

*
*
*

УДК 530.1

DOI: 10.17223/00213411/64/2/50

DONGWEI SHI¹, CAIXIA WANG²

АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ НЕКОНФОРМНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА КЭРИ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С НАИМЕНЬШЕЙ РЕГУЛЯРНОСТЬЮ РЕШЕНИЯ *

Обсуждается метод неконформных конечных элементов Кэри (NFEM) для эллиптической задачи второго порядка. С помощью различных существующих методов неоднородная и равномерная сходимость получается только при предположении наименьшей регулярности решения $u \in H_0^1(\Omega)$.

Ключевые слова: неконформный конечный элемент Кэри, неоднородность и равномерность, наименьшая регулярность, анализ сходимости и оценки погрешностей.

Введение

Проведено множество исследований по анализу сходимости и оценкам погрешностей для знаменитой NFEM Кэри [1, 2], когда точное решение $u \in H^2(\Omega)$ или $u \in H^3(\Omega)$. Например, в [3] обсуждается анализ сходимости для класса нелинейных параболических интегродифференциальных задач в 2D и представлены оценки погрешностей оптимального порядка для L^2 -нормы и H^1 -нормы. В [4, 5] рассмотрено анизотропное поведение для эллиптической задачи второго порядка и задачи вариационного неравенства со смещением препятствия соответственно. В [6] проведен анализ с более высокой точностью и выполнена экстраполяция этого элемента для задач соболевского типа на анизотропных сетках. Кроме того, в [7] сконструирован новый элемент квазикари путем модификации элемента ухода. Показано, что погрешность согласованности этого нового элемента имеет порядок $O(h^2)$, который на порядок выше ошибки интерполяции. Это свойство очень похоже на четырехугольный квазивиальсонский элемент [8–10].

В [10–12] авторы исследовали эллиптическую задачу второго порядка при минимальной регулярности точного решения $u \in H^1(\Omega)$. Однако результаты базируются на предположении о регулярности на сетках разбиения [13], т.е. существует постоянная $C > 0$, такая, что $h_K/\rho_K \leq C$, где h_K и ρ_K обозначают диаметр элемента K и наибольшие содержащиеся в K окружности соответственно. Это ограничивает применение методов конечных элементов.

Основная цель данной работы – изучить поведение сходимости треугольного неконформного конечного элемента Кэри для эллиптической задачи второго порядка с наименьшей регулярностью $u \in H_0^1(\Omega)$. Используя новый анализ, те же результаты, что и в [11–13], были получены для анизотропных сеток. Представленные в настоящей работе результаты ранее не встречались.

Элемент Кэри и некоторые леммы

Пусть K – треугольник с вершинами $p_i = (x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, 3$), λ_i – координата площади, соответствующей вершине p_i , $l_i = \overrightarrow{p_{i+1}p_{i+2}}$ ($i = 1, 2, 3, \text{mod}(3)$) являются тремя краями K . Пусть S – площадь треугольника K и сделаем следующие замечания:

$$\begin{cases} \xi_1 = x_2 - x_3, & \xi_2 = x_3 - x_1, \xi_3 = x_1 - x_2, \\ \eta_1 = y_2 - y_3, & \eta_2 = y_3 - y_1, \eta_3 = y_1 - y_2, \\ \xi_i^2 + \eta_i^2 = l_i^2, & l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2. \end{cases}$$

* This research is supported by the National Natural Science Foundation of China (11271340, 11671369), and the Major Project of Science and Research of Henan Province University (16A110013).

Пусть Ω – выпуклая связная область; J_h – семейство разложения Ω с $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in J_h} \bar{K}$, и $\text{diam}(K) \leq h$, $\forall K \in J_h$. Для данного элемента $K \in J_h$, пусть $\overrightarrow{p_1 p_2}$ – самый длинный край K . Обозначим $h_1 = h_{1,K} = |\overrightarrow{p_1 p_2}|$ как его длину. Пусть $h_2 = h_{2,K} = 2S/h_{1,K}$ – толщина K , перпендикулярная к $\overrightarrow{p_1 p_2}$, где S – квадрат K . Мы полагаем, что элемент удовлетворяет условию максимального угла и условию системы координат [14], и нет необходимости подтверждать вышеуказанное регулярное предположение.

