МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2021 **№ 70**

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417
Электронный адрес: http://vestnik.tsu.ru/mathematics
Контактный тел./факс: (3822) 529-740
E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

CONTENTS

MATHEMATICS

MECHANICS

МАТЕМАТИКА

УДК 514.76 MSC 53c15
DOI 10.17223/19988621/70/1

С.В. Галаев

∇^N-ЭЙНШТЕЙНОВЫ ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

На почти контактном метрическом многообразии M рассматривается N-связность ∇^N, определяемая парой (∇, N), где ∇ – внутренняя метрическая связность, N: $TM \to TM$ – эндоморфизм касательного расслоения многообразия M, такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$. Рассматривается случай кососимметрической N-связности ∇^N. Кручение кососимметрической N-связности, представленное трехвалентным ковариантным тензором, кососимметрично. Такая связность определена однозначно и отвечает эндоморфизму $N = 2\psi$, где эндоморфизм ψ задается равенством $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$ и получает в работе название второго структурного эндоморфизма почти контактного метрического многообразия. Вводится понятие ∇^N-Эйнштейнова почти контактного метрического многообразия. Для случая $N = 2\psi$ находятся условия, при которых почти контактные метрические многообразия являются ∇^N-Эйнштейновыми многообразиями.

Ключевые слова: *почти контактное метрическое многообразие, внутренняя связность, полуметрическая связность с кососимметрическим кручением,* ∇^N*-Эйнштейново многообразие.*

1. Введение

Систематическое изложение теории многообразий Эйнштейна с кососимметричным кручением приводится в работе [1]. Интерес к таким многообразиям определяется применением связностей с кручением в модифицированной теории относительности Эйнштейна – Картана (см., также, [2]). Многообразие Сасаки является одним из примеров многообразий Эйнштейна с кососимметричным кручением [1]. В работе [3] доказывается, что на многообразии Сасаки существует единственная связность с кососимметрическим кручением, совместимая со структурой Сасаки. Эта связность получила название характеристической связности. Ранее автором настоящей статьи было показано, что на многообразии с почти контактной метрической структурой существует, и при этом единственная, N-связность ∇^N с кососимметрическим кручением [4]. В настоящей работе такая связность получила название канонической связности. Доказывается, что в случае многообразия Сасаки характеристическая связность совпадает с канонической связностью.

В настоящей работе рассматриваются почти контактные метрические многообразия, оснащенные N-связностью ∇^N. Нас будет интересовать следующий вопрос: «Какие почти контактные метрические многообразия являются ∇^N-Эйнштейновыми многообразиями с кососимметрическим кручением?».

Не всякая связность с кососимметричным кручением является N-связностью. В то же время под определение N-связности попадают часто используемые в геометрии почти контактных метрических многообразий связности с кручением. N-связность ∇^N определяется на почти контактном метрическом многообразии, наделенном внутренней связностью ∇ и эндоморфизмом N: $TM \to TM$ касательного расслоения многообразия M, таким, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$, как единственная связность на многообразии M, удовлетворяющая следующим условиям [5]:

1) $\nabla_X^N Y \in \Gamma(D)$;

2) $\nabla_X^N \vec{\xi} = \vec{0}$;

3) $\nabla_{\xi}^N Y = [\vec{\xi}, Y] + NY$;

4) $\nabla_Y^N Z = \nabla_Y Z$, $X \in \Gamma(TM)$, $Y, Z \in \Gamma(D)$.

Если ∇ – метрическая связность, то связность ∇^N характеризуется следующими условиями [5]:

1) $S(X,Y) = 2\omega(X,Y)\vec{\xi} + \eta(X)NY - \eta(Y)NX$, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$;

2) $\nabla_X^N g(Y,Z) = 0$, $X, Y, Z \in \Gamma(D)$;

3) $\nabla_X^N \vec{\xi} = \vec{0}$, $X \in \Gamma(TM)$;

4) $\nabla_X^N \eta = 0$, $X \in \Gamma(TM)$.

Задавая соответствующим способом эндоморфизм N, можно получить известные ранее классы N-связностей. Ниже приводятся далеко не все примеры N-связностей, естественным образом возникающих на многообразиях с почти контактной метрической структурой (или, более обще, на субримановых многообразиях контактного типа).

Примеры N-связностей

1. Связность Бежанку ∇^B с нулевым эндоморфизмом $N = 0$. Связность Бежанку ∇^B связана со связностью Леви-Чивита ∇^g помощью формулы [6]

$$\nabla_X^B Y = \tilde{\nabla}_X Y - \eta(X)\nabla_Y^g \vec{\xi} + (\omega + c)(X,Y)\vec{\xi}.$$

2. Связность Танака – Вебстера ∇^{TW} определяется как единственная связность, удовлетворяющая следующим условиям [6]:

1) $\nabla^{TW}\eta = 0$;

2) $\nabla^{TW}\vec{\xi} = 0$;

3) $\nabla^{TW} g = 0$;

4) $S(X,Y) = 2\omega(X,Y)\vec{\xi}$, $X, Y \in \Gamma(D)$;

5) $S(\vec{\xi}, \varphi X) = -\varphi S(\vec{\xi}, X)$, $X \in \Gamma(TM)$.

Связность ∇^{TW} совпадает с N-связностью в случае, когда $N = C$.

3. Связность Схоутена – ван Кампена ∇^{SK} определяется равенством

$$\nabla_X^{Sk} Y = (\nabla_X^g Y^h)^h + (\nabla_X^g Y^v)^v$$

и является N-связностью для случая, когда $N = C - \varphi$ [7].

4. В работе [8] доказывается существование и единственность связности $\overline{\overline{\nabla}}$, удовлетворяющей условиям:

1) $\overline{\overline{\nabla}}_Z : \Gamma(D) \to \Gamma(D)$;

2) $\overline{\overline{\nabla}}\vec{\xi} = 0$;

3) $\overline{\overline{\nabla}}\eta = 0$;

4) $S(X,Y) = \omega(X,Y)\vec{\xi}$;

5) $S(\vec{\xi}, X) = NX$, где N – симметрический оператор, $X, Y \in \Gamma(D)$, $Z \in \Gamma(TM)$.

5. Полученный В.В. Вагнером тензор кривизны неголономного многообразия коразмерности 1 совпадает с тензором кривизны N-связности с эндоморфизмом N: $TM \to TM$ специального строения [9, 10].

Из приведенных выше примеров видно, что класс N-связностей, используемых в геометрии почти контактных метрических многообразий, достаточно широк. Представление о связностях с кручением, не принадлежащих классу N-связностей, можно получить, например, ознакомившись с работой [2]. Об использовании N-связностей для построения продолженных структур можно узнать из работ [5, 11–14].

Известно, что почти контактное метрическое многообразие является многообразием Эйнштейна относительно связности с кручением только в том случае, когда эта связность риччи-плоская [1]. Для случая N-связности указанный результат в настоящей работе уточняется. А именно, приводятся необходимые ограничения на второй структурный эндоморфизм такой связности.

Во втором разделе мы сообщаем основные свойства N-связности с кососимметрическим кручением. Частично результаты этого раздела отражены в работе [4].

В третьем разделе приводятся примеры ∇^N-Эйнштейновых почти контактных метрических многообразий с кососимметрическим кручением.

2. Определение и основные свойства *N*-связности с кососимметрическим кручением

Рассмотрим почти контактное метрическое многообразие M нечетной размерности $n = 2m + 1$. Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ – заданная на многообразии M почти контактная метрическая структура, где φ – тензор типа (1,1), называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η – вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой, g – (псевдо) риманова метрика. При этом выполняются следующие условия:

1) $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}$;

2) $\eta(\vec{\xi}) = 1$;

3) $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$;

4) $d\eta(\vec{\xi}, X) = 0$,

где $X, Y \in \Gamma(TM)$. Здесь $\Gamma(TM)$ – модуль гладких векторных полей на M.

Гладкое распределение $D = \ker\eta$ называется распределением почти контактной структуры.

В качестве следствия условий 1) – 4) получаем

5) $\varphi\vec{\xi} = \vec{0}$;

6) $\eta\circ\varphi = 0$;

7) $\eta(X) = g\left(X, \vec{\xi}\right),\quad X \in \Gamma(TM)$.

Кососимметрический тензор $\Omega(X,Y) = g(X,\varphi Y)$ называется фундаментальной формой структуры. Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Гладкое распределение $D^{\perp} = span(\vec{\xi})$, ортогональное распределению D, называется оснащением распределения D. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^{\perp}$.

Многообразие Сасаки – контактное метрическое пространство, удовлетворяющее дополнительному условию $N_{\varphi} + 2d\eta\otimes\vec{\xi} = 0$, где $N_{\varphi}(X,Y) = [\varphi X, \varphi Y] + {}$ $+\varphi^2[X,Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$ – тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Выполнение условия $N_{\varphi} + 2d\eta\otimes\vec{\xi} = 0$ означает, что пространство Сасаки является нормальным пространством.

Более подробно подход автора к исследованию почти контактных метрических многообразий изложен в работе [5]. В основе этого подхода лежит активное использование внутренней, или, в другой терминологии, трансверсальной геометрии изучаемых пространств. Идея использования внутренней геометрии и внутренних инвариантов восходит к исследованиям Вагнера [9, 10].

Наряду с инвариантным методом в работе используется метод координат. А именно, карту $K(x^{\alpha})$ (α, β, $\gamma = 1,\ldots, n$; a, b, $c = 1,\ldots, n{-}1$) многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [7]. Пусть P: $TM{\to}D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D\oplus D^{\perp}$, и $K(x^{\alpha})$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D: $D^{\perp} = span(\vec{e}_a)$. Неголономному полю базисов $(\vec{e}_{\alpha}) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ соответствует поле кобазисов $\left(dx^a, \eta = \theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a\right)$. Имеет место равенство $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = {}$ $= 2\omega_{ba}\partial_n$. Условие $d\eta\left(\vec{\xi}, X\right) = 0$ влечет справедливость равенства $\partial_n\Gamma^n_a = 0$.

Для адаптированных карт $K(x^{\alpha})$ и $K'(x^{\alpha'})$ выполняются следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a\left(x^{a'}\right)$, $x^n = x^{n'} + x^n\left(x^{a'}\right)$.

Тензорное поле t-типа (p,q), заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), или трансверсальным, если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид $t = t^{a_1\ldots a_p}_{b_1\ldots b_q}\vec{e}_{a_1}\otimes\ldots\otimes\vec{e}_{a_p}\otimes dx^{b_1}\otimes\ldots\otimes dx^{b_q}$.

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:

$$t_b^a = A_{a'}^a A_b^{b'} t_{b'}^{a'},$$

где $A_a^{a'} = \dfrac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t_b^a$ являются компонентами допустимого тензорного поля того же типа. Заметим, что обращение в нуль производных $\partial_n t_b^a$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Внутренней линейной связностью ∇ [5] на многообразии с почти контактной метрической структурой называется отображение $\nabla : \Gamma(D)\times\Gamma(D)\to\Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$;

2) $\nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = (\vec{x}f)\,\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$;

3) $\nabla_{\vec{x}}(\vec{y}+\vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$,

где $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D.

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c\vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A_a^{a'}\vec{e}_{a'}$, где $A_a^{a'} = \dfrac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности: $\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_{c'}^c \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_{c'}^c \vec{e}_a A_b^{c'}$.

Отсюда, в частности, следует, что производные $\partial_n \Gamma_{ac}^d$ являются компонентами допустимого тензорного поля.

Известно [5], что на многообразии M существует единственная внутренняя связность ∇ с нулевым кручением, такая, что $\nabla_X g(Y,Z)=0,\quad X,Y,Z\in\Gamma(D)$. Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным $S(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X - P[X,Y]$, где P: $TM \to D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D\oplus D^{\perp}$.

Пусть ∇^g – связность Леви-Чивита и $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$ – ее коэффициенты. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 1 [5]. Коэффициенты связности Леви-Чивита почти контактного метрического многообразия в адаптированных координатах имеют вид

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c,\ \ \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab},\ \ \tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b,\ \ \tilde{\Gamma}_{na}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^a = 0,$$

где
$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{cd}\left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{ba}\right),\ \ \psi_a^b = g^{bc}\omega_{ac},$$

$$C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab},\ \ C_b^a = g^{bc} C_{ac}.$$

Предложение 2 [5]. Пусть N: $TM \to TM$ – эндоморфизм касательного расслоения почти контактного метрического многообразия M, такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$. Тогда на многообразии М существует единственная линейная связность ∇^N с кручением $S(X,Y)$, однозначно определяемая следующими условиями:

1) $S(X,Y) = 2\omega(X,Y)\vec{\xi} + \eta(X)NY - \eta(Y)NX, \ \ X,Y \in \Gamma(TM)$;
2) $\nabla_X^N Y = \nabla_X Y, \ \ X,Y \in \Gamma(D)$;
3) $\nabla_X^N \vec{\xi} = \vec{0}, \ \ X \in \Gamma(TM)$.

Определим в адаптированных координатах отличные от нуля коэффициенты связности ∇_X^N, положив $G_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $G_{na}^b = N_a^b$. Непосредственно проверяется, что определяемая тем самым связность удовлетворяет условиям предложения 2.

Из предложения 2 следует, что $\nabla_X^N g(Y,Z) = 0, \ \ X,Y,Z \in \Gamma(D)$. Последнее замечание подтверждает целесообразность назвать связность ∇^N полуметрической.

Положим $\tilde{S}(X,Y,Z) = g(S(X,Y),Z), \ \ X,Y,Z \in \Gamma(TM)$. В адаптированных координатах возможно ненулевые компоненты тензора $\tilde{S}(X,Y,Z)$ будут иметь следующий вид:

$\tilde{S}(\vec{e}_a, \vec{e}_b, \partial_n) = 2\omega_{ab}$;
$\tilde{S}(\vec{e}_a, \partial_n, \vec{e}_b) = -g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b)$;
$\tilde{S}(\partial_n, \vec{e}_a, \vec{e}_b) = g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b)$.

Как видно из полученных равенств, тензор $\tilde{S}(X,Y,Z)$ кососимметричен тогда и только тогда, когда $2\omega_{ab} = g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b)$ или $2\omega_{ab} = g_{bc} N_a^c$. Отсюда получаем $N_a^c = 2g^{cb}\omega_{ab}$. Таким образом, в силу равенства $\psi_a^b = g^{bc}\omega_{ac}$ окончательно получаем $N_a^c = 2\psi_a^c$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. Линейная связность ∇^N, заданная на почти контактном метрическом многообразии, кососимметрична тогда и только тогда, когда $N = 2\psi$, где эндоморфизм ψ: $TM \to TM$ определяется из равенства $\omega(X,Y) = g(\psi X, Y)$.

В инвариантном виде тензор кручения $\tilde{S}$ задается следующим образом: $\tilde{S} = \eta \wedge d\eta$.

В дальнейшем будем полагать, что для связности ∇^N со структурным эндоморфизмом $N = 2\psi$ будет использоваться обозначение ∇^ψ.

Теорема 2. Линейная связность ∇^ψ, заданная на почти контактном метрическом многообразии, метрическая тогда и только тогда, когда $L_{\vec{\xi}} g = 0$.

Доказательство. Из предложения 2 следует, что $\nabla_c^\psi g_{ab} = 0$. Вычислим $\nabla_n^\psi g_{ab}$. Имеем

$$\nabla_n^\psi g_{ab} = \partial_n g_{ab} - 2\psi_a^c g_{cb} + 2\psi_b^c g_{ac} = \partial_n g_{ab} + 2g^{cd}\omega_{da} g_{cb} + 2g^{cd}\omega_{db} g_{ac} =$$
$$= \partial_n g_{ab} + 2\omega_{ab} + 2\omega_{ba} = \partial_n g_{ab}.$$

Пусть $K(X,Y)Z$, $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$, тензор кривизны связности ∇^ψ. Вычислим ненулевые компоненты тензора $K(X,Y)Z$. Имеем

$$K^d_{abc} = R^d_{abc} + 4\omega_{ab}\psi^d_c, \quad K^d_{anc} = \nabla_a \psi^d_c + \partial_n \Gamma^d_{ac}.$$

Здесь $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a|e|}\Gamma^e_{b]c}$ – компоненты тензора кривизны Схоутена [5], определяемого равенством

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{P[X,Y]} Z - P[Q[X,Y],Z], \ Q = I - P.$$

Инвариантное представление тензора $K(X,Y)Z$ имеет вид

$$K(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \eta(Y)(\nabla_X \psi)Z - \eta(X)(\nabla_Y \psi)Z + 4\omega(X,Y)\psi Z,$$
$$X,Y,Z \in \Gamma(TM).$$

После необходимых вычислений в адаптированных координатах убеждаемся в справедливости следующих теорем.

Теорема 3. N-связность с кососимметрическим кручением, заданная на субримановом многообразии контактного типа, является плоской тогда и только тогда, когда $R(X,Y)Z = -4\omega(X,Y)\psi Z$, $\nabla\psi = 0$, $X,Y,Z \in \Gamma(D)$.

Теорема 4. Кручение кососимметрической линейной связности ∇^ψ, заданной на субримановом многообразии M, параллельно тогда и только тогда, когда $\nabla\omega = 0$, где ∇ – внутренняя метрическая связность.

Пусть почти контактное метрическое многообразие M является многообразием Сасаки. В этом случае имеет место равенство $\nabla\omega = 0$. Что позволяет в качестве следствия теоремы 4 сформулировать теорему 5.

Теорема 5. Кручение кососимметрической линейной связности ∇^ψ ($N = -2\varphi$), заданной на сасакиевом многообразии M, параллельно.

Таким образом, на каждом почти контактном метрическом многообразии существует единственная N-связность с кососимметрическим кручением. Будем называть эту связность канонической связностью.

3. Примеры ∇^N-Эйнштейновых почти контактных метрических многообразий

В работе [3] было установлено, что на многообразии Сасаки существует единственная связность с кососимметрическим кручением, совместимая с почти контактной метрической структурой. Такая связность была названа характеристической связностью. Обозначим характеристическую связность символом $\dot{\nabla}$. Мы покажем, что в случае многообразия Сасаки характеристическая связность совпадает с канонической связностью: $\dot{\nabla} = \nabla^\psi$. Действительно, ∇^ψ является канонической связностью и, тем самым, является единственной среди N-связностей, обладающих кососимметрическим кручением. С другой стороны, как следует из теоремы 2, каноническая связность совместима с почти контактной метрической структурой многообразия Сасаки. Таким образом, доказано следующее предложение.

Предложение 3. Для многообразия Сасаки каноническая связность является единственной связностью с кососимметрическим кручением.

Вернемся к компонентам тензора кривизны $K(X,Y)Z$ канонической связности:

$$K^d_{abc} = R^d_{abc} + 4\omega_{ab}\psi^d_c, \;\; K^d_{anc} = \nabla_a \psi^d_c - \partial_n \Gamma^d_{ac}.$$

Пусть $k(X,Y)$, $r(X,Y)$ – тензоры Риччи и Риччи – Схоутена [5] соответственно. В адаптированных координатах получаем

$$k_{ab} = r_{ab} + 4\omega_{da}\psi^d_b, \;\; k_{an} = k_{nn} = 0, \;\; k_{na} = \partial_n \Gamma^n_{ad} - \nabla_d \psi^d_a.$$

Пусть M – ∇^N-Эйнштейново почти контактное метрическое многообразие: $k(X,Y) = ag(X,Y)$. Из равенства $k_{nn} = 0$ следует, что $a = 0$. Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 6. Почти контактное метрическое многообразие ∇^N-Эйнштейново тогда и только тогда, когда оно риччи-плоское.

Пример 1. Пусть M – неголономное многообразие Кенмоцу. Покажем, что многообразие M не является ∇^N-Эйнштейновым многообразием. Действительно, пусть $k_{ab} = r_{ab} + 4\omega_{da}\psi^d_b = 0$. Или пусть $r_{ab} = 4\omega_{da}\psi^d_b$. Однако последнее равенство выполняться не может. В работе [15] было показано, что $\partial_n r_{ab} = 0$, в то время как $\partial_n \psi^d_b \neq 0$.

Пример 2. Пусть M – многообразие Сасаки. В работе [13] доказывается утверждение, что на сасакиевом многообразии существует единственная связность ∇ с кососимметричным кручением, совместимая со структурой многообразия: $\nabla\eta = \nabla\varphi = \nabla g = 0$.

Условие $r_{ab} = 4\omega_{da}\psi^d_b$ для многообразия Сасаки перепишется в виде $r_{ab} = 4\omega_{da}\psi^d_b$. Из свойств многообразия Сасаки следует, что последнее равенство эквивалентно равенству $r_{ab} = -4g_{ab}$. Таким образом, многообразие Сасаки является ∇^N-Эйнштейновым многообразием относительно канонической связности тогда и только тогда, когда выполняется равенство $r_{ab} = -4g_{ab}$.

4. Заключение

Из результатов, полученных в работе [3], следует, что на почти контактном метрическом многообразии существуют связности с кососимметрическим кручением, не являющиеся N-связностями. А именно, в цитируемой работе доказывается, что для некоторого класса почти контактных метрических многообразий существует связность с кососимметрическим кручением, сохраняющая почти контактную метрическую структуру. При этом эта связность определена однозначно, если ее кручение $\tilde{S}$ имеет следующее строение:

$$\tilde{S} = \eta \wedge d\eta + d^{\varphi}\Omega + \tilde{N}_{\varphi} - \eta \wedge \left(\vec{\xi} \rfloor N_{\varphi}\right),$$

где $$d^{\varphi}\Omega(X,Y,Z) = -d\Omega(\varphi X, \varphi Y, \varphi Z), \;\; \tilde{N}_{\varphi} = N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \vec{\xi}.$$

В работе [1] основное внимание уделяется метрическим связностям с кососимметрическим кручением. В то же время, в одной из версий теории Эйнштейна – Картана требование метричности используемой связности снимается [2, 16, 17]. Последнее замечание подчеркивает актуальность исследования ∇^N-Эйнштейновых многообразий, связности которых в общем случае не обладают свойством метричности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Agricola I.*, *Ferreira A.C.* Einstein manifolds with skew torsion // Quart. J. Math. 2014. V. 65. P. 717–741.
2. *Гордеева И.А.*, *Паньженский В.И.*, *Степанов С.Е.* Многообразия Римана – Картана // Итоги науки и техники (совр. мат-ка и ее прил-я). 2009. Т. 123. С. 110–141.
3. *Friedrich T.*, *Ivanov S.* Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory // Asian J. Math. 2002. V. 6. P. 303–336.
4. *Галаев С.В.* Плоские кососимметрические связности на многообразиях Сасаки // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. 2019. № 5. С. 20–23.
5. *Галаев С.В.* О распределениях со специальной квази-сасакиевой структурой // Вестник Волгоградского государственного университета. Сер. 1. Мат. Физ. 2017. № 2 (39). С. 6–17.
6. *Bejancu A*. Kähler contact distributions // Journal of Geometry and Physics. 2010. V. 60. P. 1958–1967.
7. *Schouten J.*, *Kampen E.* Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde // Math. Ann. 1930. V. 103. P. 752–783.
8. *Falbel E.*, *Gorodski C.* On contact sub-riemannian symmetric spaces // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. Serie 4. 1995. V. 28. No. 5. P. 571–589.
9. *Вагнер В.В.* Геометрия (n–1)-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.
10. *Вагнер В.В.* Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 301–327
11. *Букушева А.В.*, *Галаев С.В.* Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2017. № 48. С. 32–41.
12. *Галаев С.В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью // Математические заметки СВФУ. 2015. Т. 22. № 1. С. 25–34.
13. *Галаев С.В.* Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17. Вып. 2. С. 138–147.
14. *Galaev S.V.* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. V. 39. No. 1. P. 71–76.
15. *Букушева А.В.* О тензоре Схоутена – Вагнера неголономного многообразия Кенмоцу // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. 2019. № 5. С. 15–19.
16. *Крым В.Р.* Уравнение Якоби для горизонтальных геодезических на неголономном распределении и тензор кривизны Схоутена // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2018. № 3. С. 64–94. http://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2018.3/article.1.3.html
17. *Hamond R.T.* Torsion gravity // Rep. Prog. Phys. 2002. V. 65. P. 599–649.

Статья поступила 09.10.2020

Galaev S.V. (2021) ∇^N-EINSTEIN ALMOST CONTACT METRIC MANIFOLDS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 5–15

DOI 10.17223/19988621/70/1

Keywords: Almost contact metric manifold; interior connection; semimetric connection with skew-symmetric torsion; ∇^N-Einstein manifold.

On an almost contact metric manifold M, an N-connection ∇^N defined by the pair (∇, N), where ∇ is the interior metric connection and N: $TM \to TM$ is an endomorphism of the tangent bundle of the manifold M such that $N\vec{\xi}=\vec{0}$, $N(D)\subset D$, is considered. Special attention is paid to the case of a skew-symmetric N-connection ∇^N, which means that the torsion of an N-connection considered as a trivalent covariant tensor is skew-symmetric. Such a connection is uniquely defined and corresponds to the endomorphism $N=2\psi$, where the endomorphism ψ is defined by the equality $\omega(X,Y)=g(\psi X,Y)$ and is called in this work the second structure endomorphism of an almost contact metric manifold. The notion of a ∇^N-Einstein almost contact metric manifold is introduced. For the case $N=2\psi$, conditions under which almost contact manifolds are ∇^N-Einstein manifolds are found.

AMS Mathematics Subject Classification: MSC 53c15

Sergei V. GALAEV (Candidate of Physics and Mathematics, National Research Saratov State University named after G.N. Chernyshevsky, Saratov, Russian Federation). E-mail: sgalaev@mail.ru

REFERENCES

1. Agricola I., Ferreira A.C. (2014) Einstein manifolds with skew torsion. *Quarterly Journal of Mathematics*. 65. pp. 717–741.
2. Gordeeva I.A., Panzhenskiy V.I., Stepanov S.E. (2009) Mnogoobraziya Rimana – Kartana [Riemann–Cartan manifolds]. *Itogi nauki i tekhniki*. 123. pp. 110–141.
3. Friedrich T., Ivanov S. (2002) Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory. *Asian Journal of Mathematics*. 6. pp. 303–336.
4. Galaev S.V. (2019) Ploskiye kososimmetricheskiye svyaznosti na mnogoobraziyakh Sasaki [Flat skew-symmetric connections on Sasaki manifolds]. *Trudy seminara po geometrii i matematicheskomu modelirovaniyu*. 5. pp. 20–23.
5. Galaev S.V. (2017) O raspredeleniyakh so spetsial'noy kvazi-sasakiyevoy strukturoy [On distributions with special quasi-Sasakian structure]. *Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics*. 2(39). pp. 6–17.
6. Bejancu A. (2010) Kähler contact distributions. *Journal of Geometry and Physics*. 60(12). pp. 1958–1967.
7. Schouten J., Kampen E. (1930) Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde. *Mathematische Annalen*. 103. pp. 752–783.
8. Falbel E., Gorodski C. (1995) On contact sub-riemannian symmetric spaces. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Serie 4. 28(5). pp. 571–589.
9. Vagner V.V. (1941) Geometriya (*n*–1)-mernogo negolonomnogo mnogoobraziya v *n*-mernom prostranstve [Geometry of an (*n*–1)-dimensional nonholonomic manifold in an *n*-dimensional space]. *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu*. Moscow: Moscow Univ. Press. 5. pp. 173–255.
10. Vagner V.V. (1941) Geometricheskaya interpretatsiya dvizheniya negolonomnykh dinamicheskikh sistem [Geometric interpretation of the motion of nonholonomic dynamical systems] *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu*. Moscow: Moscow Univ. Press. 5. pp. 301–327.
11. Bukusheva A.V., Galaev S.V. (2017) Geometriya pochti kontaktnyh giperkelerovykh mnogoobraziy [Geometry of almost contact hyperkähler manifolds]. *Differentsial'naya geometriya mnogoobrazij figur*. 48. pp. 32–41.
12. Galaev S.V. (2015) Pochti kontaktnyye metricheskiye struktury, opredelyayemyye *N*-prodolzhennoy svyaznost'yu [Almost contact metric structures defined by an *N*-prolonged connection]. *Yakutian Mathematical Journal*. 22(1). pp. 25–34.
13. Galaev S.V. (2017) Prodolzhennyye struktury na koraspredeleniyakh kontaktnykh metricheskikh mnogoobraziy [Extended structures on codistributions of contact metric manifolds]. *Izvestiya Saratovskogo Universiteta Novaya Seriya – Matematika Mekhanika Informatika*. 17(2). pp. 138–147. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-138-147.

14. Galaev S.V. (2018) Admissible hyper-complex pseudo-Hermitian structures. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 39(1). pp. 71–76. DOI: 10.1134/S1995080218010122
15. Bukusheva A.V. (2019) O tenzore Skhoutena – Vagnera negolonomnogo mnogoobraziya Kenmotsu [On the Schouten–Wagner tensor of a nonholonomic Kenmotsu manifold]. *Trudy seminara po geometrii i matematicheskomu modelirovaniyu*. 5. pp. 15–19.
16. Krym V.R. (2018) Uravnenie Yakobi dlya gorizontal'nykh geodezicheskikh na negolonomnom raspredelenii i tenzor krivizny Skhoutena [Jacobi equation for horizontal geodesics on a nonholonomic distribution and Schouten curvature tensor]. *Differentsial'nye uravneniya i processy upravleniya*. 3. pp. 64–94. http://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2018.3/article.1.3.html
17. Hamond R.T. (2002) Torsion gravity. *Reports on Progress in Physics*. 65. pp. 599–649.

Received: October 9, 2020

УДК. 515.12 MSC: 54B20, 54A25
DOI 10.17223/19988621/70/2

Ф.Г. Мухамадиев

О ЛОКАЛЬНОЙ СЛАБОЙ τ-ПЛОТНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Изучены вопросы локальной слабой τ-плотности топологических пространств. Найдены достаточные условия сохранения свойства локальной слабой τ-плотности подмножеств топологических пространств. Показано, что подмножество локально плотного пространства также является локально слабо τ-плотным, если оно удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий: а) подмножество открыто в пространстве; б) подмножество всюду плотно в пространстве; в) подмножество канонически замкнуто в пространстве.

Ключевые слова: *локальная τ-плотность*, *локальная слабая τ-плотность*, *локально компактное пространство*, *пространства Хаттори.*

Актуальным с точки зрения теоретического исследования является раздел общей топологии, где изучаются свойства топологических пространств и их непрерывных отображений, операции над топологическими пространствами и их отображениями, классификация топологических пространств. Этот раздел общей топологии оперирует такими понятиями, как окрестность, замыкание, компактность, плотность, сепарабельность, кардинальное число, π-база множеств, сумма, пересечение, тихоновское произведение и другими. Обзор основных этапов развития теоретико-множественной топологии приведен в работе [1]. Нас интересуют локальная слабая τ-плотность и локальная τ-плотность топологических пространств.

Семейство ν непустых открытых подмножеств топологического пространства X называется π-базой, если для любого открытого подмножества U пространства X найдется элемент семейства ν, лежащий в множестве U.

В работе [2] введено понятие слабой плотности топологического пространства. Слабой плотностью топологического пространства X называется наименьшее кардинальное число $\tau \geq \aleph_0$, такое, что в X существует π-база, распадающаяся на τ центрированных систем открытых множеств. Другими словами, существует π-база $\mathcal{B} = \bigcup\{B_\alpha : \alpha \in A\}$, где B_α – центрированная система открытых множеств для каждого $\alpha \in A$ и $|A| = \tau$. Слабая плотность топологического пространства X обозначается через $wd(X)$. Если $wd(X) = \aleph_0$, то топологическое пространство X называется слабо сепарабельным. В работе [2] получены следующие результаты.

Предложение 1 [2]. Слабая плотность топологических пространств обладает следующими свойствами:

Wd1) $wd(X) \leq d(X)$ для любого топологического пространства X;

Wd2) Пусть Y – непрерывный образ топологического пространства X. Тогда $wd(Y) \leq wd(X)$;

Wd3) $wd(X) = d(X)$ для любого:

а) локального компакта X;

б) метрического пространства *X*;

с) топологического линейно упорядоченного пространства *X*;

Wd4) Если *Y* – всюду плотное подмножество топологического пространства *X*, то $wd(Y) = wd(X)$;

Wd5) Если *Y* открыто в *X*, то $wd(Y) \le wd(X)$;

Wd6). Если $wd(X_s) \le \tau$ для каждого $s \in S$ и $|S| \le 2^\tau$, то $wd\left(\prod_{s \in S} X_s\right) \le \tau$.

Топологическое пространство *X* называется локально слабо сепарабельным [3] в точке $x \in X$, если *x* имеет слабую сепарабельную окрестность в *X*. Топологическое пространство *X* называется локально слабо сепарабельным, если оно локально слабо сепарабельно в каждой точке $x \in X$. Понятие локальной слабой сепарабельности может быть обобщено для любого кардинала $\tau \ge \aleph_0$. Топологическое пространство *X* называется локально слабо τ-плотным в точке $x \in X$, если τ наименьшее кардинальное число, такое, что *x* имеет окрестность слабой плотности τ в *X* [4]. Локальная слабая плотность в точке *x* обозначается через $lwd(x)$. Локальная слабая плотность пространства *X* есть точная верхняя грань всех кардинальных чисел $lwd(x)$ для $x \in X$:

$$lwd(X) = \sup\{\ lwd(x)\ : x \in X\ \}.$$

Множество называется канонически замкнутым, если оно является замыканием своей внутренности [5]. Пусть задано семейство $\{X_s\}_{s \in S}$ попарно непересекающихся топологических пространств, т.е. $X_s \cap X_{s'} = \varnothing$ для $s = s'$. Рассмотрим множество $X = \bigcup_{s \in S} X_s$ и семейство τ всех множеств $U \subset X$, таких, что $U \cap X_s$ открыто в X_s для каждого $s \in S$. Легко видеть, что семейство τ удовлетворяет условиям топологии и потому определяет некоторую топологию на множестве *X*. Множество *X* с этой топологией называется суммой пространств $\{X_s\}_{s \in S}$ и обозначается $\underset{s \in S}{\oplus} X_s$ или $X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_k$, если $S = \{1, 2, \ldots, k\}$ [3].

Топологическое пространство *X* называется локально τ-плотным в точке $x \in X$, если τ наименьшее кардинальное число такое, что *x* имеет окрестность плотности τ в *X* [4]. Локальная плотность в точке *x* обозначается через $ld(x)$. Локальная плотность пространства *X* определяется следующим образом:

$$ld(X) = \sup\{\ ld(x)\ : x \in X\ \}.$$

Очевидно, что локальная плотность топологических пространств не превосходит плотности этого пространства, т.е. $ld(X) \le d(X)$.

Пусть *R* – числовая прямая и $A \subseteq R$. Топология $\tau(A)$ в *R* определяется следующим образом:

1) Для любой точки $x \in R$ множество $\{(x - \varepsilon,\ x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ является базой окрестностей точки *x*;

2) Для любой точки $x \in R \setminus A$ множество $\{[x,\ x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ является базой окрестностей точки *x* [6].

Пространство R с топологией Хаттори называется пространством Хаттори и обозначается через $H(A)$ [7, 8]. В работе [7] изучены некоторые кардинальные и топологические свойства пространства Хаттори.

Пусть τ_E – евклидовая топология в прямой и τ_S – топология Зоргенфрея. Для любых подмножеств $A, B \subseteq R$ имеем отношение $A \supseteq B$ тогда и только тогда, когда $\tau(A) \subseteq \tau(B)$, в частности, имеем $\tau(R) = \tau_E \subseteq \tau(A)$, $\tau(B) \subseteq \tau(\varnothing) = \tau_S$. Положим, $P_{top}(R) = \{\tau(A): A \subseteq R\}$. На множестве $P_{top}(R) = \{\tau(A): A \subseteq R\}$ вводится частичный порядок $\leq$ относительно отношения: $A \supseteq B$ тогда и только тогда, когда $\tau(A) \leq \tau(B)$ [6].

В работе [8] доказано, что пространство Хаттори $H(A)$ является локально компактным тогда и только тогда, когда множество $R \backslash A$ замкнуто в R и дискретно в прямой Зоргенфрея S.

Топологическое пространство X называется локально компактным, если для каждого $x \in X$ существует окрестность U точки x, такая, что $\overline{U}$ является компактным подпространством пространства X [3]. В работе [9] доказано, что локальные плотности пространства X и пространства n-й симметрической степени пространства X равны.

Наименьшее кардинальное число $\tau \geq \aleph_0$, такое, что каждое замкнутое подмножество пространства X, состоящее только из изолированных точек, имеет мощность $\leq \tau$, называется экстентом пространства X: $e(X) = \sup\{|Y|: Y$ – замкнутое дискретное в $X\}$ [3].

Спрэд $s(X)$ пространства X есть наименьший бесконечный кардинал τ, такой, что мощность дискретного подпространства X не превосходит τ, т.е. $s(X) = \sup\{\tau: \tau = |Y|, Y \subset X, Y$ – дискретно в $X\}$ [3].

В настоящей работе изучаются вопросы локальной слабой τ-плотности топологических пространств, устанавливаются достаточные условия сохранения свойства локальной слабой τ-плотности подмножеств топологических пространств. Доказывается, что подмножество локально плотного пространства также является локально слабо τ-плотным, если оно удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий: а) подмножество открыто в пространстве; б) подмножество всюду плотно в пространстве; в) подмножество канонически замкнуто в пространстве. Приводится доказательство того, что сумма, пересечение и произведение локально слабо τ-плотных пространств также являются локально слабо τ-плотными пространствами. А также рассматриваются в локально компактных пространствах вопросы локальной τ-плотности и локальной слабой τ-плотности. Доказывается, что в локально компактных пространствах эти два понятия совпадают.

Основные результаты

Утверждение 1. Пусть X – локально слабо τ-плотное пространство и $f: X \to Y$ – непрерывное открытое отображение «на». Тогда Y также является локально слабо τ-плотным пространством.

Доказательство. Так как f – отображение «на», то для всякой точки $y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ – непустое подмножество в X. Для каждой точки $x \in f^{-1}(y)$ существует окрестность O_x, такая, что O_x – слабо τ-плотно. Так как f – открытое отображение, то $f(O_x)$ – открытое множество в Y и содержит точку y. В силу непрерывности f и предложения 1 из [2], множество $f(O_x)$ – слабо τ-плотно в Y. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Пусть X локально слабо τ-плотно и G – некоторое подмножество X. Если G удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий: а) G открыто в X; б) G всюду плотно в X; в) G канонически замкнуто в X, то G является локально слабо τ-плотным.

Доказательство. а) Пусть G – непустое открытое подмножество пространства X. Для любой точки $x \in G$ по определению существует окрестность $O_x \subset X$, такая, что O_x слабо τ-плотно. Тогда $O_x \cap G = O_x^{'}$ – непустое открытое множество в G, содержащее точку x. Так как всякое открытое подмножество слабо τ-плотного пространства слабо τ-плотно, то $O_x^{'}$ слабо τ-плотно.

б) Пусть $M \subset X$ – всюду плотное подмножество пространства X. Рассмотрим произвольную точку $y \in M$. Так как X локально слабо τ-плотно, то существует окрестность $O_y \subset X$ точки y, такая, что O_y слабо τ-плотно. Рассмотрим $O_y \cap M = O_y^{'}$. Тогда $O_y^{'}$ непустое открытое подмножество в M. Кроме того, $O_y^{'} \subseteq O_y$ и $O_y^{'}$ всюду плотно в O_y. Так как всякое всюду плотное подмножество слабо τ-плотного пространства слабо τ-плотно (см. предложение 1), то $O_y^{'}$ слабо τ-плотно.

в) Пусть G – канонически замкнутое подмножество пространства X. Тогда существует открытое множество U, такое, что $G = [U]$. Тогда, в силу пункта а) U локально слабо τ-плотно. Возьмем произвольную точку $z \in G$ и слабо τ-плотную окрестность $O_z \subset X$. Тогда $O_z^{'} = O_z \cap G$ – непустое открытое подмножество в G. Рассмотрим $V = O_z \cap U$, поскольку всякое открытое подмножество слабо τ-плотного пространства слабо τ-плотно, то V слабо τ-плотно. С другой стороны, V всюду плотно в $O_z^{'}$. Тогда в силу предложения 1 из [2, Wd4] окрестность $O_z^{'}$ точки z является слабо τ-плотным. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. Пусть X_α – локально слабо τ-плотное пространство для каждого $\alpha \in A$. Тогда $X = \oplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ также локально слабо τ-плотно.

