{e,1}^{j-1}(x), & h_o^{j-1}(x) &= h_{o,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2} h_{o,1}^{j-1}(x), \\ g_e^{j-1}(x) &= g_{e,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2} g_{e,1}^{j-1}(x), & g_o^{j-1}(x) &= g_{o,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2} g_{o,1}^{j-1}(x). \end{aligned} \quad (16)$$

По условию фильтры h^{j-1} и g^{j-1} являются комплементарными, поэтому, с учётом введённых обозначений, условие комплементарности для них запишется как

$$\begin{aligned} \det P_{j-1}(x) &= h_e^{j-1}(x) g_o^{j-1}(x) - h_o^{j-1}(x) g_e^{j-1}(x) = \\ &= (h_{e,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2} h_{e,1}^{j-1}(x)) (g_{o,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2} g_{o,1}^{j-1}(x)) - \\ &\quad - (h_{o,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2} h_{o,1}^{j-1}(x)) (g_{e,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2} g_{e,1}^{j-1}(x)) = \\ &= (h_{e,0}^{j-1}(x) g_{o,0}^{j-1}(x) - h_{o,0}^{j-1}(x) g_{e,0}^{j-1}(x)) + x^{n_j/2} (h_{e,1}^{j-1}(x) g_{o,0}^{j-1}(x) + h_{e,0}^{j-1}(x) g_{o,1}^{j-1}(x) - \\ &\quad - h_{o,1}^{j-1}(x) g_{e,0}^{j-1}(x) - h_{o,0}^{j-1}(x) g_{e,1}^{j-1}(x)) + x^{n_j} (h_{e,1}^{j-1}(x) g_{o,1}^{j-1}(x) - h_{o,1}^{j-1}(x) g_{e,1}^{j-1}(x)) = \\ &= (h_{e,0}^{j-1}(x) g_{o,0}^{j-1}(x) + h_{e,1}^{j-1}(x) g_{o,1}^{j-1}(x) - h_{o,0}^{j-1}(x) g_{e,0}^{j-1}(x) - h_{o,1}^{j-1}(x) g_{e,1}^{j-1}(x)) + \\ &\quad + x^{n_j/2} (h_{e,1}^{j-1}(x) g_{o,0}^{j-1}(x) + h_{e,0}^{j-1}(x) g_{o,1}^{j-1}(x) - h_{o,1}^{j-1}(x) g_{e,0}^{j-1}(x) - \\ &\quad - h_{o,0}^{j-1}(x) g_{e,1}^{j-1}(x)) \bmod (x^{n_j} - 1) = p_0(x) + x^{n_j/2} p_1(x) \bmod (x^{n_j} - 1) = 1 \bmod (x^{n_j} - 1). \end{aligned}$$

Теперь проверим выполнимость условия комплементарности для пары фильтров h^j, g^j :

$$\begin{aligned} \det P_j(x) &= h_e^j(x) g_o^j(x) - h_o^j(x) g_e^j(x) = \\ &= (h_{e,0}^{j-1}(x) + h_{e,1}^{j-1}(x)) (g_{o,0}^{j-1}(x) + g_{o,1}^{j-1}(x)) - (h_{o,0}^{j-1}(x) + h_{o,1}^{j-1}(x)) (g_{e,0}^{j-1}(x) + g_{e,1}^{j-1}(x)) = \\ &= p_0(x) + p_1(x) = p_0(x) + x^{n_j/2} p_1(x) \bmod (x^{n_j/2} - 1) = 1 \bmod (x^{n_j/2} - 1). \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана. ■

Замечание 1. Пары фильтров h^j, g^j и \tilde{h}^j, \tilde{g}^j , полученные из комплементарных пар h, g и \tilde{h}, \tilde{g} соответственно при помощи соотношения (14), являются комплементарными для любого j , удовлетворяющего условию (8).

Лемма 3. Если пары фильтров h^{j-1}, g^{j-1} и $\tilde{h}^{j-1}, \tilde{g}^{j-1}$ удовлетворяют условию точного восстановления (9), то полученные из них при помощи соотношения (15) пары h^j, g^j и \tilde{h}^j, \tilde{g}^j также ему удовлетворяют.