Пусть V_h – связанное пространство конечных элементов Кэри, определяемое как

$$V_h = \{v : v|_K \in P_K, v(a) = 0, \forall \text{ node } a \in \partial\Omega\}. \quad (1)$$

Здесь $P_K = \text{span}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \phi\}$, $\phi = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1$. Тогда для любого $w_h \in V_h$, которое содержит

$$w_h = \bar{w}_h + w_h^1 = \sum_{i=1}^3 c_i \lambda_i + c_4 (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1), \quad (2)$$

где $c_i (i=1, 2, 3, 4)$ – константы; $\bar{w}_h$ и w_h^1 – линейная и нелинейная части w_h соответственно, т.е.

$$\bar{w}_h = \sum_{i=1}^3 c_i \lambda_i, \quad w_h^1 = c_4 (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1).$$

Рассмотрим следующую проблему Пуассона:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{в } \Omega, \\ u|_{\Gamma} = 0, & \text{на } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть $V \in H_0^1(\Omega)$, тогда слабая форма (3):

$$\begin{cases} \text{чтобы найти } u \in V, \text{ такое, как} \\ a(u, v) = f(v), \forall v \in V. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy, \quad f(v) = \int_{\Omega} f v dx dy.$$

Аппроксимация (4) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \text{чтобы найти } u_h \in V_h, \text{ такое, как} \\ a_h(u_h, v_h) = f(v_h), \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (5)$$

где

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in J_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx dy, \quad f(v_h) = \sum_{K \in J_h} \int_K f v_h dx dy.$$

Легко заметить, что $\|\cdot\|_h = \left(\sum_K |\cdot|_{1,K}^2 \right)^{1/2}$ – это норма, определенная в пространстве V_h . По теореме Лакса – Мильграма уравнения (4) и (5) имеют единственные решения u и u_h соответственно.

Чтобы получить оценки погрешностей $\|u - u_h\|_h$, введем следующую полезную лемму.

Лемма 1 [4, 5]. Предположим, что V_h определено в (1). Пусть $\forall w_h \in V_h$, а w_h может быть записана как в (2). Для анизотропных сеток:

$$\int_K \frac{\partial w_h^1}{\partial x} dx dy = 0, \quad \int_K \frac{\partial w_h^1}{\partial y} dx dy = 0; \quad (6)$$

$$|w_h^1|_{1,K} \leq |w_h|_{1,K}; \quad (7)$$

$$|w_h|_{0,K} \leq \sqrt{\frac{4}{15}} \max(l_1, l_2, l_3) |w_h^1|_{1,K} \leq \sqrt{\frac{4}{15}} h_K |w_h|_{1,K}. \quad (8)$$

Лемма 2 [10]. Пусть $D = \{f : f \in L^2(\Omega), \|f\|_0 = 1\}$ – единичный круг в $L^2(\Omega)$, и $W = \{u : u = Tf, f \in D\}$, где $u = Tf \in H_0^1(\Omega)$ является решением (4), т.е.

$$a(Tf, v) = f(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (9)$$

тогда W – прекомпакт в $H_0^1(\Omega)$.

Лемма 3 [10]. Пусть V – фиксированное компактное подмножество $H_0^1(\Omega)$, тогда существует конечное открытое покрытие $S(\phi_1, \varepsilon), \dots, S(\phi_n, \varepsilon)$, такое, что $V \subset \bigcup_{i=1}^n S(\phi_i, \varepsilon)$, и $\phi_i \in C_0^\infty$ ($0 \leq i \leq n$), где $S(\phi, \varepsilon)$ – открытый круг с центром ϕ и ε – радиус в смысле $H_0^1(\Omega)$ -нормы.

Анализ сходимости и оценки погрешностей

Предложим три теоремы в качестве основных результатов. Сначала анализ неоднородной сходимости обсуждается в теореме 1, то есть решение конечного элемента сводится к точному решению u как $h \rightarrow 0$.

Теорема 1. Предположим, что u и u_h – решения (4) и (5) соответственно и что $u \in H_0^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, тогда решение u_h сводится к u как $h \rightarrow 0$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $h_0 = h_0(\varepsilon, u, f)$, такое, что

$$\|u - u_h\| \leq \varepsilon \quad (10)$$

содержится, когда $0 < h \leq h_0$.