Доказательство. Пусть $x \in X$ – произвольная точка. Тогда существует такой $\alpha \in A$, что $x_\alpha \in X_\alpha$. Так как пространство X_α локально слабо τ-плотно, то существует окрестность $O_{x_\alpha} \subset X_\alpha$ точки x_α, где O_{x_α} – слабо τ-плотно. Так как пространство X_α открыто-замкнуто в X, то O_{x_α} открыто и слабо τ-плотно в X. Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. Пусть $X_i \subset X$, $i = 1, 2, ..., n$, и каждое X_i локально слабо τ-плотно. Тогда $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$ также локально слабо τ-плотно.

Доказательство. Пусть $x \in \bigcap_{i=1}^{n} X_i$ – произвольная точка. Тогда $x \in X_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Так как пространство X_i локально слабо τ-плотно, то существует окрестность $O_x^i \subset X_i$, такая, что O_x^i слабо τ-плотно для каждого $i = 1, 2, ..., n$. Положим $\bigcap_{i=1}^{n} O_x^i = O_x$. Тогда O_x открытое множество в O_x^i, $i = 1, 2, ..., n$, и в силу предложения 1 из [2] получим, что O_x слабо τ-плотно в $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$. Утверждение 4 доказано.

Теорема 1. Тихоновское произведение $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ локально слабо τ-плотно тогда и только тогда, когда X_i локально слабо τ-плотно для каждого $i = 1, 2, ..., n$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ и $p_i : X \to X_i$ проекция X на X_i, т. е. $p\ (\{x_k\}) = x_i$, $x = \{x_k\} \in X$, $k = 1, 2, ..., n$. Так как p_i $(i = 1, 2, ..., n)$ – непрерывные открытые отображения «на», то в силу предложения 1 получим, что для каждого $i = 1, 2, ..., n$ пространство X_i локально слабо τ-плотно.

Достаточность. Пусть $x = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ произвольная точка из *X*. Поскольку X_i локально слабо τ-плотно для каждого $i = 1, 2, ..., n$, то существует слабо τ-плотные окрестности O_{x_i} точки x_i в X_i. Пусть $O_x = O_{x_1} \times O_{x_2} \times ... \times O_{x_n}$ – декартово произведение окрестностей O_{x_i}, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда O_x слабо τ-плотно (см. предложение 1 из [2, Wd6]). Значит, O_x – слабо τ-плотная окрестность точки *x*. Теорема 1 доказана.

Пусть τ – некоторое бесконечное кардинальное число. Рассмотрим семейство топологических пространств $\{X_s : s \in S\}$, где $|S| \le 2^\tau$.

Теорема 2. Если все пространства X_s локально слабо τ-плотны и существует конечное множество $S_0 \subset S$, такое, что X_s слабо τ-плотны при всех $s \in S \setminus S_0$, то произведение $\prod_{s \in S} X_s$ локально слабо τ-плотно.

Доказательство. Возьмем любую точку $x = \{x_s : s \in S\}$ из произведения $\prod_{s \in S} X_s$. Для точки $x_s \in X_s$ при $s \in S_0$, в силу локальной слабой τ-плотности пространства X_s существует окрестность U_s слабой плотности $\le \tau$. Множество $\prod_{s \in S_0} U_s \times \prod_{s \in S \setminus S_0} X_s$ является окрестностью точки x в $\prod_{s \in S} X_s$ и в силу предложения 1 из [2] $wd\left(\prod_{s \in S_0} U_s \times \prod_{s \in S \setminus S_0} X_s \right) \le \tau$. Итак, мы нашли слабую τ-плотную окрестность точки x в $\prod_{s \in S} X_s$. В силу произвольности точки *x*, произведения $\prod_{s \in S} X_s$ локально слабо τ-плотно. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Если пространство X_s локально слабо сепарабельно для каждого $s \in S$ и $|S| \le c$ и, кроме того, существует конечное подмножество S_0 множества S, такое, что все X_s слабо сепарабельны для $s \in S \setminus S_0$, то произведение $\prod_{s \in S} X_s$ локально слабо сепарабельно.

Теорема 3. Пусть произведение $\prod_{s \in S} X_s$ локально слабо τ-плотно. Тогда существует конечное подмножество S_0 множества *S*, такое, что X_s является слабо τ-плотным при $s \in S \setminus S_0$.

Доказательство. Берем произвольную точку $x = \{x_s : s \in S\}$ из произведения $\prod_{s \in S} X_s$. В силу локальной слабой τ-плотности произведения $\prod_{s \in S} X_s$, точка *x* имеет базовую окрестность $\prod_{s \in S_0} U_s \times \prod_{s \in S \setminus S_0} X_s$ слабую плотности τ, где S_0 конечное подмножество множества S и $x_s \in U_s$ для $s \in S_0$. Так как слабая плотность сохраняется при открытом отображении и проектирование есть открытое отображение, то все X_s слабо τ-плотны при $s \in S \setminus S_0$. Теорема 3 доказана.

Следствие 2. Пусть произведение $\prod_{s \in S} X_s$ локально слабо сепарабельно. Тогда существует конечное подмножество S_0 множества *S*, такое, что все X_s слабо сепарабельны при $s \in S \setminus S_0$.

Утверждение 5. Пусть *X* – локально компактное пространство. Тогда пространства *X* локально τ-плотно в том и только в том случае, когда *X* локально слабо τ-плотно.

Доказательство. Сначала докажем случай, когда *X* – локально компактное пространство. Тогда следующие два условия эквивалентны: 1) *X* локально слабо τ-плотно; 2) *X* локально τ-плотно. Пусть $x \in X$ и O_x – слабо τ-плотная окрестность точки x. Поскольку всякое открытое подмножество локально компактного пространства локально компактно, то O_x локально компактно. Так как слабо τ-плотное локально компактное пространство τ-плотно (см. предложение 1 из [2, Wd3]), то O_x τ-плотно. Следовательно, *X* локально τ-плотно. Обратное утверждение следует из того, что $wd(X) \le d(X)$ [2].

Как мы отмечали выше, в работе [8] доказано, что пространства Хаттори $H(A)$ является локально компактным тогда и только тогда, когда множество $R \setminus A$ замкнуто в *R* и дискретно в прямой Зоргенфрея *S*. Поэтому, в силу утверждения 5, мы приходим к следующему следствию.

Следствие 3. Континуальная степень пространства Хаттори $(H(A))^c$ слабо сепарабельно при любом *A* из *R*.

Следствие 4. Пусть множество $R \setminus A$ замкнуто в *R* и дискретно в прямой Зоргенфрея *S*. Тогда континуальная степень пространства Хаттори $(H(A))^c$ локально сепарабельна и локально слабо сепарабельна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров П.С.*, *Федорчук В.В.*, *Зайцев В.И.* Основные моменты в развитии теоретико-множественной топологии // УМН. 1978. Т. 33. Вып. 3(201). С. 3–48.
2. *Бешимов Р.Б.* О слабой плотности топологических пространств // ДАН РУз. 2000. № 11. С. 10–13.
3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
4. *Beshimov R.B.*, *Mukhamadiev F.G.*, *Mamadaliev N.K.* The local density and the local weak density of hyperspaces // International Journal of Geometry – Romania. 2015. V. 4. No. 1. P. 42–49.
5. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций. М.: МГУ, 1989. 151 с.
6. *Hattory Y.* Order and topological structures of posets of the formal balls on metric spaces // Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Ser. B Math. Sci. 2010. V. 43. P. 13–26.
7. *Beshimov R.B.*, *Mukhamadiev F.G.* Cardinal properties of Hattori spaces and their hyperspaces // Questions and Answers in General Topology. 2015. V. 33. P. 33–38.
8. *Bouziad A.*, *Sukhacheva E.* On Hattori spaces. // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 2017. No. 2. P. 213–223. DOI: 10.14712/1213-7243.2015.199.
9. *Yuldashev T.K.*, *Mukhamadiev F.G.* The local density and the local weak density in the space of permutation degree and in Hattori space // Ural Mathematical Journal. 2020. V. 6. No. 2. P. 108–116.

Статья поступила 22.01.2021

Mukhamadiev F.G. (2021) ON LOCAL WEAK τ-DENSITY OF TOPOLOGICAL SPACES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 16–23

DOI 10.17223/19988621/70/2

Keywords: local τ-density, local weak τ-density, locally compact space, Hattori spaces.

A topological space X is locally weakly separable [3] at a point $x \in X$ if x has a weakly separable neighbourhood. A topological space X is locally weakly separable if X is locally weakly separable at every point $x \in X$. The notion of local weak separability can be generalized for any cardinal $\tau \geq \aleph_0$. A topological space X is locally weakly τ-dense at a point $x \in X$ if τ is the smallest cardinal number such that x has a weak τ-dense neighborhood in X [4]. The local weak density at a point x is denoted as $lwd(x)$. The local weak density of a topological space X is defined in following way: $lwd(X) = \sup\{\, lwd(x) \ : x \in X \,\}$. A topological space X is locally τ-dense at a point $x \in X$ if τ is the smallest cardinal number such that x has a τ-dense neighborhood in X [4]. The local density at a point x is denoted as $ld(x)$. The local density of a topological space X is defined in following way: $ld(X) = \sup\{\, ld(x) \ : x \in X \,\}$. It is known that for any topological space we have $ld(X) \leq d(X)$.

In this paper, we study questions of the local weak τ-density of topological spaces and establish sufficient conditions for the preservation of the property of a local weak τ-density of subsets of topological spaces. It is proved that a subset of a locally τ-dense space is also locally weakly τ-dense if it satisfies at least one of the following conditions: (a) the subset is open in the space; (b) the subset is everywhere dense in space; (c) the subset is canonically closed in space. A proof is given that the sum, intersection, and product of locally weakly τ-dense spaces are also locally weakly τ-dense spaces. And also questions of local τ-density and local weak τ-density are considered in locally compact spaces. It is proved that these two concepts coincide in locally compact spaces.

AMS Mathematical Subject Classification: 54B20, 54A25

Farkhod Gafurjanovich MUKHAMADIEV (Doctor of Philosophy (PhD) Physical and Mathematical Science, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; Yeoju Technical Institute in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: farhod8717@mail.ru

REFERENCES

1. Aleksandrov P.S., Fedorchuk V.V., Zaytsev V.I. (1978) The main aspects in the development of set-theoretical topology. *Russian Mathematical Surveys*. 33: 3(1). pp. 1–53.
2. Beshimov R.B. (2000) O slaboy plotnosti topologicheskikh prostranstv [On weak density of topological spaces]. *Doklady Akademii Nauk Respubliki Uzbekistan*. 11. pp. 10–13.
3. Engelking R. (1989) *General Topology*. Berlin: Heldermann.
4. Beshimov R.B., Mukhamadiev F.G., Mamadaliev N.K. (2015) The local density and the local weak density of hyperspaces. *International Journal of Geometry*. 4(1). pp. 42–49.
5. Arkhangel'skii A.V. (1992) *Topological Function Spaces*. Springer.
6. Hattory Y. (2010) Order and topological structures of posets of the formal balls on metric spaces. *Memoirs of the Faculty of Science and Engineering Shimane University. Series B. Mathematical Science.* 43. pp. 13–26.
7. Beshimov R.B., Mukhamadiev F.G. (2015) Cardinal properties of Hattori spaces and their hyperspaces. *Questions and Answers in General Topology*. 33. pp. 33–38.
8. Bouziad A., Sukhacheva E. (2017) On Hattori spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*. 58(2). pp. 213–223. DOI: 10.14712/1213-7243.2015.199.
9. Yuldashev T.K., Mukhamadiev F.G. (2020) The local density and the local weak density in the space of permutation degree and in Hattori space. *Ural Mathematical Journal*. 6(2). pp. 108–116.

Received: January 22, 2021

МЕХАНИКА

УДК 537.85; 536.24
DOI 10.17223/19988621/70/3

С.И. Володченков, А.А. Глазунов, С.В. Синяев

ЭЛЕКТРОИМПУЛЬСНЫЙ НАГРЕВ РЕАКЦИОННОСПОСОБНЫХ СОСТАВОВ ТОНКОСТЕННЫМИ ПРОВОДНИКАМИ-ТЭНАМИ В РЕЖИМАХ МНОГООЧАГОВОГО ЗАЖИГАНИЯ МЕТАТЕЛЬНЫХ ЗАРЯДОВ[1]

Представлены результаты численно-аналитического исследования процессов электроимпульсного нагрева теплопроводных сред проводниками из металлической фольги (тэнов) применительно к устройствам многоочагового зажигания комбинированных метательных зарядов. Определены условия равномерного нагрева таких проводников в режимах интенсивной теплоотдачи в прилегающие слои реакционноспособных составов при различных условиях теплообмена.

Ключевые слова: *электрический разряд*, *импульсный нагрев*, *проводник-тэн*, *нагреваемая среда*, *теплообмен*, *условие однородности*, *сопряженная задача.*

В последние десятилетия получили развитие электротермохимические (ЭТХ) ускорители [1, 2], обладающие рядом преимуществ перед традиционными пороховыми ствольными системами за счет дополнительного ввода электрической энергии в пороховой заряд с помощью электроразрядной плазмы. Процесс электроимпульсной генерации плазмы энергозатратен, а относительно низкая плотность запасаемой электрической энергии может приводить к неприемлемо высоким весогабаритным характеристикам накопителя. В [3, 4] предложена и экспериментально исследована энергетически экономичная плазмозамещающая схема ЭТХ-зажигания метательных зарядов, основанная на замене плазменной субстанции высокотемпературными двухфазными продуктами сгорания дополнительного заряда (ДЗ) высокоэнергетического гетерогенного топлива. Эффективное многоочаговое зажигание ДЗ осуществляется потоками раскаленных металлических частиц, генерируемых в результате капельной деструкции проводников из металлической фольги под действием электрического разряда конденсаторной батареи [5, 6]. Такие устройства энергетически экономичны по сравнению с плазмотронами и не требуют высоковольтных источников электрической энергии, поскольку при таком способе зажигания основную часть вводимой в пороховой заряд энергии составляют высокоэнергетические двухфазные продукты сгорания ДЗ. Нагрев топлива ДЗ происходит в два этапа: при омическом нагреве проводников до нача-

[1] Данное научное исследование (№8.2.12.2018) выполнено при поддержке Программы повышения конкурентоспособности ТГУ.

ла их мелкодисперсного капельного разрушения и каплями расплавленного металла, образованными при тепловой и электродинамической капельной деструкции проводников. Увеличение суммарной контактной поверхности проводника после его деструкции существенно ускоряет процесс нагрева и зажигания прилегающих слоев топлива ДЗ. В [7, 8] исследована возможность дополнительного уменьшения запасаемой электрической энергии за счет нанесения высокоэнергетических пиротехнических покрытий на фольговые проводники. Результаты экспериментов на ЭТХ-ускорителе калибром 35 мм [3] подтвердили эффективность и энергетическую экономичность такого решения.

Условие равномерного нагрева фольговых проводников для их капельной деструкции исследовано экспериментально [9]. Капельная деструкция проводника происходит, если при начале его плавления тепловое состояние проводника близко к однородному [10]. Выполнение этого условия накладывает ограничение на толщину проводника. Ее допустимое значение зависит от теплофизических параметров фольги и инициируемого состава, условий их теплообмена, а также от характерной частоты нагревающего проводник тока. В рассматриваемой задаче мощность омического нагрева проводника из металлической фольги практически однородна по его объему [11], а неравномерное распределение температуры обусловлено теплообменом с нагреваемой средой. В настоящей работе получено выражение для оценки допустимой толщины проводника, температурное состояние которого близко к однородному на момент начала его плавления. Применимость оценочного выражения подтверждается решением сопряженной тепловой задачи для характерных импульсных режимов омического нагрева проводников-тэнов.

Постановка и решение сопряженной тепловой задачи

Проводник-тэн длиной l, шириной a и толщиной h нагревается током I. Развертка тэна с направлением тока плотностью $\mathbf{j}$ и удельным тепловым потоком q приведена на рис. 1. Предполагается, что мощность омического нагрева тэна $N(t) = R(t) \cdot I(t)^2$ равномерно распределена по его объему. $R(t)$ – сопротивление тэна в процессе электрического разряда, t – время. Плотность материала тэна – ρ, удельные значения его теплоемкости c и его теплопроводности k – постоянные величины. Распределение температуры в тэне изменяется по его толщине в направлении оси x.

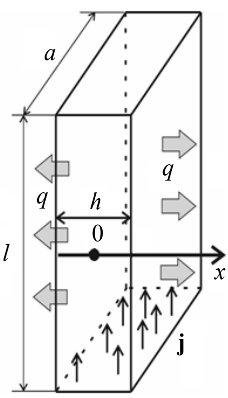


Рис. 1. Развертка тэна в декартовых координатах, q – тепловой поток в среду

Fig. 1. Scan of a heater in Cartesian coordinates; q is the heat flow into a medium

В декартовых координатах уравнение теплопроводности для развертки тэна (см. рис. 1) приводится к виду

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{N(t)}{m \cdot c}, \quad \theta = T - T_0, \quad -0.5h \le x \le 0.5h,$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c}, \quad \frac{\partial\theta(t,\, x=0)}{\partial x} = 0, \qquad (1)$$

где x – координата соответствующего поперечного сечения тэна, T – его температура, T_0 – начальная температура тэна и реакционноспособной среды, находящейся в тепловом контакте с тэном, $m = a \cdot l \cdot h \cdot \rho$ – масса тэна. В сечении $x = 0$ выполняется условие симметрии. Тепловое состояние среды описывается соотношениями

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}, \quad \nu = T_1 - T_0, \quad x \ge 0.5h\,, \ \alpha_1 = \frac{k_1}{\rho_1 \cdot c_1}, \quad \nu(t,\infty) = 0. \tag{2}$$

В (2) индексом «1» отмечены температура среды и ее теплофизические параметры, значения которых – постоянные величины. На границе с тэном выполняются условия идеального теплового контакта и равенства тепловых потоков:

$$\theta(t, 0.5h) = \nu(t, 0.5h), \qquad k \frac{\partial \theta(t, 0.5h)}{\partial x} = k_1 \frac{\partial \nu(t, 0.5h)}{\partial x}. \tag{3}$$

При идеальном тепловом контакте тэна со средой температурная неоднородность в тэне максимальна, поэтому ограничение на толщину тэна h будет заведомо выполняться при других режимах теплообмена. Тепловая задача (1) – (3) решается методом интегрального преобразования Лапласа. В изображениях задача преобразуется к виду

$$p \cdot \tilde{\theta}(x) = \alpha \cdot \frac{d^2 \tilde{\theta}}{dx^2} + \frac{\tilde{N}}{m \cdot c}, \quad p \cdot \tilde{\nu}(x) = \alpha_1 \cdot \frac{d^2 \tilde{\nu}(x)}{dx^2},$$

$$k \cdot \frac{d\tilde{\theta}(0.5h)}{dx} = k_1 \cdot \frac{d\tilde{\nu}(0.5h)}{dx}, \quad \tilde{\theta}(0.5h) = \tilde{\nu}(0.5h), \tag{4}$$

где p – параметр преобразования, а волна сверху обозначает изображение соответствующей функции. Решение задачи (4) определяется в виде

$$\tilde{\theta}(x) = \frac{\tilde{N}}{m \cdot c \cdot p} \left[1 - \frac{\exp\left(-\dfrac{(0.5h + x) \cdot q}{\sqrt{\alpha}}\right) + \exp\left(-\dfrac{(0.5h - x) \cdot q}{\sqrt{\alpha}}\right)}{(b_1 + 1) \cdot \left(1 - b \cdot \exp\left(-\dfrac{h \cdot q}{\sqrt{\alpha}}\right)\right)} \right],$$

$$\tilde{\nu}(x) = \frac{b_1 \cdot \tilde{N}}{m \cdot c \cdot p} \frac{\left(1 - \exp\left(-\dfrac{h \cdot q}{\sqrt{\alpha}}\right)\right) \exp\left(-\dfrac{(x - 0.5h) \cdot q}{\sqrt{\alpha_1}}\right)}{(b_1 + 1)\left(1 - b \cdot \exp\left(-\dfrac{h \cdot q}{\sqrt{\alpha}}\right)\right)}, \tag{5}$$

$$q = \sqrt{p}\,, \quad b_1 = \sqrt{\frac{k \cdot p \cdot c}{k_1 \cdot p_1 \cdot c_1}}, \quad b = \frac{b_1 - 1}{b_1 + 1}.$$

Коэффициенты b_1 и b – безразмерные параметры, причем $|b| < 1$. Выражение

$$\left(1 - b \cdot \exp\left(-\frac{h \cdot q}{\sqrt{\alpha}}\right)\right)^{-1}$$

разлагается в ряд Макларена:

$$\left(1 - b \cdot \exp\left(-\frac{h \cdot q}{\sqrt{\alpha}}\right)\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cdot \exp\left(-\frac{n \cdot h \cdot q}{\sqrt{\alpha}}\right),$$

при этом решение (5) принимает вид

$$\tilde{\theta}(x)=\frac{\tilde{N}}{m\cdot c\cdot p}\cdot\left[1-\frac{1}{b_1+1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b^n\cdot\left(\exp\left(-d_1(n,x)\cdot q\right)+\exp\left(-d_2(n,x)\cdot q\right)\right)\right],$$

$$\tilde{v}(x)=\frac{b_1\cdot\tilde{N}}{m\,c(b_1+1)p}\sum_{n=0}^{\infty}b^n\left(\exp\left(-d_3(x)\cdot q\right)\left(\exp\left(-d_2(n,h)\cdot q\right)-\exp\left(-d_1(n,h)\cdot q\right)\right)\right),\quad(6)$$

$$d_{1,2}(n,x)=\alpha^{-0.5}\cdot[(n+0.5)\cdot h\pm x],\quad d_3(x)=\alpha_1^{-0.5}\cdot(x-0.5h).$$

Оригиналы функций в (6) определяются по теореме о свертке с учетом обратного преобразования Лапласа $L^{-1}\left\{\frac{\exp(-d\cdot q)}{p}\right\}=\operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{t}}\right),\ d\geq 0$:

$$T(t,x)=T_0+\frac{1}{m\cdot c}\int_0^t N(\tau)\left\{1-\frac{1}{b_1+1}\sum_{n=0}^{\infty}b^n\left[\operatorname{erfc}\frac{(n+0.5)h+x}{2\sqrt{\alpha(t-\tau)}}+\operatorname{erfc}\frac{(n+0.5)h-x}{2\sqrt{\alpha(t-\tau)}}\right]\right\}d\tau,$$

$$T_1(t,x)=T_0+\frac{b_1}{m\cdot c}\int_0^t\frac{N(\tau)}{b_1+1}\times\quad(7)$$

$$\times\left\{\sum_{n=0}^{\infty}b^n\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-0.5h}{2\sqrt{\alpha_1(t-\tau)}}+\frac{n\cdot h}{2\sqrt{\alpha(t-\tau)}}\right)-\operatorname{erfc}\left(\frac{x-0.5h}{2\sqrt{\alpha_1(t-\tau)}}+\frac{(n+1)\cdot h}{2\sqrt{\alpha(t-\tau)}}\right)\right]\right\}d\tau.$$

Ряды в (7) являются быстро сходящиеся, для их вычисления с точностью до построения достаточно нескольких первых слагаемых. При $b_1 = 1$ функции $T(t,x)$ и $T_1(t,x)$ в (7) определяются в виде конечных квадратур:

$$T(t,x)=T_0+\frac{1}{m\cdot c}\int_0^t N(\tau)\left\{1-\frac{1}{2}\left[\operatorname{erfc}\frac{0.5h+x}{2\sqrt{\alpha(t-\tau)}}+\operatorname{erfc}\frac{0.5h-x}{2\sqrt{\alpha(t-\tau)}}\right]\right\}d\tau;$$

$$T_1(t,x)=T_0+\frac{1}{2m\cdot c}\int_0^t N(\tau)\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-0.5h}{2\sqrt{\alpha_1(t-\tau)}}\right)-\operatorname{erfc}\left(\frac{x-0.5h}{2\sqrt{\alpha_1(t-\tau)}}+\frac{h}{2\sqrt{\alpha(t-\tau)}}\right)\right]d\tau.$$

Одним из необходимых условий электроимпульсной капельной деструкции тэна является такой режим его нагрева, при котором его тепловое состояние близко к однородному [10]. Степень однородности теплового состояния тэна перед началом его плавления может быть описана следующим безразмерным параметром:

$$\varphi=\frac{T_h-T_0}{T_m-T_0},\quad(8)$$

где T_m – температура плавления материала тэна, $T_h=T(t_m,x=0.5h)$ – температура тэна на границе со средой в момент t_m, при котором $T(t_m,x=0)=T_m$, т.е. температура в центральном сечении тэна достигает величины плавления. С помощью (7) выражение (8) преобразуется к виду

$$\varphi=\frac{\int_0^{t_m}N(\tau)\left\{1-\frac{1}{b_1+1}\sum_{n=0}^{\infty}b^n\left[\operatorname{erfc}\frac{(n+1)h}{\sqrt{\alpha(t_m-\tau)}}+\operatorname{erfc}\frac{nh}{\sqrt{\alpha(t_m-\tau)}}\right]\right\}d\tau}{\int_0^{t_m}N(\tau)\left[1-\frac{2}{b_1+1}\sum_{n=0}^{\infty}b^n\operatorname{erfc}\frac{(2n+1)h}{2\sqrt{\alpha(t_m-\tau)}}\right]d\tau}.\quad(9)$$

Условие «однородности» теплового состояния тэна перед его плавлением определяется соотношениями

$$1-\varepsilon \le \varphi \le 1, \quad 0 \le \varepsilon \ll 1. \tag{10}$$

При постоянной мощности N выражение (9) значительно упрощается за счет того, что в него не входят электротехнические параметры устройства зажигания заряда. С учетом обратного преобразования Лапласа

$$L^{-1}\left\{\frac{\exp(-g\cdot q)}{p^2}\right\}=\left(t+0.5g^2\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{g}{2\sqrt{t}}\right)-\sqrt{\frac{t}{\pi}}\cdot g\cdot\exp\left(-\frac{g^2}{4t}\right), \ g\ge 0,$$

интегралы в выражении для коэффициента φ определяются в явном виде и выражение (10) приводится к виду

$$\varphi=\frac{b_1+1-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b_1-1}{b_1+1}\right)^n\left[f(n+1)+f(n)\right]}{b_1+1-2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b_1-1}{b_1+1}\right)^n f(n+0.5n)}, \tag{11}$$

$$f(n)=(1+2\cdot b_2\cdot n)\operatorname{erfc}\left(\sqrt{b_2\cdot n}\right)-2\sqrt{b_2\cdot n\cdot\pi^{-1}}\exp(-b_2\cdot n),$$

$$b_2=h^2\cdot\rho\cdot c\cdot(k\cdot t_m)^{-1}.$$

Таким образом, коэффициент «однородности» φ является функцией двух безразмерных комплексов – b_1 и b_2 . Их значения определяются теплофизическими характеристиками тэна и среды, толщиной тэна h и временем его нагрева до температуры плавления t_m. Значение t_m зависит от электротехнических параметров устройства и может регулироваться величиной начального напряжения накопителя электрической энергии. Основным параметром тэна, влияющим на процесс его капельной деструкции, является толщина фольги h, из которой изготовлен тэн. Чем меньше h, тем более равномерно нагрет тэн к моменту начала его капельной деструкции. Из (11) следует: $\varphi(h\to 0)\to 1$, т.е. при уменьшении толщины тэна распределение температуры в момент t_m стремится к однородному, что обеспечивает оптимальные условия для его объемной капельной деструкции [9].

Результаты расчетов

Влияние режима мощности нагрева $N(t)$ на параметр «однородности» φ определяется при трех характерных зависимостях $N_j(t)$:

$$N_1=A_1, \quad N_2(t)=A_2(e^{-q_1\cdot t}-e^{-q_2\cdot t}), \quad N_3(t)=A_3\,e^{-q_3\cdot t}\sin^2(q_4\cdot t),$$

которые реализуются при квазистационарном нагреве, нагреве униполярным импульсом тока и колебательном затухающем токе соответственно. Режим $N_2(t)$ характерен при нагреве тэна низковольтным источником энергии [3], а колебательный режим $N_3(t)$ моделирует его индукционный нагрев [6]. На рис. 2 показаны эти зависимости применительно к нагреву тэна из магниевой фольги толщиной $h_0 = 100$ мкм, нагреваемого за время $t_m = 5$ мс до температуры плавления. Длина тэна $l = 0.1$ м, его ширина $a = 0.02$ м. Параметры нагреваемой среды: $k_1 = 40$ Вт·м$^{-1}$·град$^{-1}$, $\rho_1 = 7.7$ кг·дм$^{-3}$, $c_1 = 650$ Дж·кг$^{-1}$·град$^{-1}$. Режимы нагрева реализуются при следующих значениях тепловых параметров: $A_1(h_0) = 0.47$ МВт, $A_2(h_0) = 3.8$ МВт, $A_3(h_0) = 1.3$ МВт, $q_1(h_0) = 162$ с$^{-1}$, $q_2(h_0) = 243$ с$^{-1}$, $q_3(h_0) = 120$ с$^{-1}$, $q_4 = 482$ с$^{-1}$.

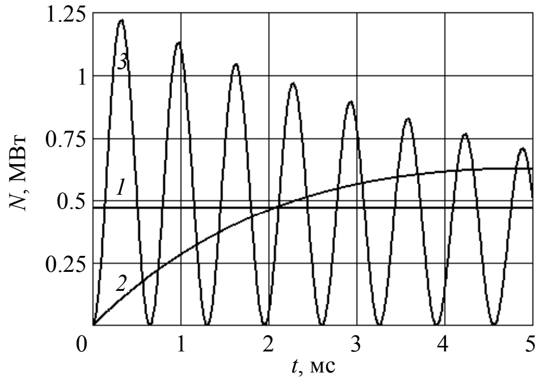


Рис. 2. Три режима мощности омического нагрева тэна из магниевой фольги
Fig. 2. Three power modes for ohmic heating of the heater made of magnesium foil

Значения параметра «однородности» температуры φ для этих режимов нагрева следующие: $\varphi_1 = 0.974$, $\varphi_2 = 0.966$, $\varphi_3 = 0.967$, т. е. перепад температуры тэна в момент $t_m = 5$ мс составляет 2.6, 3.4 и 3.3 % соответственно. На рис. 3 построены зависимости $\varphi_j(h)$ для каждого из трех режимов нагрева тэнов с толщиной магниевой фольги h от 20 до 200 мкм. Время нагрева – $t_m = 5$ мс. Значения тепловых параметров для тэнов толщиной h и их массы m определяются формулами при $h_0 = 100$ мкм:

$$A_j = \frac{h}{h_0} A_j(h_0), \quad q_1 = \frac{h_0}{h} q_1(h_0), \quad q_2 = \frac{h}{h_0} q_2(h_0),$$

$$q_3 = \frac{h_0}{h} q_3(h_0), \quad q_4 = 500, \quad m = m(h_0)\frac{h}{h_0}.$$

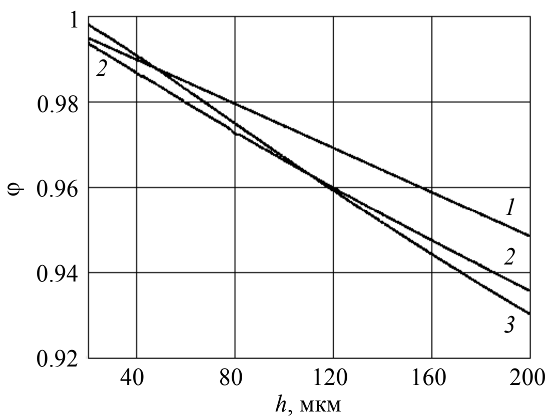


Рис. 3. Зависимости параметра «однородности» тэна от его толщины при трех режимах нагрева
Fig. 3. The "uniformity" parameter of the heater as the functions of its thickness in three heating modes

При всех режимах нагрева тепловая неоднородность в тэне растет с увеличением его толщины до 6.5 %. Параметр «однородности» φ_j мало «чувствителен» к режиму омического нагрева тэна. Поэтому целесообразно оценку допустимой толщины тэна, обеспечивающей его объемную капельную деструкцию за фиксированное время нагрева, проводить в приближении постоянной мощности нагрева (11). Такое допущение существенно упрощает оценку и расширяет область ее применимости, поскольку при ее расчете не используются электротехнические параметры устройства зажигания заряда.

Для оценки толщины тэна при различных временах его нагрева удобно ввести усредненный по трем режимам нагрева параметр «однородности»:

$$\varphi_{ср} = \frac{1}{3}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) .$$

На рис. 4 приведены зависимости $\varphi_{ср}(t_{mj}, h)$ при фиксированных временах нагрева тэна $t_{mj} = 1$, 2 и 5 мс.

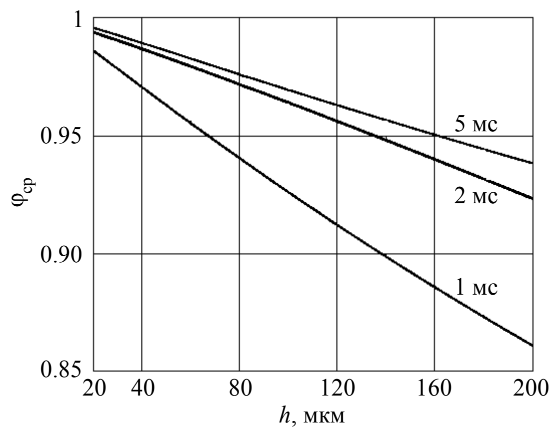


Рис. 4. Усредненные зависимости параметра «однородности» для тэна из магниевой фольги различной толщины при трех временах его нагрева
Fig. 4. Averaged dependences of the "uniformity" parameter for the heater made of magnesium foil of different thickness at three heating times

С уменьшением времени нагрева тэна его температурная неоднородность заметно увеличивается, что должно компенсироваться уменьшением толщины фольги. Так, при нагреве тэна за 5 мс температурная неоднородность менее 5 % достигается для магниевой фольги толщиной до ~ 200 мкм, при нагреве за 2 мс – до ~125 мкм, а при 1 мс – до ~ 65 мкм.

Приближение «тонкого» тэна

Под термином «тонкий» подразумевается тэн с близким к однородному тепловым состоянием при импульсном нагреве до температуры плавления. В приближении однородного распределения температуры по объему тэна тепловой поток в среду $Q(t)$ интерпретируется как однородный объемно распределенный по тэну сток части энергии его омического нагрева в окружающую среду. Уравнение теплопроводности для тэна в этом случае принимает вид

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{N(t)-Q(t)}{m\cdot c},\quad Q(t)=-S\frac{\partial\nu(t,x=0.5h)}{\partial x} \tag{12}$$

Решение сопряженной тепловой задачи с выражениями (12) построено методом интегрального преобразования Лапласа аналогичным образом:

$$T_{00}(t)=T_0+\frac{1}{m\cdot c}\int_0^t N(t)\cdot F\left(b_0\sqrt{\frac{t-\tau}{t_m}}\right)d\tau,$$

$$b_0=\frac{2\sqrt{t_m\cdot\alpha_1\cdot\rho_1\cdot c_1}}{h\cdot\rho\cdot c},\quad F(z)=\exp\left(z^2\right)\mathrm{erfc}(z), \tag{13}$$

$$T_{10}(t,x)=T_0+\frac{1}{m\cdot c}\int_0^t N(\tau)\exp\left[b_0^2\left(\frac{t-\tau}{t_m}+\frac{x}{b_0\sqrt{\alpha_1\cdot t_m}}\right)\right]\mathrm{erfc}\left(b_0\sqrt{\frac{t-\tau}{t_m}}+\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1(t-\tau)}}\right)d\tau,$$

где $T_{00}(t)$ и $T_{10}(t, x)$ температуры тэна и среды соответственно, а b_0 – безразмерный параметр, учитывающий практически все исходные данные для тэна, среды и длительности процесса его нагрева.

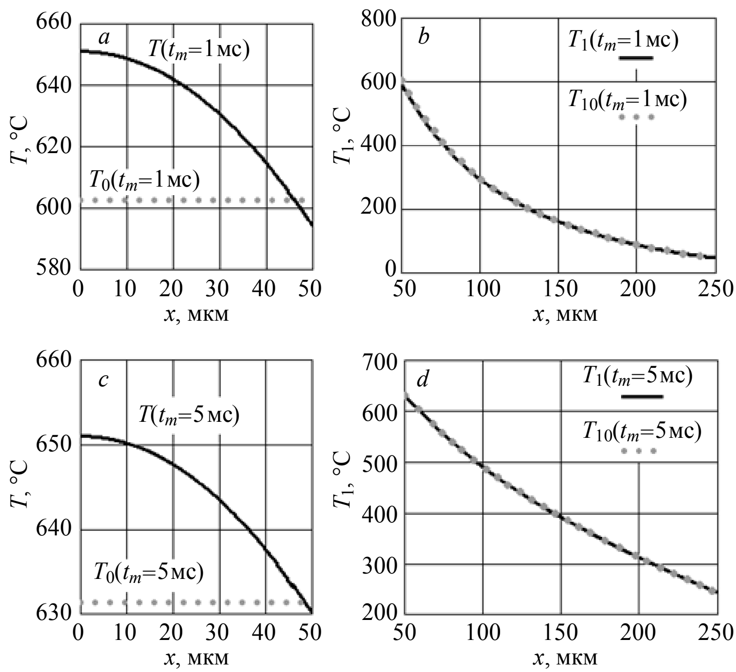


Рис. 5. Температурные профили в момент нагрева среднего сечения тэна $x = 0$ до температуры плавления $T_m = 651$°C: (*a*), (*c*) – в тэне, (*b*), (*d*) – в среде

Fig. 5. Temperature profiles when the middle section of the heater $x = 0$ is heating up to a melting point $T_m = 651$°C: (*a*), (*c*) in the heater and (*b*), (*d*) in the medium

На рис. 5 показаны два варианта финишного распределения температуры в тэне и среде для процессов нагрева длительностью 1 мс (графики *a*, *b*) и 5 мс (графики *c*, *d*). Сплошными линиями выделены результаты расчетов в приближении (7), пунктирными – в приближении «тонкого» тэна (13). Расчеты проведены для тэна из магниевой фольги толщиной 100 мкм, нагреваемого в колебательном режиме. График мощности нагрева тэна длительностью 5 мс показан на рис. 2 под номером 3. Параметры нагреваемой среды приведены выше.

Таким образом, приближение «тонкого» тэна (13) применимо для оценки теплового состояния среды даже при достаточно «быстрых» режимах нагрева тэна с толщиной фольги до 100 мкм. Для оценки теплового состояния тэна перед началом процесса его капельной деструкции модель «тонкого» тэна также применима в сочетании с параметром «однородности» из (11). Нагрев тэна при значениях параметра $\varphi \geq 0.95$ создает благоприятные условия для эффективной капельной деструкции тэна.

При теплообмене по закону Ньютона приближение «тонкого» тэна выполняется с большей точностью за счет снижения скорости теплоотдачи от тэна в среду по сравнению с условием идеального теплового контакта на границе «тэн – среда». Увеличение длительности нагрева приводит к дополнительному выравниванию температуры по толщине тэна за счет механизма теплопроводности. Решение тепловой задачи с граничным условием $Q_H(t) = H \cdot [T_H(t, 0.5h) - T_{H1}(t, 0.5h)]$ в приближении «тонкого» тэна получено с помощью приведенного выше алгоритма методом интегрального преобразования Лапласа и имеет следующий вид:

$$T_H(t) = T_0 - \frac{b_1}{b_3}\int_0^t \mathrm{Im}\left[\frac{1}{\beta}F\left(\beta\sqrt{\frac{t-\tau}{t_m}}\right)\right]N(t)\,d\tau, \quad F(z) = \exp\left(z^2\right)\mathrm{erfc}(z),$$

$$T_{H1}(t,x) = T_0 - \frac{2b_2}{b_3}\int_0^t \mathrm{Im}\left\{\exp\left(\beta\frac{x-0.5h}{\sqrt{\alpha_1 t_m}} + \beta^2\frac{t-\tau}{t_m}\right)\mathrm{erfc}\left[\frac{\mathrm{x}-0.5\mathrm{h}}{2\sqrt{\alpha_1(\mathrm{t}-\tau)}} + \beta\sqrt{\frac{t-\tau}{t_m}}\right]\right\}N(t)\,d\tau, \quad (14)$$

$$b_1 = \frac{2H\cdot\sqrt{t_m}}{h\cdot\rho\cdot c}, \quad b_2 = \frac{H\cdot\sqrt{t_m}}{2\sqrt{k_1\cdot\rho_1\cdot c_1}}, \quad \beta = b_2 + i\cdot\sqrt{b_1 - b_2^2}, \quad b_3 = m\cdot c\cdot\sqrt{b_1 - b_2^2}\,.$$

Здесь H – коэффициент теплообмена между тэном и средой, а индекс «H» указывает на условие теплообмена. Из (14) следует, что распределение температур в значительной степени определяется безразмерным комплексным параметром β.