Доказательство. Пары фильтров h^{j-1}, g^{j-1} и $\tilde{h}^{j-1}, \tilde{g}^{j-1}$, по условию леммы, удовлетворяют условию точного восстановления, которое для них записывается в виде

$$\begin{aligned} P_{j-1}(x) \tilde{P}_{j-1}^T(x^{(n_{j-1}/2)-1}) &= \begin{bmatrix} h_e^{j-1}(x) & g_e^{j-1}(x) \\ h_o^{j-1}(x) & g_o^{j-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) & \tilde{h}_o^{j-1}(x^{n_j-1}) \\ \tilde{g}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) & \tilde{g}_o^{j-1}(x^{n_j-1}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} h_e^{j-1}(x) \tilde{h}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) + g_e^{j-1}(x) \tilde{g}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) & h_e^{j-1}(x) \tilde{h}_o^{j-1}(x^{n_j-1}) + g_e^{j-1}(x) \tilde{g}_o^{j-1}(x^{n_j-1}) \\ h_o^{j-1}(x) \tilde{h}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) + g_o^{j-1}(x) \tilde{g}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) & h_o^{j-1}(x) \tilde{h}_o^{j-1}(x^{n_j-1}) + g_o^{j-1}(x) \tilde{g}_o^{j-1}(x^{n_j-1}) \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Выполнимость условия точного восстановления для пар фильтров h^j, g^j и \tilde{h}^j, \tilde{g}^j , в свою очередь, означает выполнимость равенства

$$\begin{aligned} P_j(x) \tilde{P}_j^T(x^{(n_j/2)-1}) &= \begin{bmatrix} h_e^j(x) & g_e^j(x) \\ h_o^j(x) & g_o^j(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) & \tilde{h}_o^j(x^{(n_j/2)-1}) \\ \tilde{g}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) & \tilde{g}_o^j(x^{(n_j/2)-1}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} h_e^j(x) \tilde{h}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) + g_e^j(x) \tilde{g}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) & h_e^j(x) \tilde{h}_o^j(x^{(n_j/2)-1}) + g_e^j(x) \tilde{g}_o^j(x^{(n_j/2)-1}) \\ h_o^j(x) \tilde{h}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) + g_o^j(x) \tilde{g}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) & h_o^j(x) \tilde{h}_o^j(x^{(n_j/2)-1}) + g_o^j(x) \tilde{g}_o^j(x^{(n_j/2)-1}) \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Без ограничения общности докажем, что из условия

$$h_e^{j-1}(x)\tilde{h}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) + g_e^{j-1}(x)\tilde{g}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) = 1 \pmod{(x^{n_j} - 1)}$$

следует равенство

$$h_e^j(x)\tilde{h}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) + g_e^j(x)\tilde{g}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) = 1 \pmod{(x^{n_j/2} - 1)},$$

три аналогичных утверждения доказываются схожим образом.

По аналогии с (16), представим полифазные компоненты $\tilde{h}_e^{j-1}(x)$ и $\tilde{g}_e^{j-1}(x)$ в виде

$$\tilde{h}_e^{j-1}(x) = \tilde{h}_{e,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2}\tilde{h}_{e,1}^{j-1}(x), \quad \tilde{g}_e^{j-1}(x) = \tilde{g}_{e,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2}\tilde{g}_{e,1}^{j-1}(x).$$

Рассмотрим многочлен $a(x) = \sum_{k=0}^{n_j-1} a_k x^k$ степени $n_j - 1$ над полем $\text{GF}(q)$, представимый

как $a(x) = a_0(x) + x^{n_j/2}a_1(x)$, где $a_0(x) = \sum_{k=0}^{(n_j/2)-1} a_k x^k$ и $a_1(x) = \sum_{k=0}^{(n_j/2)-1} a_{(n_j/2)+k} x^k$ — многочлены над полем $\text{GF}(q)$, степени которых не превосходят $n_j/2 - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} a_0(x^{(n_j/2)-1}) \pmod{(x^{n_j/2} - 1)} &= a_0 + \sum_{k=1}^{(n_j/2)-1} a_k x^{(n_j/2)(k-1) + (n_j/2) - k} \pmod{(x^{n_j/2} - 1)} = \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{(n_j/2)-1} a_k x^{(n_j/2) - k} = a_0 + a_{0,1}^*(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1(x^{(n_j/2)-1}) \pmod{(x^{n_j/2} - 1)} &= a_{n_j/2} + \sum_{k=1}^{(n_j/2)-1} a_{n_j/2+k} x^{(n_j/2)(k-1) + (n_j/2) - k} \pmod{(x^{n_j/2} - 1)} = \\ &= a_{n_j/2} + \sum_{k=1}^{(n_j/2)-1} a_{n_j/2+k} x^{(n_j/2) - k} = a_{n_j/2} + a_{1,1}^*(x), \end{aligned}$$