Доказательство. По второй лемме Стренга [14]

$$\|u - u_h\|_h \leq \left\{ \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{E_h(u, w_h)}{\|w_h\|_h} \right\}, \quad (11)$$

где

$$E_h(u, w_h) = a_h(u, w_h) - f(w_h) = a_h(u, w_h^1) - f(w_h^1) = E_h(u, w_h^1). \quad (12)$$

Пусть $\hat{V}_h$ – соответствующее линейное треугольное пространство конечных элементов, тогда $\hat{V}_h \subset V_h$. В [11] доказано, что существует $h'_0 = h'_0(\varepsilon, u) > 0$, так что для каждого $h < h'_0$ первое слагаемое в правой части (11) можно оценить как

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h \leq \inf_{v_h \in \hat{V}_h} \|u - v_h\|_h \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (13)$$

Далее оценим член $E_h(u, w_h)$ в (11). Поскольку $u \in H_0^1(\Omega)$, то для любого $\varepsilon' > 0$ существует функция $\tilde{u} \in C_0^\infty(\Omega)$, такая, что

$$\|u - \tilde{u}\| \leq \varepsilon'. \quad (14)$$

Так,

$$E_h(u, w_h^1) = a_h(u - \tilde{u}, w_h^1) + E_h(\tilde{u}, w_h^1). \quad (15)$$

Из леммы 1 и (14) следует

$$|a_h(u - \tilde{u}, w_h^1)| \leq \|u - \tilde{u}\|_{1,\Omega} \|w_h^1\|_h < \varepsilon' \|w_h^1\|_h \leq \varepsilon' \|w_h\|_h. \quad (16)$$

Теперь воспользуемся следующим новым приемом, чтобы оценить член $E_h(\tilde{u}, w_h^1)$ для анизотропных сеток.

Определим P_0 как

$$P_0 v|_K = \frac{1}{|K|} \int_K v dx dy, \quad \forall v \in (L^2(\Omega))^2, K \in J_n.$$

Пусть $v = \nabla u$, тогда из леммы 1 имеем

$$\begin{aligned}
E_h(\tilde{u}, w_h^1) &= a_h(\tilde{u}, w_h^1) - f(w_h^1) = \sum_K \int_K \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w_h^1 dx dy - \int_{\Omega} f w_h^1 dx dy = \\
&= \sum_K \int_K (\mathbf{v} - P_0 \mathbf{v}) \nabla w_h^1 dx dy - \int_{\Omega} f w_h^1 dx dy \leq \sum_K \|\mathbf{v} - P_0 \mathbf{v}\|_{0,K} \|w_h^1\|_h + \|f\|_0 (\sum_K \|w_h^1\|_{0,K}^2)^{1/2} \leq \\
&\leq ch \|\tilde{u}\|_{2,\Omega} \|w_h^1\|_h + ch \|f\|_0 \|w_h\|_h \leq ch (\|\tilde{u}\|_{2,\Omega} + \|f\|_0) \|w_h\|_h.
\end{aligned} \tag{17}$$

Воспользовавшись (15), (16) и (17), получим

$$|E_h(u, w_h)| \leq c(\varepsilon' + h(\|\tilde{u}\|_{2,\Omega} + \|f\|_0)) \|w_h\|_h. \tag{18}$$

Здесь и далее $c > 0$ обозначает постоянную, не зависящую от h и h_K/ρ_K , и функцию при рассмотрении.

Таким образом, существует $h_0'' = h_0''(f, u) > 0$, удовлетворяющее $ch_0'' < \varepsilon/4$. Теперь выбираем ε' такое, что $c\varepsilon' < \varepsilon/4$, и (18) уменьшает

$$|E_h(u, w_h)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|w_h\|_h, \quad \text{как } 0 < h < h_0''. \tag{19}$$

Пусть $h_0 = \min(h_0', h_0'')$, и желаемый результат может быть получен из (11) – (19).

Анализ однородной сходимости приведем в теореме 2.

Теорема 2. В предположении теоремы 1 и при данном $\varepsilon > 0$ существует $h_0 = h_0(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $0 < h < h_0$

$$\|u - u_h\|_h \leq \varepsilon \|f\|_0. \tag{20}$$

Доказательство. Для $f \in L^2(\Omega)$

$$\bar{f} = \frac{f}{\|f\|_0}, \quad \bar{u} = \frac{u}{\|f\|_0}, \quad \bar{u}_h = \frac{u_h}{\|f\|_0}.$$

Тогда

$$a(\bar{u}, v) = \bar{f}(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a_h(\bar{u}_h, v_h) = \bar{f}(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Следовательно, из (11) имеем

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_h \leq \left\{ \inf_{v_h \in V_h} \|\bar{u} - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{E_h(\bar{u}, w_h)}{\|w_h\|_h} \right\}. \tag{21}$$