Линейная зависимость удельного сопротивления тэна η от его температуры $\eta(T) = \eta_0[1 + b_T(T - T_0)]$ позволяет с помощью (14) определить текущее значение сопротивления тэна через мощность его нагрева:

$$R_H(t) = \frac{\eta_0\cdot l}{a\cdot h}\left\{1 - \frac{b_1}{b_3}\int_0^t \mathrm{Im}\left[\frac{1}{\beta}F\left(\beta\sqrt{\frac{t-\tau}{t_m}}\right)\right]N(\tau)\,d\tau\right\}, \quad (15)$$

где η_0 – удельное сопротивление материала тэна при температуре T_0, а b_T – постоянный температурный коэффициент для твердого агрегатного состояния материала тэна [12]. С помощью квадратурной зависимости (15) электротехнические уравнения устройства приводятся к интегро-дифференциальному виду. Из решения соответствующей электротехнической задачи определяется, в том числе, мощность омического нагрева тэна $N(t)$ для конкретного источника электрической энергии. Температуры тэна и среды, а также другие тепловые характеристики процесса определяются по найденному значению $N(t)$ с помощью соответствующих квадратурных формул.

Заключение

Решена задача электроимпульсного нагрева среды проводником-тэном при идеальном тепловом контакте со средой для произвольной функции мощности омического нагрева тэна. С помощью полученного решения введен критерий «тонкого» тэна, для которого возможна объемная капельная деструкция в результате импульсного омического нагрева. В приближении «тонкого» тэна получены решения тепловой задачи при теплообмене по закону Ньютона и идеальном тепловом контакте тэна со средой. Во всех решениях выделены специфические безразмерные параметры подобия моделируемых процессов. Показана применимость модели «тонкого» тэна для расчета теплового состояния нагреваемой среды. Полученные результаты применимы при расчетах и проектировании компактных электроимпульсных устройств многоочагового зажигания метательных зарядов и различных реакционноспособных составов с использованием плазмозамещающих технологий с минимизацией затрат электрической энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chaboki A.*, *Zelenac S.*, *Jsle B.* Recent Advances in Electrothermal-Chemical Gun Propulsion at United Defense, L.P. // IEEE Transactions on Magnetics. 1997. V. 33. No. 1. P. 284–288.
2. *Bradley D. Goodell*. Electrothermal Chemical (ETC) Armament System Integration into a Combat Vehicle // Proceedings of the 6th International All-Electric Combat Vehicle (AECV). Conference 13–16 June 2005. Bath, England. P. 1.1–1.9.
3. *Sinyaev S.V.*, *Kramar M.A.*, *Kulpin V.I.*, *Surkov V.G.* Plasma-Replacement Technology of ETC-Ignition of Powder Charges in High-Velocity Launchers // IEEE Transactions on Magnetics. 2007. V. 43. No.1. P. 318–321.
4. *Синяев С.В.*, *Буркин В.В*, *Христенко Ю.Ф.*, *Щегерцов А.Ю.*, *Сурков В.Г.* Квазиобъмное очаговое электротермохимическое зажигание гелеобразных высокоэнергетических веществ // Третья Международная конференция «Внутрикамерные процессы и горение в установках на твердом топливе и ствольных системах» (JCOC99), Россия, Ижевск, 7–8 июля 1999 г. Ижевск: Изд-во ИПМ УрО РАН, 2000. ч.2. С. 640–648.
5. *Синяев С.В.*, *Анисимов А.Г.*, *Жаровцев В.В.*, *Матросов А.Д.* Динамические процессы в баллистических установках при плазмозамещающей технологии электротермохимического зажигания пороховых зарядов с высокой плотностью заряжания // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. №4. Часть 5. С. 2493–2495.
6. *Глазунов А.А.*, *Синяев С.В.*, *Анисимов А.Г.*, *Володченков С.И.* Индукционная плазмозамещающая технология зажигания пороховых зарядов // Девятая Всероссийская конференция «Внутрикамерные процессы и горение в установках на твердом топливе и ствольных системах» (ICOC’2017): сб. трудов. Ижевск: Изд-во УрО РАН, 2017. С. 68–78.
7. *Синяев С.В.*, *Сурков В.Г.* Электронагреваемые фольговые элементы с пиротехническими покрытиями для управления процессом зажигания квазижидких метательных зарядов // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. С. 146, 147.
8. *Синяев С.В.*, *Кузнецов В.Т.*, *Володченков С.И.*, *Христенко Ю.Ф.* Индукционная плазмозамещающая технология зажигания пороховых зарядов с использованием высокоэнергетических пиротехнических составов // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: сб. трудов X Всероссийской научной конференции, 3–5 сентября 2018 г. Томск, 2018. С. 6–8.
9. *Кожин В.А.* Исследования процессов электроимпульсного диспергирования проводников методом скоростной киносъемки // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: материалы VI Всероссийской научной конференции, 30 сентября – 2 октября 2008 г. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2008. С. 127–128.
10. *Синяев С.В.* Спрей-режим электроимпульсного диспергирования проводников и его применение в устройствах зажигания нетрадиционных топлив // Фундаментальные и

прикладные проблемы современной механики. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. С. 108–109.
11. *Синяев С.В.*, *Володченков С.И.* Импульсный индукционный нагрев полых тонкостенных цилиндрических проводников в магнитном поле соленоида в режимах многоочагового зажигания метательных зарядов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 6 (26). С. 96–105.
12. *Кнопфель Г.* Сверхсильные импульсные магнитные поля М.: Мир, 1972. 392 с.

Статья поступила 29.12.2020

Volodchenkov S.I., Glazunov A.A., Sinyaev S.V. (2021) ELECTRIC PULSE HEATING OF REACTIVE COMPOSITIONS BY THIN-WALLED CONDUCTORS-HEATERS IN THE MODES OF MULTI-POINT IGNITION OF PROPELLANT CHARGES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 24–36

DOI 10.17223/19988621/70/3

Keywords: electric discharge, pulse heating, conductor-heater, heated medium, heat exchange, "uniformity" condition, conjugate problem.

The problem of electric pulse heating of a medium by the heater made of metal foil with an ideal thermal contact with the medium is solved. The solution is obtained in the form of rapidly converging series for ohmic heating power, which is given as an arbitrary function of time. Using the obtained solution, a dimensionless criterion is introduced for quasi-homogeneous heating of the heater up to a melting point with intensive heat transfer to environment. It is shown that with a fixed heating duration, the criterion value depends weakly on the type of a heating power function, which allows ignoring parameters of the external electrical circuit of the device while choosing the heater thickness. The definition of a "thin" heater is introduced, which admits of bulk droplet destruction during heating of a reactive medium. In the "thin" heater approximation, quadrature solutions to the thermal problem are obtained under heat exchange according to Newton's law and ideal thermal contact, when the heater power is an arbitrary function of time. Dimensionless similarity parameters of the simulated processes are identified in all solutions, which include thermal and physical characteristics of the heater and medium, as well as the thickness of the heater and the time of its heating up to the melting point. The applicability of the "thin" heater model for calculating the thermal state of a high-energy pyrotechnic coating is shown. As an example, the permissible values of the thickness of the magnesium foil heater are determined, which ensure its uniform heating up to the melting point in 1 and 5 milliseconds under the ideal thermal contact with ignited coating. The obtained quadrature solutions to the thermal problems and the calculated results are applicable in the design of compact electric pulse devices for contact multi-point ignition of various reactive compositions with efficient consumption of electric energy.

Financial support. This research was supported by a grant (No. 8.2.12/2018) from “Tomsk State University Competitiveness Improvement Programme”.

Sergey I. VOLODCHENKOV (Candidate of Physics and Mathematics, Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Scientific Research Institute of Experimental Physics, Sarov, Russian Federation). E-mail: serg_vol666@mail.ru

Anatoliy A. GLAZUNOV (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

Sergey V. SINYAEV (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ssv@niipmm.tsu.ru

REFERENCES

1. Chaboki A., Zelenac S., Jsle B. (1997) Recent advances in electrothermal-chemical gun propulsion at United Defense, L.P. *IEEE Transactions on Magnetics*. 33(1). pp. 284–288. DOI: 10.1109/20.559970.
2. Goodell B. (2005) Electrothermal chemical (ETC) armament system integration into a combat vehicle. *Proceedings of the 6th International All-Electric Combat Vehicle* (*AECV*) *Conference. Bath*, *England.* pp. 1.1–1.9.
3. Sinyaev S.V., Kramar M.A., Kulpin V.I., Surkov V.G. (2007) Plasma-replacement technology of ETC-ignition of powder charges in high-velocity launchers. *IEEE Transactions on Magnetics.* 1(43). pp. 318–321. DOI: 10.1109/TMAG.2006.887439.
4. Sinyaev S.V., Burkin V.V., Khristenko Yu.F., Shchegertsov A.Yu., Surkov V.G. (2000) Kvaziob"yomnoe ochagovoe elektrotermokhimicheskoe zazhiganie geleobraznykh vysokoenergeticheskikh veshchestv [Quasi-volumetric electro-thermochemical multi-point ignition of gel-like high-energy substances]. *Sbornik trudov Tret'ey mezhdunarodnoy konferentsii “Vnutrikamernye protsessy i gorenie v ustanovkakh na tverdom toplive i stvol'nykh sistemakh”. Izhevsk.* 2. pp. 640–648.
5. Sinyaev S.V., Anisimov A.G., Zharovtsev V.V., Matrosov A.D. (2011) Dinamicheskie protsessy v ballisticheskikh ustanovkakh pri plazmozameshchayushchey tekhnologii elektrotermokhimicheskogo zazhiganiya porokhovykh zaryadov s vysokoy plotnost'yu zaryazhaniya [Dynamic processes in ballistic launchers with plasma-substituting technology of ETC-ignition of powder charges with high loading density]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod*. 4(5). pp. 2493–2495.
6. Glazunov A.A., Sinyaev S.V., Anisimov A.G., Volodchenkov S.I. (2017) Induktsionnaya plazmozameshchayushchaya tekhnologiya zazhiganiya porokhovykh zaryadov [Induction plasma-substituting technology for the ignition of powder charges]. *Sbornik trudov Devyatoy Vserossiyskoy konferentsii “Vnutrikamernye protsessy i gorenie v ustanovkakh na tverdom toplive i stvol’nykh sistemakh”. Izhevsk*. pp. 68–78.
7. Sinyaev S.V., Surkov V.G. (2004) Elektronagrevaemye fol'govye elementy s pirotekhnicheskimi pokrytiyami dlya upravleniya protsessom zazhiganiya kvazizhidkikh metatel'nykh zaryadov [Electric-heated foil elements with pyrotechnic coatings for controlling the ignition of quasi-liquid propellant charges]. *Doklady IV Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii “Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniki”. Tomsk.* pp. 146–147.
8. Sinyaev S.V., Kuznetsov V.T., Volodchenkov S.I., Khristenko Yu.F. (2018) Induktsionnaya plazmozameshchayushchaya tekhnologiya zazhiganiya porokhovykh zaryadov s ispol'zovaniem vysokoenergeticheskikh pirotekhnicheskikh sostavov [Induction plasma-substituting technology for the ignition of powder charges using high-energy pyrotechnic compositions]. *Materialy X Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii “Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniki*”. *Tomsk*. pp. 6–8.
9. Kozhin V.A. (2008) Issledovaniya protsessov elektroimpul'snogo dispergirovaniya provodnikov metodom skorostnoy kinos"yomki [Studies of the processes of electropulse dispersion of conductors by the high-speed filming method]. *Materialy VI Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii “Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniki”. Tomsk.* pp. 127–128.
10. Sinyaev S.V. (2002) Sprey-rezhim elektroimpul'snogo dispergirovaniya provodnikov i ego primenenie v ustroystvakh zazhiganiya netraditsionnykh topliv [Spray mode for electropulse dispersion of conductors and its application in ignition devices of non-conventional fuels]. *Doklady III Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii “Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniki”. Tomsk*. pp. 108–109.
11. Sinyaev S.V., Volodchenkov S.I. (2013) Impul'snyy induktsionnyy nagrev polykh tonkostennykh tsilindricheskikh provodnikov v magnitnom pole solenoida v rezhimakh mnogoochago-

vogo zazhiganiya metatel'nykh zaryadov [Pulse induction heating of the hollow thin-walled cylindrical conductors in a solenoid magnetic field in regimes of multi-point ignition of the propelling charges]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(26). pp. 96–105.
12. Knoepfel H. (1970) *Pulsed High Magnetic Fields.* Amsterdam-London: North-Holland Publishing Company.

Received: December 29, 2020

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2021 Математика и механика № 70

УДК 623.52
DOI 10.17223/19988621/70/4

А.Н. Ищенко, В.З. Касимов, О.В. Ушакова

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ТОПЛИВА И МЕТОДА ВОСПЛАМЕНЕНИЯ НА БАЛЛИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫСТРЕЛА В УСЛОВИЯХ МОДЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ КАЛИБРОМ 120 мм[1]

С помощью разработанной осесимметричной численной методики теоретически исследовано влияние начальной температуры топлива на баллистические характеристики выстрела из модельной 120-мм установки для двух типов зажигания: при использовании капсюля-воспламенителя и плазматрона типа «флейта». Отмечено, что начальная температура заряда в рассмотренном диапазоне существенно влияет на характеристики выстрела, тип зажигания значительно влияет на время зажигания заряда и время выстрела, однако на скорость метания и максимальное давление в камере существенного влияния не оказывает.

Ключевые слова: *воспламенение, баллистические характеристики, начальная температура топлива, осесимметричная постановка, электрокапсюль-воспламенитель, плазматрон «флейта».*

Рассматривается влияние типа воспламенения и начальной температуры топлива на зажигание метательного заряда и характеристики выстрела в баллистических установках. Анализируются два типа воспламенения метательного заряда: традиционное воспламенение в ствольных газодинамических метательных системах с помощью капсюля-воспламенителя (ЭКВ) и воспламенение с применением одного из перспективных устройств электротермохимической (ЭТХ) технологии – плазматрона типа «флейта», который представляет собой расположенную по оси симметрии метательного заряда удлиненную трубку с отверстиями, через которые осуществляется вдув воспламенительного состава [1].

Для ствольных баллистических систем в большинстве случаев характерным является значительное превышение продольных размеров над поперечными, поэтому, как правило, для описания внутрибаллистических процессов используются квазиодномерные уравнения, что существенно снижает трудоемкость решения конкретных задач. Однако при исследовании зажигания метательного заряда, в том числе, в случае применения воспламенительного устройства типа «флейта», в связи с характером течения происходящие в пороховой камере процессы, по крайней мере, на начальном этапе выстрела, носят существенно неодномерный характер. Поэтому следует учитывать, что решение задачи исследования внутрибаллистических процессов в одномерной постановке может не дать адекватной картины движения внутриканальной среды в ходе выстрела. В связи с этим в данной работе указанная задача рассматривается в осесимметричной постановке.

[1] Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России, проект № 0721-2020-0032.

Поскольку во многих случаях волновой характер движения рабочих газов и конденсированных элементов играет существенную роль, в качестве базовой математической модели при решении поставленной задачи выбрана модель полидисперсной смеси твердых частиц и несущей газовой фазы в приближении механики взаимопроникающих континуумов [2, 3]. При записи уравнений предполагается, что вязкость и теплопроводность газа проявляется только во взаимодействии с частицами, и рассматривается случай несжимаемой конденсированной фазы. Записываются уравнения сохранения массы, импульса и внутренней энергии для несущей газовой фазы. Для каждого конденсированного компонента также записываются уравнения сохранения массы и импульса. Для инертных частиц рассчитывается уравнения сохранения внутренней энергии. Отметим, что в уравнениях сохранения импульсов для частиц присутствует член, отвечающий за их силовое взаимодействие, при этом используемое выражение для шаровой части тензора напряжений в конденсированной фазе препятствует неограниченному возрастанию плотности частиц.

Расчет зажигания компонента метательного заряда проводится путем решения задачи теплопроводности, при этом каждый компонент рассматривается как реакционно-способная частица [4]. В качестве критерия зажигания компонента используется условие достижения заданной критической температуры на поверхности частицы или в окружающей частицу газовой фазе. После воспламенения прогрев частицы не считается, а вместо этого определяется ее степень превращения. Под временем зажигания метательного заряда подразумевалось время, к которому для всех компонентов заряда выполнится условие зажигания.

Система полученных уравнений замыкается соотношениями, определяющими массовое, силовое и энергетическое межфазное взаимодействие системы «газ – конденсированные частицы». Для описания массового взаимодействия фаз используются геометрические законы газообразования, в которых для определения площади поверхности послойного горения используют общепринятые в баллистике полученные из геометрических соображений соотношения, при этом значения параметров – коэффициентов формы для отдельного типа частиц – известны. Также могут применяться физические законы газообразования, в которых величина поверхности послойного горения определяется не из геометрических соображений, а на основании обработки результатов испытаний топлива в манометрической бомбе. В настоящей математической модели результаты, полученные с использованием новых уточненных методик обработки таких экспериментальных данных [5], применяются в виде аппроксимаций зависимости относительной поверхности горения от степени превращения в виде полинома девятой степени и кусочно-линейной зависимости.

Для линейной скорости горения применяется квазистационарная степенная зависимость от давления, в которой коэффициент при степени зависит от химической природы и начальной температуры элемента заряда, а показатель степени определяется его составом.

Для характеристики силового взаимодействия фаз используется сила сопротивления, для которой на основе имеющихся в литературе данных [6] выбирались зависимости от условий взаимодействия, среди которых главное значение имеют число Рейнольдса относительного движения фаз и объемное содержание газовой фазы. При этом значение коэффициента аэродинамического сопротивления частиц отдельного компонента заряда находится по известным полученным исходя из экспериментальных данных зависимостям [7, 8] для широкого диапазона пористостей.

При описании теплового взаимодействия газовой и конденсированной фаз калорийность горящих элементов метательного заряда определяется по известному во внутренней баллистике соотношению.

Также для замыкания системы основных уравнений используется уравнение состояния смеси газов типа Дюпре, где коэффициенты уравнения состояния для смеси газов находятся, исходя из известных коэффициентов отдельных газовых компонентов и значений их средних плотностей по определенным соотношениям [3].

Таким образом получаем замкнутую систему для определения средних плотностей газовых компонентов, объемного содержания каждой конденсированной фракции, скоростей газа и частиц, энергии, температуры и давления смеси газов, а также степени превращения и температуры отдельного компонента заряда.

Расчетные области для рассматриваемой задачи приведены на рис. 1 и 2. На рис. 1 показана расчетная область при ЭКВ-воспламенении. Область ограничена слева дном камеры, имеющим круглое отверстие ($0< r <R_f$), через которое продукты сгорания воспламенителя, попадают в пороховую камеру. Справа расчетная область ограничена дном метаемого объекта (МО). Снизу расчетная область ограничена осью симметрии, а сверху – твердой непроницаемой стенкой – внутренней поверхностью пороховой камеры.

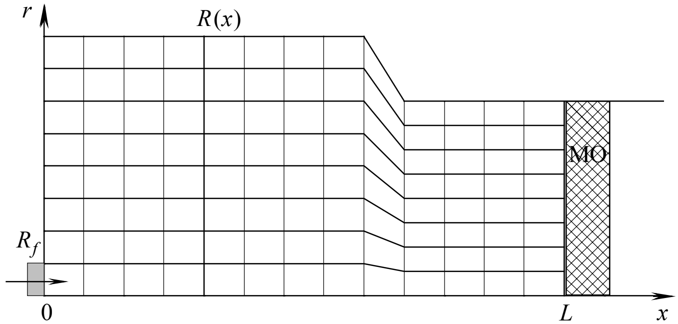


Рис. 1. Расчетная область при ЭКВ-воспламенении
Fig. 1. Computational domain for EPI-ignition

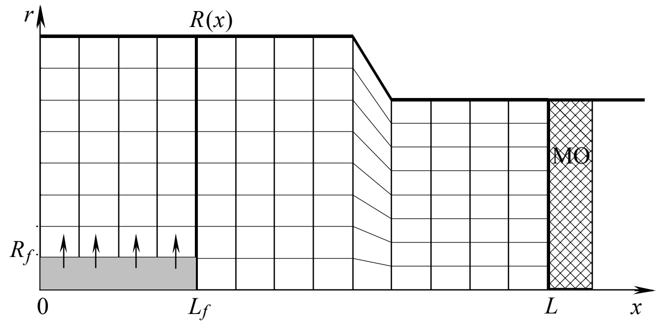


Рис. 2. Расчетная область при использовании «флейты»
Fig. 2. Computational domain for "flute" plasma torch ignition

Задача решается при естественных начальных условиях: в начальный момент задаются парциальные давления компонент газовой смеси и ее температура, характеризующие начальное состояние газовой фазы, а также начальное пространственное распределение каждого конденсированного компонента.

При задании граничных условий для газодинамической части задачи дно пороховой камеры рассматривается как неподвижная непроницаемая граница, на которой ставятся условия непротекания, за исключением первого варианта воспламенения, когда на части поверхности задаются параметры втока продуктов сгорания воспламенителя. Также параметры втока воспламенительного состава задаются при втором варианте воспламенения на поверхности «флейты». На оси симметрии и внутренней поверхности пороховой камеры ставятся естественные условия непротекания. На снаряде в качестве граничных условий также используются условия непротекания, при этом для определения скорости и положения снаряда интегрируется уравнение его движения.

Для численного решения поставленной задачи для обоих вариантов воспламенения расчетная область разбивается на расчетные интервалы таким образом, чтобы они образовывали сетку, однородную по координате x и пропорциональную однородную по координате r. Проинтегрировав основные уравнения по элементарной счетной ячейке, вычислив интегралы, отвечающие за геометрию ячейки, получаем формулы для определения параметров на следующем временном слое. При этом для нахождения потоков на границах ячеек используется модификация метода С.К. Годунова, описанная в [9, 10]. В одномерных задачах эта численная методика хорошо обоснована физически. В то же время формально ее можно применить и к двумерной осесимметричной постановке. В этом случае скорость газа в каждой ячейке разлагается на нормальную и касательную составляющие, из которых получают значения нормальной и касательной скорости на каждой границе, участвующие в формулах распада разрыва. При этом расчет распада произвольного разрыва становится массовой элементарной операцией, позволяющей определить потоки через границы ячейки.

При решении уравнения теплопроводности используется неявная схема с нелинейной правой частью, которая обладает свойствами абсолютной устойчивости, монотонности и консервативности [11]. При аппроксимации конвективных слагаемых применяются разности против потока. Для нахождения значения температуры на каждом временном слое в силу нелинейности системы полученных уравнений необходимо было организовать итерационный процесс. В качестве нулевого приближения бралось значение с предыдущего временного слоя. На каждом итерационном шаге значения температуры находятся из системы с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Процесс итераций проводится до тех пор, пока не достигается заданная точность вычислений.

По описанной численной методике на основе принципов объектно-ориентированного программирования на языке C++ [12] было разработано комплексное программное обеспечение, позволяющее моделировать выстрел в осесимметричной постановке. Интерфейсная часть программного обеспечения разрабатывалась с помощью библиотеки классов Qt [13]. Описываемое программное обеспечение имеет графический интерфейс пользователя (GUI) и работает в рамках системы Win32, запуск программы расчета осуществляется привычным для этой операционной системы образом. Входные данные для программы расчета вводятся в виде конфигурационных файлов. В ходе расчета имеется возможность графической иллюстрации происходящих процессов в виде изолиний различных характеристик, поля скоростей, а также пространственных распределений осредненных по поперечному сечению внутрибаллистических параметров.

Разработанный программный комплекс для расчета внутрибаллистических характеристик выстрела в осесимметричной постановке использовался для исследования модельной установки с применением для зажигания метательного заряда ЭКВ-воспламенителя и плазматрона «флейта». Исследуемая модельная установка имеет калибр 120 мм и длину ствола около 5 м. Пороховая камера имеет длину 0.40 м и диаметр 160 мм. В качестве основного метательного заряда применялся зерненный семиканальный порох, в качестве воспламенителя – порох ДРП, при этом навеска ДРП располагалась на дне пороховой камеры и у снаряда при ЭКВ-воспламенении и внутри «флейты» в случае использования плазматрона «флейта». В ходе расчетов было рассмотрено три варианта начальной температуры заряда: –40, 0 и +40 °С.

Некоторые результаты расчетов приведены в таблице и на рис. 3 – 12. В таблице сведены основные результаты расчетов. На рис. 3 показаны зависимости среднего давления на дно МО от времени, на рис. 4 – зависимости скорости МО от его текущей координаты для шести вариантов расчета. Из рис. 3, 4 и таблицы видно, что повышение начальной температуры заряда приводит к повышению максимального давления в камере и на дно снаряда и повышению его дульной скорости. Разница между дульными скоростями в рассмотренных случаях начальной температуры составляет около 100 м/с (~7.5%) для обоих типов воспламенения, причем кривые скорости для отдельных типов воспламенения практически совпадают. Также можно отметить, что в случае более высокой начальной температуры кривые давления более острые, очевидно, что воспламенение заряда и форсирование снаряда происходит в этом случае быстрее и разница в расчетных длительностях выстрела составляет около 0.5 мс для воспламенения с помощью «флейты» и около 0.75 мс при ЭКВ-воспламенении. Заметим, что несущественное превышение максимального давления на дно МО при использовании «флейты» можно объяснить более форсированными режимами при таком зажигании. Также можно отметить, что характер волновых процессов в заснарядном объеме не зависит от начальной температуры заряда, однако отличается при разных типах воспламенения.

О характере распространения воспламенения можно судить по рис. 5 и 6, на которых приведены поля зажигания в три последовательных момента времени, соответствующих воспламенительному периоду, для двух типов воспламенительных устройств.

Рис. 7 – 10, на которых приведены изолинии давления и поля скоростей газовой фазы в последовательные моменты времени, иллюстрируют протекающие в ходе выстрела процессы для случая начальной температуры метательного заряда $T_0 = 0$°С. При этом рис. 7, 8 соответствуют воспламенительному периоду, а рис. 9, 10 характеризуют протекание процесса с момента форсирования снаряда, рис.7, 9 показывают распределения соответствующих характеристик при ЭКВ-воспламенении, а рис. 8, 10 – при воспламенении с помощью плазматрона «флейта». Из приведенных рисунков видно, что в рассмотренных случаях существенная неодномерность имеет место только на начальном этапе выстрела. Дальнейшее развитие процесса происходит практически одномерно, что позволяет на этом этапе для описания внутрибаллистических процессов пользоваться одномерными численными моделями. Отметим также, что при моделировании не учитывалась геометрия ведущего устройства и наличие конструктивных элементов установки. Поэтому учет отмеченных факторов может осложнить картину течения.

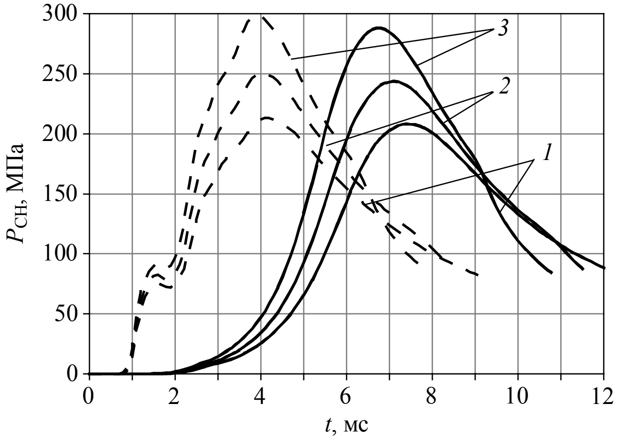


Рис. 3. Зависимость среднего давления на дно МО от времени:
1 – T_0 = –40 °С; *2* – T_0 = 0° С; *3* – T_0 = +40 °С
Fig. 3. Time dependence of the average pressure on a projectile bottom:
T_0 = (*1*) –40, (*2*) 0, and (*3*) +40 °С

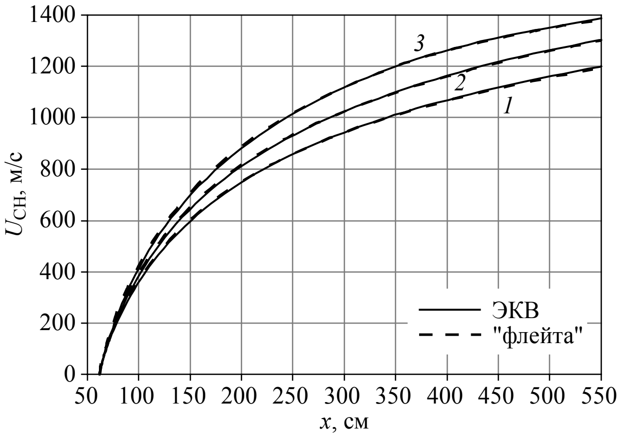


Рис. 4. Зависимость скорости МО от его координаты:
1 – T_0 = –40 °С; *2* – T_0 = 0 °С; *3* – T_0 = +40 °С
Fig. 4. Velocity of the projectile as a function of its coordinate:
T_0 = (*1*) –40, (*2*) 0, and (*3*) +40 °С

Основные результаты расчетов

Вариант расчета	1_1	2_1	3_1	1_2	2_2	3_2
Тип воспламенения	ЭКВ	ЭКВ	ЭКВ	«флейта»	«флейта»	«флейта»
Начальная температура, °С	-40	0	+40	-40	0	+40
Дульная скорость, м/с	1199.5	1302.3	1386.3	1194.5	1298.2	1382.8
Дульное время, мс	12.31	11.52	10.77	9.07	8.50	7.97
Время зажигания, мс	2.92	2.39	2.83	0.84	0.83	0.63
Максимальное давление, МПа	291.3	351.3	428.4	285.8	344.5	421.2

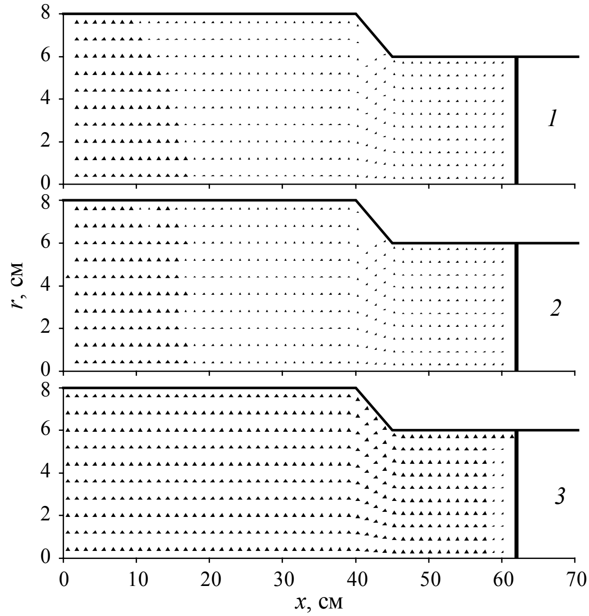


Рис. 5. Поле воспламенения в три последовательных момента времени:
1 – t = 0.2 мс; *2* – t = 0.8 мс; *3* – t = 2.0 мс; ЭКВ-воспламенение, T_0 = 0 °С
Fig. 5. Ignition fields at three consecutive time instants:
t = (*1*) 0.2, (*2*) 0.8, and (*3*) 2.0 ms; EPI-ignition, T_0 = 0 °C

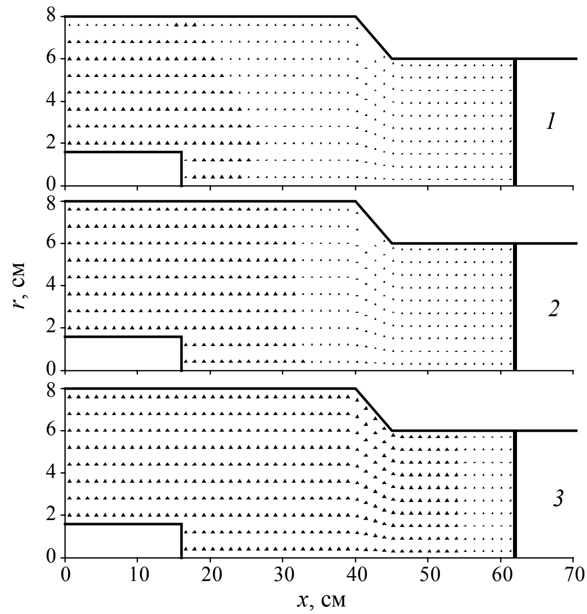


Рис. 6. Поле воспламенения в три последовательных момента времени:
1 – t = 0.1 мс; *2* – t = 0.4 мс; *3* – t = 0.7 мс; воспламенение «флейтой», T_0 = 0 °С
Fig. 6. Ignition fields at three consecutive time instants:
t = (*1*) 0.1, (*2*) 0.4, and (*3*) 0.7 ms; "flute" plasma torch ignition, T_0 = 0 °C

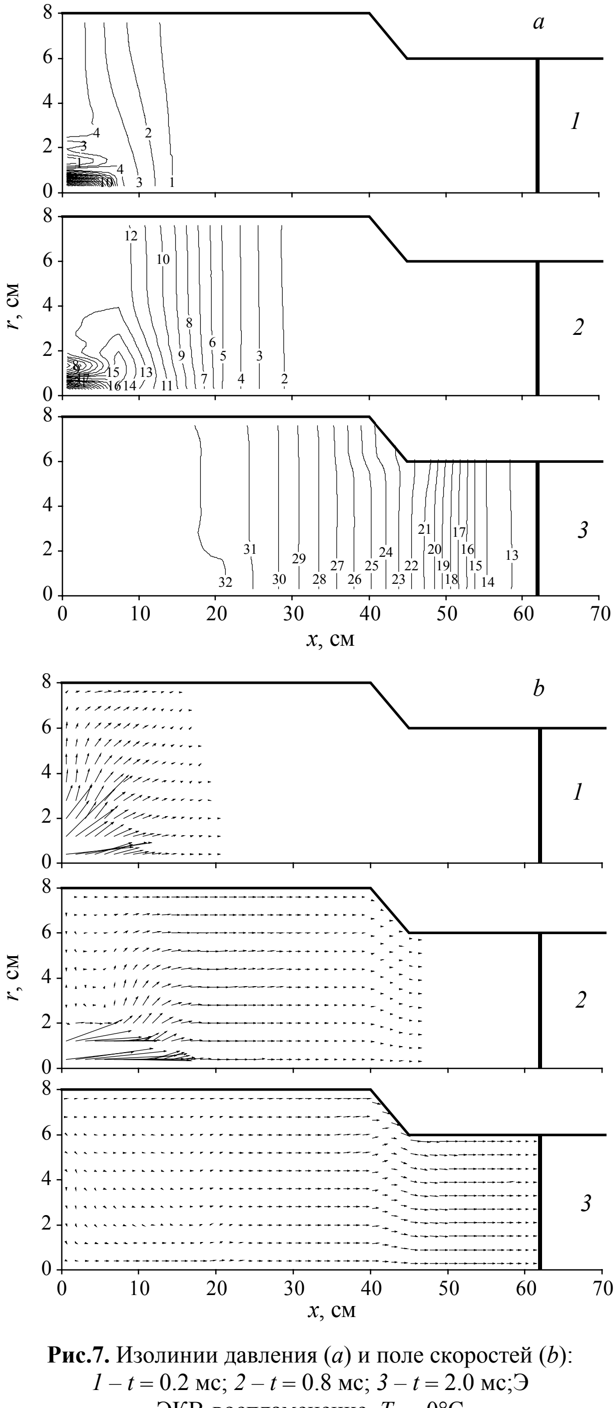


Рис.7. Изолинии давления (a) и поле скоростей (b):
1 – $t = 0.2$ мс; *2* – $t = 0.8$ мс; *3* – $t = 2.0$ мс;Э
ЭКВ-воспламенение, $T_0 = 0$°С
Fig. 7. (a) Pressure isolines and (b) velocity fields:
$t =$ (*1*) 0.2, (*2*) 0.8, and (*3*) 2.0 ms;
EPI-ignition, $T_0 = 0$°C

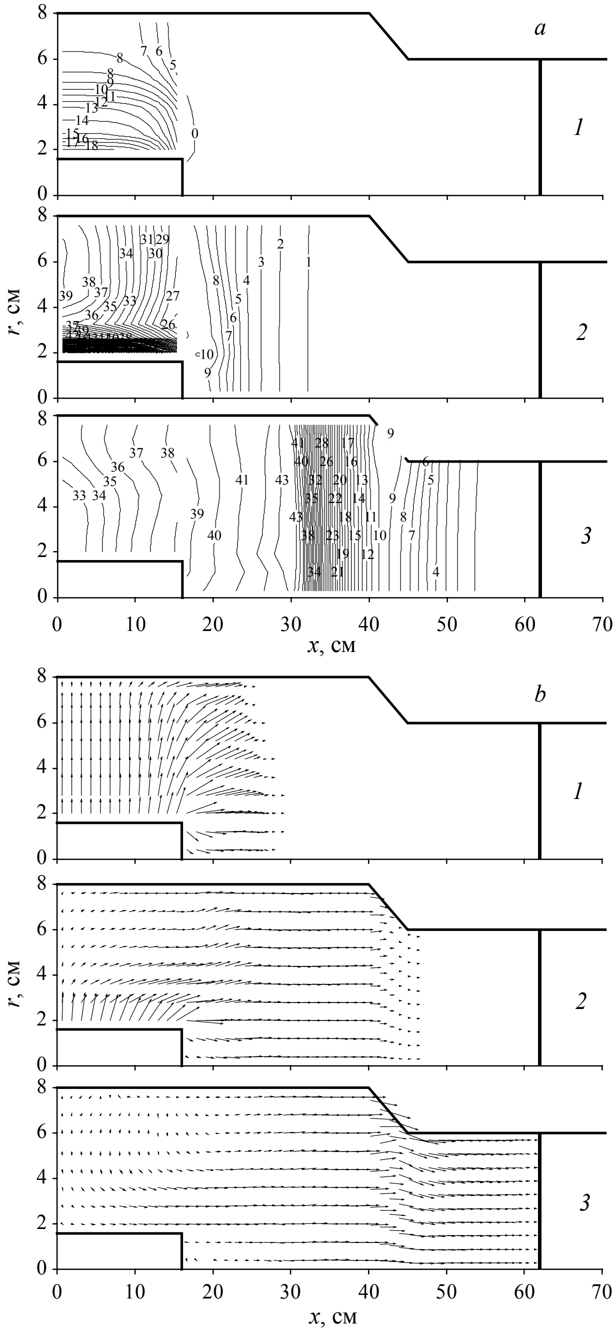


Рис. 8. Изолинии давления (*a*) и поле скоростей (*b*):
1 – $t = 0.1$ мс; *2* – $t = 0.4$ мс; *3* – $t = 0.7$ мс;
воспламенение «флейтой», $T_0 = 0$°C

Fig. 8. (*a*) Pressure isolines and (*b*) velocity fields:
$t =$ (*1*) 0.1, (*2*) 0.4, and (*3*) 0.7 ms;
"flute" plasma torch ignition, $T_0 = 0$°C