где $a_{0,1}^*(x)$ и $a_{1,1}^*(x)$ — многочлены над полем $\text{GF}(q)$, свободный член которых равен нулю, а степени не превосходят $n_j/2 - 1$. В свою очередь, по аналогии получим

$$\begin{aligned} a(x^{n_j-1}) \pmod{(x^{n_j} - 1)} &= a_0 + \sum_{k=1}^{n_j-1} a_k x^{n_j-k} = \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{(n_j/2)-1} a_k x^{n_j-k} + a_{n_j/2} x^{n_j/2} + \sum_{k=(n_j/2)+1}^{n_j-1} a_k x^{n_j-k} = \\ &= a_0 + x^{n_j/2} \sum_{k=1}^{(n_j/2)-1} a_k x^{(n_j/2)-k} + a_{n_j/2} x^{n_j/2} + \sum_{k=1}^{(n_j/2)-1} a_{n_j/2+k} x^{(n_j/2)-k} = \\ &= a_0 + a_{1,1}^*(x) + x^{n_j/2} (a_{n_j/2} + a_{0,1}^*(x)). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{h}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) \pmod{(x^{n_j} - 1)} &= \tilde{h}'_{e,0}(x) + x^{n_j/2}\tilde{h}'_{e,1}(x), \\ \tilde{h}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) \pmod{(x^{n_j/2} - 1)} &= \tilde{h}'_{e,0}(x) + \tilde{h}'_{e,1}(x), \\ \tilde{g}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) \pmod{(x^{n_j} - 1)} &= \tilde{g}'_{e,0}(x) + x^{n_j/2}\tilde{g}'_{e,1}(x), \\ \tilde{g}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) \pmod{(x^{n_j/2} - 1)} &= \tilde{g}'_{e,0}(x) + \tilde{g}'_{e,1}(x), \end{aligned} \tag{17}$$

степени многочленов $\tilde{h}'_{e,0}(x)$, $\tilde{h}'_{e,1}(x)$, $\tilde{g}'_{e,0}(x)$ и $\tilde{g}'_{e,1}(x)$ не превосходят $n_j/2 - 1$.

На основании соотношений (16) и (17), осуществив выкладки, аналогичные проделанным при доказательстве леммы 2, получаем

$$\begin{aligned} h_e^{j-1}(x)\tilde{h}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) + g_e^{j-1}(x)\tilde{g}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) \bmod (x^{n_j} - 1) = \\ = p_0(x) + x^{n_j/2}p_1(x) \bmod (x^{n_j} - 1) = 1 \bmod (x^{n_j} - 1) \end{aligned}$$

и, в свою очередь,

$$\begin{aligned} h_e^j(x)\tilde{h}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) + g_e^j(x)\tilde{g}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) \bmod (x^{n_j/2} - 1) = p_0(x) + p_1(x) \bmod (x^{n_j/2} - 1) = \\ = p_0(x) + x^{n_j/2}p_1(x) \bmod (x^{n_j/2} - 1) = 1 \bmod (x^{n_j/2} - 1). \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана. ■

Замечание 2. Пары фильтров h^j, g^j и \tilde{h}^j, \tilde{g}^j , полученные из удовлетворяющих условию точного восстановления (9) пар h, g и \tilde{h}, \tilde{g} при помощи соотношения (14), также удовлетворяют условию точного восстановления для любого j , подпадающего под ограничение (8).

Таким образом, описанный подход позволяет генерировать фильтры j -го уровня разложения как по исходным фильтрам при помощи соотношения (14), так и по фильтрам $(j-1)$ -го уровня разложения при помощи соотношения (15).