Для $\hat{V}_h$ в [11] также показано, что существует $h_0' = h_0'(\varepsilon/2)$ так, что для $0 < h < h_0'(\varepsilon/2, \bar{W})$

$$\inf_{v_h \in \hat{V}_h} \|\bar{u} - v_h\|_h \leq \varepsilon/2,$$

где

$$\bar{W} = \left\{ \bar{u} : a(\bar{u}, v) = \bar{f}(v), \|\bar{f}\|_0 = 1 \right\}.$$

Таким образом,

$$\inf_{v_h \in \hat{V}_h} \|\bar{u} - v_h\|_h \leq \inf_{v_h \in \hat{V}_h} \|\bar{u} - v_h\|_h \leq \varepsilon/2. \tag{22}$$

Что касается оценки второго слагаемого в правой части (21), то из доказательства теоремы 1 с учетом леммы 3 получаем $h_0''(\varepsilon/2, \bar{W})$. Для $0 < h < h_0 = \min\{h_0'(\varepsilon/2, \bar{W}), h_0''(\varepsilon/2, \bar{W})\}$ следует

$$|E_h(\bar{u}, w_h)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|w_h\|_h. \tag{23}$$

Таким образом, из (21) – (23), когда $0 < h < h_0 = \min\{h_0'(\varepsilon/2, \bar{W}), h_0''(\varepsilon/2, \bar{W})\}$, имеем

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_h \leq \varepsilon,$$

т.е.

$$\|u - u_h\|_h \leq \varepsilon \|f\|_0.$$

Доказательство завершено.

Итак, мы сделаем оценку L^2 -нормы в теореме 3.

Теорема 3. В условиях теоремы 1 существует $h_1 = h(\varepsilon) > 0$, так что для $0 < h < h_1$ имеем

$$\|u - u_h\|_0 \leq \varepsilon^2 \|f\|_0. \quad (24)$$

Доказательство. Согласно аргументу Обена – Нитше, выполняется

$$\|u - u_h\|_0 \leq C \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{1}{\|g\|_0} \left\{ \|u - u_h\|_h \|\phi_g - (\phi_g)_h\|_h + E_h(u, (\phi_g)_h - \phi_g) + E_h^*(u - u_h, \phi_g) \right\}, \quad (25)$$

где $\phi_g \in H_0^1(\Omega)$ – решение

$$a(v, \phi_g) = (g, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

Пусть $(\phi_g)_h \in V_h$ является приближением Кэри NFE из ϕ_g , для любого $g \in L^2(\Omega)$

$$a_h(v_h, (\phi_g)_h) = (g, v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Тогда

$$E_h(u, w_h) = a_h(u, w_h) - f(w_h); \quad (26)$$

$$E_h^*(w_h, \phi_g) = a_h(w_h, \phi_g) - (g, w_h); \quad (27)$$

$$\|\phi_g - (\phi_g)_h\|_h \leq C \inf_{\phi_h \in V_h} \|\phi_g - \phi_h\|_h \leq C \inf_{\phi_h \in V_h} \|\phi_g - \phi_h\|_h. \quad (28)$$

Используя те же аргументы, что и в теореме 1, пусть $W^* = \{u^* : u^* = T^*g, \forall g \in D\}$, $u = Tf \in H_0^1(\Omega)$ и $u^* = T^*g \in H_0^1(\Omega)$ являются решениями

$$a(Tf, v) = (f, v), \quad a(v, T^*g) = (g, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

соответственно. Тогда W^* также предварительно компактен в $H_0^1(\Omega)$. Так как $C_0^\infty(\Omega)$ связано с $H_0^1(\Omega)$, то существует конечное открытое покрытие $\{S(\phi_i, \varepsilon)\}_{i=1}^n$, такое, что

$$\bar{W} \subset \bigcup_{i=1}^n S(\phi_i, \varepsilon), \quad \bar{W}^* \subset \bigcup_{i=1}^n S(\phi_i, \varepsilon),$$

где

$$\phi_i \in C_0^\infty(\Omega), \quad S(\phi_i, \varepsilon) = \{v \in H_0^1(\Omega) : \|v - \phi_i\|_1 \leq \varepsilon\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Аналогично, пусть

$$\bar{g} = \frac{g}{\|g\|_0}, \quad \bar{\phi}_g = \frac{\phi_g}{\|g\|_0}, \quad (\bar{\phi}_g)_h = \frac{(\phi_g)_h}{\|g\|_0}.$$