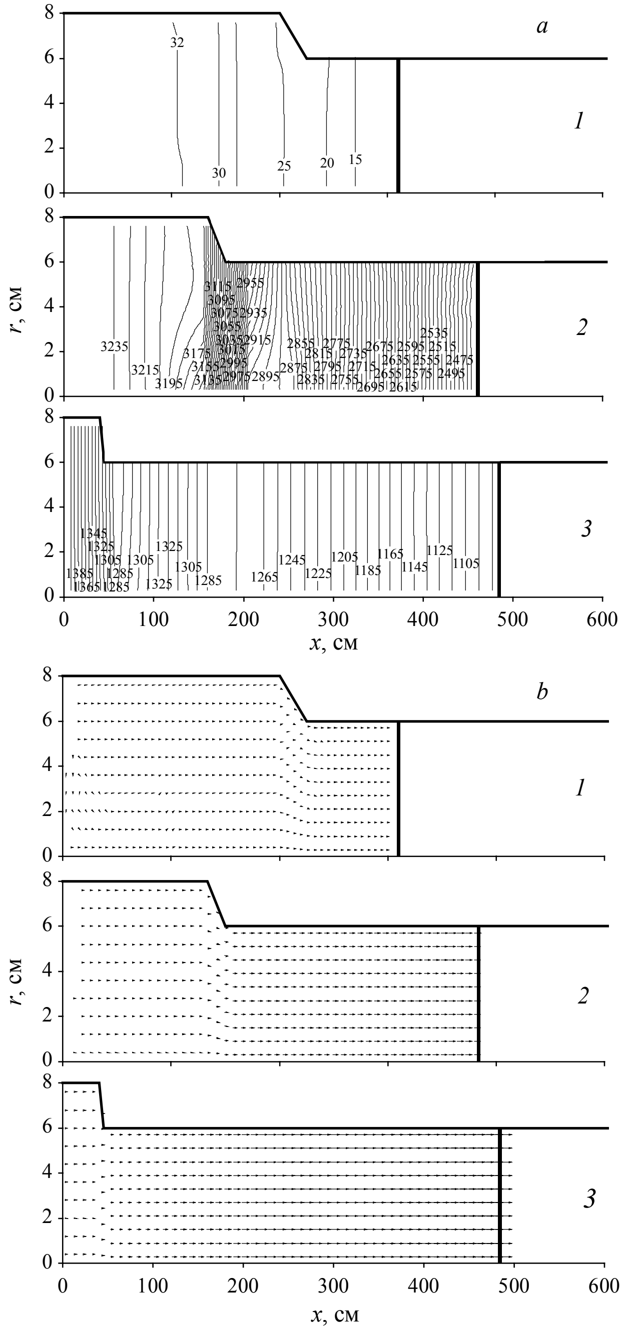


Рис. 9. Изолинии давления (a) и поле скоростей (b):
$1 - t = 2$ мс; $2 - t = 7$ мс; $3 - t = 10$ мс;
ЭКВ-воспламенение, $T_0 = 0$°C

Fig. 9. (a) Pressure isolines and (b) velocity fields:
t = (1) 2, (2) 7, and (3) 10 ms;
EPI-ignition, $T_0 = 0$°C

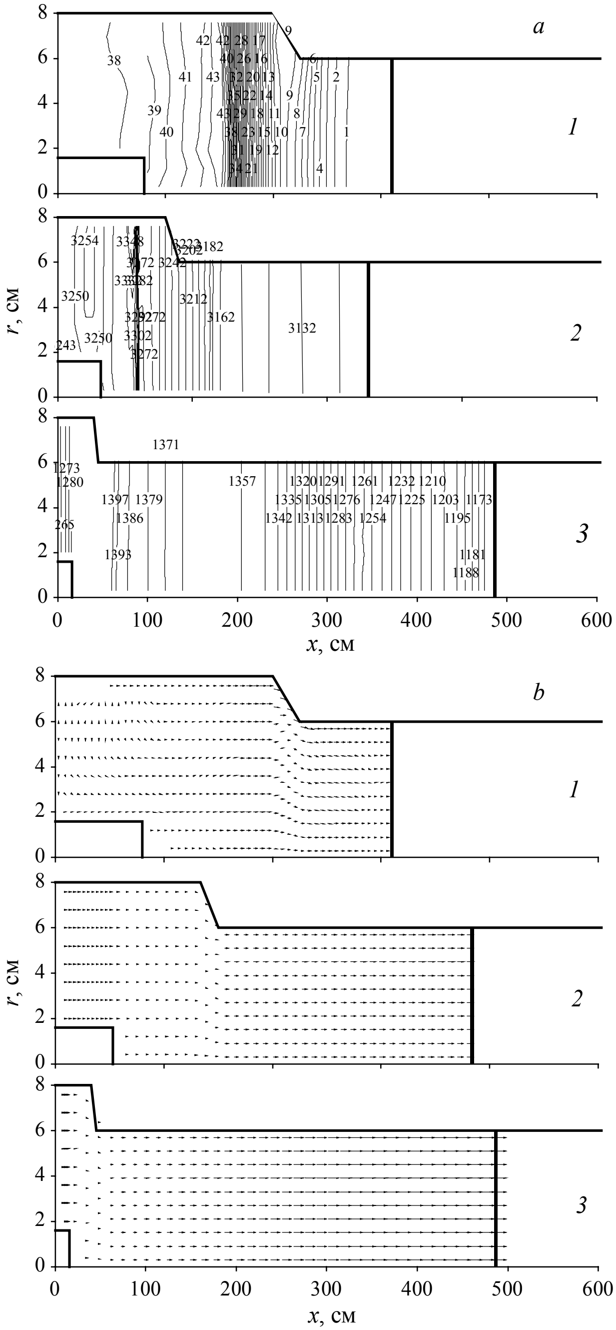


Рис. 10. Изолинии давления в барах (a) и поле скоростей (b):
$1 - t = 0.7$ мс; $2 - t = 4.0$ мс; $3 - t = 8.0$ мс;
воспламенение «флейтой», $T_0 = 0$°C

Fig. 10. (a) Pressure isolines in bars and (b) velocity fields:
t = (1) 0.7, (2) 4.0, and (3) 8.0 ms;
"flute" plasma torch ignition, $T_0 = 0$°C

Таким образом, в данной работе проведено исследование влияния начальной температуры топлива и типа воспламенения на функционирование модельной баллистической установки калибром 120 мм. Описана разработанная численная методика, которая позволяет в осесимметричной постановке моделировать артиллерийский выстрел как при использовании воспламенительного устройства ЭТХ-технологии типа «флейта», так и при традиционном ЭКВ-воспламенении. Приведены некоторые результаты расчета внутрибаллистических характеристик выстрела для шести различных расчетных вариантов начальной конфигурации, которые позволяют судить о происходящих в ходе выстрела процессах. Показано, что начальная температура топлива в исследованном диапазоне существенно влияет на баллистические характеристики выстрела и не учет этого фактора может значительно понизить точность моделирования. Также отмечено, что тип воспламенения значительно влияет на время зажигания метательного заряда и время выстрела в целом, однако на скорость метания и максимальное давление в заснарядном пространстве существенного влияния не оказывает.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барышев М.С., Бураков В.А., Буркин В.В., Ищенко А.Н., Касимов В.З., Саморокова Н.М., Хоменко Ю.П., Широков В.М.* Разработка импульсных плазмотронов и опыт их применения для инициирования насыпных зарядов в баллистических экспериментах // Химическая физика и мезоскопия. 2009. Т. 11. № 2. С. 147–152.
2. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464 с.
3. *Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З.* Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 256 с.
4. *Русяк И.Г., Ушаков В.М.* Внутрикамерные гетерогенные процессы в ствольных системах. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001. 259 с.
5. *Хоменко Ю.П., Широков В.М.* Определение нестационарных законов горения пороха на основе манометрических испытаний // Физика горения и взрыва. 2006. Т. 42. № 6.
6. *Ищенко А.Н., Хоменко Ю.П.* Влияние силового межфазного взаимодействия на характеристики конвективного горения пористых сред // Физика горения и взрыва. 1997. Т. 33. № 4. С. 65–77.
7. *Ergun S.* Fluid flow through randomly packed columns // Chem. Eng. Progr. 1952. V. 48. P. 89–94.
8. *Барышев М.С., Воронин В.Н., Ищенко А.Н., Хоменко Ю.П.* Экспериментальное исследование законов сопротивления при течении газа в низкопористой среде в широком диапазоне чисел Рейнольдса // Изв. вузов. Физика. 1993. № 4. С. 101–109.
9. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
10. *Bogdanoff D.W., Miller R.J.* New Higher-Order Godunov Code for Modelling Performance of Two-Stage Light Gas Guns. NASA TM – 110363, September 1995. 45 p.
11. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
12. *Страуструп Б.* Язык программирования C++: пер. с англ. Киев: Диасофт, 1993. 264 с.
13. *Бланшет Ж., Саммерфилд М.* Qt 4: Программирование GUI на C++. М.: КУДИЦ-ПРЕСС, 2008. 736 с.

Статья поступила 12.12.2020

Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Ushakova O.V. (2021) INFLUENCE OF THE INITIAL PROPELLANT TEMPERATURE AND IGNITION METHOD ON BALLISTIC CHARACTERISTICS OF A SHOT IN THE SETTING OF A 120 MM CALIBER MODEL BALLISTIC INSTALLATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 37–50

DOI 10.17223/19988621/70/4

Keywords: ignition, ballistic characteristics, initial propellant temperature, axisymmetric mathematical model, electric primer-igniter, "flute" plasma torch.

In this paper, the effect of the initial temperature of a propellant charge and ignition method on ballistic characteristics of a shot from a model installation with a caliber of 120 mm is theoretically studied. Two types of charge ignition are considered: ignition by means of an electric primer-igniter and by a "flute"-type plasma torch. The developed numerical technique is described, which serves to simulate an artillery shot in an axisymmetric setting in conditions of the indicated ignition types. Three values of the initial temperature of the propellant charge are considered: –40, 0, and +40 °C. Configurations of computational domains for the given ignition methods are shown, and some calculated shot ballistic characteristics for six different calculation options, differing in the ignition type and initial temperature, are presented. It is revealed that in the specified range, the initial temperature of the propellant charge significantly affects the ballistic characteristics of the shot, such as a throwing speed and a maximum pressure in the chamber, while the type of ignition does not significantly affect these characteristics. It is noted that the ignition type has a great impact on temporal characteristics of the shot: the ignition time of a propellant charge and the time of the shot as a whole.

Financial support. This research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project No. 0721-2020-0032.

Aleksandr N. ISHCHENKO (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Vladimir Z. KASIMOV (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ksm@niipmm.tsu.ru

Olga V. USHAKOVA (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: olga@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Baryshev M.S., Burakov V.A., Burkin V.V., Ischenko A.N., Kasimov V.Z., Samorokova N.M., Khomenko Yu.P., Shirokov V.M. (2009) Razrabotka impul'snykh plazmotronov i opyt ikh primeneniya dlya initsiirovaniya nasypnykh zaryadov v ballisticheskikh eksperimentakh [Development of pulse plasma injectors and the experience of their application for initiation of bulk charges in ballistic experiments]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya – Chemical Physics and Mesoscopics*. 11(2). pp. 147–152.
2. Nigmatulin R. (1991) *Dynamics of Multiphase Media*. New York: Hemisphere Publishing Corporation.
3. Khomenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999) *Matematicheskoe modelirovanie vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematical modeling of interior ballistic processes in barrel systems]. Novosibirsk: SB RAS Publishing House.
4. Rusyak I.G., Ushakov V.M. (2001) *Vnutrikamernye geterogennye protsessy v stvol'nykh sistemakh* [Intrachamber heterogeneous processes in barrel systems]. Ekaterinburg: Ural Branch of the Russian Academy of Sciences Publisher.

5. Khomenko Yu.P., Shirokov V.M. (2006) Determining the unsteady combustion behavior of propellants from results of closed-bomb testing. *Combustion*, *Explosion*, *and Shock Waves*. 42(2). pp. 149–157. DOI: 10.1007/s10573-006-0033-7.
6. Ishchenko A.N., Khomenko Y.P. (1997). Effect of force interphase interaction on the characteristics of convective combustion of porous media. *Combustion*, *Explosion*, *and Shock Waves*. 33(4). pp. 448–458. DOI: 10.1007/BF02671838.
7. Ergun S. (1952) Fluid flow through randomly packed columns. *Chemical Engineering Progress*. 48. pp. 89–94.
8. Baryshev M.S., Voronin V.N., Ishchenko A.N., Khomenko Yu.P. (1993) Experimental investigation of the resistance laws for gas flow in a low-porosity medium at high Reynolds numbers. *Russian Physics Journal*. 36(4). pp. 376–384. DOI: 10.1007/BF00570746.
9. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Krayko A.N., Prokopov G.P. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solving of multidimensional problems in gas dynamics]. Moscow: Nauka.
10. Bogdanoff D.W., Miller R.J. (1995) *New Higher-Order Godunov Code for Modelling Performance of Two-Stage Light Gas Guns*. NASA Technical Memorandum 110363.
11. Samarskiy A.A. (1977) *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of difference schemes]. Moscow: Nauka.
12. Stroustrup B. (1991) *The C++ Programming Language*. Addison-Wesley Publishing Company.
13. Blanchette J., Summerfield M. (2006) *C++ GUI Programming with Qt 4*. Prentice Hall PTR.

Received: December 12, 2020

УДК 624.074.432
DOI 10.17223/19988621/70/5

С.А. Пименов

ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ СОЧЕТАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ НАПРЯЖЕНИЙ

Рассматриваются методы оценки вероятности безотказной работы конструкций. Приведена формулировка метода оценки вероятности безотказной работы конструкций на основе сочетания статистического моделирования и численных методов оценки напряжений. В основе метода лежит модель «нагрузка – несущая способность», учитывающая: стохастичность механических свойств материалов конструкции; случайность геометрических характеристик; нагрузки вероятностного характера.

Ключевые слова: *вероятность безотказной работы, нагрузка, несущая способность, статистическое моделирование.*

1. Введение

Сложный характер взаимодействия различных составляющих конструкций с окружающей средой и между собой, случайная природа прочности материалов и условий эксплуатации, неточность сведений о характере нагружения и условий отказа элементов конструкции требуют в расчетах на прочность и долговечность применения вероятностных методов анализа и использования в качестве критериев показатели надежности. Таким образом, вероятностные аспекты проблем прочности рассматриваются теорией надежности.

На текущий момент достаточно хорошо разработаны методы и подходы к оценке вероятности безотказной работы или надежности конструкции на основе модели «нагрузка – несущая способность» [1–6]. В рамках указанных методов условие безотказной работы конструкции, или условие прочности, представляет неравенство между нагрузкой Q и несущей способностью R. Ввиду того, что и нагрузка и несущая способность подвержены случайному разбросу с определенными параметрами рассеяния, условие прочности приобретает вероятностный смысл. Таким образом, вероятность отказа конструкции есть вероятность невыполнения условия прочности. Условие прочности записывается в виде

$$\Psi = R - Q > 0\,, \tag{1}$$

где Ψ – функция неразрушимости.

Аналитические методы и подходы предполагают знание законов распределения (математическое ожидание, дисперсия, коэффициент вариации) всех определяющих параметров, входящих в функции нагрузки Q и несущей способности R, а также наличие аналитической зависимости определяющих параметров конструкции в виде функции

$$Z = \Psi\left(a_1, a_2, \ldots. a_i, \ldots a_n\right). \tag{2}$$

Для ряда конструкций получение аналитического выражения, определяющего взаимосвязь между параметрами нагрузки Q и несущей способностью R, вызывает затруднение. В этих случаях для оценки надежности (вероятности безотказной работы) прибегают к алгоритмам статистического моделирования и численным методам оценки напряжений, например методу конечных элементов [7–10].

Математическая модель, которая является описанием системы, функционирующей в условиях всякого рода случайных воздействий, называется стохастической моделью системы [1], где уравнение вида (2) может быть задано аналитически или в виде конечно-разностной или конечно-элементной схемы.

Задача исследования надежности системы – исследование вероятностных свойств Z, когда имеются вероятностные характеристики a_i ($i = 1,2,\ldots,n$). Так как полной вероятностной характеристикой случайной функции является ее функционал распределения, а случайная величина – ее функция распределения, то для решения сформулированной задачи необходимо уметь строить функционалы и функции распределения. Их определение с помощью аналитических методов представляет известные трудности.

Поставленную задачу можно решить следующим образом:

1) Сформировать вероятностные характеристики Z, определяющие надежность системы, а с помощью натурных испытаний, экспериментов (в том числе вычислительных) или теоретических исследований выяснить вид Ψ;

2) На множестве выборок реализаций случайных величин a_i реализовать алгоритм распределения параметров системы;

3) На совокупности реализаций модели решений Ψ построить статистические оценки вероятностных характеристик Z.

Основная идея метода статистического моделирования (статистических испытаний – метод Монте-Карло) состоит в том, что многократно воспроизводится схема, являющаяся формальным математическим описанием процесса функционирования реальной системы и в то же время выступающая в качестве математической модели, вероятностные характеристики которой адекватны решениям задач математического анализа.

Теоретической основой метода статистического моделирования является широко известный в теории вероятностей закон больших чисел, устанавливающий, при определенных условиях, предельное равенство среднего арифметического случайных величин при бесконечном увеличении числа опытов.

Метод статистического моделирования является универсальным методом нахождения закона распределения $f(z)$ по известным законам распределения определяющих параметров a_i. Метод пригоден практически для любых математических моделей.

Следует заметить, что совместное использование модели «нагрузка – несущая способность», метода статистического моделирования и конечно-элементного анализа также широко освещено в литературе [3–6].

2. Классический подход

Общий алгоритм статистического моделирования для оценки вероятности безотказной работы на основе модели «нагрузка – несущая способность» представлен на рис. 1. При этом вычисление напряжений может производиться либо по аналитической функции Ψ, определяющей взаимосвязь между параметрами нагрузки Q и несущей способности R, либо на основе расчета конечно-элементной модели (КЭМ). Это так называемый классический подход статистического моделирования.

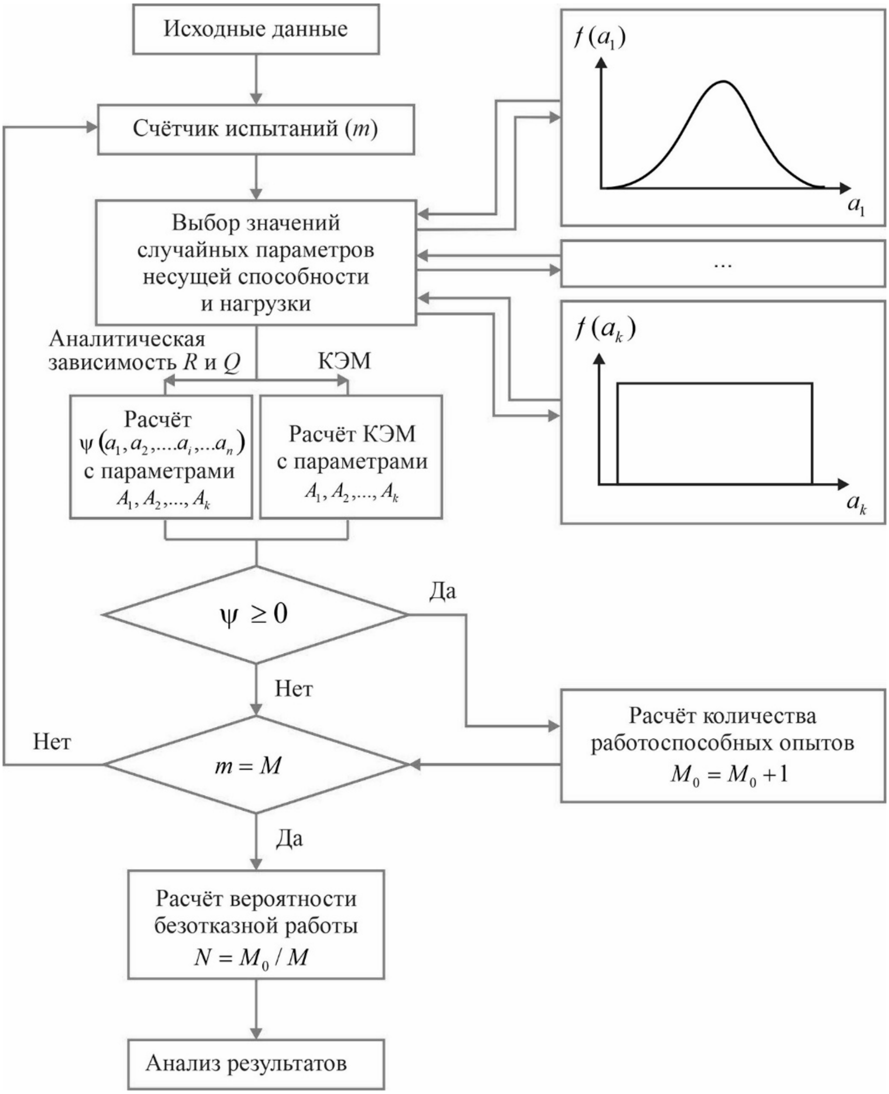


Рис. 1. Общий алгоритм статистического моделирования
Fig. 1. Statistical modeling algorithm

Одной из программных реализаций представленного подхода (рис. 1) является алгоритм модуля Probabilistic Design Analysis пакета программ ANSYS. В рамках данного модуля при решении задач оценки вероятности безотказной работы требуются следующие исходные данные: модельный файл, содержащий расчетную модель для вероятностного анализа (т.е. параметрическая КЭМ с фиксированным числом определяющих параметров как случайных величин) и собственно переменные (случайные величины), для которых либо должен быть задан закон распределения как набор констант (например, для нормального закона распределения следует задать математическое ожидание и дисперсию), либо должны быть заданы вариационные ряды с высоким объемом выборки.

В классическом подходе можно выделить следующие не совсем корректные моменты:

1) В интерфейсе модуля Probabilistic Design Analysis, так же как и в других реализациях классического подхода, предлагается ограниченное число видов законов распределения. Что делать если случайный параметр имеет какой-то другой закон распределения, не описанный в интерфейсе? Этот параметр, конечно же, можно задать в виде вариационного ряда с высоким объемом выборки. Но при этом объем этой выборки должен быть сопоставим с объемами выборок сгенерированных данных для других случайных параметров, с заданными в интерфейсе законами распределения, что на практике не всегда возможно выполнить.

2) Если для какого-либо случайного параметра задан закон распределения, то генерация значений этого параметра выполняется с применением алгоритмов случайной генерации чисел, а получившийся, сгенерированный, вариационный ряд должен удовлетворять заданному закону распределения. При этом, при повторном запуске алгоритма генерации, можно получить совершенно другой вариационный ряд, но тоже удовлетворяющий заданному закону распределения. Никаких проверок, что эти ряды из одной и той же генеральной совокупности обычно не делается. И эти ряды никакого отношения к реальным конструктивным значениям не имеют, это абстрактные данные, а не данные, снятые средствами мониторинга конструкции.

3) Если случайные параметры заданы в виде вариационных рядов, а вариационные ряды – это результаты статистики мониторинга конструкции, то объем выборок этих рядов должен быть значительным (более 500 измерений, как показывает практика). Применение в классическом подходе вариационных рядов с низким объемов выборки может привести к некорректным результатам.

3. Новая формулировка

В отличие от классических реализаций предлагается новый подход, в котором в качестве исходных данных при решении задач оценки вероятности безотказной работы требуются: параметрическая КЭМ (как и в классической реализации) либо аналитическая функция Ψ, определяющая взаимосвязь между параметрами нагрузки Q и несущей способности R; определяющие параметры как случайные величины, но заданные в виде вариационных рядов как результат статистики подобных конструкций. При этом объем выборки определяющих параметров может быть незначительным, а законы распределения не определены (т.е. имеет место эмпирические распределения определяющих параметров, без привязки к каким либо известным законам распределения).

Основой предлагаемой формулировки является алгоритм, в рамках которого следует многократно запустить расчет КЭМ конструкции для вычисления напряжений (либо вычислить напряжения на основе аналитической функции) с учетом данных вариационного ряда каждого из определяющих параметров. Алгоритм представляет собой вложенный цикл по вариационным рядам определяющих параметров (рис. 2). В теле цикла производится расчет КЭМ (или вычисляются напряжения на основе аналитической функции в слабейшем звене конструкции) с текущими значениями параметров из соответствующего вариационного ряда. Реализация такого алгоритма обычно производится языком команд системы инженерного анализа [4]. С использованием команд системы составляется управляющая программа для многократного запуска расчетного процесса. В результате расчета получается ряд чисел $\Psi_{ij} = R_j - Q_{ij}$, которые определяют кривую распределения функции Ψ для узлов КЭМ (или слабейшего звена). Здесь Q_{ij} – уровень эквивалентных напряжений на i-й итерации для j-гоузла КЭМ, R_j – уровень предельных напряжений для конструкции (в районе j-го узла КЭМ). Таким образом, в результате итерационного процесса R_j, Q_{ij} представляются как эмпирические распределения для каждого узла КЭМ.

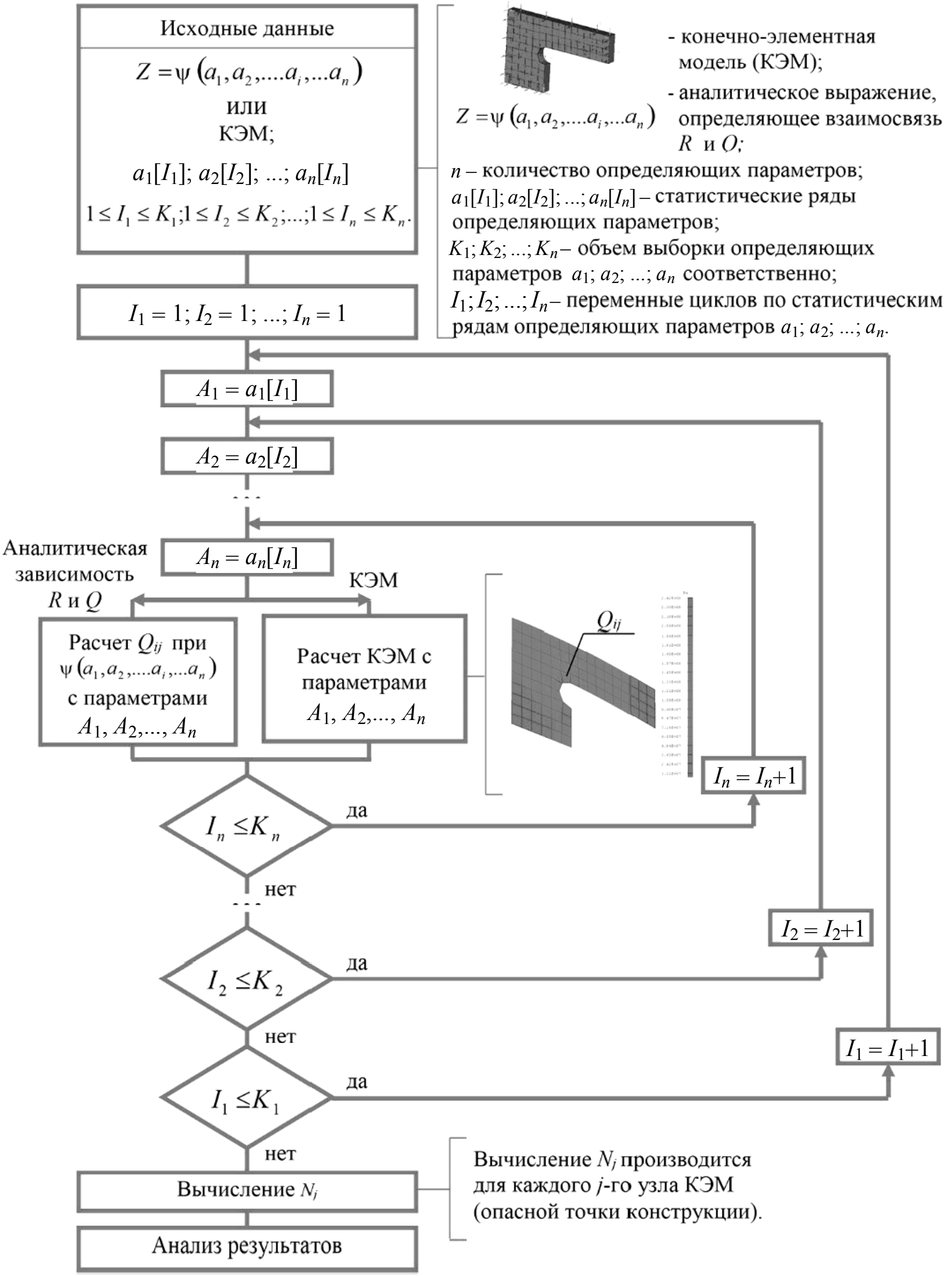


Рис. 2. Модифицированный алгоритм статистического моделирования
Fig. 2. A modified algorithm for statistical modeling

Дальнейший расчет производится для опасного узла, исходя из принципа слабейшего звена, по методу определения вероятности безотказной работы (надежности), а именно выполнению условия неразрушимости по результатам расчета напряжений при эмпирических распределениях R и Q [2]. Данный метод выбран исходя из того, что нет оснований для принятия допущения о каком-либо конкретном распределении нагрузки Q и несущей способности R, однако имеется достаточный объем эмпирических данных. В нашем случае в качестве эмпирических данных выступают данные вычислительного эксперимента – результаты расчета КЭМ (или вычисленные напряжения на основе аналитической функции в слабейшем звене конструкции) в теле цикла (рис. 2). Вводя обозначения $G_j = 1 - F_R(R_j)$ и $H_j = F_Q(Q_{ij})$, запишем выражение для вероятности безотказной работы конструкции или надежности:

$$N_j = \int_0^1 G_j dH_j. \tag{3}$$

Выражение (3) показывает, что вероятность безотказной работы (надежность) N_j численно равна площади под кривой зависимости G_j и H_j [2]. Используя результаты расчета КЭМ и соответственно данные о несущей способности R_j и нагрузке Q_{ij} объекта, строятся эмпирические функции распределения $F_R(R_j)$, $F_Q(Q_{ij})$ и, следовательно, G_j и H_j. Площадь под кривой зависимости G_j и H_j определяется путем численного интегрирования. В результате расчета по каждому узлу КЭМ получается диаграмма изменения вероятности безотказной работы (надежности) по элементам конструкции.

Приведенный новый алгоритм (рис. 2) в общем случае представляет собой блок-схему из n вложенных циклов. Количество определяющих параметров n зависит от конструкции. Для выполнения расчета с произвольным значением n алгоритм должен быть преобразован. Реализация такого алгоритма на ЭВМ осуществлена с применением рекурсии [4].

Основное отличие алгоритма (рис. 2) от классических алгоритмов статистического моделирования (рис. 1, как пример алгоритма модуля Probabilistic Design Analysis пакета программ ANSYS) – это применение формализованного метода определения вероятности безотказной работы при эмпирических распределениях R и Q (вычисление N_j). Изначально это графический метод вычисления показателей надежности. В рамках формализации в первую очередь производится выравнивание статистических распределений нагрузки и несущей способности с помощью некоторых аппроксимирующих кривых. Для построения функции распределения нагрузки по результатам решения задачи по всем итерациям и построения функции распределения несущей способности по указанному вариационному ряду производятся следующие действия:

- расчет области определения функций;

- построение графиков эмпирических функций распределения по результатам расчетов;

- аппроксимация результатов расчетов по методу наименьших квадратов с автоматическим выбором степени полинома;

- вычисление набора значений аппроксимации функции распределения на значениях исходного ряда;

- аппроксимация функции распределения с помощью сплайнов третьего порядка с асимптотическими граничными условиями.

Область определения функций либо задается пользователем указанием минимального и максимального значения аргумента, либо задается с помощью расчета доверительного интервала математического ожидания по входному ряду с учетом заданного пользователем коэффициента доверительной вероятности. Расчет интервала выполняется с учетом распределения Стьюдента и оценки среднеквадратичного отклонения:

$$\bar{x} - \frac{S_1}{\sqrt{n}} t_{\alpha,k} < I_{\bar{x}} < \bar{x} + \frac{S_1}{\sqrt{n}} t_{\alpha,k},$$

где $\bar{x}$ – среднее значение; n – объем выборки (число измерений случайной величины x); S_1 – значение среднеквадратического отклонения с учетом коэффициента K_0, который учитывает смещенность оценки среднеквадратического отклонения при малых объемах выборки; $t_{\alpha,k}$ – значение квантили распределения Стьюдента для числа степеней свободы $K = n - 1$ с доверительной вероятностью $P = 1 - \alpha/2$.

Графики эмпирических функций распределения по результатам расчетов строятся как кусочно-постоянная функция, дополнительно строится кусочно-линейная интерполяция (рис. 3).

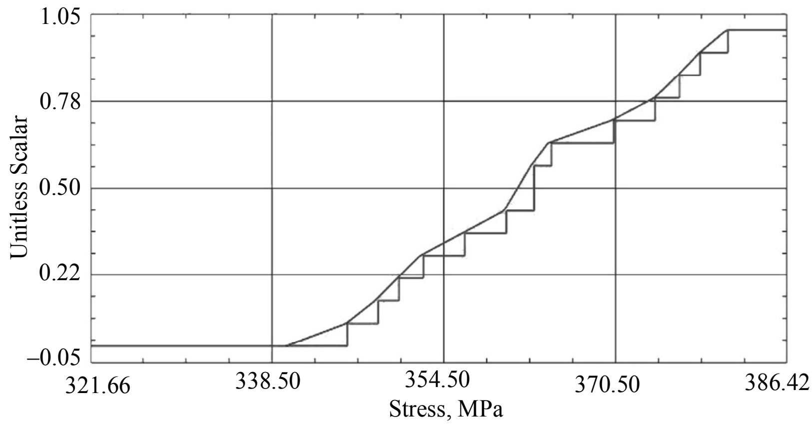


Рис. 3. Кусочно-линейная интерполяция
Fig. 3. Piecewise linear interpolation

Выравнивание статистических распределений осуществляется путем полиномиальной аппроксимации результатов расчетов по методу наименьших квадратов с автоматическим выбором степени полинома (рис. 4).

Полиномиальная аппроксимация обеспечивает нахождение коэффициентов полинома

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \tag{4}$$

из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&c_o a_o + c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_m a_m = d_0, \\
&c_1 a_o + c_2 a_1 + c_3 a_2 + \ldots + c_{m+1} a_m = d_1, \\
&\ldots \\
&c_m a_o + c_{m+1} a_1 + c_{m+2} a_2 + \ldots + c_{2m} a_m = d_m,
\end{aligned} \tag{5}$$

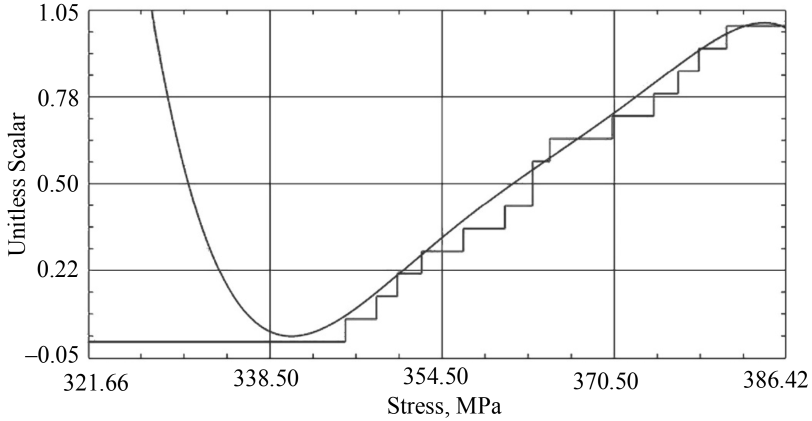


Рис. 4. Полиномиальная аппроксимация
Fig. 4. Polynomial approximation

где
$$c_j = \sum_{i=1}^{N_{xy}} xj \, , j = 0, 1, 2, \ldots, 2m; \tag{6}$$

$$d_k = \sum_{i=1}^{N_{xy}} x_i^k y_i \, , k = 0, 1, 2, \ldots, m. \tag{7}$$

Полином (4) степени $m<N_{xy}$, где N_{xy} – число пар x_i и y_i, обеспечивает аппроксимацию (и интерполяцию) таблично заданной функции $y_i(x_i)$ с минимальной среднеквадратичной погрешностью:

$$E = K_0 \sqrt{\sum_{i=1}^{N_{xy}} \varepsilon_i^2 /(N_{xy} - 1)}, \tag{8}$$

где
$$\varepsilon_i = \left| \frac{y(x_i) - y_i(x_i)}{y_i(x_i)} \right| - \left| \frac{y(x_i) - y_i(x_i)}{y_i(x_i)} \right| / N_{xy};$$

K_0 – поправочный коэффициент, учитывающий смещенность оценки среднеквадратического отклонения в зависимости от N_{xy}.

Если $m = N_{xy}$, то имеет место обычная интерполяция, в этом случае значения $y(x)$ при $x = x_i$ точно совпадают с заданными y_i. При $m<N_{xy}$ такого совпадения в общем случае нет, аппроксимация $y_i(x_i)$ по методу наименьших квадратов, таким образом, имеет более универсальных характер, чем обычная интерполяция.

Если достаточно ограничиться вычислением лишь коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_m$ полинома (4) без вычисления значения погрешности E, то нет необходимости в хранении массивов x_i и y_i. При этом достаточно вычислить c_j (массив из $2m$ чисел) и d_k (массив из m чисел) с помощью (6), (7) соответственно и далее решить полученную систему уравнений методом Гаусса.

Полиномиальная аппроксимация с автоматическим выбором степени полинома выполняется по следующему алгоритму:

1) Задается степень $m = 1$ (линейная интерполяция), при этом массивы x_i и y_i сохраняются;

2) После вычисления коэффициентов $a_o, a_1, ..., a_m$ методом Гаусса с помощью (8) вычисляется среднеквадратическая погрешность E и сравнивается с заданной E_1;

3) Если $E > E_1$, то степень полинома m увеличивается на 1 и так далее производится итерационный расчет, начиная с второго пункта перечисления настоящего списка;

4) Расчет прекращается, как только достигается $E < E_1$.

Примечание. Таким образом, производится полиномиальная аппроксимация функций распределения нагрузки $F_Q(Q_i)$ и несущей способности $F_R(R_i)$ исходя из результатов расчетов (вариационных рядов нагрузки Q_i в контрольных узлах КЭМ) и данных о несущей способности конструкции (вариационный ряд R_i). Полиномиальная аппроксимация производится методом наименьших квадратов с автоматическим выбором степени полинома на основе погрешности, указанной на входе алгоритма.

По результатам аппроксимации методом наименьших квадратов производится вычисление значений функции распределения на значениях исходного ряда. Эти значения становятся исходными для расчетов, выполняемых на следующем шаге.

Метод наименьших квадратов достигает точности на значениях исходного ряда, но обладает существенными недостатками – большой погрешностью интерполяции при больших промежутках в значениях исходного ряда и погрешностью экстраполяции (рис. 4). Поэтому для экстраполяции на функции распределения на участках справа и слева от исходного ряда требуется введение сплайнов третьего порядка с асимптотическими граничными условиями.

Аппроксимация функции распределения с помощью сплайнов третьего порядка с асимптотическими граничными условиями выполняется с учетом гладкого (равенство первых производных) соединения участков функции между исходными значениями. Функция распределения асимптотически приближается к нулю слева и к единице справа, поэтому принимается, что в граничных точках определения первая производная равна нулю. Экстраполяция слева и справа области определения выполняется линейными участками с сохранением наклона (значения первой производной) на границах области определения (рис. 5).