4. Схема построения биортогональных вейвлет-кодов, использующих несколько уровней вейвлет-разложения

Изложенные подходы к построению уровневых фильтров дают возможность построить на их основе новое семейство биортогональных вейвлет-кодов, использующих несколько уровней вейвлет-разложения. Основная идея, лежащая в основе нового семейства кодов, заключается в применении на j -м уровне разложения представленной на рис. 1 процедуры кодирования сообщений, использующей уровневые фильтры h^j и g^j . При этом на вход подаётся результат кодирования, полученный на $(j+1)$ -м уровне разложения. Схему построения биортогональных вейвлет-кодов, использующих несколько уровней вейвлет-разложения, будем называть пирамидальной. Рассмотрим её подробнее.

Обозначим v^j — информационное слово, кодируемое на j -м уровне вейвлет-разложения; c^j — результат кодирования. Тогда, согласно описанному принципу, $v^{j-1} = c^j$, $v^J = v$, $c = c^0$. Кодирование на j -м уровне разложения осуществляется при помощи матрицы

$$A_j = H_j^T + \lambda_j G_j^T \Pi_j, \quad (18)$$

где Π_j — циркулянтная матрица размера $n_j/2 \times n_j/2$, первая строка которой имеет вид $(0, 0, 0, \dots, 1)$; λ_j — произвольный ненулевой элемент поля $\text{GF}(q)$. Тогда порождающая матрица кода имеет вид

$$A = \prod_{j=0}^J (H_j^T + \lambda_j G_j^T \Pi_j).$$

Проверочная матрица кода находится стандартным способом [9].

Лемма 4. Циклический сдвиг кодового слова c на 2^{J+1} позиций вправо также является кодовым словом.

Доказательство. Покажем, что $\hat{c}^j = A_j \hat{v}^j$, где \hat{v}^j является циклическим сдвигом v^j на Δ позиций вправо, является циклическим сдвигом $c^j = A_j v^j$ на 2Δ позиций

вправо. В самом деле, $c^j = A_j v^j = \sum_{i=0}^{n_j/2} v_i^j \text{col}_i A_j$, где v_i^j — i -я компонента вектора v^j ; $\text{col}_i A_j$ — i -й столбец матрицы A_j . С другой стороны,

$$\hat{c}^j = A_j \hat{v}^j = \sum_{i=0}^{n_j/2} \hat{v}_i^j \text{col}_i A_j = \sum_{i=0}^{n_j/2} v_{(i+\Delta) \bmod (n_j/2)}^j \text{col}_i A_j = \sum_{i=0}^{n_j/2} v_i^j \text{col}_{(i+\Delta) \bmod (n_j/2)} A_j,$$

где \hat{v}_i^j — i -я компонента вектора \hat{v}^j . По построению A_j^T является 2-циркулянтной матрицей, следовательно, столбец матрицы A_j с номером $(i+\Delta) \bmod (n_j/2)$ является циклическим сдвигом i -го столбца на 2Δ позиций вправо; значит, \hat{c}_j является циклическим сдвигом c_j на 2Δ позиций вправо.

Пусть информационное слово \hat{v} является циклическим сдвигом информационного слова v на одну позицию вправо. Тогда, согласно доказанному выше, \hat{c}^J — циклический сдвиг c^J на 2 позиции вправо, \hat{c}^{J-1} — циклический сдвиг c^{J-1} на 4 позиции вправо, и так далее. Кодовое слово \hat{c} является циклическим сдвигом кодового слова c на 2^{J+1} позиций вправо. ■

Это означает, что, согласно [9], представленные коды также относятся к подклассу квазициклических кодов, но уже с циклическим сдвигом кодовых слов на 2^{J+1} позиций.