Тогда

$$a(\bar{u}, v) = (\bar{f}, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)J; \quad (29)$$

$$a_h(\bar{u}_h, v_h) = (\bar{g}, v_h), \quad \forall v_h \in V_hJ; \quad (30)$$

$$a(v, \bar{\phi}_g) = (\bar{g}, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)J; \quad (31)$$

$$a_h(v_h, (\bar{\phi}_g)_h) = (\bar{g}, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (32)$$

Таким образом,

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_0 \leq C \sup_{g \in L^2(\Omega)} \left\{ \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_h \|\bar{\phi}_g - (\bar{\phi}_g)_h\|_h + E_h(\bar{u}, (\bar{\phi}_g)_h - \bar{\phi}_g) + E_h^*(\bar{u}_h - \bar{u}, \bar{\phi}_g) \right\}. \quad (33)$$

Из теоремы 1 видно, что существуют $h'_1 = h'_1(\varepsilon) > 0$ и $h''_1 = h''_1(\varepsilon, \bar{W}, \bar{W}^*)$, такие, что

$$\|\bar{\phi}_g - (\bar{\phi}_g)_h\|_h \leq \alpha_1 \varepsilon \quad \text{для } 0 < h < h'_1; \quad (34)$$

$$|E_h(\bar{u}, (\bar{\Phi}_g)_h - \bar{\Phi}_g)| \leq \alpha_2 \varepsilon \|\bar{\Phi}_g - (\bar{\Phi}_g)_h\|_h; \quad (35)$$

$$|E_h^*(\bar{u}_h - \bar{u}, \bar{\Phi}_g)| \leq \alpha_2 \varepsilon \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_h \quad \text{для } 0 < h < h_1'', \quad (36)$$

где $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ будет определено ниже. Таким образом, когда $0 < h = h_1(\varepsilon) = \min(h_1', h_1'')$, имеем

$$\begin{aligned} \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_0 &\leq C\varepsilon \left\{ (\alpha_1 + \alpha_2) \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_h + \alpha_2 \|\bar{\Phi}_g - (\bar{\Phi}_g)_h\|_h \right\} \leq \\ &\leq C\varepsilon \left\{ (\alpha_1 + \alpha_2) \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_h + \alpha_1 \alpha_2 \varepsilon \right\} \leq C\varepsilon \left\{ \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_h + \varepsilon \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Выберем $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2C}$ ($C > 1$) и отмечая, что

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_0 \leq \frac{\|u - u_h\|_0}{\|f\|_0}; \quad (38)$$

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_h \leq \frac{\|u - u_h\|_h}{\|f\|_0}, \quad (39)$$

завершив доказательство теоремы 3.

Заключение

Проверено, что подходы, используемые в теоремах этой работы, действительно сильно отличаются от подходов [12, 13], которые значительно упрощают доказательства. Тем более методы, использованные в [11–13], не могут быть применены непосредственно к анизотропным сеткам.

В теореме 1 $h_0 = h_0(\varepsilon, u, f)$ означает, что она зависит не только от u , но и от f . То есть u_h сходится к u как $h \rightarrow 0$ неравномерно. Итак, необходимые доказательства результатов равномерной сходимости можно найти в теореме 2. В итоге равномерные оценки сходимости с L^2 -нормой даны в теореме 3.