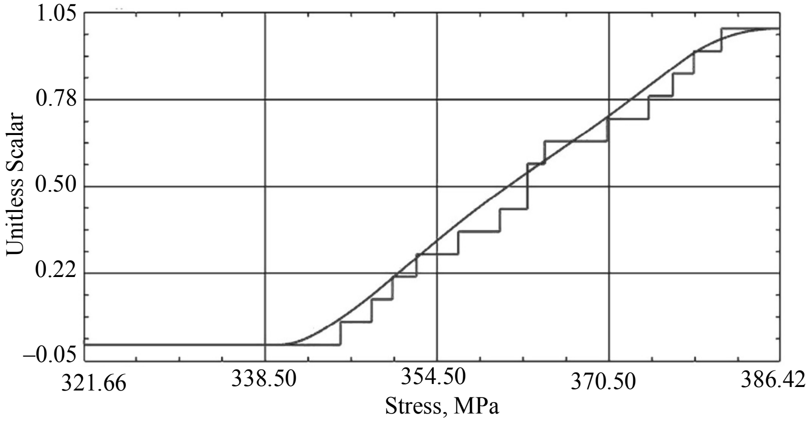


Рис. 5. Экстраполяция на границах области определения
Fig. 5. Extrapolation at the boundaries of a definition domain

Из ранее приведенного видно, что производится выравнивание статистических распределений нагрузки и несущей способности с помощью некоторых теоретических кривых. Между теоретической кривой (как бы она хорошо подобрана не была) и статистическим распределением неизбежны некоторые расхождения. Возникает вопрос: объясняются ли эти расхождения только случайными обстоятельствами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они являются существенными и связаны с тем, что подобранная кривая плохо выравнивает данное статистическое распределение. Для ответа на этот вопрос служат критерии согласия.

В данном случае проверка расхождения между теоретическим и статистическим распределениями осуществляется на основе критериев согласия Колмогорова и Пирсона. По данным критериям проверяется гипотеза *H*, состоящая в том, что случайная величина *X* подчиняется некоторому определенному закону распределения, полученному на основании заданного статистического материала (опытные или расчетные данные).

Схема применения критерия Колмогорова следующая:

1) Строятся статистическая функция распределения $F_n^*(x)$ и предполагаемая функция теоретического распределения $F(x)$ на основе ранее приведенной технологии выравнивания с помощью аппроксимационных функций (рис. 6);

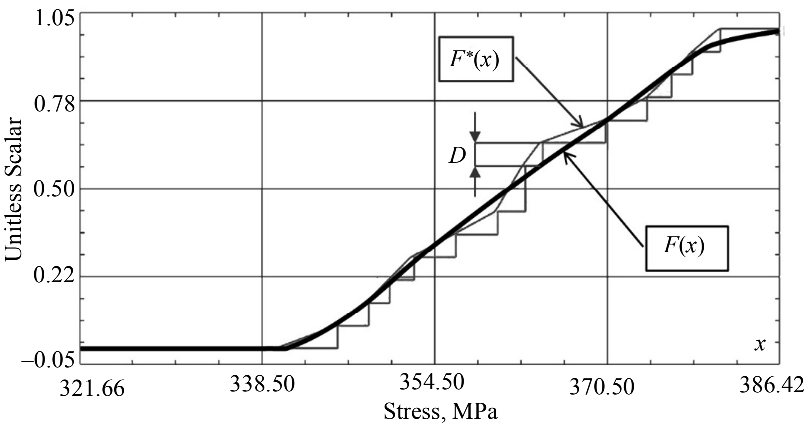


Рис. 6. Схема применения критерия Колмогорова
Fig. 6. Scheme for applying the Kolmogorov criterion

2) Определяется максимум D_n модуля разности между этими распределениями:

$$D_n = \max\left|F_n^*(x) - F(x)\right|;$$

3) Определяется величина $\lambda = D_n\sqrt{n}$ и по табл. 1 находится вероятность $P(\lambda)$;

Примечание. Величина $P(\lambda)$ есть вероятность того, что за счет чисто случайных причин максимальное расхождение между $F(x)$ и $F_n^*(x)$ будет не меньше, чем фактически наблюдаемое.

λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$
0.0	1.000	0.6	0.864	1.1	0.178	1.6	0.012
0.1	1.000	0.7	0.711	1.2	0.112	1.7	0.006
0.2	1.000	0.8	0.544	1.3	0.068	1.8	0.003
0.3	1.000	0.9	0.393	1.4	0.040	1.9	0.002
0.4	0.997	1.0	0.270	1.5	0.022	2.0	0.001
0.5	0.964						

4) Если вероятность $P(\lambda)$ весьма мала, то гипотезу H следует отвергнуть как неправдоподобную, при сравнительно больших $P(\lambda)$ её можно считать совместимой с опытными (расчетными) данными.

Схема применения критерия Пирсона:

1) Определяется мера расхождения χ^2 по формуле

$$W = \chi^2 = k\sum_{i=1}^{n}\frac{(P_i^* - P_i)^2}{P_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(m_i - kP_i)^2}{kP_i},$$

где $P_i^* = m_i / k$; m_i – число значений в i-м разряде; n – число разрядов;

2) Определяется число степеней свободы K по формуле $K = n - s$ (число разрядов n минус число независимых условий, связей s, наложенных на частоты P_i^*);

3) По K и χ^2 с помощью таблиц распределения Пирсона находят вероятность того, что величина, имеющая распределение χ^2 с K степенями свободы, превзойдет данное значение χ^2 ;

4) Если эта вероятность весьма мала (меньше 0.1), гипотеза H отбрасывается как неправдоподобная, а если вероятность относительно велика, гипотезу H можно признать не противоречащей опытным (расчетным) данным.

Основная область применения предлагаемого метода – оценка вероятности безотказной работы конструкций, нагруженных стационарной или квазистационарной случайной нагрузкой при следующих условиях:

1) Предполагается, что вид законов распределения нагрузки и несущей способности во времени не меняется. Неизменными также считаются и параметры законов распределения;

2) Для исследуемой конструкции, для ее опасного места, выведено аналитическое выражение $\psi(a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n)$, определяющее взаимосвязь R и Q, либо конструкция задана в виде параметрической КЭМ с заданным числом определяющих параметров $a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n$;

3) Определяющие параметры конструкции a_i полагаются независимыми случайными величинами, имеют произвольный закон распределения или заданы эмпирически в виде вариационных рядов.

Дополнительная область применения – оценка вероятности безотказной работы при случайных динамических нагрузках, представленных в виде детерминированных функций, зависящих от конечного числа случайных величин. Например: ударные воздействия, форма импульса которых неизменна, а амплитуда и длительность представлены как независимые случайные величины; синусоидальная вибрация, где амплитуда и частота – независимые случайные величины. В рамках предлагаемого метода возможно решить классическую задачу статистической механики с точки зрения теории надежности, т.е. вычислить вероятность безотказной работы с учетом случайного нагружения (например, заданного в виде широкополосной случайной вибрации) и случайных факторов на уровне геометрии и свойств материалов конструкции.

В предлагаемом методе случайными факторами могут быть: механические свойства материалов конструкции, геометрические характеристики конструкции и дефектов, условия нагружения.

4. Заключение

Разработанный метод предназначен для анализа вероятности безотказной работы при случайном нагружении. Его основной отличительной чертой является возможность использования в качестве исходных данных для решения задач оценки вероятности безотказной работы (надежности) определяющих параметров, заданных в виде вариационных рядов. Достоверность результатов достигается при незначительных объемах выборки, при этом закон распределения может оставаться неизвестным.

Основное преимущество – универсальность метода. С применением данного метода возможно проводить расчеты для широкого ряда конструкций с учетом статистического характера исходных данных. Ввиду возможности использования выборок малых объемов, применение метода актуально для конструкций, диагностика и систематический мониторинг которых затруднены вследствие конструктивных особенностей и специфики эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волков В.М.* Надежность машин и тонкостенных конструкций: учеб. пособие. Н. Новгород: Изд-во НГТУ, 2011. 365 с.
2. *Капур К.*, *Ламберсон Л.* Надежность и проектирование систем. М.: Мир, 1980. 604 с.
3. *Пименов С.А.* Применение численных методов для оценки надежности конструкций // Новые промышленные технологии. 2010. № 3. С. 55–57.
4. *Пименов С.А.*, *Палкин И.Ю.* Применение рекурсивных алгоритмов при оценке надежности конструкций // Наукоемкие технологии. 2011. № 4. С. 39–43.
5. *Острейковский В.А.* Теория надёжности. М.: Высшая школа, 2003. 464 с.
6. *Probabilistic* Design Methodology for Composite Aircraft Structures, National Technical Information Service (NTIS), Springfield, Virginia 22161, June 1999. URL: http://www.tc.faa.gov/its/worldpac/techrpt/ar99-2.pdf
7. *Зенкевич О.К.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
8. NX Nastran Numerical Methods User's Guide. UGS, 2005. URL: http://docs.plm.automation.siemens.com/data_services/resources/nxnastran/10/help/en_US/custom/numerical/numerical.pdf
9. *ANSYS* Mechanical APDL Basic Analysis Guide, Release 15.0. ANSYS. Inc, November, 2013. URL: https://docplayer.net/45466427-Ansys-mechanical-apdl-basic-analysis-guide.html
10. *Abaqus* Analysis User's Manual, Release 6.1. Dessault Systems, 2010. URL: https://www.academia.edu/24831145/Abaqus_Analysis_Users_Manual

Статья поступила 17.02.2019

Pimenov S.A. (2021) FORMULATION OF A METHOD OF RELIABILITY ASSESSMENT FOR CONSTRUCTIONS ON THE BASIS OF A COMBINATION OF STATISTICAL MODELING AND NUMERICAL METHODS OF STRESS EVALUATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 51–63

DOI 10.17223/19988621/70/5

Keywords: reliability, load, bearing strength, statistical modeling.

In this paper, methods for estimating the reliability of constructions are considered. The formulation of a method for estimating the reliability of the design based on a combination of statistical modeling and numerical methods for evaluating stresses is given. The method is based on a "load – bearing capacity" model, which takes into account both stochasticity of mechanical properties of construction materials, randomness of geometric characteristics, and loads of a probabilistic nature.

This new method is a system of *n* nested cycles. The number of governing parameters *n* depends on the design. The load variation series is calculated in the body of the internal cycle. The load is calculated numerically in terms of stresses using the finite element method. Any commercial solver such as Nastran, Ansys, or Abaqus can be used for this purpose. The probability of failure-free operation (reliability) is calculated involving the variational series of loads and load-carrying ability. For this purpose, the formalized estimation method based on empirical distributions is used. Fundamentals of the latter are available in the monograph "Reliability in Engineering Design" written by Kapur K.C. and Lamberson L.R..

A primary function of the proposed method is to evaluate the probability of failure-free operation of constructions under stationary or quasi-stationary random loads.

Stanislav A. PIMENOV (Doctor of Technical Sciences, Branch of FSUE «RFNC-VNIIEF» «NIIIS named after Yu.Ye. Sedakov», Nizhny Novgorod, Russian Federation). E-mail: spimenov_m_fem@mail.ru

REFERENCES

1. Volkov V.M. (2011) *Nadyozhnost' mashin i tonkostennykh konstruktsiy. Uchebnoe posobie* [Reliability of machines and thin-walled constructions. Tutorial]. Nizhny Novgorod: NGTU.
2. Kapur K.C., Lamberson L.R. (2009) *Reliability in Engineering Design.* Wiley India Private Limited.
3. Pimenov S.A. (2010) Primenenie chislennykh metodov dlya otsenki nadezhnosti konstruktsiy [Application of numerical methods for evaluating the reliability of constructions]. *Novye promyshlennye tekhnologii.* 3. pp. 55–57.
4. Pimenov S.A., Palkin I.Yu. (2011) Primenenie rekursivnykh algoritmov pri otsenke nadezhnosti konstruktsiy [Application of recursive algorithms for evaluating the reliability of constructions]. *Naukoyomkie tekhnologii – Science Intensive Technologies*. 4. pp. 39–43.
5. Ostreykovskiy V.A. (2003) *Teoriya nadyozhnosti* [Reliability theory]. Moscow: Vysshaya shkola.
6. Probabilistic Design Methodology for Composite Aircraft Structures, National Technical Information Service (NTIS). Springfield, Virginia, 1999. Access mode: http://www.tc.faa.gov/its/worldpac/techrpt/ar99-2.pdf.
7. Zenkevich O.K. (1975) *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [Finite element method in engineering]. Moscow: Mir.
8. NX Nastran Numerical Methods User’s Guide. UGS, 2005. Access mode: http://docs.plm.automation.siemens.com/data_services/resources/nxnastran/10/help/en_US/custom/numerical/numerical.pdf.
9. ANSYS Mechanical APDL Basic Analysis Guide, Release 15.0. ANSYS Inc., 2013. Access mode: https://docplayer.net/45466427-Ansys-mechanical-apdl-basic-analysis-guide.html.
10. Abaqus Analysis User’s Manual, Release 6.1. Dessault Systems, 2010. Access mode: https://www.academia.edu/24831145/Abaqus_Analysis_Users_Manual.

Received: February 17, 2020

УДК 531.391
DOI 10.17223/19988621/70/6

И.П. Попов

РЕАКТАНСЫ И САССЕПТАНСЫ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Цель исследования состоит в разработке существенно компактных методов расчета механических систем при гармонических силовых воздействиях для установившихся режимов. При решении использованы подходы, применяемые для расчета электрических цепей. Представление гармонических величин в виде вращающихся векторов в комплексной плоскости и операций с их комплексными амплитудами позволяет многократно облегчить расчет механических систем. Ключевую роль в предложенном методе играют механические реактанс, резистанс и импеданс для параллельного соединения потребителей механической мощности и сассептанс, кондактанс и адмитанс – для последовательного.

Ключевые слова: *реактанс, резистанс, импеданс, сассептанс, кондактанс, адмитанс.*

Классическое решение задач, связанных с расчетом скоростей и реакций элементов сложных механических систем при гармоническом силовом воздействии, заключается в составлении и интегрировании систем дифференциальных уравнений и является достаточно громоздким и трудоемким [1, 2].

В большинстве случаев интерес ограничивается установившимся режимом.

Цель исследования состоит в разработке существенно компактных методов расчета систем для установившихся режимов.

При решении использованы методы, применяемые для расчета электрических цепей.

Параллельное соединение потребителей механической мощности

Точки приложения сил к потребителям механической мощности (рис. 1) обладают единой скоростью

$$v = V \sin \omega t \, . \tag{1}$$

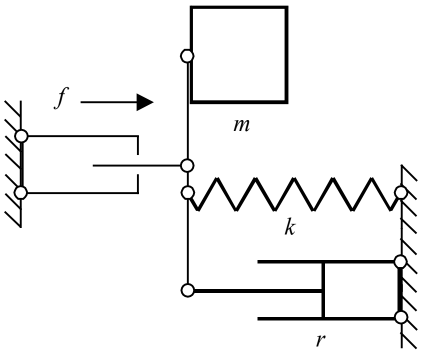


Рис. 1. Параллельное соединение
Fig. 1. Parallel connection

Силы, приложенные к инертному телу, упругому элементу и демпферу, соответственно равны

$$f_m = m\frac{dv}{dt} = m\omega V\cos\omega t\,; \tag{2}$$

$$f_k = -kx = k\int vdt = -\frac{k}{\omega}V\cos\omega t\,; \tag{3}$$

$$f_r = rv = rV\sin\omega t\,. \tag{4}$$

Суммарная сила, развиваемая источником силового гармонического воздействия, равна

$$f = f_m + f_k + f_r = V\left[\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)\cos\omega t + r\sin\omega t\right] =$$

$$= V\sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2}\left[\frac{m\omega - k/\omega}{\sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2}}\cos\omega t + \frac{r}{\sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2}}\sin\omega t\right].$$

Пусть
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{m\omega - k/\omega}{r}\,. \tag{5}$$

Тогда
$$f = V\sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2}\,(\sin\varphi\cos\omega t + \cos\varphi\sin\omega t) =$$

$$= V\sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2}\,\sin(\omega t + \varphi) = F\sin(\omega t + \varphi)\,. \tag{6}$$

Это известная формула вынужденных колебаний, для получения которой не потребовалось составлять и решать дифференциальное уравнение.

Амплитуда суммарной силы

$$F = Vz\,, \tag{7}$$

где
$$z = \sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2}\ [\text{кг}\cdot\text{с}^{-1}]\,. \tag{8}$$

В 1873 г. Максвелл ввел первую (из двух) систему электро-механических аналогий:

- (скорость) $V \Rightarrow I$ (ток),
- (сила) $F \Rightarrow U$ (напряжение),
- (масса) $m \Rightarrow L$ (индуктивность),
- (коэффициент упругости) $k \Rightarrow 1/C$ (C – емкость),
- (коэффициент вязкого сопротивления) $r \Rightarrow R$ (сопротивление).

В 1919 г. Вебстер ввел в механику заимствованное из электротехники понятие о механических реактансах, являющихся аналогами электрических реактивных сопротивлений:

- (*инертный реактанс*) $\omega m \Rightarrow \omega L$ (индуктивное сопротивление),
- (*упругий реактанс*) $k/\omega \Rightarrow 1/(\omega C)$ (емкостное сопротивление).

В соответствии с представленной системой аналогий выражение (7) дуально закону Ома для участка электрической цепи

$$U = IZ\,,$$

где $Z = \sqrt{[\omega L - 1/(\omega C)]^2 + R^2}$ – полное сопротивление. Следовательно, выражение (8) – это *механический импеданс* (impedance), как в силу дуального соответствия, так и потому, что в его состав входят инертный и упругий реактансы.

Механический реактанс (reactance) равен

$$x = m\omega - \frac{k}{\omega}.$$

При $x = 0$ получается известная формула $\omega = \sqrt{k/m}$. Имеет место *резонанс сил* [3]. Если при этом $r = 0$, то и $z = 0$. Физический смысл этого состоит в том, что система не оказывает сопротивления внешнему силовому гармоническому воздействию.

Для единообразия терминологии величина r в дальнейшем называется *механическим резистансом* (resistance).

Комплексное представление при параллельном соединении.

По аналогии с электротехникой гармоническую величину можно представить в виде

$$a = A\sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{Im}[Ae^{i(\omega t+\varphi)}],$$

где $Ae^{i(\omega t+\varphi)}$ – вращающийся в комплексной плоскости вектор.

Векторы в комплексной плоскости принято изображать для нулевого момента времени. При этом величина

$$Ae^{i(\omega 0+\varphi)} = Ae^{i\varphi} = \dot{A}$$

называется *комплексной амплитудой*.

В соответствии с этим выражение (1) можно представить в виде

$$v = V\sin\omega t = \mathrm{Im}(Ve^{i\omega t}),$$

$$\dot{V} = Ve^{i0}.$$

Формула (2) показывает, что f_m опережает по фазе v на $\pi/2$. Следовательно,

$$\dot{F}_m = m\omega\dot{V}e^{i\frac{\pi}{2}} = \underline{x}_m\dot{V},$$

где

$$\underline{x}_m = \omega m e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega m \tag{9}$$

– инертный реактанс в комплексном представлении.

Над комплексными величинами, не являющимися изображениями синусоиды, точка не ставится, такие величины подчеркиваются.

Комплексная амплитуда инертной силы равна

$$\dot{F}_m = \omega m e^{i\frac{\pi}{2}}Ve^{i0} = \omega m V e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Аналогично, с учетом (3) и (4)

$$\dot{F}_k = -\frac{k}{\omega}\dot{V}e^{i\frac{\pi}{2}} = \underline{x}_k\dot{V},$$

где

$$\underline{x}_k = -\frac{k}{\omega}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{k}{\omega}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\frac{k}{\omega} \tag{10}$$

– упругий реактанс;

$$\dot{F}_r = r\dot{V} = \underline{r}\dot{V}, \quad \underline{r} = r$$

– резистанс.

Комплексные амплитуды упругой и резистивной сил соответственно равны

$$\dot{F}_k = \frac{k}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} V e^{i0} = \frac{k}{\omega} V e^{-i\frac{\pi}{2}};$$

$$\dot{F}_r = r\dot{V} = re^{i0} V e^{i0}.$$

а механические реактанс и импеданс

$$\underline{x} = \underline{x}_m + \underline{x}_k = \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}};$$

$$\underline{z} = r + \underline{x} = r + \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Модуль механического импеданса совпадает с (8):

$$Z = \sqrt{r^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right)^2}.$$

Его фаза равна (5). Таким образом,

$$\underline{z} = Ze^{i\varphi}.$$

Суммарная сила, развиваемая источником силового гармонического воздействия, равна

$$\dot{F} = \underline{z}\dot{V} = ZVe^{i\varphi}, \tag{11}$$

что соответствует (6).

Пример 1. $\dot{F} = 100e^{i0}$ Н, $\omega = 2$ рад/с, $m = 10$ кг, $k = 20$ кг $\cdot$ с$^{-2}$, $r = 7$ кг $\cdot$ с$^{-1}$. Найти скорость и составляющие силы в установившемся режиме.

$$\underline{x}_m = \omega m e^{i90°} = 20e^{i90°} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\underline{x}_k = \frac{k}{\omega} e^{-i90°} = 10e^{-i90°} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1}.$$

$$Z = \sqrt{r^2 + (x_m - x_k)^2} = \sqrt{7^2 + (20-10)^2} = 12{,}207 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1}.$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_m - x_k}{r} = \operatorname{arctg} \frac{20-10}{7} = 55°,$$

$$\underline{z} = Ze^{i\varphi} = 12{,}207e^{i55°} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1}.$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100e^{i0}}{12{,}207e^{i55°}} \approx 8{,}192e^{-i55°} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, \tag{12}$$

$$\dot{F}_m = \underline{x}_m \dot{V} = 20e^{i90°} \cdot 8{,}192e^{-i55°} = 163{,}846e^{i35°} \text{ Н},$$

$$\dot{F}_k = \underline{x}_k \dot{V} = 10e^{-i90°} \cdot 8{,}192e^{-i55°} = 81{,}923e^{-i145°} \text{ Н},$$

$$\dot{F}_r = r\dot{V} = 7e^{i0} \cdot 8{,}192e^{-i55°} = 57{,}344e^{-i55°} \text{ Н}.$$

Разумеется,

$$\dot{F}_m + \dot{F}_k + \dot{F}_r = 163{,}846e^{i35°} + 81{,}923e^{-i145°} + 57{,}344e^{-i55°} = 100e^{i0}\ (\text{Н}) = \dot{F}\ .$$

Классический расчет по сравнению с примером 1 несоизмеримо сложнее и объемнее.

Векторная диаграмма (не является необходимой частью расчета) для величин из примера 1 представлена на рис. 2.

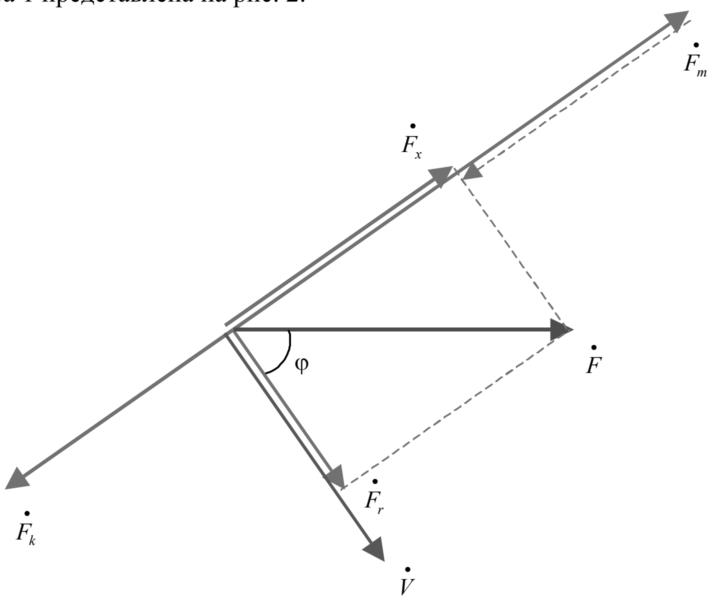


Рис. 2. Векторная диаграмма при параллельном соединении
Fig. 2. Vector diagram for parallel connection

Резонанс сил

В дополнение к вышесказанному о резонансе сил можно ограничиться численным примером.

Пример 2. Пусть $k = 40$ кг·с$^{-2}$. Остальные данные – из примера 1. Потребители механической мощности соединены параллельно.

$$\underline{x}_k = 20e^{-i90°}\ \text{кг}\cdot\text{с}^{-1},$$

$$\underline{z} = r = 7e^{i0°}\ \text{кг}\cdot\text{с}^{-1},$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100e^{i0}}{7e^{i0°}} \approx 14{,}286e^{i0°}\ \text{м}\cdot\text{с}^{-1},$$

$$\dot{F}_m = \underline{x}_m \dot{V} = 20e^{i90°}\cdot 14{,}286e^{i0°} = 285{,}72e^{i90°}\ \text{Н},$$

$$\dot{F}_k = \underline{x}_k \dot{V} = 20e^{-i90°}\cdot 14{,}286e^{i0°} = 285{,}72e^{-i90°}\ \text{Н},$$

$$\dot{F}_r = r\dot{V} = 7e^{i0}\cdot 14{,}286e^{i0°} = 100e^{i0°}\ \text{Н}.$$

Разумеется,

$$\dot{F}_m + \dot{F}_k + \dot{F}_r = 285{,}72e^{i90^\circ} + 285{,}72e^{-i90^\circ} + 100e^{i0^\circ} = 100e^{i0}\ \text{Н} = \dot{F} = \dot{F}_r\ .$$

Векторная диаграмма для величин из примера 2 представлена на рис. 3. Реактивные силы $\dot{F}_m$ и $\dot{F}_k$ (термин заимствован из электротехники) существенно выше, чем в примере 1.

Рис. 3. Векторная диаграмма резонанса сил
Fig. 3. Vector diagram of force resonance

Последовательное соединение потребителей механической мощности

Ко всем потребителям механической мощности (рис. 4) приложена единая сила

$$f = F\cos\omega t\ .$$

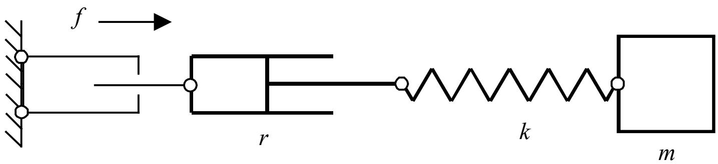


Рис. 4. Последовательное соединение
Fig. 4. Serial connection

Скорости инертного тела и изменения размеров упругого элемента и демпфера соответственно равны

$$v_m = \frac{1}{m}\int f dt = \frac{F}{\omega m}\sin\omega t\ ; \tag{13}$$

$$v_k = -\frac{1}{k}k\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k}\frac{df}{dt} = -\frac{\omega F}{k}\sin\omega t\,; \tag{14}$$

$$v_r = \frac{f}{r} = \frac{F}{r}\cos\omega t\ . \tag{15}$$

Скорость штока источника силового гармонического воздействия

$$v = v_m + v_k + v_r = F\left[\left(\frac{1}{\omega m} - \frac{\omega}{k}\right)\sin\omega t + \frac{1}{r}\cos\omega t\right] = F\sqrt{\left[1/(\omega m) - \omega/k\right]^2 + (1/r)^2}\ \times$$

$$\times\left[\frac{1/(\omega m) - \omega/k}{\sqrt{\left[1/(\omega m) - \omega/k\right]^2 + (1/r)^2}}\sin\omega t + \frac{1/r}{\sqrt{\left[1/(\omega m) - \omega/k\right]^2 + (1/r)^2}}\cos\omega t\right];$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1/(\omega m) - \omega/k}{1/r}\ ;$$

$$v = F\sqrt{\left[1/(\omega m) - \omega/k\right]^2 + (1/r)^2}\,(\sin\varphi\sin\omega t + \cos\varphi\cos\omega t) =$$

$$= F\sqrt{\left[1/(\omega m) - \omega/k\right]^2 + (1/r)^2}\,\cos(\omega t - \varphi) = V\cos(\omega t - \varphi)\,.$$

Это формула вынужденных колебаний при последовательном соединении потребителей механической мощности, для получения которой не потребовалось составлять и решать дифференциальное уравнение.

Амплитуда суммарной скорости равна

$$V = Fy\,,$$

$$y = \sqrt{\left[1/(\omega m) - \omega/k\right]^2 + (1/r)^2}\ . \tag{16}$$

При $1/(\omega m)-\omega/k=0$ также получается известная формула $\omega=\sqrt{k/m}$. Имеет место *резонанс скоростей* [3], при котором точка приложения силы к системе упругий элемент – инертное тело неподвижна, при этом сами по себе инертное тело и упругий элемент совершают колебания. Если дополнительно $1/r=0$, то и $y=0$. Физический смысл этого состоит в том, что система оказывает бесконечно большое сопротивления внешнему силовому гармоническому воздействию, вследствие чего шток источника силового гармонического воздействия неподвижен, хотя инертное тело и упругий элемент совершают колебания.

Комплексное представление при последовательном соединении

Порядок рассуждений аналогичен представленному выше:

$$f=F\cos\omega t=\mathrm{Re}(Fe^{i\omega t}),$$

$$\dot{F}=Fe^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Формула (13) показывает, что v_m отстает по фазе f на $\pi/2$. Следовательно,

$$\dot{V}_m=-\frac{1}{\omega m}\dot{F}e^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\underline{x}_m}\dot{F}=\underline{b}_m\dot{F},$$

$$\underline{b}_m=\frac{1}{\omega m}e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i\frac{1}{\omega m}=\frac{1}{\underline{x}_m}$$

– *инертный сассептанс* (susceptance) в комплексном представлении.

Комплексная амплитуда инертной скорости равна

$$\dot{V}_m=\frac{1}{\omega m}e^{-i\frac{\pi}{2}}Fe^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\omega m}Fe^{i0}.$$

Аналогично, с учетом (14) и (15)

$$\dot{V}_k=\frac{\omega}{k}\dot{F}e^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\underline{x}_k}\dot{F}=\underline{b}_k\dot{F},$$

$$\underline{b}_k=\frac{\omega}{k}e^{i\frac{\pi}{2}}=i\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\underline{x}_k}$$

– упругий сассептанс.

Комплексные амплитуды упругой и резистивной скоростей соответственно равны

$$\dot{V}_k=\frac{\omega}{k}e^{i\frac{\pi}{2}}Fe^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{\omega}{k}Fe^{i\pi},$$

$$\dot{V}_r=\frac{1}{r}\dot{F}=g\dot{F}=gFe^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$\underline{g}=g=\frac{1}{r}$$

– *механический кондактанс* (conductance).

Механический сассептанс равен

$$\underline{b} = \underline{b}_k + \underline{b}_m = \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m}\right) e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Механический адмитанс (admittance)

$$\underline{y} = g + \underline{b} = g + \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m}\right) e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Модуль механического адмитанса совпадает с (16):

$$Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2} = \sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m}\right)^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b_k - b_m}{g} = \operatorname{arctg}\frac{\omega/k - 1/(\omega m)}{g} = \operatorname{arctg}\left[(m\omega - k/\omega)\frac{r}{mk}\right],$$

$$\underline{y} = Ye^{i\varphi}.$$

Суммарная скорость равна скорости штока источника силового гармонического воздействия

$$\dot{V} = \underline{y}\dot{F} = Ye^{i\varphi}Fe^{i\frac{\pi}{2}} = YFe^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}. \qquad (17)$$

Пример 3. Для данных примера 1 найти все скорости в установившемся режиме.

$$\underline{b}_m = \underline{x}_m^{-1} = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90°} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с},$$

$$\underline{b}_k = \underline{x}_k^{-1} = 10 \cdot 10^{-2} e^{i90°} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с},$$

$$g = r^{-1} = 14{,}286 \cdot 10^{-2} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с}.$$

$$Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2} = \sqrt{(14{,}286 \cdot 10^{-2})^2 + \left(10 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 15{,}135 \cdot 10^{-2} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с}.$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b_k - b_m}{g} = \operatorname{arctg}\frac{10 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-2}}{14{,}286 \cdot 10^{-2}} = 19{,}29°,$$

$$\underline{y} = Ye^{i\varphi} = 15{,}135 \cdot 10^{-2} e^{i19{,}29°} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с}.$$

$$\dot{V} = \underline{y}\dot{F} = 15{,}135 \cdot 10^{-2} e^{i19{,}29°} \cdot 100 = 15{,}135 e^{i19{,}29°} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\dot{V}_m = \underline{b}_m \dot{F} = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90°} \cdot 100 = 5e^{-i90°} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\dot{V}_k = \underline{b}_k \dot{F} = 10 \cdot 10^{-2} e^{i90°} \cdot 100 = 10e^{i90°} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\dot{V}_r = g\dot{F} = 14{,}286 \cdot 10^{-2} \cdot 100 = 14{,}286 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Разумеется,

$$\dot{V}_m + \dot{V}_k + \dot{V}_r = 5e^{-i90°} + 10e^{i90°} + 14{,}286 = 15{,}135e^{i19{,}29°} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} = \dot{V}.$$

Классический расчет по сравнению с примером 3 несоизмеримо сложнее и объемнее.

Векторная диаграмма для величин из примера 3 представлена на рис. 5.

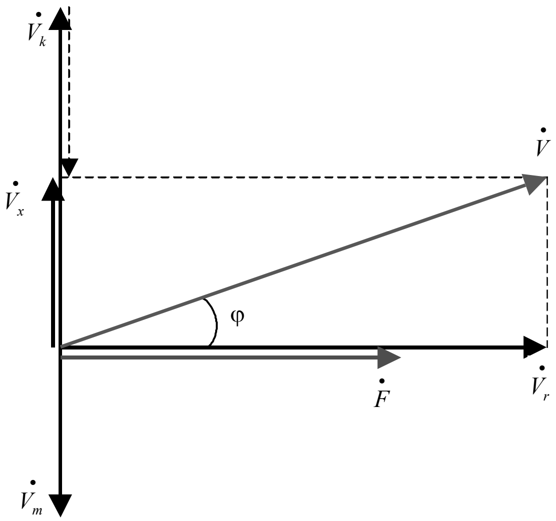


Рис. 5. Векторная диаграмма при последовательном соединении
Fig. 5. Vector diagram for serial connection

Резонанс скоростей

В дополнение к вышесказанному о резонансе скоростей можно ограничиться численным примером.

Пример 4. Все данные – из примера 2. Потребители механической мощности соединены последовательно.

$$\underline{b}_k = 5 \cdot 10^{-2} e^{i90°}\ \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}\,,$$

$$Y = g = 14{,}286 \cdot 10^{-2}\ \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}\,,$$

$$\varphi = 0°\,,$$

$$\underline{y} = Ye^{i\varphi} = 14{,}286 \cdot 10^{-2} e^{i0°}\ \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}\,,$$

$$\dot{V} = \underline{y}\dot{F} = 14{,}286 \cdot 10^{-2} \cdot 100 = 14{,}286 e^{i0°}\ \text{м} \cdot \text{с}^{-1}\,,$$

$$\dot{V}_k = \underline{b}_k \dot{F} = 5 \cdot 10^{-2} e^{i90°} \cdot 100 = 5 e^{i90°}\ \text{м} \cdot \text{с}^{-1}\,.$$

Разумеется,

$$\dot{V}_m + \dot{V}_k + \dot{V}_r = 5e^{-i90°} + 5e^{i90°} + 14{,}286 = 14{,}286 e^{i0°}\ \text{м} \cdot \text{с}^{-1} = \dot{V} = \dot{V}_r$$

Векторная диаграмма для величин из примера 4 представлена на рис. 6.

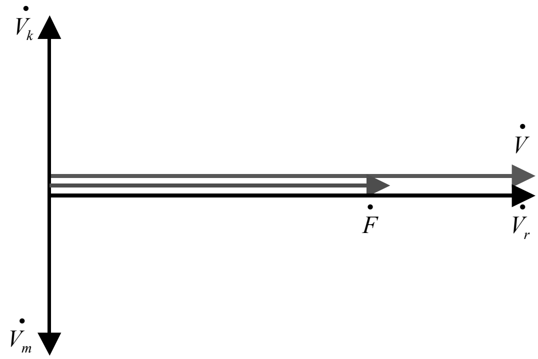


Рис. 6. Векторная диаграмма резонанса скоростей
Fig. 6. Vector diagram of velocity resonance

Заключение

Применение комплексного представления позволило получить существенно более компактные алгебраические методы расчета сложных механических систем в установившихся режимах по сравнению с классическими методами, основанными на составлении и интегрировании систем дифференциальных уравнений. При этом объем вычислений сокращается в несколько раз. Ключевую роль в предложенном методе играют механические реактанс, резистанс и импеданс для параллельного соединения потребителей механической мощности и сассептанс, кондактанс и адмитанс – для последовательного.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Томилин А.К.*, *Прокопенко Е.В.* Продольные колебания упругого электропроводного стержня в неоднородном магнитном поле // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 21. С. 104–111.
2. *Попов И.П.* Колебательные системы, состоящие только из инертных или только упругих элементов, и возникновение в них свободных гармонических колебаний // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 21. С. 95–103.
3. *Попов И.П.* Дифференциальные уравнения двух механических резонансов // Прикладная физика и математика. 2019. № 2. С. 37–40. DOI: 10.25791/pfim.02.2019.599

Статья поступила 18.06.2019

Popov I.P. (2021) REACTANCES AND SUSCEPTANCES OF MECHANICAL SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 64–75

DOI 10.17223/19988621/70/6

Keywords: reactance, resistance, impedance, susceptance, conductance, admittance.

The classical solution to the problems associated with calculating the velocities and reactions of elements of complex mechanical systems under harmonic force consists in the compilation and integration of systems of differential equations and is rather cumbersome and time-consuming. In most cases, a steady state is of major interest. The purpose of this study is to develop essentially compact methods for calculating systems under steady-state conditions. The problem is solved by the methods which are typically used to calculate electrical circuits. Representation of harmonic

quantities as rotating vectors in a complex plane and the operations with their complex amplitudes can greatly facilitate the calculation of arbitrarily complex mechanical systems under harmonic effects in the steady state. In the proposed method, a key role is played by mechanical reactance, resistance, and impedance for the parallel connection of consumers of mechanical power, as well as susceptance, conductance, and admittance for the serial one. At force resonance, the total reactance of the mechanical system is zero. This means that the system does not exhibit reactive resistance to the external harmonic force. At velocity resonance, the total susceptibility of the mechanical system is zero. This means that the system has infinitely high resistance to the external harmonic force. As a result, the stock of the source of harmonic force is stationary, although the inert body and the elastic element oscillate.

Igor P. POPOV (Scientific Consultant, High Tech Center, Kurgan, Russian Federation). E-mail: ip.popow@yandex.ru

REFERENCES

1. Tomilin A.K., Prokopenko E.V. (2013) Prodol'nye kolebaniya uprugogo elektroprovodnogo sterzhnya v neodnorodnom magnitnom pole [Longitudinal oscillations of an elastic electrically conductive rod in a non-uniform magnetic field]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 21. pp. 104–111.
2. Popov I.P. (2013) Kolebatel'nye sistemy, sostoyashchie tol'ko iz inertnykh ili tol'ko uprugikh elementov, i vozniknovenie v nikh svobodnykh garmonicheskikh kolebaniy [Oscillatory systems consisting only of inert or only elastic elements and the appearance of free harmonic vibrations in them]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 21. pp. 95–103.
3. Popov I.P. (2019) Differentsial'nye uravneniya dvukh mekhanicheskikh rezonansov [Differential equations of two mechanical resonances]. *Prikladnaya fizika i matematika – Applied Physics and Mathematics*. 2. pp. 37–40. DOI: 10.25791/pfim.02.2019.599.

Received: June 18, 2019

УДК 532.135, 532.542.2
DOI 10.17223/19988621/70/7

И.А. Рыльцев, О.Ю. Фролов, Г.Р. Шрагер

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С ДВОЙНЫМ СУЖЕНИЕМ[1]

Выполнено численное моделирование установившегося течения неньютоновской жидкости в осесимметричной трубе с двумя перекрытиями, геометрия которых описывается функцией косинуса. Математическая постановка задачи формулируется в переменных вихрь – функция тока. Для описания свойств среды используется модель Оствальда – де Ваале. Решение дифференциальных уравнений для вихря и функции тока осуществляется численно с использованием метода установления. Для нахождения поля давления решается уравнение Пуассона. В работе исследуется три среды: ньютоновская, псевдопластичная и дилатантная жидкости. Показано влияние числа Рейнольдса, степени нелинейности реологической модели и геометрических параметров канала на характеристики течения.