Таким образом, описана пирамидальная схема построения биортогональных вейвлет-кодов над полем $\text{GF}(q)$, использующих несколько уровней вейвлет-разложения и имеющих длину кодовых и информационных слов n и $n/2^{J+1}$ соответственно и скорость кодирования $1/2^{J+1}$. Её ключевым преимуществом является возможность варьировать скорость кодирования путём изменения числа используемых уровней вейвлет-разложения, в то время как в представленных в предшествующих работах схемах скорость кодирования всегда равна $1/2$. Для иллюстрации схемы построения кода и непосредственно процесса кодирования рассмотрим несколько примеров. При анализе свойств кодов используется относительное кодовое расстояние, определяемое как отношение кодового расстояния к длине кодовых слов:

$$\delta = \frac{d}{n}.$$

Пример 1. Построим биортогональный вейвлет-код над полем $\text{GF}(2)$ с длиной кодовых и информационных слов $n = 16$ и $k = 4$ соответственно, использующий два уровня вейвлет-разложения. Фильтр h зададим при помощи многочлена

$$h(x) = 1 + x + x^3 + x^4 + x^{13}.$$

Воспользовавшись алгоритмом п. 2, построим фильтры для нулевого и первого уровней вейвлет-разложения. Фильтр h^0 зададим при помощи многочлена $h^0(x) = h(x)$, полифазные компоненты которого определяются как

$$h_e^0(x) = 1 + x^2 \quad \text{и} \quad h_o^0(x) = 1 + x + x^6.$$

При помощи алгоритма Евклида находим представление полифазных компонент $h_e^0(x)$ и $h_o^0(x)$ в виде (11):

$$\begin{bmatrix} h_e^0(x) \\ h_o^0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + x^2 + x^4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда при помощи соотношения (12) получаем

$$\begin{bmatrix} h_e^0(x) & g_e^0(x) \\ h_o^0(x) & g_o^0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+x^2+x^4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

что позволяет задать фильтр g^0 :

$$g^0(x) = x + x^2 + x^3 + x^7 + x^{11}.$$

В соответствии с (10) находим пару фильтров \tilde{h}^0 и \tilde{g}^0 , она определяется многочленами

$$\begin{aligned} \tilde{h}^0(x) &= 1 + x^6 + x^{10} + x^{14} + x^{15}, \\ \tilde{g}^0(x) &= 1 + x + x^4 + x^{13} + x^{14}. \end{aligned}$$

Фильтр h^1 зададим при помощи многочлена $h^1(x) = h_o^0(x)$, полифазные компоненты которого суть

$$h_e^1(x) = 1 + x^3 \quad \text{и} \quad h_o^1(x) = 1.$$

При помощи алгоритма Евклида находим представление полифазных компонент $h_e^1(x)$ и $h_o^1(x)$ в виде (11):

$$\begin{bmatrix} h_e^1(x) \\ h_o^1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+x^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда по соотношению (12) получаем

$$\begin{bmatrix} h_e^1(x) & g_e^1(x) \\ h_o^1(x) & g_o^1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+x^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

что позволяет задать фильтр g^1 многочленом

$$g^1(x) = 1.$$

Воспользовавшись соотношениями (10), находим пару фильтров \tilde{h}^1 и \tilde{g}^1 , она задаётся многочленами

$$\begin{aligned} \tilde{h}^1(x) &= x, \\ \tilde{g}^1(x) &= 1 + x + x^3. \end{aligned}$$

Теперь, когда найдены фильтры для каждого из уровней разложения, по (18) вычислим матрицы, при помощи которых осуществляется кодирование:

– матрица нулевого уровня вейвлет-разложения:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T;$$

– матрица первого уровня:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Порождающая матрица кода имеет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Экспериментально установлено, что кодовое расстояние биортогональных вейвлет-кодов с порождающими матрицами A_1 и A равны 4 и 8 соответственно, относительное кодовое расстояние при этом осталось неизменным. Кодовому слову $(1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$ веса 4 соответствует информационное слово $(0, 0, 0, 1)$, кодовому слову $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$ веса 8 также соответствует информационное слово $(0, 0, 0, 1)$.