Приведенные выше результаты справедливы и для некоторых других NFEs, таких, как анизотропный квазиэлемент Кэри [7], анизотропный элемент Уилсона [15], квазиэлемент Уилсона [8] и т.д. Однако вопрос распространения результатов настоящей работы на неконформные прямоугольные элементы, изученные в работах [16–34], до сих пор остается открытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carey G.F. // Comput. Method. Appl. Mech. Eng. – 1976. – V. 9. – P. 165–179.
2. Shi Z.C. // Comput. Method. Appl. Mech. Eng. – 1985. – V. 48. – P. 123–137.
3. Shi D.Y. and Pei L.F. // J. Sys. Sci. Math. Sci. – 2009. – V. 29. – No. 6. – P. 854–864.
4. Shi D.Y., Shi S.C., and Hagiwara I. // J. Comp. Math. – 2005. – V. 23. – No. 4. – P. 373–382.
5. Shi D.Y. and Wang C.X. // Chin. J. Eng. Math. – 2006. – V. 23. – No. 3. – P. 399–406.
6. Shi D.Y. and Hao X.B. // Chin. J. Eng. Math. – 2009. – V. 26. – No. 6. – P. 1021–1026.
7. Shi D.Y. and Hao X.B. // J. Syst. Sci. Math. – 2008. – V. 21. – No. 3. – P. 456–462.
8. Chen S.C., Shi D.Y., and Zhao Y.C. // IMA J. Numer. Anal. – 2004. – V. 24. – No. 1. – P. 77–95.
9. Shi D.Y. and Liang H. // Appl. Math. Mech. – 2007. – V. 28. – No. 1. – P. 119–125.
10. Shi D.Y. and Pei L.F. // Appl. Math. Comp. – 2013. – V. 219. – No. 17. – P. 9447–9460.
11. Schatz A.H. and Wang J.P. // Math. Comp. – 1996. – V. 65. – P. 19–27.
12. Wang L.H. // J. Comput. Math. – 2000. – V. 18. – No. 3. – P. 277–282.
13. Wang L.H. // J. Comput. Math. – 1999. – V. 17. – No. 6. – P. 609–614.
14. Ciarlet P.G. // J. Appl. Mech. Dec – 1978. – V. 45. – No. 4. – P. 968–969.
15. Rannacher R. and Turek S. // Numer. Meth. for PDEs. – 1992. – V. 8. – P. 97–111.
16. Shi D.Y. and Wang C.X. // Inter. J. Comput. Math. – 2011. – V. 88. – No. 10. – P. 2167–2177.
17. Shi D.Y., Mao S.P., and Chen S.C. // J. Comput. Math. – 2005. – V. 23. – No. 3. – P. 261–274.
18. Shi D.Y. and Pei L.F. // Inter. J. Numer. Anal. Model. – 2008. – V. 5. – No. 3. – P. 373–385.
19. Shi D.Y., Wang H.H., and Du Y.D. // J. Comput. Math. – 2009. – V. 27. – No. 2–3. – P. 299–314.
20. Shi D.Y. and Ren J.C. // Inter. J. Numer. Anal. Model. – 2009. – V. 6. – No. 2. – P. 293–310.
21. Shi D.Y. and Ren J.C. // Nonlinear Anal. TMA. – 2009. – V. 71. – No. 9. – P. 3842–3852.
22. Lin Q., Lutz T., and Zhou A.H. // IMA J. Numer. Anal. – 2005. – V. 25. – P. 160–181.
23. Shi D.Y. and Yao C.H. // Numer. Meth. for PDEs. – 2014. – V. 30. – No. 5. – P. 1654–1673.
24. Hu J. and Shi Z.C. // J. Comput. Math. – 2005. – V. 23. – No. 6. – P. 561–586.
25. Park C. and Sheen D. // SIAM J. Numer. Anal. – 2003. – V. 41. – No. 2. – P. 624–640.
26. Baig A.Q., Naeem M., and Gao W. // Appl. Math. Nonlinear. Sci. – 2018. – V. 3. – No. 1. – P. 33–40.

27. Dewasurendra M. and Vajravelu K. // *Appl. Math. Nonlinear. Sci.* – 2018. – V. 3. – No. 1. – P. 1–14.
28. Lakshminarayana P., Vajravelu K., Sucharitha G., et al. // *Appl. Math. Nonlinear. Sci.* – 2018. – V. 3. – No. 1. – P. 41–54.
29. Aidara S. // *Appl. Math. Nonlinear Sci.* – 2019. – V. 4. – No. 1. – P. 9–20.
30. Amanda R. and Atangana A. // *Chaos Solitons Fractals.* – 2018. – V. 116. – P. 414–423.
31. Wang S., Du S., Atangana A., et al. // *Multimedia Tools Appl.* – 2018. – V. 77. – No. 3. – P. 3701–3714.
32. Yao C.H. and Wang L.X. // *Numer. Math. Theory Methods Appl.* – 2017. – V. 10. – No. 1. – P. 145–166.
33. Yao C.H. and Jia S.H. // *Appl. Math. Comput.* – 2014. – V. 229. – P. 34–40.
34. Qiao Z.H., Yao C.H., and Jia S.H. // *J. Sci. Comput.* – 2011. – V. 46. – No. 1. – P. 1–19.

Поступила в редакцию 14.10.2020.

¹ School of Mathematical Sciences, Henan Institute of Science and Technology,
Xinxiang, China

² School of Mathematics and Statistics, North China University of Water Resources
and Electric Power, Zhengzhou, China

Dongwei Shi, M.S., Lecturer School of Mathematical Sciences, Henan Institute of Science and Technology, e-mail: shidongwei@hist.edu.cn;

Caixia Wang, Ph.D., Associate Professor School of Mathematics and Statistics, North China University of Water Resources and Electric Power, e-mail: wangcaixia@ncwu.edu.cn.