Ключевые слова: *ламинарное течение, двойное сужение / расширение, степенная жидкость, модель Оствальда – де Ваале, преобразование координат, уравнение Пуассона для давления.*

Поле течения неньютоновской жидкости в цилиндрических каналах в окрестности препятствий представляет интерес для исследователей, изучающих механику жидкостей. В инженерных приложениях подобные каналы используются в качестве комплектующих элементов различного рода теплообменных установок и гидравлических систем. Кроме того, в биомеханике течение вязкой жидкости в трубке с участком сужения / расширения, описываемым, например, функцией косинуса или Гаусса, применяются для моделирования течения крови в стенозированном сосуде. Эти обстоятельства обуславливают актуальность экспериментального и численного исследований течений в каналах с препятствиями заданной конфигурации.

В настоящее время доступно большое количество численных и экспериментальных работ, в которых исследуются течения ньютоновской жидкости в канале с одним препятствием [1–6]. Результаты этих работ содержат сведения о структуре потока и об основных параметрах задачи, влияющих на характеристики течения. Например, в работе [2] авторы одними из первых численно исследовали влияние числа Рейнольдса и геометрических параметров на распределения основных характеристик задачи. Развитие вычислительных технологий позволило изучить течения неньютоновских жидкостей [7–12]. Авторы работ [7, 8] используют реологические законы Балкли – Гершеля, Каро, Оствальда – де Ваале, Кассона для оценки влияния неньютоновских свойств при моделировании течений в артериях. В обзорной части [13] приведены работы авторов, исследующих ламинарные стационарные и нестационарные течения, как для ньютоновской, так и неньютоновской жидкости в случае, когда в канал включено одно препятствие.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-19-00021).

Течению в трубе с несколькими последовательно размещенными участками сужения / расширения уделено меньше внимания, при этом во всех исследованиях в качестве рассматриваемой среды используется ньютоновская жидкость. Подобные трубки встречаются в системах охлаждения летательных аппаратов и ускорителей ракет, которые функционируют при вхождении в плотные слои атмосферы, где рабочим телом служит газ или жидкость. В [14, 15] изучено влияние числа Рейнольдса в диапазоне от 5 до 200 на распределения напряжения и давления, сделаны выводы о локализации максимальных значений вихря на стенке. Представлены картины течения, демонстрирующие поля вихря и функции тока в зависимости от основных параметров задачи, дана оценка влиянию второго препятствия на структуру потока и на параметры течения. В статье тех же авторов [16] расширен диапазон исследуемых чисел Рейнольдса до 400. В [17] описывается трехмерное моделирование стационарного течения жидкости через несколько последовательно расположенных препятствий. Решение задачи осуществляется с помощью модифицированного метода LBGK, в основе которого лежит метод решеточных уравнений Больцмана (LBM), где столкновение частиц учитывается моделью Батнагара – Гросса – Крука (BGK). Авторы ограничились исследованиями в диапазоне чисел Рейнольдса от 10 до 150. К основным выводам данной работы можно отнести следующее: метод LBGK является полезным инструментом для моделирования установившихся течений; результаты, полученные с помощью трехмерной модели, хорошо согласуются с данными из работы [14], где применяется двумерная постановка задачи.

Целью данной работы является исследование структуры потока и характеристик течения неньютоновской жидкости в осесимметричном канале с двумя препятствиями в зависимости от параметров задачи и оценка влияния геометрических параметров одного из препятствий на распределения характеристик потока около другого.

Постановка задачи

Рассматривается стационарное течение степенной несжимаемой жидкости в круглой трубе с двумя последовательно размещенными в ней участками сужения / расширения, форма которых описывается функцией косинуса. Область течения представлена на рис. 1.

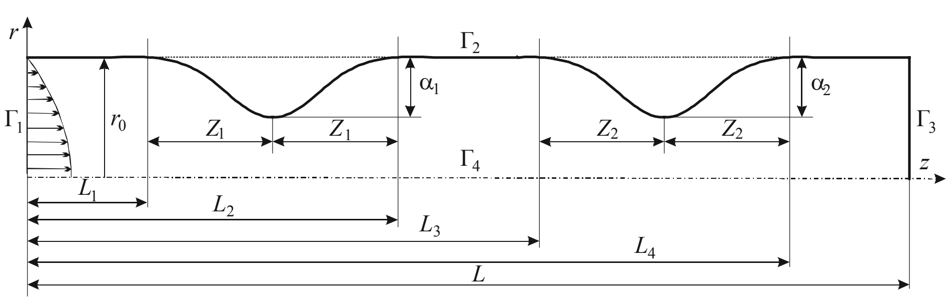


Рис. 1. Область течения
Fig. 1. Flow area

Для математического описания процесса используется постановка задачи в переменных вихрь – функция тока [18]. Реологическое поведение жидкости описывается законом Освальда – де Ваале [19]. Система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial(u\omega)}{\partial z}+\frac{\partial(v\omega)}{\partial r}=\frac{\mu}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{\omega}{r^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(2\frac{\partial^2\mu}{\partial z\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)+2\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial z}+2\frac{\partial\mu}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial r}+\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\mu}{\partial r^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\omega}{r}\frac{\partial\mu}{\partial r}\right);\quad(1)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}=-r\omega\,;\qquad(2)$$

$$\mu=A^{m-1}.\qquad(3)$$

Безразмерные компоненты скорости и вихрь в уравнении (1) определяются формулами

$$u=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},\ v=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z},\ \omega=\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Здесь u, v – аксиальная и радиальная компоненты скорости соответственно, $\mathrm{Re}=\dfrac{\rho U^{2-m}r_0^{\ m}}{k}$ – число Рейнольдса, ρ – плотность, U – среднерасходная скорость, $A=\left(2e_{ij}e_{ji}\right)^{\frac{1}{2}}$, e_{ij} – компоненты тензора скоростей деформаций, k – консистенция жидкой среды, m – степень нелинейности жидкости. В качестве масштабов обезразмеривания приняты следующие величины: длины – радиус трубы r_0; скорости – среднерасходная скорость U. Граничные условия в переменных вихрь – функция тока имеют вид [18]

$$\begin{aligned}&\Gamma_1: \psi=\int_0^r ur\,dr,\ \omega=-\frac{\partial u}{\partial r},\ \text{при } z=0;\\&\Gamma_2: \psi=const,\ \omega=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2},\ \text{при } r=f(z);\\&\Gamma_3: \frac{\partial\psi}{\partial z}=0,\ \frac{\partial\omega}{\partial z}=0,\ \text{при } z=L;\\&\Gamma_4: \psi=0,\ \omega=0,\ \text{при } r=0,\end{aligned}\qquad(4)$$

где n – нормаль к границе Γ_2, $u=\dfrac{3m+1}{m+1}\left(1-r^{\frac{1}{m}+1}\right)$.

Граница Γ_2 задается функцией $f(z)=\begin{cases}1-\dfrac{\alpha_1}{2}\left(1-\cos\dfrac{\pi(z-L_1)}{Z_1}\right), & z\in[L_1;L_2];\\ 1-\dfrac{\alpha_2}{2}\left(1-\cos\dfrac{\pi(z-L_3)}{Z_2}\right), & z\in[L_3;L_4];\\ 1, \quad z\in[0;L_1)\cup(L_2;L_3)\cup(L_4;L].\end{cases}$

Метод решения

Для получения численного решения сформулированной задачи применяется метод установления, который позволяет получить стационарное решение. В этом случае организуется нестационарный процесс, решение которого с течением времени оказывается независимым от него и устанавливается к решению исходной стационарной задачи [20]. Для реализации нестационарного процесса в уравнения для вихря (1) и функции тока (2) добавляются производные по времени функций ω, ψ соответственно. Итерационный процесс продолжается до установления в пределах заданной точности.

Для аппроксимации дифференциальных уравнений область течения с криволинейной границей $f(z)$ трансформируется в прямоугольную с помощью введения новой системы координат $\xi = z,\ \eta = r / f(z)$. В координатах ξ, η уравнение переноса вихря (1) и уравнение Пуассона для функции тока (2) с введенными производными по времени принимают вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial (u\omega)}{\partial \xi} - g\frac{\partial (u\omega)}{\partial \eta} + \frac{1}{f}\frac{\partial (v\omega)}{\partial \eta} =$$

$$= \frac{\mu}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + H\frac{\partial \omega}{\partial \eta} - 2g\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + G\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{1}{f^2 \eta}\frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \frac{\omega}{f^2 \eta^2}\right) + \frac{S}{\mathrm{Re}}; \qquad (5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \left(H - \frac{1}{f^2 \eta}\right)\frac{\partial \psi}{\partial \eta} - 2g\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + G\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -f\eta\omega, \qquad (6)$$

где
$$G = \frac{1}{f^2} + \left(\eta\frac{f'}{f}\right)^2;\ H = \eta\left(2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}\right);\ g = \eta\frac{f'}{f},$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4,$$

$$S_1 = 2\left(\frac{1}{f}\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{g}{f\eta}\frac{\partial \mu}{\partial \eta} - \frac{g}{f}\frac{\partial^2 \mu}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{1}{f}\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} + g\frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

$$S_2 = 2\left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi} - g\frac{\partial \mu}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} - g\frac{\partial \omega}{\partial \eta}\right) + 2\frac{1}{f^2}\frac{\partial \mu}{\partial \eta}\frac{\partial \omega}{\partial \eta},$$

$$S_3 = \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi^2} + H\frac{\partial \mu}{\partial \eta} - 2g\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi \partial \eta} + \left(g^2 - \frac{1}{f^2}\right)\frac{\partial^2 \mu}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{1}{f}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} - g\frac{\partial v}{\partial \eta}\right),$$

$$S_4 = \frac{\omega}{f^2 \eta}\frac{\partial \mu}{\partial \eta}.$$

Численное решение дифференциальных уравнений осуществляется конечно-разностным методом. Преобразованная прямоугольная область решения покрывается равномерной в каждом направлении разностной сеткой

$$\Omega_h = \left\{\xi_i = ih,\ \eta_j = jh,\ i = 0,\dots,N_1,\ j = 0,\dots,N_2\right\},$$

где h – шаг сетки; N_1 – количество узлов в направлении ξ; N_2 – количество узлов в направлении η. Разностное представление уравнений (5), (6) выполняется с использованием явной разностной схемы. Конвективные слагаемые в уравнении (5) аппроксимируются схемой против потока. Условие сходимости вычислительного процесса к стационарному решению задачи имеет вид

$$\max_{i,j}\left|1-\frac{\omega_{i,j}^{q+1}}{\omega_{i,j}^{q}}\right|<\varepsilon,\quad \max_{i,j}\left|1-\frac{\psi_{i,j}^{q+1}}{\psi_{i,j}^{q}}\right|<\varepsilon,$$

где ε – параметр сходимости; q – номер шага по фиктивному времени. Значение параметра ε определяется в ходе численного эксперимента ($\varepsilon = 10^{-5}$). Выбор явной схемы обусловлен простотой реализации расчётного алгоритма. Схема против потока для аппроксимации конвективных слагаемых обеспечивает устойчивость разностной схемы.

При расчете эффективной вязкости в случае, когда $m < 1$ значения μ стремятся к «бесконечным». Для устранения этой особенности используется модифицированная запись реологического уравнения (3), которая имеет вид

$$\mu = \left(A+\lambda\right)^{m-1}. \tag{7}$$

Здесь λ – параметр регуляризации, значение которого выбиралось экспериментально и принималось равным 0.001.

Для тестирования вычислительного алгоритма выполнены расчеты на вложенных сетках. В таблице приведены значения аксиальной скорости на оси симметрии в трех контрольных сечениях в зависимости от шага сетки, демонстрирующие аппроксимационную сходимость алгоритма. Все дальнейшие расчеты проводились с использованием шага 0.025.

Аппроксимационная сходимость
при Re = 10, m = 0.9, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$, $L_1 = 3$, $L_3 = 7$

h	u_{max}, $z = L_1+Z_1$	u_{max}, $z = L_3+Z_2$	u_{max}, $z = L$
0.1	5.3844	5.4860	1.9408
0.05	5.4081	5.49675	1.9469
0.025	5.415	5.4956	1.9478
0.0125	5.4159	5.4959	1.9476

На рис. 2 показано сравнение распределений функции тока, полученных в настоящей работе, с данными, взятыми из работы [14], при этом функция $f(z)$ задаётся в соответствии с [14]. Структура потока характеризуется зонами одномерного течения в окрестности входной и выходной границ. В области препятствий течение имеет двумерный характер, за препятствиями образуются циркуляционные зоны. Наблюдается качественное согласование результатов.

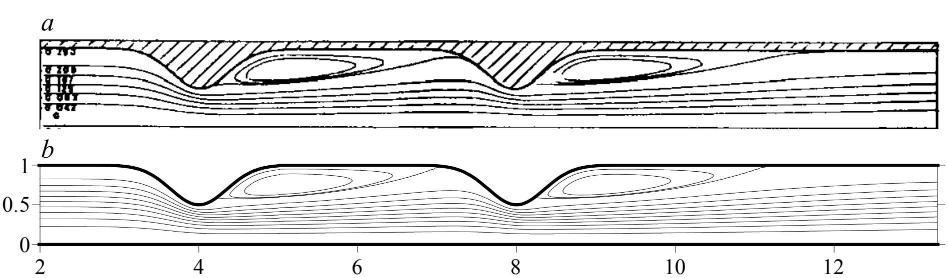


Рис. 2. Сравнение распределений линий тока из статьи [14] (a) и настоящей работы (b) (Re = 25, m = 1, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)
Fig. 2. Comparison of streamline distributions (a) from the paper [14] and (b) in the present work (Re = 25, m = 1, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)

Восстановление давления

Постановка задачи в переменных вихрь – функция тока не содержит давления. Для расчета динамических характеристик потока воспользуемся уравнением Пуассона [18], которое позволяет по известным полям скорости, вихря и функции тока рассчитать поле давления и в физических переменных имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}=2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{v^2}{r^2}\right)+$$
$$+\frac{2}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\cdot\nabla^2 u+\frac{\partial\mu}{\partial r}\cdot\nabla^2 v+\frac{\partial^2\mu}{\partial z\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2\mu}{\partial r^2}\frac{\partial v}{\partial r}\right). \quad (8)$$

Для обезразмеривания величины p используется масштаб ρU^2. Уравнение (8) в преобразованной системе координат (ξ, η) принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial\xi^2}-2g\frac{\partial^2 p}{\partial\xi\partial\eta}+\left(H+\frac{1}{f^2\eta}\right)\frac{\partial p}{\partial\eta}+G\frac{\partial^2 p}{\partial\eta^2}\right)=2\left(S_5\cdot S_6-S_7\cdot S_8-\left(\frac{v}{f\eta}\right)^2\right)+$$
$$+\frac{2}{\mathrm{Re}}\left(S_9\left(S_{10}+S_{11}+\frac{S_8}{f\eta}\right)+S_{12}\left(S_{13}+S_{14}+\frac{S_6}{f\eta}\right)+S_{15}\left(S_8+S_7\right)+S_{16}S_5+S_{17}S_6\right); \quad (9)$$

$$S_5=\frac{\partial u}{\partial\xi}-g\frac{\partial u}{\partial\eta},\ S_6=\frac{1}{f}\frac{\partial v}{\partial\eta}, S_7=\frac{\partial v}{\partial\xi}-g\frac{\partial v}{\partial\eta},\ S_8=\frac{1}{f}\frac{\partial u}{\partial\eta},\ S_9=\frac{\partial\mu}{\partial\xi}-g\frac{\partial\mu}{\partial\eta},$$
$$S_{10}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2g\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+H\frac{\partial u}{\partial\eta}+g^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},\ S_{11}=\frac{1}{f^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}, S_{12}=\frac{1}{f}\frac{\partial\mu}{\partial\eta},$$
$$S_{13}=\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}-2g\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}+H\frac{\partial v}{\partial\eta}+g^2\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2},\ S_{14}=\frac{1}{f^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}, S_{15}=\frac{1}{f}\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{g}{f\eta}\frac{\partial\mu}{\partial\eta}-\frac{g}{f}\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2},$$
$$S_{16}=\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}-2g\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi\partial\eta}+H\frac{\partial\mu}{\partial\eta}+g^2\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2},\ S_{17}=\frac{1}{f^2}\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}.$$

Для постановки граничного условия на границе Γ_2 используются уравнения движения, которые с учетом условий прилипания на твердой стенке при $\eta = 1$ в системе координат (ξ, η) запишутся в виде

$$\frac{\partial p}{\partial\xi}-g\frac{\partial p}{\partial\eta}=-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\mu}{f}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+\frac{\omega}{\eta}\right)+\frac{\omega}{f}\frac{\partial\mu}{\partial\eta}\right); \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial\eta}=\frac{f}{\mathrm{Re}}\left(\mu\left(\frac{\partial\omega}{\partial\xi}-g\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)-\omega\left(\frac{\partial\mu}{\partial\xi}-g\frac{\partial\mu}{\partial\eta}\right)\right). \quad (11)$$

Используя (10) и (11), получим уравнения для расчета давления на границах Γ_1 и Γ_2. В выходном сечении Γ_3 безразмерное давление задается равным нулю, на оси симметрии Γ_4 реализуется условие симметрии. Таким образом, граничные условия для расчета давления принимают вид

$$\Gamma_1:\frac{\partial p}{\partial\xi}=-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\mu}{f}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+\frac{\omega}{f}\right)+\frac{\omega}{f}\frac{\partial\mu}{\partial\eta}\right)\ \text{при}\ \xi=0;$$

$$\Gamma_2:\frac{\partial p}{\partial\xi}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(gf\left(\mu\left(\frac{\partial\omega}{\partial\xi}-g\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)-\omega\left(\frac{\partial\mu}{\partial\xi}-g\frac{\partial\mu}{\partial\eta}\right)\right)-\left(\frac{\mu}{f}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+\frac{\omega}{f}\right)+\frac{\omega}{f}\frac{\partial\mu}{\partial\eta}\right)\right)\ \text{при}\ \eta=1;$$

$\Gamma_3 : p = 0$ при $\xi = L$;

$\Gamma_4 : \dfrac{\partial p}{\partial \eta} = 0$ при $\eta = 0$.

Решение дифференциального уравнения для давления, как и в случае нахождения функций ω, ψ, осуществляется конечно-разностным методом в явном виде с использованием метода установления. Условие для определения сходимости по давлению имеет вид

$$\max_{i,j}\left|1-\frac{p_{i,j}^{q+1}}{p_{i,j}^{q}}\right| < \varepsilon, \text{ где } \varepsilon = 10^{-7}.$$

Результаты

Рисунок 3 демонстрирует типичные картины течения псевдопластичной жидкости ($m < 1$) в виде распределений линий тока в зависимости от Re. При числе Рейнольдса равном 5 за препятствиями формируются циркуляционные зоны одинакового размера. При дальнейшем увеличении Re до 15 циркуляционная зона за первым участком сужения / расширения увеличивается и занимает всю область между препятствиями выше сечения $r = 0.5$, зона за вторым препятствием также увеличивается. На рис. 4 второе препятствие смещено относительного первого в сторону выходной границы, в результате тенденция распределения линий тока для Re, равного 1 и 5, сохраняется, а для Re = 15 зона за первым перекрытием стала равной зоне за вторым.

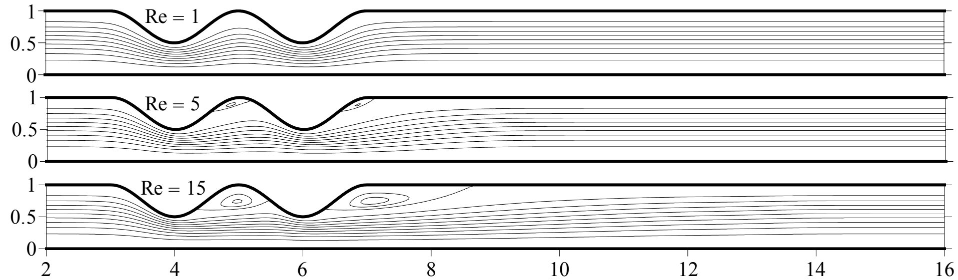


Рис. 3. Линии тока ($m = 0.8$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)
Fig. 3. Streamline distributions ($m = 0.8$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)

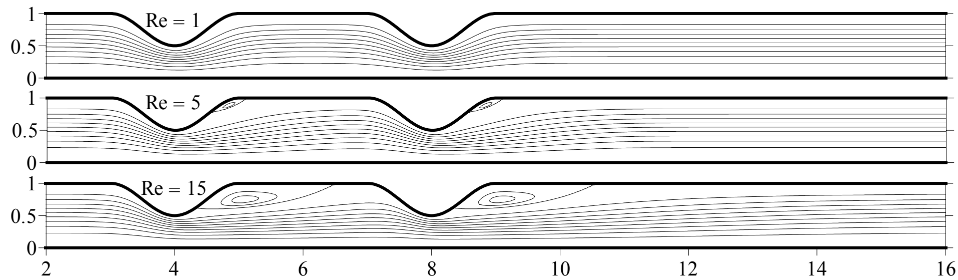


Рис. 4. Линии тока ($m = 0.8$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)
Fig. 4. Streamline distributions ($m = 0.8$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)

Влияние параметра нелинейности на структуру потока показано на рис. 5. С уменьшением m размер циркуляционных зон за препятствиями увеличивается, начиная с некоторого значения параметра нелинейности, первая зона занимает все пространство между препятствиями, а размер второй продолжает расти в направлении выходной границы.

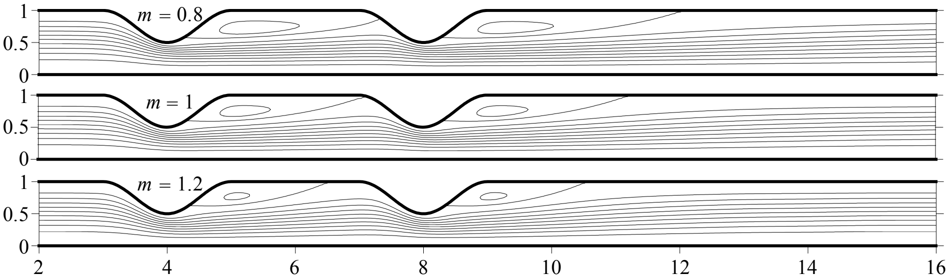


Рис. 5. Линии тока (Re = 25, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)
Fig. 5. Streamline distributions (Re = 25, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)

На рис. 6 показано влияние глубины второго перекрытия (α_2) на распределение линий тока в случае течения псевдопластичной жидкости. Уменьшение α_2 приводит к распространению первой циркуляционной зоны в область второго препятствия.

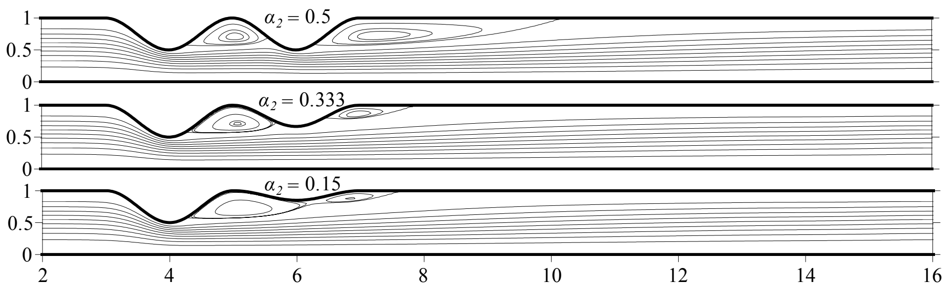


Рис. 6. Линии тока (Re = 25, $m = 0.8$, $\alpha_1 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)
Fig. 6. Streamline distributions (Re = 25, $m = 0.8$, $\alpha_1 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)

Графики на рис. 7 демонстрируют сравнение распределений давления на твердой стенке с данными [16]. Для сравнения динамических характеристик потока функция $f(z)$ задавалась в соответствии с [16], кроме того, безразмерное давление на входе в канал принималось равным нулю. В зоне одномерного течения давление падает линейным образом, а на участках с препятствиями распределение давления носит сложный характер. Кривые на рис. 7 демонстрируют согласование полученных результатов с данными [16].

На рис. 8 показаны распределения давления вдоль оси симметрии для трех значений параметра m в канале, изображенном на рис. 5. Минимальному перепаду давления между входом и выходом соответствует течение вязкопластичной жидкости, что согласуется с изменением эффективной вязкости в зависимости от m.

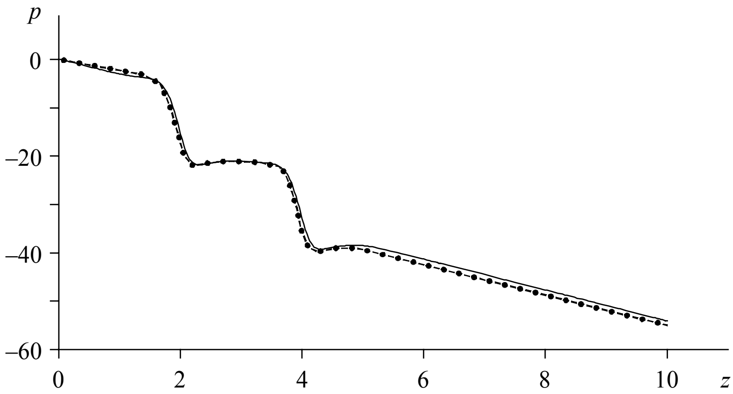


Рис. 7. Распределения давления вдоль стенки
(Re = 2.5, $m = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.333$, $Z_1 = Z_2 = 1$).
Обозначения: —— – настоящая работа; ●-●-● – работа [16]
Fig. 7. Pressure distributions along the wall
(Re = 2.5, $m = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.333$, $Z_1 = Z_2 = 1$).
Notations: —— – present work; ●-●-● – paper [16]

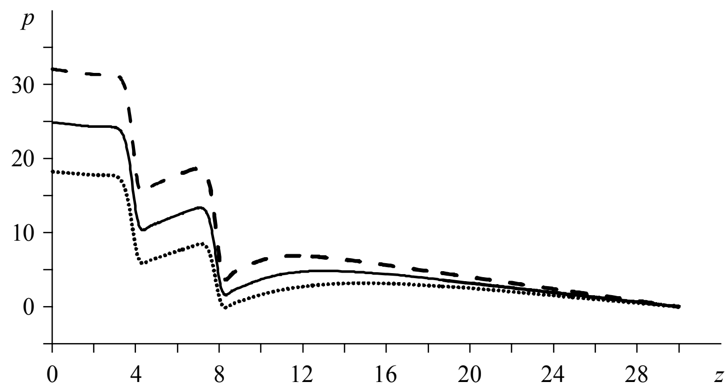


Рис. 8. Распределение давления вдоль оси симметрии
(Re = 25, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$).
Обозначения: ····· – $m = 0.8$, —— – $m = 1$, - - - – $m = 1.2$
Fig. 8. Pressure distributions along the symmetry axis
(Re = 25, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$).
Notations: ····· – $m = 0.8$, —— – $m = 1$, - - - – $m = 1.2$

На рис. 9 и 10 приведены распределения аксиальной скорости на оси симметрии канала для псевдопластичной, ньютоновской и дилатантной жидкостей. Графики на рис. 9 и 10 показывают, что рост числа Рейнольдса приводит к уменьшению максимальных значений скорости в зоне двумерного течения, что согласуется с кинематикой течения, показанной на рис. 3 и 5.

Рисунок 11 иллюстрирует распределения вихря на твердой стенке в зависимости от местоположения второго препятствия относительного первого для трех значений параметра Re. Расчеты показали, что увеличение числа Рейнольдса приводит к росту максимальных значений вихря на стенке. С изменением геометрии происходит соответствующее перераспределение максимумов в функции $\omega(z)$.

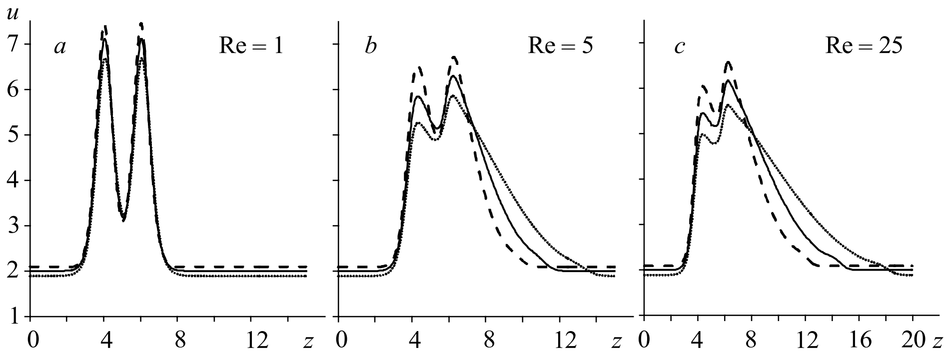


Рис. 9. Распределения аксиальной скорости на оси симметрии ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$, $L_1 = 3$, $L_3 = 5$).Обозначения: ····· – $m = 0.8$, ——– $m = 1$, - - - - $m = 1.2$

Fig. 9. Axial velocity distributions along the symmetry axis ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$, $L_1 = 3$, $L_3 = 5$). Notations: ····· – $m = 0.8$, ——– $m = 1$, - - - - $m = 1.2$

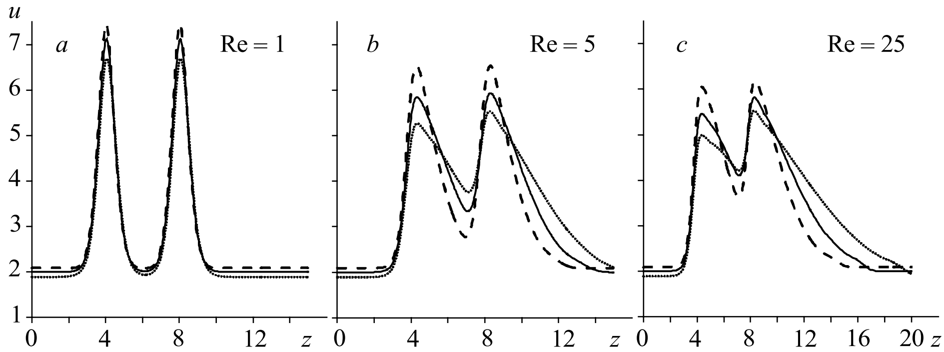


Рис. 10. Распределения аксиальной скорости на оси симметрии ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$, $L_1 = 3$, $L_3 = 7$). Обозначения: ····· – $m = 0.8$, ——– $m = 1$, - - - - $m = 1.2$

Fig. 10. Axial velocity distributions along the symmetry axis ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$, $L_1 = 3$, $L_3 = 7$). Notations: ····· – $m = 0.8$, ——– $m = 1$, - - - - $m = 1.2$

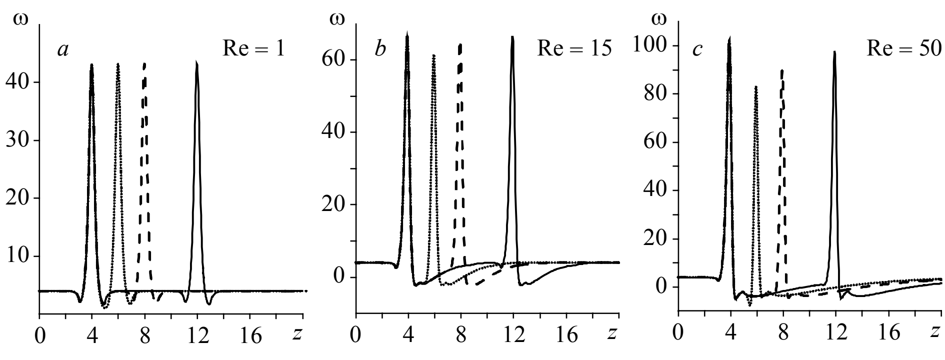


Рис. 11. Распределения вихря на стенке ($m = 1$, Re = 5, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$). Обозначения: ····· – $L_1 = 3$, $L_3 = 5$; - - - - $L_1 = 3$, $L_3 = 7$; ——– $L_1 = 3$, $L_3 = 11$

Fig. 11. Shear stress distributions on the wall ($m = 1$, Re = 5, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$). Notations: ····· – $L_1 = 3$, $L_3 = 5$; - - - - $L_1 = 3$, $L_3 = 7$; ——– $L_1 = 3$, $L_3 = 11$

Заключение

Выполнено численное моделирование течения неньютоновской жидкости в осесимметричном канале с двумя препятствиями. Создана и протестирована программа расчета течений для ЭВМ. Показаны и описаны картины течения степенной жидкости в зависимости от параметров процесса. Проведены параметрические расчеты динамических и кинематических характеристик течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Forrester J.H.*, *Young D.F.* Flow through a converging-diverging tube and its implications in occlusive vascular disease – I. Theoretical development // Journal of Biomechanics. 1970. V. 3. Iss. 3. P. 297–305.
2. *Lee J.S.*, *Fung Y.C.* Flow in locally constricted tubes at low Reynolds numbers // Journal of Applied Mechanics. 1970. V. 37. Iss. 1. P. 9–16.
3. *Young D.F.*, *Tsai F.Y.* Flow characteristics in model of arterial stenoses-I. Steady flow // Journal of Biomechanics. 1973. V. 6. Iss. 4. P. 395–402.
4. *Deshpande M.D.*, *Giddens D.P.*, *Mabon R.F.* Steady laminar flow through modelled vascular stenosis // Journal of Biomechanics. 1976. V. 9. Iss. 4. P. 13–20.
5. *MacDonald D.A.* On steady flow through modelled vascular stenosis // Journal of Biomechanics. 1979. V. 12. Iss. 1. P. 165–174.
6. *Liepsch D.*, *Singh M.*, *Lee M.* Experimental analysis of the influence of stenotic geometry on steady flow // Biorheology. 1992. V. 29. Iss. 4. P. 419–431.
7. *Shukla J.B.*, *Parihar R.S.*, *Rao B.R.* Effects of stenosis on non-newtonian flow of the blood in an artery // Bulletin of Mathematical Biology. 1980. V. 42. Iss. 3. P. 283–294.
8. *Manimaran R.* CFD simulation of non-Newtonian fluid flow in arterial stenoses with surface irregularities // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2011. V. 73. P. 957–962.
9. *Leuprecht A.*, *Perktold K.* Computer simulation of non-newtonian effects on blood flow in large arteries // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. 2001. V. 4. Iss. 2. P. 149–163.
10. *Jahangiri M.*, *Saghafian M.*, *Sadeghi M.R.* Numerical simulation of non-Newtonian models effect on hemodynamic factors of pulsatile blood flow in elastic stenosed artery // Journal of Mechanical Science and Technology. 2017. V. 31. Iss. 2. P. 1003–1013.
11. *Tu C.*, *Deville M.* Pulsatile flow of non-Newtonian fluids through arterial stenosis // Journal of Biomechanics. 1996. V. 29. Iss. 7. P. 899–908.
12. *Prakash O.*, *Makinde O.D.*, *Singh S.P.*, *Jain N.*, *Kumar D.* Effects of stenoses on non-Newtonian flow of blood in blood vessels // International Journal of Biomathematics. 2015. V. 8 Iss. 1. P. 1550010-1–1550010-13.
13. *Рыльцев И.А.*, *Рыльцева К.Е.*, *Шрагер Г.Р.* Кинематика течения степенной жидкости в трубе переменного сечения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 63. С. 125–138.
14. *Lee T.S.* Numerical studies of fluid flow through tubes with double constrictions // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1990. V. 11. Iss. 8. P. 1113–1126.
15. *Lee T.S.* Steady laminar fluid flow through variable constrictions in vascular tubes // Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME. 1994. V. 116. Iss. 1. P. 66–71.
16. *Lee T.S.*, *Liao W.*, *Low H.T.* Numerical simulation of turbulent flow through series stenosis // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2003. V. 42. Iss. 7. P. 717–740.
17. *Huang H.*, *Lee T.S.*, *Shu C.* Lattice-BGK simulation of steady flow through vascular tubes with double constrictions // International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow. 2006. V. 16. Iss. 2. P. 185–203.
18. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
19. *Ostwald W.* Ueber die rechnerische Darstellung des Strukturgebietes der Viskosität // Kolloid Zeitschrift. 1929. V. 47. Iss. 2. P. 176–187.
20. *Годунов С.К.*, *Рябенький В.С.* Введение в теорию разностных схем. М.: Физматгиз, 1962. 340 с.

Статья поступила 25.09.2020

Ryltsev I.A., Frolov O.Yu. Shrager G.R. (2021) NUMERICAL SIMULATION OF A POWER-LAW FLUID FLOW IN A CHANNEL WITH DOUBLE CONSTRICTION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 76–88

DOI 10.17223/19988621/70/7

Keywords: laminar flow, double constriction, power-law fluid, Ostwald-de Waele model, coordinate transformation, pressure Poisson equation.

Flow fields of non-Newtonian fluids in cylindrical channels with obstacles are of great interest for researchers studying the mechanics of fluids. In engineering techniques, such channels represent component parts of heat exchangers and hydraulic systems of various types.

In this work, the numerical simulation of a steady non-Newtonian fluid flow in an axisymmetric pipe with two overlaps, whose geometry is described by a cosine function, is carried out. Mathematical formulation of the problem is written in terms of vortex and stream function variables. The Ostwald – de Waele model is used to describe rheological properties of the medium. The solution to a system of differential equations is obtained numerically using the false transient method. To determine the pressure field, the Poisson equation for pressure is solved. Three media are considered in the paper: Newtonian, pseudoplastic, and dilatant fluids. The influence of the Reynolds number, power-law index in the rheological model, and geometric parameters of the channel on the flow characteristics is shown as streamline distributions and functional curves.

Financial support. The research is implemented at the expenses of the Russian Science Foundation (project No. 18-19-00021).

Ivan A. RYLTSEV (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ryltsev_i@ftf.tsu.ru

Oleg Yu. FROLOV (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: frolovoy@mail.tsu.ru

Gennady R. SHRAGER (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shg@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Forrester J.H., Young D.F. (1970) Flow through a converging-diverging tube and its implications in occlusive vascular disease – I. Theoretical development. *Journal of Biomechanics*. 3(3). pp. 297–305. DOI: 10.1016/0021-9290(70)90031-X.
2. Lee J.S., Fung Y.C. (1970) Flow in locally constricted tubes at low Reynolds numbers. *Journal of Applied Mechanics*. 37(1). pp. 9–16. DOI: 10.1115/1.3408496.
3. Young D.F., Tsai F.Y. (1973) Flow characteristics in model of arterial stenoses-I. Steady flow. *Journal of Biomechanics*. 6(4). pp. 395–402. DOI: 10.1016/0021-9290(73)90099-7.
4. Deshpande M.D., Giddens D.P., Mabon R.F. (1976) Steady laminar flow through modelled vascular stenoses. *Journal of Biomechanics*. 9(4). pp. 13–20. DOI: 10.1016/0021-9290(76)90001-4.
5. MacDonald D.A. (1979) On steady flow through modelled vascular stenosis. *Journal of Biomechanics*. 12(1). pp. 165–74. DOI: 10.1016/0021-9290(79)90004-6.
6. Liepsch D., Singh M., Lee M. (1992) Experimental analysis of the influence of stenotic geometry on steady flow. *Biorheology*. 29(4). pp. 419–431. DOI: 10.3233/BIR-1992-29405.
7. Shukla J.B., Parihar R.S., Rao B.R. (1980) Effects of stenosis on non-Newtonian flow of the blood in an artery. *Bulletin of Mathematical Biology*. 42(3). pp. 283–294. DOI: 10.1007/BF02460787.
8. Manimaran R. (2011) CFD simulation of non-Newtonian fluid flow in arterial stenoses with surface irregularities. *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 73. pp. 957–962.