Пример 2. Построим биортогональный вейвлет-код над полем $\text{GF}(3)$ с длиной кодовых и информационных слов $n = 12$ и $k = 3$ соответственно, использующий два уровня вейвлет-разложения. Параметры λ_0 и λ_1 примем равными единице, фильтр h зададим при помощи многочлена

$$h(x) = 1 + x^7.$$

По алгоритму п. 2 построим фильтры для нулевого уровня разложения; фильтры для первого уровня построим при помощи алгоритма из п. 3. Фильтр h^0 зададим многочленом $h^0(x) = h(x)$, полифазные компоненты которого определяются как

$$h_e^0(x) = 1 \quad \text{и} \quad h_o^0(x) = x^3.$$

По алгоритму Евклида находим представление полифазных компонент $h_e^0(x)$ и $h_o^0(x)$ в виде (11)

$$\begin{bmatrix} h_e^0(x) \\ h_o^0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда по (12) получаем

$$\begin{bmatrix} h_e^0(x) & g_e^0(x) \\ h_o^0(x) & g_o^0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

что позволяет задать фильтр g^0 многочленом

$$g^0(x) = x.$$

Воспользовавшись соотношениями (10), находим пару фильтров \tilde{h}^0 и \tilde{g}^0 :

$$\begin{aligned} \tilde{h}^0(x) &= 1, \\ \tilde{g}^0(x) &= x + 2x^6. \end{aligned}$$

По (15) вычисляем фильтры для первого уровня разложения, они задаются такими многочленами:

$$\begin{aligned} h^1(x) &= 1 + x, \\ g^1(x) &= x, \\ \tilde{h}^1(x) &= 1, \\ \tilde{g}^1(x) &= 2 + x. \end{aligned}$$

Теперь, когда найдены фильтры для каждого из уровней разложения, в соответствии с (18) вычислим матрицы, при помощи которых осуществляется кодирование:
 – матрица нулевого уровня вейвлет-разложения:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T ;$$

– матрица первого уровня:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T .$$

Порождающая матрица кода имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T .$$

Экспериментально установлено, что кодовое расстояние биортогональных вейвлет-кодов с порождающими матрицами A_1 и A равны 3 и 7 соответственно, относительное кодовое расстояние при этом выросло. Кодовому слову $(0, 1, 0, 0, 1, 1)$ веса 3 соответствует информационное слово $(0, 0, 1)$, кодовому слову $(1, 1, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 2, 0, 1, 1)$ веса 7 также соответствует информационное слово $(1, 2, 2)$.

Заключение

В работе доказана теорема о существовании двух представлений векторного пространства в виде прямых сумм подпространств, связанных условиями биортогональности, и описаны два подхода к построению уровневых фильтров биортогонального вейвлет-преобразования. Первый подход основан на ранее использовавшемся для построения комплементарных фильтров алгоритме Евклида. Второй подход основан на модификации алгоритма [3], цель которой заключалась в отказе от применения преобразования Фурье. Доказана корректность подхода.

Теорема доказана конструктивным образом, что позволило описать пирамидальную схему построения биортогональных вейвлет-кодов, использующих несколько уровней вейвлет-разложения и имеющих скорость кодирования 2^{-L} , где L — количество уровней. Построены коды $W[16, 4, 8]$ над полем $GF(2)$ и $W[12, 3, 7]$ над полем $GF(3)$, численные эксперименты с которыми показали, что при определённом выборе исходных фильтров использование при кодировании нескольких уровней вейвлет-разложения приводит к росту относительного кодового расстояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mallat S. Wavelet Tour of Signal Processing. 2nd ed. Boston: Academic Press, 1999. 799 p.
2. Воробьев В. И., Грибунин В. Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: ВУС, 1999. 206 с.
3. Caire G., Grossman R. L., and Poor H. V. Wavelet transforms associated with finite cyclic groups // IEEE Trans. Inform. Theory. 1993. V. 39. No. 4. P. 1157–1166.