9. Leuprecht A., Perktold K. (2001) Computer simulation of non-Newtonian effects on blood flow in large arteries. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. 4(2). pp. 149–163. DOI: 10.1080/10255840008908002.
10. Jahangiri M., Saghafian M., Sadeghi M.R. (2017) Numerical simulation of non-Newtonian models effect on he
11. modynamic factors of pulsatile blood flow in elastic stenosed artery. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 31(2). pp. 1003–1013. DOI: 10.1007/ s12206-017-0153-x.
12. Tu C., Deville M. (1996) Pulsatile flow of non-Newtonian fluids through arterial stenosis. *Journal of Biomechanics*. 29(7). pp. 899–908. DOI: 10.1016/0021-9290(95)00151-4.
13. Prakash O., Makinde O.D., Singh S.P., Jain N., Kumar D. (2015) Effects of stenoses on non-Newtonian flow of blood in blood vessels. *International Journal of Biomathematics*. 8(1). pp. 1550010-1–1550010-13 . DOI: 10.1142/S1793524515500102.
14. Ryltsev I.A., Ryltseva K.E., Shrager G.R. (2020) Kinematika techeniya stepennoy zhidkosti v trube peremennogo secheniya [Kinematics of a power-law fluid flow in a pipe with a varying cross section]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 63. pp. 125–138. DOI: 10.17223/19988621/63/11.
15. Lee T.S. (1990) Numerical studies of fluid flow through tubes with double constrictions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 11(8). pp. 1113–1126. DOI: 10.1002/fld.1650110805.
16. Lee T.S. (1994) Steady laminar fluid flow through variable constrictions in vascular tubes. *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*. 116(1). pp. 66–71. DOI: 10.1115/1.2910244.
17. Lee T.S., Liao W., Low H.T. (2003) Numerical simulation of turbulent flow through series stenoses. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 42(7). pp. 717–740. DOI: 10.1002/fld.550.
18. Huang H., Lee T.S., Shu C. (2006) Lattice-BGK simulation of steady flow through vascular tubes with double constrictions. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*. 16(2). pp. 185–203. DOI: 10.1108/09615530610644262.
19. Roache P.J. (1982) *Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque: Hermosa. DOI: 10.1016/0041-5553(80)90297-9.
20. Ostwald W. (1929) Ueber die rechnerische Darstellung des Strukturgebietes der Viskosität. *Kolloid Zeitschrift*. 47(2). pp. 176–187. DOI: 10.1007/BF01496959.
21. Godunov S.K., Ryabenkiy V.S. (1987) *Difference Schemes*. North-Holland: Elsevier Science Ltd.

Received: September 25, 2020

УДК 539.3
DOI 10.17223/19988621/70/8

В.В. Скрипняк, К.В. Иохим, В.А. Скрипняк

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ТЕХНИЧЕСКИ ЧИСТОГО ТИТАНА В СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ РАСТЯЖЕНИИ[1]

Представлены результаты исследования влияния сложного напряженного состояния на механическое поведение и разрушение технически чистого титана ВТ1-0 (Grade 2) в диапазоне скоростей деформации от 0.1 до 10^3 $с^{-1}$. Испытания проведены на стенде Instron VHS 40/50-20 на плоских образцах с постоянным сечением рабочей части и образцах с надрезом. Поля деформаций в образце определены методом корреляции цифровых изображений (DIC). Установлено, что пластическая деформация в полосах локализации существенно превышает значение относительного удлинения до разрушения.

Ключевые слова: *локализация пластической деформации, технически чистый титан, высокая скорость деформации, механическое поведение, трехосность напряженого состояния.*

Технически чистый (ТЧ) титан обладает высокой коррозионной стойкостью, биосовместимостью, стабильностью физико-механических свойств, хорошей деформируемостью и свариваемостью [1–4]. В настоящее время ТЧ-титан используется для изготовления легких, надежных и коррозионностойких деталей механизмов и машин, медицинских имплантатов и оборудования, элементов конструкций авиакосмических и морских транспортных систем. На основе методов интенсивной пластической деформации (ИПД) разработаны технологии, обеспечивающие повышение прочностных свойств ТЧ-титана за счет формирования ультрамелкозернистой (УМЗ), нанокристаллической (НК) структур и структуры с бимодальным распределением размеров зерен (УМЗ+НК) [5–8].

Недавние исследования показали, что локализация пластической деформации влияет на механическое поведение ТЧ-титана в крупнокристаллическом и в ультрамелкозернистом состояниях [5–7].

Развитие технологий получения изделий методами экструзии, штамповки, соединений элементов конструкций из ТЧ-титана и других сплавов, металлов или сталей с помощью сварки трением потребовало более полного понимания закономерностей деформации и механического поведения титана в сложном напряженном состоянии в широком диапазоне скоростей деформации.

Было установлено, что закономерности упругопластического деформирования крупнокристаллического ТЧ-титана в широком диапазоне скоростей деформации и температуры подобны закономерностям сплавов с гексагональной плотноупакованной (ГПУ) решеткой [9].

В работе [10] установлена пониженная чувствительность напряжения течения у проката ТЧ-титана к скорости деформации при ориентации нагрузки в направ-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 20-79-00102).

лении проката (RD). В работе [11] обнаружено снижение пластичности и увеличение прочности ТЧ-титана в условиях двухосного квазистатического нагружения. Указанные результаты могут объяснить изменение закономерностей деформационного упрочнения и разупрочнения в условиях локализации деформации. Экспериментальные исследования [12] показали, что при неоднородной пластической деформации в сложном напряженном состоянии ТЧ-титан демонстрирует сильную пластическую анизотропию.

В работе [13] показано, что на стадии образования шейки при растяжении образцов развитие макроскопической пластической деформации определяется формированием полос локализации.

Исследования в [14–16] показали, что в нормальных условиях зависимость предела текучести ТЧ-титана от логарифма нормированной скорости деформации аппроксимируется линейным соотношением в диапазоне скоростей деформации от 10^{-3} до 10^{3} с$^{-1}$. Было установлено, что при растяжении макроскопическая деформация до разрушения крупнокристаллического ТЧ-титана уменьшается с ростом скорости деформации в диапазоне от 10^{-3} до 10^{4} с$^{-1}$ [16, 17]. Авторами [17] было показано, что механическое поведение ТЧ-титана при заданных скоростях деформации изменяется с ростом температуры.

Экспериментальные и теоретические данные [18–19] показали существенное влияние температуры, скорости деформации и параметра трехосности напряженного состояния на закономерности разрушения и пластической деформации ТЧ-титана. Результаты исследований показали, что в условиях квазистатического растяжения титановых сплавов предельная деформация до разрушения монотонно уменьшается при увеличении параметра трехосности напряженного состояния.

Одновременная регистрация полей деформации методом корреляции цифровых изображений и поля температуры методом инфракрасной термометрии показала повышение температуры в полосах локализации деформации при растяжении плоских образцов ТЧ-титана в условиях квазистатического нагружения [5–7].

Закономерности локализации пластической деформации и разрушения ТЧ-титана при высокоскоростном растяжении исследованы не достаточно полно.

Цель данной работы состояла в получении новых экспериментальных данных о закономерностях локализации деформации ТЧ-титановых сплавов в сложном напряженном состоянии при высокоскоростном растяжении в диапазоне скоростей деформации от 0.1 до 10^{3} с$^{-1}$.

Материал и условия эксперимента

Технически чистый титан ВТ1-0 был исследован в условиях растяжения со скоростями деформации от 0.1 до 10^{3} с$^{-1}$ при комнатной температуре.

Титан имел химический состав в вес. %: Ti ~ 99.45; Si ~ 0.08; Fe ~ 0.25; O ~ 0.2 и находился в поликристаллическом состоянии со средним размером зерна ~ 40 мкм. Образцы были вырезаны из тонколистового проката титана ВТ1-0 вдоль направления проката (RD) электроэрозионным методом. Толщина образцов составляла 0.72 ± 0.005 мм, а наименьшая ширина w – 4.85+0.05 мм. Начальная длина рабочей части L_0 была равна 20.0 ± 0.1 мм. Надрезы образцов были выполнены с радиусами 10.0, 5.0 и 2.5 мм. На рис. 1 показана геометрия образцов, применявшихся при испытаниях. Минимальная площадь поперечного сечения плоских образцов (w×d) составляла A_0 = 3.5 ± 0.03 мм^2.

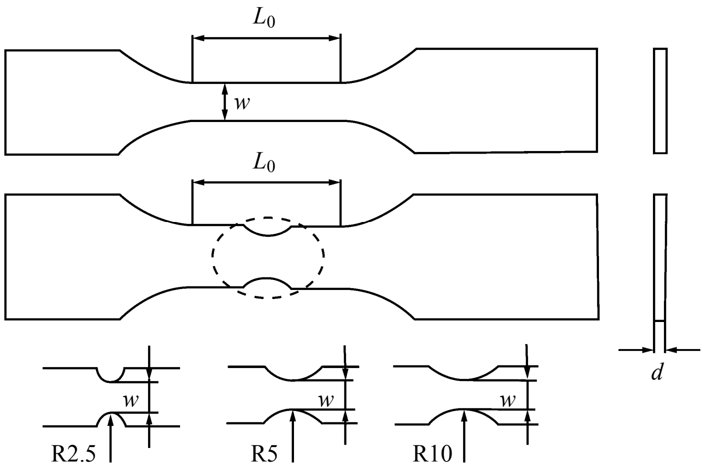


Рис. 1. Исходная геометрия образцов
Fig. 1. Initial geometry of specimens

Испытания образцов на растяжение с постоянной скоростью деформации проводились при комнатной температуре на высокоскоростном испытательном стенде Instron VHS 40/50-20 (Instron, High Wycombe, Великобритания) с датчиком нагрузки 50 кН. Испытания проводились в режиме управления скоростью захвата при начальных значениях: 0.002 ± 0.00001, 2 ± 0.01 и 20 ± 0.1 м/с. Растягивающие усилия и смещения до разрушения образцов регистрировались с высоким временным разрешением. Истинное макроскопическое напряжение σ_1^{true} и истинная деформация ε_1^{true} при растяжении образцов определялись по формулам [20, 21]

$$\sigma_1^{true} = (F / A_0)(1 + \Delta L / L_0), \tag{1}$$

$$\varepsilon_1^{true} = \ln(1 + \Delta L / L_0), \tag{2}$$

где F – усилие, A_0 – начальная минимальная площадь поперечного сечения образца, ΔL – удлинение и L_0 –начальная длина рабочей части образца, $\Delta L/L_0$ – относительное удлинение.

Параметр трехосности напряженного состояния определяется по формуле [18–20]

$$\eta = -p / \sigma_{eq}, \tag{3}$$

где $p = -(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ – давление, $\sigma_{eq} = [(3/2)(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})]^{1/2}$ – эквивалентное напряжение, σ_{ij} – компоненты тензора напряжения Коши, δ_{ij} – символ Кронекера.

Начальная величина параметра трехосности напряженного состояния η в плоском напряженном состоянии рассчитывалась по формуле [21]

$$\eta = (1 + 2A) / (3\sqrt{A^2 + A + 1}, \quad A = \ln[1 + w/(4R)], \tag{4}$$

где w – минимальная ширина образца в зоне надреза, R – радиус надреза.

Начальные значения параметра η для образцов с гладкой частью равны 0.333, для образцов с радиусами надрезов 10.0 мм, 5.0 мм и 2.5 мм – 0.380, 0.416 и 0.467 соответственно.

Величина главной пластической деформации ε_1^p определялась по формуле

$$\varepsilon_1^p = \varepsilon_1^{true} - \sigma_1^{true} / E, \quad (5)$$

где E – модуль Юнга.

Эквивалентная пластическая деформация в случае одноосного напряженного состояния при растяжении плоских образцов определялась с учетом $\varepsilon^p{}_2 = \varepsilon^p{}_3 =$ $= -(1/2)\,\varepsilon^p{}_1$ по формуле

$$\varepsilon_{eq}^p = (\sqrt{2}/3)[(\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p)^2 + (\varepsilon_2^p - \varepsilon_3^p)^2 + (\varepsilon_3^p - \varepsilon_1^p)^2]^{1/2} = \varepsilon_1^p. \quad (6)$$

Эквивалентная деформация в случае одноосного напряженного состояния определялась с учетом $\varepsilon_2 = \varepsilon^p{}_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon^p{}_3$, $\varepsilon^e{}_2 = \varepsilon^e{}_3 = -\nu\varepsilon^e{}_1$:

$$\varepsilon_{eq} = [(2/3)[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]^{1/2}, \quad (7)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Для каждого типа образца при скоростях деформации 10^3, 10^2 и 0.1 c^{-1} было проведено по три испытания. В каждой серии испытаний наблюдались малые значения среднеквадратичного отклонения зарегистрированной скорости деформации, усилий и смещений. Поля деформации плоских образцов при растяжении были получены методом цифровой корреляции изображений (DIC) [22–24].

Для измерения полей смещения методом DIC на поверхность образца были нанесены маркеры путем распыления черной акриловой краски, что позволило сравнить спекл-структуры поверхности в кадрах высокоскоростной регистрации видео. Высокоскоростная камера Phantom V711 (Vision Research – AMETEK Co., Уэйн, Нью-Джерси, США) использовалась для видеозаписи изменения геометрии образца со скоростью 100 тысяч кадров в секунду. Видео было записано в нескольких разрешениях: 1280×800, 1024×680 и 512×400 пикселей при скоростях деформации 0.1, 10^2 и 10^3 c^{-1} соответственно.

Размер изображения варьировался в зависимости от разрешения для записи изображений с 250 пикселями вдоль минимальной ширины измерительной части образца. Во всех проведенных DIC-анализах размер подмножества (subset size) был установлен равным 12 пикселям, что привело к получению бесшумных полей деформации [22].

Применение метода DIC позволило определить поле деформации образцов с надрезом и непосредственно наблюдать влияние радиуса надреза на распределение деформации в процессе растяжения.

При определении значений пластической деформации модуль Юнга для технически чистого титана ВТ1-0 принимался равным 112 ГПа, а значение коэффициента Пуассона – 0.32 [9].

Результаты и обсуждение

На рис. 2 показаны диаграммы «истинное напряжение – истинная деформация» и зависимости усилий от перемещений, полученные при обработке экспериментально зарегистрированных изменений усилий и перемещений во времени. На рис. 2, *a* показаны диаграммы для образцов с гладкой рабочей частью, а на рис. 2, *b* – диаграммы усилий от перемещений для образцов с надрезами.

Нисходящие ветви графиков закономерностей деформирования на рис. 2 соответствуют зарождению и росту полос локализации пластической деформации. С ростом параметра трехосности напряженного состояния η и скорости деформации уменьшаются эквивалентные пластические деформации, при которых начинают формироваться полосы локализованной пластической деформации при начальной температуре 295 К.

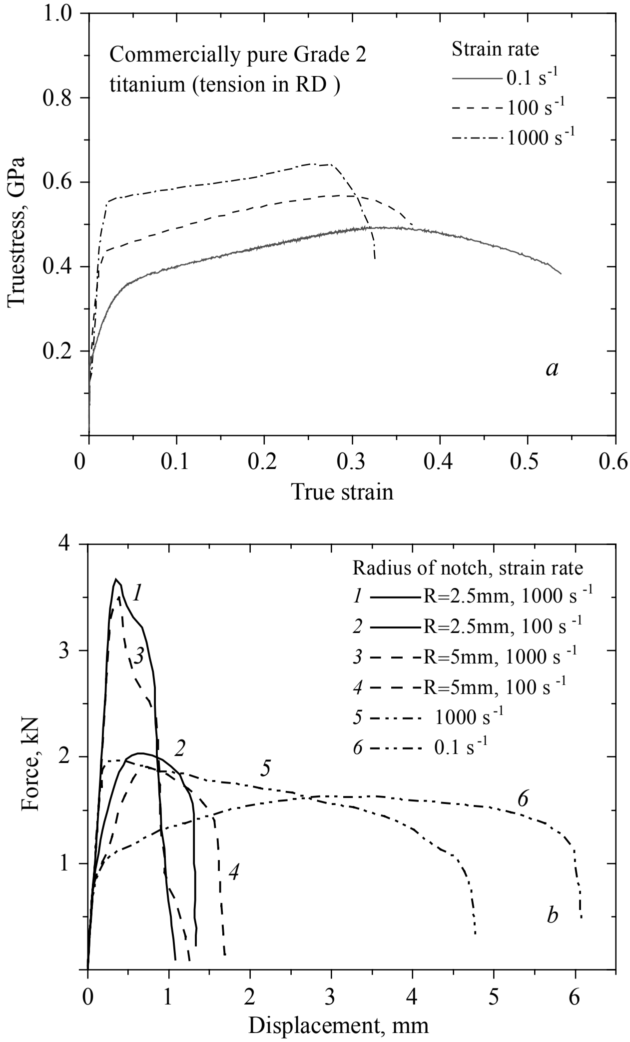


Рис. 2. Зависимости истинных напряжений от истинных деформаций технически чистого титана ВТ1–0 для образцов с гладкой рабочей частью (*a*), зависимости усилий от перемещений (*b*)

Fig. 2. (*a*) Curves of true stresses versus true strains of commercially pure VT1-0 titanium for smooth specimens and (*b*) force versus displacement curves

Полученные зависимости истинных напряжений от истинных деформаций дополняют данные, полученные для ТЧ-титана при более низких скоростях деформации [5–7, 19] и при скорости 10^3 c^{-1} [14–16].

На рис. 3 показаны поля деформации ε_1 в рабочей части образцов, полученные при растяжении образцов ВТ1-0 с гладкой рабочей частью (*a*) и при растяжении образцов с надрезами, имеющими радиусы 10, 5 и 2.5 мм (*b*). Поля деформаций показаны в моменты времени, предшествующие образованию макротрещины.

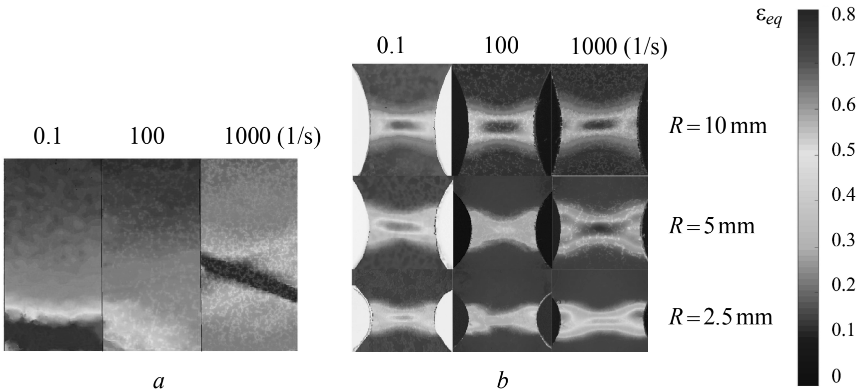


Рис. 3. Эквивалентные деформации в образцах ТЧ-титана ВТ1-0 с гладкой рабочей частью при растяжении со скоростями деформации 0.1, 10^2, 10^3 $с^{-1}$ (*a*) и в образцах с надрезами, имеющими радиусы 10, 5, 2.5 мм (*b*)
Fig. 3. Equivalent strains (*a*) in smooth specimens of commercially pure titanium VT1-0 under tension with strain rates of 0.1, 10^2, and 10^3 s^{-1} and (*b*) in specimens with notches of different radii: 10, 5, and 2.5 mm

Единая цветовая шкала на рис. 3 использована для сопоставления результатов. Анализ полей деформаций в условиях высокоскоростного растяжения показал, что образованию трещины в рабочей части образцов предшествует образование системы полос локализованной деформации. При растяжении формируются 2 системы сопряженных полос локализации, ориентированных под углом к направлению растяжения, что обусловлено формированием полос в плоскостях действия наибольших сдвиговых напряжений. Отметим, что полосы могут формироваться как под углом к боковой поверхности рабочей части образцов, так и к плоскости. Результаты на рис. 3 демонстрируют, что в зоне пересечения полос локализации достигаются наибольшие локальные значения эквивалентных пластических деформаций. Величины эквивалентных пластических деформаций в зоне полос локализации существенно превышают предельные деформации до разрушения.

С ростом скорости деформации происходит увеличение ε^p_{eq} в полосах локализации. Указанный эффект обусловлен снижением сопротивления деформированию из-за разогрева материала в зоне локализации деформации в результате диссипации работы напряжений. Отметим, что невысокие значения коэффициента теплопроводности ТЧ-титана (~18.85 Вт/(м·К)), что ниже, чем, например, в алюминиевых сплавах (~122 Вт/(м·К)), препятствуют формированию однородного температурного поля в рабочей части образцов. Поэтому в рассмотренных условиях нагружения процесс деформации происходит не в изотермических условиях.

Локальное возрастание температуры в полосах локализации в ТЧ-титана подтверждено в экспериментах с применением метода инфракрасной термометрии [6, 7]. Полученные результаты согласуются с наблюдаемым уменьшением деформационного упрочнения с ростом скорости деформации (см. рис. 2).

При скорости деформации ~10^2 $с^{-1}$ зона локализации пластического течения формируется при больших степенях деформации, усредненной по рабочей части образцов, чем при 10^3 $с^{-1}$. Предельные относительные удлинения ТЧ-титана до разрушения при растяжении со скоростью деформации ~10^2 $с^{-1}$ оказались выше для всех типов образцов, чем при 10^3 $с^{-1}$.

Результаты, представленные на рис. 2 и 3, свидетельствуют о том, что пластичность ТЧ-титана снижается с увеличением параметра трехосности напряженного состояния η. Полученные результаты показывают, что сложное напряженное состояние оказывает существенное влияние на процессы зарождения, роста и коалесценции повреждений титана при растяжении со скоростями деформации от 0.1 до 10^3 $с^{-1}$. Отметим, что при скорости деформации 10^3 $с^{-1}$ влияние сложного напряженного состояния на предельную деформацию до разрушения минимально, а локализация начинается при пластической деформации ~0.007. При растяжении со скоростью деформации 10^2 $с^{-1}$ величина деформации до разрушения в большей степени зависела от параметра трехосности напряженного состояния η.

На рис. 4 представлены поля эквивалентных деформаций в образце ТЧ-титана с гладкой рабочей частью при скорости деформации 10^3 $с^{-1}$ в последовательные моменты времени (*a*) и (*b*). Результаты свидетельствуют о неоднородности распределения деформаций в рабочей части растягиваемого образца. Локальные значения эквивалентной деформации в зоне полос локализации пластической деформации существенно отличались от усредненных деформаций в рабочей части образца.

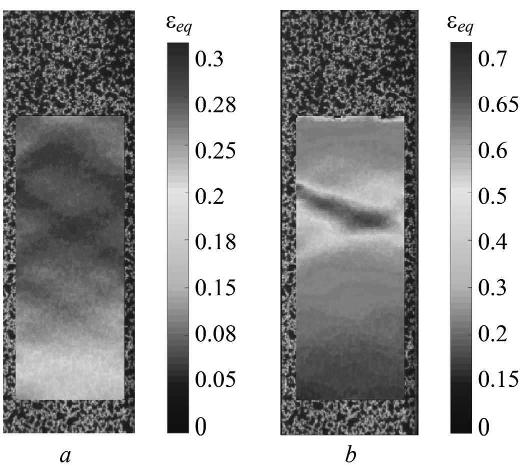
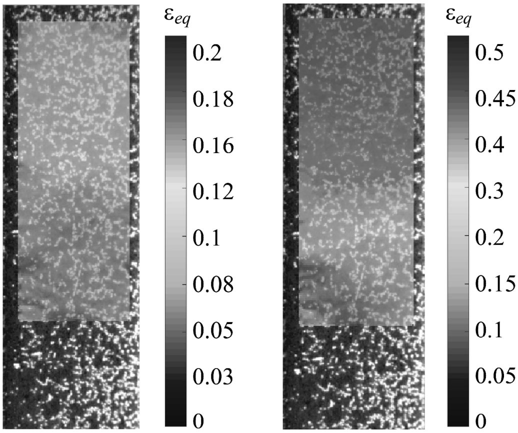


Рис. 4. Поля эквивалентной деформации в гладком образце при растяжении со скоростью деформации 10^3 $с^{-1}$, при удлинениях 2 (*a*) и 4.5 мм (*b*)

Fig. 4. Equivalent strain fields in a smoothed specimen under tension at a strain rate of 10^3 s^{-1} with elongations of (*a*) 2 and (*b*) 4.5 mm

На рис. 5 показаны поля эквивалентной деформации в гладких образцах при растяжении со скоростью деформации10^2 $с^{-1}$.

На рис. 4, *a* и 5, *a* показаны поля эквивалентной деформации в момент начала формирования шейки, а на рис. 4, *b* и 5, *b* – перед зарождением трещины. Зарождение повреждений при высокоскоростной деформации при η ≈ 0.333 начинается в зоне выхода полос на границы образцов (см. рис. 4, *b*, 5, *b*). Когда полосы становятся стационарными, в одной из них эквивалентная пластическая деформация резко возрастает, ширина уменьшается до субмиллиметровых размеров. Центральная часть образца продолжает пластически деформироваться при снижающемся напряжении до ~15 % вплоть до полного разрушения образца.



a *b*

Рис. 5. Поля эквивалентной деформации в гладком образце при растяжении со скоростью деформации 10^2 с$^{-1}$, при удлинениях 3 (*a*) и 5.8 мм (*b*)

Fig. 5. Equivalent strain fields in a smoothed specimen under tension at a strain rate of 10^2 s^{-1} with elongations of (*a*) 3 and (*b*) 5.8 mm

С ростом параметра η в области надрезов ускоряется формирование полос локализации и снижаются эффективные макроскопические деформации до разрушения.

На рис. 6 и 7 показаны поля эквивалентной деформации при растяжении образцов с радиусом надреза 5 мм при скоростях деформации 10^2 и 10^3 с$^{-1}$ соответственно. В зоне концентраторов напряжений (при η ~ 0.416) повреждения зарождаются в области пересечения полос локализации пластических сдвигов (см. рис. 6, *b* и 7, *b*).

Полученные результаты согласуются с данными, полученными при квазистатическом растяжении, и расширяют понимание закономерностей развития локализации пластической деформации при высокоскоростном растяжении [10, 12–14].

При увеличении параметра η до ~0.467 (радиус надреза образцов 2.5 мм) трещина зарождается в области пересечения полос локализации в центральной зоне образца и распространяется к его поверхности.

Полученные результаты свидетельствуют о вязком характере разрушения сплава ВТ1-0 при скоростях деформации до 10^3 с$^{-1}$.

Возрастание скорости деформации от 10^2 до 10^3 с$^{-1}$ приводит к существенному (от 80 до 100 %) расхождению относительного остаточного удлинения δ ТЧ-титана и деформаций, реализующихся в полосах локализации при зарождении трещины, как показано на рис. 6(*b*) и 7(*b*). В диапазоне скоростей деформации от 10^2 до 10^3 с$^{-1}$ увеличение параметра трехосности напряженного состояния от $\eta \sim 0.333$ до 0.467 приводит к уменьшению удлинения ТЧ-титана до разрушения более чем на порядок.

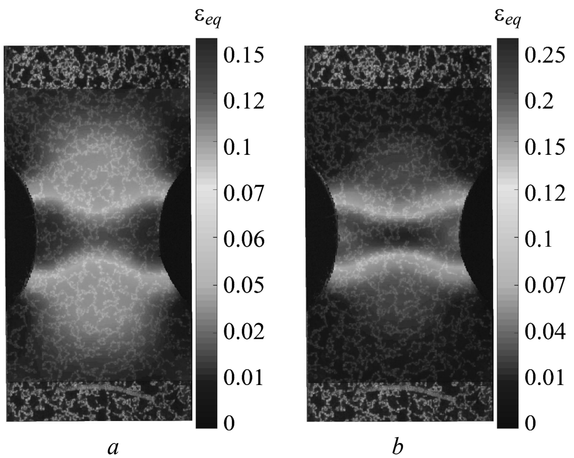


Рис. 6. Поля эквивалентной деформации в образце с надрезом при растяжении со скоростью деформации 10^2 с$^{-1}$ при удлинениях 0.39 (*a*) и 0.84 мм (*b*)
Fig. 6. Equivalent strain fields in a notched specimen under tension at a strain rate of 10^2 s^{-1} with elongations of (*a*) 0.39 and (*b*) 0.84 mm

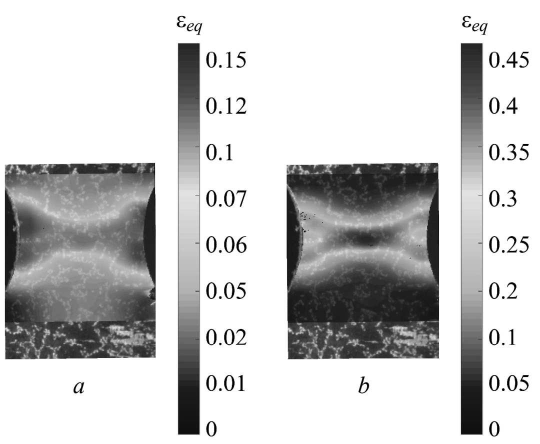


Рис. 7. Поля эквивалентной деформации в образце с надрезом при растяжении со скоростью деформации 10^3 с$^{-1}$ при удлинениях 0.73 (*a*) и 1.56 мм (*b*)
Fig. 7. Equivalent strain fields in a notched specimen under tension at a strain rate of 10^3 s^{-1} with elongations of (*a*) 0.73 and (*b*) 1.56 mm

Заключение

Закономерности локализации пластической деформации технически чистого титана марки ВТ1-0 исследованы при растяжении плоских образцов со скоростями деформации 0.1, 10^2 и 10^3 $с^{-1}$ на сервогидравлическом стенде Instron VHS 40/50-20. Для исследования влияния сложного напряженного состояния на развитие локализации деформации использовались образцы с надрезами, имевшими радиусы 10, 5, 2.5 мм.

Видеорегистрация процесса растяжения образцов со скоростью до 100 тысяч кадров в секунду проводилась камерой Phantom V 711. Поля деформаций в рабочей части образца исследовались методом корреляции цифровых изображений (DIC).

В результате прямых наблюдений было установлено, что магистральная трещина в образцах ТЧ-титана ВТ1-0 зарождалась в зоне пересечения стационарных полос локализованной деформации.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что величина эквивалентной пластической деформации в полосах локализации существенно превышает значения относительного остаточного удлинения δ ТЧ-титана в условиях высокоскоростного растяжения.

С ростом скорости деформации от 10^2 до 10^3 $с^{-1}$ влияние параметра трехосности напряженного состояния на величину предельной деформации до разрушения уменьшается.

Было показано, что влияние скорости деформации на предельные деформации до разрушения имеет немонотонный характер.

Анализ полей деформации в рабочей части образцов показал, что степень равномерной деформации рабочей части снижается с ростом скорости деформации. При скоростях деформации выше 10^3 $с^{-1}$ формирование полос локализованного сдвига происходит при начале пластического течения.

Технически чистый титан разрушается за счет зарождения, роста и слияния повреждений в полосах локализованной пластической деформации. Результаты подтверждают, что разрушение технически чистого титана имеет вязкий характер при скоростях деформации от 0.1 до 10^3 $с^{-1}$, при значениях параметра трехосности напряжений $0.333 \le \eta < 0.467$ и при температуре, близкой к 295 К.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Naseri R.*, *Kadkhodayan M.*, *Shariati M.* Static mechanical properties and ductility of biomedical ultrafine-grained commercially pure titanium produced by ECAP process // Transactions of Nonferrous Metals Society of China. 2017. V. 27. No. 9. P. 1964–1975. DOI: 10.1016/s1003-6326(17)60221-8.
2. *Fonda R.W.*, *Knipling K.E.*, *Levinson A.J.*, *Feng C.R.* Enhancing the weldability of CP titanium friction stir welds with elemental foils // Science and Technology of Welding and Joining. 2019. P. 1–7. DOI: 10.1080/13621718.2019.1577034.
3. *Li W.-Y.*, *Ma T.*, *Li J.* Numerical simulation of linear friction welding of titanium alloy: Effects of processing parameters // Materials & Design. 2010. V. 31. No. 3. P. 1497–1507. DOI: 10.1016/j.matdes.2009.08.023.
4. *Wang X.Y.*, *Li W.Y.*, *Ma T.J.*, *Vairis A.* Characterization studies of linear friction welded titanium joints // Materials & Design. 2017. V. 116. P. 115–126. DOI: 10.1016/j.matdes.2016.12.005.
5. *Sharkeev Yu.P*, *Legostaeva E.V.*, *Vavilov V.P.*, *Skripnyak V.A.*, *Belyavskaya O.A.*, *Eroshenko A.Yu.*, *Glukhov I.A.*, *Chulkov A.A.*, *Kozulin A.A.*, *Skripnyak V.V.* Regular features of stage formation in the stress strain curves and microstructure in the zone of fracture of coarse-grained and ultrafine-grained titanium and zirconium alloys // Russian Physics Journal. 2019. V. 62. No. 8. P. 1349–1356. DOI: 10.1007/s11182-019-01854-1.

6. *Sharkeev Y.*, *VavilovV.*, *Skripnyak V.A.*, *Belyavskaya O.*, *Legostaeva E.*, *Kozulin A.*, *Chulkov A.*, *Sorokoletov A.*, *Skripnyak V.V.*, *Eroshenko A.*, *Kuimova M.* Analyzing the deformation and fracture of bioinert titanium, zirconium and niobium alloys in different structural states by the use of infrared thermography // Metals. 2018. V. 8. No. 9. Article number 703. DOI: 10.3390/met8090703.
7. *Sharkeev Y.P.*, *Vavilov V.P.*, *Belyavskaya O.A.*, *Skripnyak V.A.*, *Nesteruk D.A.*, *Kozulin A.A.*, *Kim V.M.* Analyzing deformation and damage of VT1-0 titanium in different structural states by using infrared thermography // Journal of Nondestructive Evaluation. 2016. V. 35. Article number 42. DOI: 10.1007/s10921-016-0349-5.
8. *Skripnyak V.A.*, *Skripnyak N.V.*, *Skripnyak E.G.*, *Skripnyak V.V.* Influence of grain size distribution on the mechanical behavior of light alloys in wide range of strain rates // AIP Conf. Proc. 2017. V. 1793. Article number 110001. DOI: 10.1063/1.4971664.
9. *Frost H.J.*, *Ashby M.F.* Deformation-Mechanism Maps. Pergamon Press: Oxford, UK, 1982.
10. *Lee M.-S.*, *Hyun Y.-T.*, Jun T.-S. Global and local strain rate sensitivity of commercially pure titanium // Journal of Alloys and Compounds. 2019. V. 803. P. 711–720. DOI: 10.1016/j.jallcom.2019.06.319.
11. *Srinivasan N.*, *Velmurugan R.*, *Kumar R.*, *Singh S. K.*, *Pant B.* Deformation behavior of commercially pure (CP) titanium under equi-biaxial tension. Materials Science and Engineering: A. 2016. V. 674. P. 540–551. DOI: 10.1016/j.msea.2016.08.018.
12. *Zhai J.*, *Luo T.*, *Gao X.*, *Graham S.M.*, *Knudsen E.* Modeling the ductile damage process in commercially pure titanium // International Journal of Solids and Structure. 2016. V. 91. P. 26–45. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2016.04.031.
13. *Tu S.*, *Ren X.*, *He J.*, *Zhang Z.* Stress–strain curves of metallic materials and post-necking strain hardening characterization: A review // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. 2019. P. 1–17. DOI: 10.1111/ffe.13134.
14. *Chichili D.R.*, *Ramesh K.T.*, *Hemker K.J.* The high-strain-rate response of alpha-titanium: experiments, deformation mechanisms and modeling // Acta Materialia. 1998. V. 46. No. 3. P. 1025–1043. DOI: 10.1016/s1359-6454(97)00287-5.
15. *Meyers M.A.*, *Subhash G.*, *Kad B.K.*, *Prasad L.* Evolution of microstructure and shear-band formation in α-hcp titanium // Mechanics of Materials. 1994. V. 17. No. 2–3. P. 175–193. DOI: 10.1016/0167-6636(94)90058-2.
16. *Luan Q.*, *Britton T.B.*, *Jun T.S.* Strain rate sensitivity in commercial pure titanium: The competition between slip and deformation twinning // Materials Science and Engineering A. 2018. V. 734. P. 385–397. DOI: 10.1016/j.msea.2018.08.010.
17. *Huang W*, *Zan X.*, *Nie X.*, *Gong M.*, *Wang Y.*, *Xia Y.* Experimental study on the dynamic tensile behavior of a polycrystal pure titanium at elevated temperatures // Materials Science and Engineering: A. 2007. V. 443. P. 33–41. DOI: 10.1016/j.msea.2006.06.041.
18. *Skripnyak V.V.*, *Skripnyak E.G.*, *Skripnyak V.A.* Fracture of titanium alloys at high strain rates and under stress triaxiality // Metals. 2020. V. 10. No. 3. P. 305-1–305-24. DOI: 10.3390/met10030305.
19. *Skripnyak V.V.*, *Kozulin A.A.*, *Skripnyak V.A.* The influence of stress triaxiality on ductility of α titanium alloy in a wide range of strain rates // Materials Physics and Mechanics. 2019. V. 42. No. 4. P. 415–422. DOI: 10.18720/MPM.4242019_6.
20. *Bai Y.*, *Wierzbicki T.* A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence // International Journal of Plasticity. 2008. V. 24. P. 1071–1096. DOI: 10.1016/j.ijplas.2007.09.004.
21. *Bai Y.*, *Teng X.*, *Wierzbicki T.* On the application of stress triaxiality formula for plane strain fracture testing // Journal of Engineering Materials and Technology. 2009. V. 131. Article number 021002. DOI: 10.1115/1.3078390.
22. *Blaber J.*, *Adair B.*, *Ncorr A.A.* Open-Source 2D Digital Image Correlation Matlab Software // Experimantal Mechanics. 2015. V. 55. P.1105–1122. DOI: 10.1007/s11340-015-0009-1.
23. *Zheng G.*, *Tang B.*, *Zhou Q.*, *Mao X.*, *Dang R.* Development of a flow localization band and texture in a forged near-α titanium alloy // Metals. 2020. V. 10. Article number 121. DOI: 10.3390/met10010121.

24. *Lindner D.*, *Mathieu F.*, *Hild F.*, *Allix O.*, *Minh C.-H.*, *Paulien-Camy O.* On the evaluation of stress triaxiality fields in a notched titanium alloy sample via integrated digital image correlation // Journal of Applied Mechanics. 2015. V. 82. Article number 071014. DOI: 10.1115/1.4030457.

Статья поступила 12.02.2021

Skripnyak V.V., Iokhim K.V., Skripnyak V.A. (2021) LOCALIZATION OF PLASTIC DEFORMATION IN COMMERCIALLY PURE TITANIUM IN A COMPLEX STRESS STATE UNDER HIGH-SPEED TENSION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 89–102

DOI 10.17223/19988621/70/8

Keywords: localization of plastic deformation, commercially pure titanium, high strain rate, mechanical behavior, stress triaxiality.

In this work, the effect of a triaxiality stress state on the mechanical behavior and fracture of commercially pure titanium VT1-0 (Grade 2) in the range of strain rates from 0.1 to 1000 s^{-1} is studied. Tensile tests are carried out using a servo-hydraulic testing machine Instron VHS 40 / 50-20 on flat specimens with a constant cross-sectional area and on flat specimens with a notch. To study the effect of the complex stress state on the ultimate deformation before fracture, the samples with the notch of various radii (10, 5, 2.5 mm) are used in the experiments. Phantom V711 is employed for high-speed video registration of specimen's deformation. Deformation fields in a working part of the sample are investigated by the digital image correlation method. It is shown that the effect of the strain rate on the ultimate deformations before fracture has a non-monotonic behavior. An analysis of strain fields in the working part of the samples shows that the degree of uniform deformation of the working part decreases with an increase in the strain rate. At strain rates above 1000 s^{-1}, the shear bands occur at the onset of a plastic flow. Commercially pure titanium undergoes fracture due to the nucleation, growth, and coalescence of damages in the bands of localized plastic deformation oriented along the maximum shear stresses. The results confirm that the fracture of commercially pure titanium exhibits ductile behavior at strain rates varying from 0.1 to 1000 s^{-1}, at a triaxiality stress parameter in the range of $0.333 \le \eta < 0.467$, and at a temperature close to 295 K.

Financial support: This work was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 20-79-00102.

Vladimir V. SKRIPNYAK (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: skrp2012@yandex.ru

Kristina V. IOKHIM (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: iokhim.k@mail.ru

Vladimir A. SKRIPNYAK (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: skrp2006@yandex.ru

REFERENCES

1. Naseri R., Kadkhodayan M., Shariati M. (2017) Static mechanical properties and ductility of biomedical ultrafine-grained commercially pure titanium produced by ECAP process. *Transactions of Nonferrous Metals Society of China.* 27(9). pp. 1964–1975. DOI: 10.1016/s1003-6326(17)60221-8.
2. Fonda R.W., Knipling K.E., Levinson A.J., Feng C.R. (2019) Enhancing the weldability of CP titanium friction stir welds with elemental foils. *Science and Technology of Welding and Joining*. pp. 1–7. DOI: 10.1080/13621718.2019.1577034.