4. *Fekri F., Mersereau R. M., and Schafer R. W.* Theory of wavelet transform over finite fields // Proc. IEEE Intern. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1999. V. 3. P. 1213–1216.
5. *Fekri F., McLaughlin S. W., Mersereau R. M., and Schafer R. W.* Double circulant self-dual codes using finite-field wavelet transforms // Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes. Berlin: Springer, 1999. P. 355–363.
6. *Fekri F., McLaughlin S. W., Mersereau R. M., and Schafer R. W.* Error control coding using finite-field wavelet transforms // Atlanta: Center for Signal Image Processing, 1999. P. 1–13.
7. *Fekri F., Mersereau R. M., and Schafer R. W.* Theory of paraunitary filter banks over fields of characteristic two // IEEE Trans. Inform. Theory. 2002. V. 48. No. 11. P. 2964–2979.
8. *Черников Д. В.* Помехоустойчивое кодирование с использованием биортогональных наборов фильтров точного восстановления // Труды конференции «Информационные технологии и системы». Светлогорск, 2013. С. 507–512.
9. *Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А.* Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1974. 744 с.
10. *Черников Д. В.* Помехоустойчивое кодирование с использованием биортогональных наборов фильтров // Сибирские электрон. матем. известия. 2015. Т. 12. С. 704–713.
11. *Соловьев А. А., Черников Д. В.* Биортогональные вейвлет-коды с заданным кодовым расстоянием // Дискретная математика. 2017. Т. 29. № 2 С. 96–108.
12. *Соловьев А. А., Черников Д. В.* Биортогональные вейвлет-коды в полях характеристики два // Челяб. физ.-мат. журн. 2017. Т. 2. № 1. С. 66–79.
13. *Doubechies I. and Sweldens W.* Factoring wavelet transforms into lifting steps // J. Fourier Analysis Appl. 1998. V. 4. No. 3. P. 247–269.

REFERENCES

1. *Mallat S.* Wavelet Tour of Signal Processing, 2nd ed. Boston, Academic Press, 1999. 799 p.
2. *Vorobyov V. I. and Gribunin V. G.* Teoriya i praktika veyvlet-preobrazovaniya [Theory and Practice of Wavelet Transform]. S-Petersburg, VUS Publ., 1999. 206 p. (in Russian)
3. *Caire G., Grossman R. L., and Poor H. V.* Wavelet transforms associated with finite cyclic groups. IEEE Trans. Inform. Theory, 1993. vol. 39, no. 4, pp. 1157–1166.
4. *Fekri F., Mersereau R. M., and Schafer R. W.* Theory of wavelet transform over finite fields. Proc. IEEE Intern. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1999, vol. 3, pp. 1213–1216.
5. *Fekri F., McLaughlin S. W., Mersereau R. M., and Schafer R. W.* Double circulant self-dual codes using finite-field wavelet transforms. Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes. Berlin, Springer, 1999, pp. 355–363.
6. *Fekri F., McLaughlin S. W., Mersereau R. M., and Schafer R. W.* Error control coding using finite-field wavelet transforms. Atlanta, Center for Signal Image Processing, 1999, pp. 1–13.
7. *Fekri F., Mersereau R. M., and Schafer R. W.* Theory of paraunitary filter banks over fields of characteristic two. IEEE Trans. Inform. Theory, 2002. vol. 48, no. 11, pp. 2964–2979.
8. *Chernikov D. V.* Pomekhoustojchivoe kodirovanie s ispol'zovaniem biortogonal'nyh naborov fil'trov tochnogo vosstanovleniya [Error-correcting codes using biorthogonal perfect reconstruction filter banks]. Proc. Conf. “Information Technologies and Systems”, Svetlogorsk, 2013, pp. 507–512. (in Russian)
9. *MacWilliams F. G. and Sloane N. J. A.* The Theory of Error Correcting Codes. North-Holland, 1977. 796 p.
10. *Chernikov D. V.* Pomekhoustojchivoye kodirovaniye s ispol'zovaniyem biortogonal'nykh naborov fil'trov [Error-correcting codes using biorthogonal filter banks]. Siberian Electronic Math. Rep., 2015, vol. 12, pp. 704–713. (in Russian)

11. *Soloviev A. A. and Chernikov D. V.* Biorthogonal wavelet codes with prescribed code distance. *Discrete Math. Appl.*, 2018, vol. 28, no. 3 pp. 179–188.
12. *Soloviev A. A. and Chernikov D. V.* Biortogonal'nyye veyvlet kody v polyakh kharakteristiki dva [Biorthogonal wavelet codes in the fields of characteristic two]. *Chelyabinsk Physics Math. J.*, 2017, vol. 2, no. 1, pp. 66–79. (in Russian)
13. *Doubechies I. and Sweldens W.* Factoring wavelet transforms into lifting steps. *J. Fourier Analysis and Appl.*, 1998, vol. 4, no. 3, pp. 247–269.