3. Li W.-Y., Ma T., Li J. (2010) Numerical simulation of linear friction welding of titanium alloy: Effects of processing parameters. *Materials & Design*. 31(3). pp. 1497–1507. DOI: 10.1016/j.matdes.2009.08.023.
4. Wang X.Y., Li W.Y., Ma T.J., Vairis A. (2017) Characterisation studies of linear friction welded titanium joints. *Materials & Design*. 116. pp. 115–126. DOI: 10.1016/j.matdes. 2016.12.005.
5. Sharkeev Yu.P, Legostaeva E.V., Vavilov V.P., Skripnyak V.A., Belyavskaya O.A., Eroshenko A.Yu., Glukhov I.A., Chulkov A.A., Kozulin A.A., SkripnyakV.V. (2019) Regular features of stage formation in the stress strain curves and microstructure in the zone of fracture of coarse-grained and ultrafine-grained titanium and zirconium alloys. *Russian Physics Journal*. 62(8). pp. 1349–1356. DOI: 10.1007/s11182-019-01854-1.
6. Sharkeev Y., Vavilov V., Skripnyak V.A., Belyavskaya O., Legostaeva E., Kozulin A., Chulkov A., Sorokoletov A., Skripnyak V.V., Eroshenko A., Kuimova M. (2018) Analyzing the deformation and fracture of bioinert titanium, zirconium and niobium alloys in different structural states by the use of infrared thermography. *Metals.* 8(9). Article 703. pp. 1–15. DOI: 10.3390/met8090703.
7. Sharkeev Y.P., Vavilov V.P., Belyavskaya O.A., Skripnyak V.A., Nesteruk D.A., Kozulin A.A., Kim V.M. (2016) Analyzing deformation and damage of VT1-0 titanium in different structural states by using infrared thermography. *Journal of Nondestructive Evaluation*. 35. Article 42. DOI: 10.1007/s10921-016-0349-5.
8. Skripnyak V.A., Skripnyak N.V., Skripnyak E.G., Skripnyak V.V. (2017) Influence of grain size distribution on the mechanical behavior of light alloys in wide range of strain rates. *AIP Conference Proceedings*. 1793. Article 110001. DOI: 10.1063/1.4971664.
9. Frost H.J., Ashby M.F. (1982) *Deformation-Mechanism Maps.* Oxford: Pergamon Press.
10. Lee M.-S., Hyun Y.-T., Jun T.-S. (2019) Global and local strain rate sensitivity of commercially pure titanium. *Journal of Alloys and Compounds*. 803. pp. 711–720. DOI: 10.1016/j.jallcom.2019.06.319.
11. Srinivasan N., Velmurugan R., Kumar R., Singh S.K., Pant B. (2016) Deformation behavior of commercially pure (CP) titanium under equi-biaxial tension. *Materials Science and Engineering*: *A*. 674. pp. 540–551. DOI: 10.1016/j.msea.2016.08.018.
12. Zhai J., Luo T., Gao X., Graham S.M., Knudsen E. (2016) Modeling the ductile damage process in commercially pure titanium. *International Journal of Solids and Structures.* 91. pp. 26–45. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2016.04.031.
13. Tu S., Ren X., He J., Zhang Z. (2019) Stress–strain curves of metallic materials and post-necking strain hardening characterization: A review. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. pp. 1–17. DOI: 10.1111/ffe.13134.
14. Chichili D.R., Ramesh K.T., Hemker K.J. (1998) The high-strain-rate response of alpha-titanium: experiments, deformation mechanisms and modeling. *Acta Materialia*. 46(3). pp. 1025–1043. DOI: 10.1016/s1359-6454(97)00287-5.
15. Meyers M.A., Subhash G., Kad B.K., Prasad L. (1994) Evolution of microstructure and shear-band formation in α-hcp titanium. *Mechanics of Materials*. 17(2–3). pp. 175–193. DOI: 10.1016/0167-6636(94)90058-2.
16. Luan Q., Britton T.B., Jun T.-S. (2018) Strain rate sensitivity in commercial pure titanium: The competition between slip and deformation twinning. *Materials Science and Engineering A*. 734. pp. 385–397. DOI: 10.1016/j.msea.2018.08.010.
17. Huang W, Zan X., Nie X., Gong M., Wang Y., Xia Y. (2007) Experimental study on the dynamic tensile behavior of polycrystalline pure titanium at elevated temperatures. *Materials Science and Engineering*: *A*. 443. pp. 33–41. DOI: 10.1016/j.msea.2006.06.041.
18. Skripnyak V.V., Skripnyak E.G., Skripnyak V.A. (2020) Fracture of titanium alloys at high strain rates and under stress triaxiality. *Metals.* 10(3). Article 305. pp. 1–24. DOI: 10.3390/met10030305.
19. Skripnyak V.V., Kozulin A.A., Skripnyak V.A. (2019) The influence of stress triaxiality on ductility of α titanium alloy in a wide range of strain rates. *Materials Physics and Mechanics*. 42(4). pp. 415–422. DOI: 10.18720/MPM.4242019_6.

20. Bai Y., Wierzbicki T. (2008) A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence. *International Journal of. Plasticity*. 24. pp. 1071–1096. DOI: 10.1016/j.ijplas.2007.09.004.
21. Bai Y., Teng X., Wierzbicki T. (2009) On the application of stress triaxiality formula for plane strain fracture testing. *Journal Engineering Materials and Technology*. 131. Article 021002. DOI: 10.1115/1.3078390.
22. Blaber J., Adair B., Ncorr A.A. (2015) Open Source 2D Digital Image Correlation Matlab Software. *Experimental Mechanics*. 55. pp. 1105–1122. DOI: 10.1007/s11340-015-0009-1.
23. Zheng G., Tang B., Zhou Q., Mao X., Dang R. (2020) Development of a flow localization band and texture in a forged near-α titanium alloy. *Metals*. 10. Article 121. DOI: 10.3390/met10010121.
24. Lindner D., Mathieu F., Hild F., Allix O., Minh C.-H., Paulien-Camy O. (2015) On the evaluation of stress triaxiality fields in a notched titanium alloy sample via integrated digital image correlation. *Journal Applied Mechanics*. 82. Article 071014. DOI: 10.1115/1.4030457.

Received: February 12, 2021

УДК 539.3
DOI 10.17223/19988621/70/9

М.Ю. Соколова, Д.В. Христич

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ[1]

Рассмотрен вариант соотношений нелинейной упругости для анизотропных материалов, по типу симметрии относящихся к кристаллам кубической сингонии. В предложенной модели учитывается физическая нелинейность в поведении таких материалов при конечных деформациях. Исходя из представления упругого потенциала как тензорного многочлена по деформациям, получены соотношения для напряжений, содержащие константы упругости второго и третьего порядков.

Ключевые слова: *анизотропия, гиперупругость, конечные деформации, кубические материалы, тензорные базисы, инварианты*

Будем рассматривать анизотропные материалы, обладающие симметрией упругих свойств, присущей кристаллам кубической сингонии [1 – 4]. Это означает, что упругие свойства таких материалов удовлетворяют условиям симметрии, присущей точечной группе объемно- или гранецентрированного куба. Группа симметрии кубических материалов характеризуется наличием трех поворотных осей четвертого порядка, четырех поворотных осей третьего порядка и шести осей симметрии второго порядка. Порождающими элементами группы симметрии кубических материалов являются три поворота на угол 90° вокруг поворотных осей четвертого порядка [3, 4].

По своим свойствам кубические материалы близки к изотропным материалам. Известно [2, 3], что под действием гидростатического давления сфера из анизотропного материала в общем случае становится эллипсоидом. В случаях изотропного и кубического материалов при воздействии гидростатического давления сферы остаются сферами, что не позволяет в таком опыте различить эти материалы.

Линейные упругие кубические материалы в рамках обобщенного закона Гука описаны в работах [2, 6–10]. В этих работах получены структурные представления тензоров упругости четвертого ранга, инвариантных относительно описанной группы симметрии. Тензоры упругости, записанные в произвольной (лабораторной) системе координат, имеют в общем случае 21 ненулевую компоненту, которые не являются независимыми. В работах [6–9] проведен анализ зависимости модулей упругости кубического материала и коэффициента Пуассона от направления растяжения образца. Для кубического материала может быть определена такая система координат, названная в статье [11] канонической, в которой тензор упругих свойств имеет три ненулевые независимые константы.

Нелинейные модели поведения кубических материалов могут учитывать либо геометрическую, либо физическую нелинейность. В наиболее сложных моделях

[1] Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МД-1803.2019.1) и РФФИ (проект № 18-31-20053).

необходимо учитывать геометрическую и физическую нелинейности одновременно. Построению моделей кубических материалов, учитывающих физическую нелинейность при конечных деформациях, посвящена работа [12]. В этой статье автор записывает нелинейные определяющие соотношения для кубического материала на основе девяти тензорных генераторов, построенных по тензору конечных деформаций Коши – Грина и полученных в работе [5].

Если при упругом деформировании в рассматриваемых материалах наблюдаются нелинейные эффекты даже в области малых деформаций, то требуется построить физически нелинейные определяющие соотношения. Решению этой задачи посвящены статьи [13, 14]. В этих работах для записи нелинейных определяющих соотношений используется разложение в ряд упругого потенциала с сохранением членов второй и третьей степеней относительно тензора малых деформаций. В статьях [13, 14] определена структура тензоров упругости шестого ранга, которые в канонической системе координат содержат шесть ненулевых независимых констант. Геометрически и физически нелинейная модель кубического материала предложена в [15].

В отличие от результатов, полученных в работах [13–15], авторы данной статьи используют разложение тензоров упругости четвертого и шестого рангов по собственным упругим состояниям кубического материала [13, 14]. Это позволяет записать упругий потенциал для кубического материала в виде функции инвариантов тензоров, которые являются проекциями тензора деформаций Коши – Грина в собственные подпространства кубического материала. Получающиеся при этом выражения для тензора напряжений отражают взаимное влияние процессов, происходящих в различных собственных подпространствах рассматриваемого материала, и позволяют для кубического материала описать эффекты второго порядка.

1. Общий подход к записи упругого потенциала деформаций в случае конечных деформаций кубического материала. Строение тензоров упругости

Рассмотрим гиперупругий анизотропный материал, для которого можно записать упругий потенциал. В качестве такового используем удельную (отнесенную к объему) потенциальную энергию деформации. Дифференциал удельной потенциальной энергии деформаций может быть представлен в виде

$$dW = \mathbf{T} : d\boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\mathbf{T}$ – энергетический тензор напряжений, связанный с тензором напряжений Коши $\mathbf{S}$ соотношением

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\Phi}^{-T} \cdot \Sigma \cdot \boldsymbol{\Phi}^{-1},\ \boldsymbol{\Sigma} = \frac{dV}{dV_0}\mathbf{S},$$

$\boldsymbol{\Phi}$ – аффинор деформаций, $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\Phi}^T - \mathbf{E}\right)$ – тензор деформаций Коши – Грина, $\mathbf{E}$ – единичный тензор, двоеточие означает свертывание тензоров [3, 16]. Из этого следует возможность определения напряжений при конкретизации вида удельной потенциальной энергии деформаций по формулам

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{1}$$

Такой подход к построению соотношений гиперупругости для изотропных и анизотропных материалов использовался в работах [16 – 18].

Представим тензорную функцию $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ в виде ряда по степеням тензора деформаций Коши – Грина

$$W = W_0 + \mathbf{A}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2!}\mathbf{N} :: \boldsymbol{\varepsilon\varepsilon} + \frac{1}{3!}\mathbf{L} ::: \boldsymbol{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + \ldots, \tag{2}$$

причем $W_0 = 0,\ \mathbf{A}_0 = 0$, если начальное состояние является ненапряженным. В выражении (2) использовано произведение $\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k\vec{e}_l$, где $\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k\vec{e}_l = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l$ – полиада, образованная векторами ортонормированного базиса $\vec{e}_i,\ i = 1,2,3$, и произведение $\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn}\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k\vec{e}_l\vec{e}_m\vec{e}_n$, где $\vec{e}_i\vec{e}_j\vec{e}_k\vec{e}_l\vec{e}_m\vec{e}_n = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \otimes \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n$.

Сохраним в представлении (2) только первые два ненулевых члена:

$$W = \frac{1}{2!}\mathbf{N} :: \boldsymbol{\varepsilon\varepsilon} + \frac{1}{3!}\mathbf{L} ::: \boldsymbol{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}, \tag{3}$$

тогда из соотношений (1) и (3) следует выражение для напряжений

$$\mathbf{T} = \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\mathbf{L} :: \boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}. \tag{4}$$

В выражениях (3) и (4) $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ – тензоры упругих констант четвертого и шестого рангов соответственно, которые удовлетворяют условиям внутренней симметрии

$$N_{ijkl} = N_{jikl} = N_{ijlk} = N_{klij},\ L_{ijklmn} = L_{jiklmn} = L_{ijlkmn} = L_{ijklnm} = L_{ijmnkl} = L_{klijmn}. \tag{5}$$

Структура тензоров $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ для кубического материала известна [1 – 4, 16]. Тензор $\mathbf{N}$ содержит три независимые константы упругости второго порядка, а тензор $\mathbf{L}$ – шесть независимых констант упругости третьего порядка. Наименьшее число ненулевых компонент тензоры упругости имеют в системе канонических осей анизотропии материала [11, 17]. В произвольной (лабораторной) системе координат тензоры упругости кубического материала имеют произвольный вид. Главные оси анизотропии по В.В. Новожилову [11, 16] определяются как главные оси тензора напряжений при всестороннем сжатии, однако для кубического материала все главные значения тензора напряжений в этом случае равны, а главные векторы могут быть выбраны произвольно. Канонические оси анизотропии материала всегда совпадают с главными осями анизотропии, определенными по В.В. Новожилову. Однако в кубическом материале главные оси анизотропии, найденные из эксперимента, могут и не совпадать с каноническими осями. Тогда возникает необходимость определить взаимную ориентацию лабораторной системы координат с ортонормированным базисом $\vec{k}^i$ и системы канонических осей координат с базисом $\vec{a}_i$.

Поскольку реализация эксперимента по всестороннему сжатию образца затруднена, в работе [11] предложено заменить этот эксперимент на три опыта по сжатию кубического образца в трех взаимно перпендикулярных направлениях. В этих опытах обязательным является измерение всех компонент тензора деформаций в лабораторной системе координат. Эквивалентность таких экспериментов является следствием линейности связи между деформациями и напряжениями в области малых деформаций. В этом случае речь идет об определении начального положения осей анизотропии материала.

Пусть опыты по сжатию кубических образцов проводятся в лабораторной системе координат с ортонормированным базисом $\vec{k}^i$. Взаимная ориентация векторных базисов $\vec{a}_i$ и $\vec{k}^i$ определяется ортогональным тензором поворота $\mathbf{Q}$. Для компонент тензора $\mathbf{Q} = q_{ij}\vec{k}^i\vec{k}^j$ выполняются тождества

$$\begin{gathered} q_{11}^2 + q_{21}^2 + q_{31}^2 = 1,\ q_{12}^2 + q_{22}^2 + q_{32}^2 = 1,\ q_{13}^2 + q_{23}^2 + q_{33}^2 = 1, \\ q_{11}q_{12} + q_{21}q_{22} + q_{31}q_{32} = 0,\ q_{11}q_{13} + q_{21}q_{23} + q_{31}q_{33} = 0, \\ q_{13}q_{12} + q_{23}q_{22} + q_{33}q_{32} = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

В работе [11] показано, что для определения положения канонических осей анизотропии в кубическом материале достаточно двух экспериментов на сжатие кубических образцов. В первом эксперименте тензор напряжений определяется как $\mathbf{T}_1 = -t\vec{k}^1\vec{k}^1$. Пусть $\mathbf{C}$ – тензор упругих податливостей, обратный к тензору упругости $\mathbf{N}$. Измеряемые деформации выражаются через константы податливости и компоненты тензора $\mathbf{Q}$ следующим образом:

$$\begin{gathered} \bar{\varepsilon}_{11} = -t[Q_1(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})) + C_{1122} + 2C_{1212}], \\ \bar{\varepsilon}_{12} = -t[Q_7(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212}))], \\ \bar{\varepsilon}_{22} = -t[Q_4(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})) + C_{1122}], \\ \bar{\varepsilon}_{13} = -t[Q_8(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212}))], \\ \bar{\varepsilon}_{33} = -t[Q_5(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})) + C_{1122}], \\ \bar{\varepsilon}_{23} = -t[Q_9(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212}))], \end{gathered} \tag{7}$$

где обозначено

$$\begin{gathered} Q_1 = q_{11}^4 + q_{12}^4 + q_{13}^4,\ Q_4 = q_{11}^2 q_{21}^2 + q_{12}^2 q_{22}^2 + q_{13}^2 q_{23}^2, \\ Q_5 = q_{11}^2 q_{31}^2 + q_{12}^2 q_{32}^2 + q_{13}^2 q_{33}^2,\ Q_7 = q_{21}q_{11}^3 + q_{22}q_{12}^3 + q_{23}q_{13}^3, \\ Q_8 = q_{31}q_{11}^3 + q_{32}q_{12}^3 + q_{33}q_{13}^3,\ Q_9 = q_{21}q_{31}q_{11}^2 + q_{22}q_{32}q_{12}^2 + q_{23}q_{33}q_{13}^2. \end{gathered}$$

Во втором эксперименте тензор напряжений $\mathbf{T}_2 = -t\vec{k}^2\vec{k}^2$ и измеряемые компоненты тензора деформаций также выражаются через константы податливости и компоненты тензора $\mathbf{Q}$:

$$\begin{gathered} \bar{\bar{\varepsilon}}_{11} = -t[Q_4(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})) + C_{1122} + 2C_{1212}], \\ \bar{\bar{\varepsilon}}_{12} = -t[Q_{10}(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212}))], \\ \bar{\bar{\varepsilon}}_{22} = -t[Q_2(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})) + C_{1122}], \\ \bar{\bar{\varepsilon}}_{23} = -t[Q_{11}(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212}))], \\ \bar{\bar{\varepsilon}}_{33} = -t[Q_6(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})) + C_{1122}], \\ \bar{\bar{\varepsilon}}_{13} = -t[Q_{12}(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212}))], \end{gathered} \tag{8}$$

где обозначено

$$Q_2 = q_{21}^4 + q_{22}^4 + q_{23}^4,\ Q_6 = q_{31}^2 q_{21}^2 + q_{32}^2 q_{22}^2 + q_{33}^2 q_{23}^2,\ Q_{10} = q_{11} q_{21}^3 + q_{12} q_{22}^3 + q_{13} q_{23}^3,$$

$$Q_{11} = q_{31} q_{21}^3 + q_{32} q_{22}^3 + q_{33} q_{23}^3,\ Q_9 = q_{11} q_{31} q_{21}^2 + q_{12} q_{32} q_{22}^2 + q_{13} q_{33} q_{23}^2.$$

Для отыскания девяти компонент тензора $\mathbf{Q}$ используем шесть соотношений (6) и четыре независимых соотношения из (7), (8):

$$-t\left[Q_7\left(C_{1111} - \left(C_{1122} + 2C_{1212}\right)\right)\right] = \overline{\varepsilon}_{12}\,,$$

$$-t\left[Q_8\left(C_{1111} - \left(C_{1122} + 2C_{1212}\right)\right)\right] = \overline{\varepsilon}_{13}\,,$$

$$-t\left[Q_9\left(C_{1111} - \left(C_{1122} + 2C_{1212}\right)\right)\right] = \overline{\varepsilon}_{23}\,,$$

$$-t\left[Q_{10}\left(C_{1111} - \left(C_{1122} + 2C_{1212}\right)\right)\right] = \overline{\overline{\varepsilon}}_{12}\,.$$

Исключая из них множитель $\left(C_{1111} - \left(C_{1122} + 2C_{1212}\right)\right)$, получим три уравнения относительно компонент тензора $\mathbf{Q}$:

$$\begin{gathered}
q_{31} q_{11}^3 + q_{32} q_{12}^3 + q_{33} q_{13}^3 = \frac{\overline{\varepsilon}_{13}}{\overline{\varepsilon}_{12}}\left(q_{21} q_{11}^3 + q_{22} q_{12}^3 + q_{23} q_{13}^3\right), \\
q_{21} q_{31} q_{11}^2 + q_{22} q_{32} q_{12}^2 + q_{23} q_{33} q_{13}^2 = \frac{\overline{\varepsilon}_{23}}{\overline{\varepsilon}_{12}}\left(q_{21} q_{11}^3 + q_{22} q_{12}^3 + q_{23} q_{13}^3\right), \\
q_{11} q_{21}^3 + q_{12} q_{22}^3 + q_{13} q_{23}^3 = \frac{\overline{\overline{\varepsilon}}_{12}}{\overline{\varepsilon}_{12}}\left(q_{21} q_{11}^3 + q_{22} q_{12}^3 + q_{23} q_{13}^3\right).
\end{gathered} \tag{9}$$

Численное решение системы уравнений (6), (9) позволяет найти компоненты тензора $\mathbf{Q}$, то есть определить ориентацию канонической системы координат в кубическом материале относительно лабораторной системы координат по измеряемым в опытах деформациям.

Вычисления показали, что в случае кубических кристаллов канонические оси анизотропии совпадают с их кристаллографическими осями [100], [010] и [001] (обозначения из [1, 4]), а для композитных материалов или древесины их положение совпадает с преимущественными структурными направлениями.

Введем в рассмотрение тензорный базис, образованный диадами базисных векторов канонических осей симметрии кубического материала $\vec{a}_i$:

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}^1 = \vec{a}_1\vec{a}_1\,,\ \mathbf{A}^2 = \vec{a}_2\vec{a}_2\,,\ \mathbf{A}^3 = \vec{a}_3\vec{a}_3\,,\ \mathbf{A}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{a}_1\vec{a}_2 + \vec{a}_2\vec{a}_1\right), \\
\mathbf{A}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{a}_2\vec{a}_3 + \vec{a}_3\vec{a}_2\right),\ \mathbf{A}^6 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{a}_3\vec{a}_1 + \vec{a}_1\vec{a}_3\right).
\end{gathered} \tag{10}$$

Базис (10) нормируется соотношением: $\mathbf{A}^i : \mathbf{A}^j = \delta^{ij}$, где δ^{ij} – дельта Кронекера.

Наряду с базисом (10) рассмотрим тензорный базис А.А. Ильюшина $\mathbf{I}^\alpha$ $(\alpha = 0,1,\ldots,5)$ с базисными тензорами [11, 16, 17]:

$$\mathbf{I}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{a}_1\vec{a}_1 + \vec{a}_2\vec{a}_2 + \vec{a}_3\vec{a}_3\right),\ \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\vec{a}_3\vec{a}_3 - \vec{a}_1\vec{a}_1 - \vec{a}_2\vec{a}_2\right),\ \mathbf{I}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{a}_1\vec{a}_1 - \vec{a}_2\vec{a}_2\right),$$

$$\mathbf{I}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{a}_1\vec{a}_2 + \vec{a}_2\vec{a}_1\right),\ \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{a}_2\vec{a}_3 + \vec{a}_3\vec{a}_2\right),\ \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{a}_3\vec{a}_1 + \vec{a}_1\vec{a}_3\right). \tag{11}$$

Тензорный базис (11) также нормирован: $\mathbf{I}^{\alpha} : \mathbf{I}^{\beta} = \delta^{\alpha\beta}$.

Тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\vec{a}_i\vec{a}_j$ как симметричный тензор второго ранга можно разложить по базисам (10) и (11). Эти разложения имеют вид

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{11}\mathbf{A}^1 + \varepsilon_{22}\mathbf{A}^2 + \varepsilon_{33}\mathbf{A}^3 + \sqrt{2}\varepsilon_{12}\mathbf{A}^4 + \sqrt{2}\varepsilon_{23}\mathbf{A}^5 + \sqrt{2}\varepsilon_{31}\mathbf{A}^6 \tag{12}$$

и

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0\mathbf{I}^0 + \varepsilon_1\mathbf{I}^1 + \varepsilon_2\mathbf{I}^2 + \varepsilon_3\mathbf{I}^3 + \varepsilon_4\mathbf{I}^4 + \varepsilon_5\mathbf{I}^5, \tag{13}$$

где $\varepsilon_{\alpha} = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I}^{\alpha}$.

Между коэффициентами разложений (12) и (13) имеется связь:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}),\ \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}),\ \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}),$$

$$\varepsilon_3 = \sqrt{2}\varepsilon_{12},\ \varepsilon_4 = \sqrt{2}\varepsilon_{23},\ \varepsilon_5 = \sqrt{2}\varepsilon_{31}.$$

Обратная связь имеет вид

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_0 - \frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_2,\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_0 - \frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_2,\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_3,\ \varepsilon_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_4,\ \varepsilon_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_5.$$

По тензорам второго ранга (10) образуем тензоры четвертого и шестого рангов, обладающие внутренней симметрией (5):

$$\mathbf{A}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{\alpha}\mathbf{A}^{\beta} + \mathbf{A}^{\beta}\mathbf{A}^{\alpha}\right),$$

$$\mathbf{A}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{6}\left(\mathbf{A}^{\alpha}\mathbf{A}^{\beta}\mathbf{A}^{\gamma} + \mathbf{A}^{\beta}\mathbf{A}^{\alpha}\mathbf{A}^{\gamma} + \mathbf{A}^{\gamma}\mathbf{A}^{\alpha}\mathbf{A}^{\beta} + \mathbf{A}^{\alpha}\mathbf{A}^{\gamma}\mathbf{A}^{\beta} + \mathbf{A}^{\beta}\mathbf{A}^{\gamma}\mathbf{A}^{\alpha} + \mathbf{A}^{\gamma}\mathbf{A}^{\beta}\mathbf{A}^{\alpha}\right), \tag{14}$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, ..., 6$.

Из работ [1 – 4, 15, 16] известно разложение тензоров упругости $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ по базисам (14). Для кубического материала эти разложения имеют вид

$$\mathbf{N} = n_{11}\left(\mathbf{A}^{11} + \mathbf{A}^{22} + \mathbf{A}^{33}\right) + n_{12}\left(\mathbf{A}^{12} + \mathbf{A}^{23} + \mathbf{A}^{13}\right) + n_{44}\left(\mathbf{A}^{44} + \mathbf{A}^{55} + \mathbf{A}^{66}\right); \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L} = c_1&\left(\mathbf{A}^{111} + \mathbf{A}^{222} + \mathbf{A}^{333}\right) + c_2\left(\mathbf{A}^{155} + \mathbf{A}^{266} + \mathbf{A}^{344}\right) + \\ &+ c_3\left(\mathbf{A}^{112} + \mathbf{A}^{113} + \mathbf{A}^{122} + \mathbf{A}^{133} + \mathbf{A}^{223} + \mathbf{A}^{233}\right) + \\ &+ c_4\left(\mathbf{A}^{144} + \mathbf{A}^{166} + \mathbf{A}^{255} + \mathbf{A}^{244} + \mathbf{A}^{355} + \mathbf{A}^{366}\right) + c_5\mathbf{A}^{123} + c_6\mathbf{A}^{456},\end{aligned} \tag{16}$$

где n_{11}, n_{12}, n_{44} – ненулевые компоненты тензора упругости $\mathbf{N}$ – константы упругости второго порядка; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – константы упругости третьего порядка.

По тензорам (11) построим базисы, состоящие из тензоров четвертого $\left(\mathbf{I}^{\alpha\beta}\right)$ и шестого $\left(\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma}\right)$ рангов:

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}^{\alpha}\mathbf{I}^{\beta} + \mathbf{I}^{\beta}\mathbf{I}^{\alpha}\right), \tag{17}$$

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{6}\left(\mathbf{I}^{\alpha}\mathbf{I}^{\beta}\mathbf{I}^{\gamma} + \mathbf{I}^{\beta}\mathbf{I}^{\alpha}\mathbf{I}^{\gamma} + \mathbf{I}^{\gamma}\mathbf{I}^{\alpha}\mathbf{I}^{\beta} + \mathbf{I}^{\alpha}\mathbf{I}^{\gamma}\mathbf{I}^{\beta} + \mathbf{I}^{\beta}\mathbf{I}^{\gamma}\mathbf{I}^{\alpha} + \mathbf{I}^{\gamma}\mathbf{I}^{\beta}\mathbf{I}^{\alpha}\right), \tag{18}$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, ..., 5$.

Базисы (17) и (18) нормируются соотношениями:

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta} :: \mathbf{I}^{\gamma\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\varepsilon} + \delta^{\alpha\varepsilon}\delta^{\beta\gamma}\right),$$

$$\boldsymbol{I}^{\alpha\beta\gamma} ::: \boldsymbol{I}^{\delta\varepsilon\zeta} = \frac{1}{6}\left(\delta^{\alpha\zeta}\delta^{\beta\varepsilon}\delta^{\gamma\delta} + \delta^{\alpha\varepsilon}\delta^{\beta\zeta}\delta^{\gamma\delta} + \delta^{\alpha\delta}\delta^{\beta\zeta}\delta^{\gamma\varepsilon} + \delta^{\alpha\zeta}\delta^{\beta\delta}\delta^{\gamma\varepsilon} + \delta^{\alpha\delta}\delta^{\beta\varepsilon}\delta^{\gamma\zeta} + \delta^{\alpha\varepsilon}\delta^{\beta\delta}\delta^{\gamma\zeta}\right).$$

В работах [11, 17] получено разложение тензора упругости $\mathbf{N}$ по базису (5) в виде

$$\mathbf{N} = n^{(1)}\mathbf{I}^{00} + n^{(2)}\left(\mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22}\right) + n^{(3)}\left(\mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}\right). \tag{19}$$

Коэффициенты в представлении (19) связаны с константами упругости второго порядка (15) соотношениями

$$n^{(1)} = n_{11} + 2n_{12},\ n^{(2)} = n_{11} - n_{12},\ n^{(3)} = n_{44}.$$

Тензор констант упругости третьего порядка $\mathbf{L}$ может быть разложен по базису (18), однако в своем разложении он должен содержать только такие комбинации тензоров $\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma}$, которые являются инвариантными относительно группы ортогональных преобразований кубической сингонии. Методом прямой проверки установлено, что для кубического материала имеется шесть инвариантных комбинаций тензоров (18):

$$\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{I}^{000},\ \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022},\ \mathbf{B}^{(3)} = \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055}, \tag{20}$$

$$\mathbf{B}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\mathbf{I}^{111} - 3\mathbf{I}^{122}\right),\ \mathbf{B}^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155} - 2\mathbf{I}^{133}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{I}^{255} - \mathbf{I}^{244}\right),\ \mathbf{B}^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{I}^{345}.$$

Разложение тензора $\mathbf{L}$ по базису (20) имеет вид

$$\mathbf{L} = \sum_{s=1}^{s=6} b_s \mathbf{B}^{(s)}. \tag{21}$$

В выражении (21) коэффициенты b_s связаны с константами упругости третьего порядка кубического материала (16) соотношениями

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(c_1 + 6c_3 + 2c_5),\ b_2 = \sqrt{3}(c_1 - c_5),\ b_3 = 2\sqrt{3}(c_2 + 2c_4),$$

$$b_4 = c_1 - 3c_3 + 2c_5,\ b_5 = 6(c_4 - c_2),\ b_6 = 24c_6.$$

Разложения тензоров упругости (19) и (21) далее использованы для записи упругого потенциала для кубического материала и получения нелинейных определяющих соотношений.

2. Определяющие соотношения в собственных подпространствах кубического материала

Если в представлении для удельной потенциальной энергии деформаций (2) ограничиться только членом второго порядка, то соотношения (4) принимают вид обобщенного закона Гука:

$$\mathbf{T} = \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon} \,. \tag{22}$$

Учтем в соотношениях (22) представление (19) и получим

$$\mathbf{T} = n^{(1)}\mathbf{I}^{00} : \boldsymbol{\varepsilon} + n^{(2)}\left(\mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22}\right) : \boldsymbol{\varepsilon} + n^{(3)}\left(\mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}$$

или

$$\mathbf{T} = n^{(1)}\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} + n^{(2)}\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} + n^{(3)}\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} \,. \tag{23}$$

Из соотношений (19) и (23) следует, что тензорный базис (17) является собственным для кубического материала. Понятие о собственных тензорах и собственных состояниях введено в работах Рыхлевского, Ковина и Махрабади [19, 20]. Собственные тензоры для кубического материала получены в работах [11, 12, 16, 21].

Тензоры деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}$ являются собственными упругими состояниями кубического материала и принадлежат трем собственным подпространствам:

- одномерному (1D) – $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} = \varepsilon_0 \mathbf{I}^0$;

- двумерному (2D) – $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} = \varepsilon_1 \mathbf{I}^1 + \varepsilon_2 \mathbf{I}^2$; (24)

- трехмерному (3D) – $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} = \varepsilon_3 \mathbf{I}^3 + \varepsilon_4 \mathbf{I}^4 + \varepsilon_5 \mathbf{I}^5$.

Спроектируем тензор $\mathbf{T}$ в те же собственные подпространства:

$$\mathbf{T}_{(1)} = T_0 \mathbf{I}^0 \,, \quad \mathbf{T}_{(2)} = T_1 \mathbf{I}^1 + T_2 \mathbf{I}^2 \,, \quad \mathbf{T}_{(3)} = T_3 \mathbf{I}^3 + T_4 \mathbf{I}^4 + T_5 \mathbf{I}^5 \,, \tag{25}$$

где $T_\alpha = \mathbf{T} : \mathbf{I}^\alpha$.

В соответствии с (23) закон Гука можно записать в виде

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{T}_{(k)} = \sum_{k=1}^{3} n^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)} \,. \tag{26}$$

Из представления (26) следует, что в рамках линейной упругости тензоры напряжений $\mathbf{T}_{(\alpha)}$ и деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_{(\alpha)}$ в каждом собственном подпространстве соосны и пропорциональны.

Конкретизируем соотношения (4) для кубического материала. Для этого выясним свойства тензоров $\mathbf{B}^{(s)}$, входящих в разложение (21) тензора $\mathbf{L}$. Эти свойства проявляются при вычислении сверток тензоров $\mathbf{B}^{(s)}$ с собственными тензорами деформаций (24):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(\alpha)} : \mathbf{B}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(\beta)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(\beta)} : \mathbf{B}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(\alpha)} \,.$$

Из этих произведений ненулевыми являются следующие девять:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} : \mathbf{B}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} = 3J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}^2)\mathbf{I}^0 \,, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} : \mathbf{B}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} = \frac{1}{3\sqrt{3}} J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)})\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} \,,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} : \mathbf{B}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} = J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}^2)\mathbf{I}^0 \,, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} : \mathbf{B}^{(3)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} = \frac{1}{3\sqrt{3}} J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)})\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} \,,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} : \mathbf{B}^{(3)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} = J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}^2)\mathbf{I}^0 , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} : \mathbf{B}^{(4)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} = \mathbf{Q}_{(2)2} , \tag{27}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} : \mathbf{B}^{(5)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} = \frac{2}{3}\mathbf{P}_{(3)} , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} : \mathbf{B}^{(5)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} = \frac{2}{3}\mathbf{Q}_{(3)2} , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} : \mathbf{B}^{(6)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} = \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{(3)3} .$$

В соотношениях (27) обозначено $J_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A} : \mathbf{E}$ – первый инвариант тензора $\mathbf{A}$; $\mathbf{Q}_{(2)2}$ – проекция тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}^2$ во второе собственное подпространство:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2\right)\mathbf{I}^0 + \mathbf{Q}_{(2)2}, \quad \mathbf{Q}_{(2)2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2\right)\mathbf{I}^1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon_1\varepsilon_2\mathbf{I}^2 ; \tag{28}$$

$\mathbf{Q}_{(3)2}$ и $\mathbf{Q}_{(3)3}$ – проекции тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}^2$ во второе и третье собственные подпространства:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2\right)\mathbf{I}^0 + \mathbf{Q}_{(3)2} + \mathbf{Q}_{(3)3}, \\
\mathbf{Q}_{(3)2} = \frac{-1}{2\sqrt{6}}\left(2\varepsilon_3^2 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2\right)\mathbf{I}^1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\varepsilon_4^2 - \varepsilon_5^2\right)\mathbf{I}^2, \\
\mathbf{Q}_{(3)3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_4\varepsilon_5\mathbf{I}^3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_3\varepsilon_5\mathbf{I}^4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_3\varepsilon_4\mathbf{I}^5;
\end{gathered} \tag{29}$$

тензор

$$\mathbf{P}_{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_1\varepsilon_3\mathbf{I}^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_2\right)\varepsilon_4\mathbf{I}^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_2\right)\varepsilon_5\mathbf{I}^5 . \tag{30}$$

В данной модели выражение для удельной потенциальной энергии деформации имеет вид

$$\begin{gathered}
W = \frac{1}{2}\left(3n^{(1)}J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}) + n^{(2)}J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}) + n^{(3)}J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)})\right) + \\
+\frac{1}{6\sqrt{3}}J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)})\left(9b_1J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}) + b_2J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}) + b_3J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)})\right) + \\
+\frac{1}{6}J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)})\left(\sqrt{3}b_4 - 2b_5\right) + \frac{1}{36}J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)})\left(b_6 - 12b_5\right) + \frac{1}{3}b_5J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}),
\end{gathered} \tag{31}$$

где введены обозначения для второго и третьего инвариантов тензора второго ранга: $J_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A} : \mathbf{A}$, $J_3(\mathbf{A}) = \det\mathbf{A}$.

Запишем выражения для инвариантов тензоров, входящих в соотношения (27) и (31), через коэффициенты ε_α разложения (13). Инварианты тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}$ запишутся как

$$\begin{gathered}
J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_0 , \quad J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}) = \frac{1}{3}\varepsilon_0^2 , \quad J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\varepsilon_0^3 , \\
J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}) = 0 , \quad J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 , \quad J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}) = \frac{1}{3\sqrt{6}}\varepsilon_1\left(\varepsilon_1^2 - 3\varepsilon_2^2\right), \\
J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}) = 0 , \quad J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}) = \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 , \quad J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5 .
\end{gathered} \tag{32}$$

Инварианты тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}^2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}^2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}^2$:

$$J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}^2)=\frac{1}{3}\varepsilon_0^2,\quad J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}^2)=\frac{1}{3}\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right),\quad J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}^2)=\frac{1}{3}\left(\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_5^2\right). \tag{33}$$

Смешанный инвариант тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}$:

$$J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}+\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)})=\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}:\mathbf{Q}_{(3)2}+J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)})+J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)})=\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}:\mathbf{P}_{(3)}+J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)})+J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)})=$$

$$=\frac{\varepsilon_1}{3\sqrt{6}}\left(\varepsilon_1^2-3\varepsilon_2^2\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5+\frac{\varepsilon_1}{2\sqrt{6}}\left(\varepsilon_4^2+\varepsilon_5^2-2\varepsilon_3^2\right)+\frac{\varepsilon_2}{2\sqrt{2}}\left(\varepsilon_4^2-\varepsilon_5^2\right). \tag{34}$$

Присутствие смешанного инварианта (34) в выражении для удельной потенциальной энергии деформаций позволяет учитывать взаимное влияние процессов, происходящих в собственных подпространствах 2D и 3D. Отметим, что выражения для смешанного инварианта (34) упрощаются в случаях, когда деформации во втором или третьем собственном подпространствах отсутствуют, поскольку при этом $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}:\mathbf{Q}_{(3)2}=\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}:\mathbf{P}_{(3)}=0$. Отметим, что

если $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}=\mathbf{0}$, то

$$J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}+\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)})=J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)})=\frac{\varepsilon_1}{3\sqrt{6}}\left(\varepsilon_1^2-3\varepsilon_2^2\right);$$

если $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}=\mathbf{0}$, то

$$J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}+\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)})=J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)})=\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5.$$

Подставляя (19) и (21) в определяющие соотношения (4), получим следующую форму связи между напряжениями и деформациями:

$$\mathbf{T}_{(1)}=\left[\left(n^1+b_1\varepsilon_0\right)\varepsilon_0+\frac{1}{3}b_2\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)+\frac{1}{3}b_3\left(\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_5^2\right)\right]\mathbf{I}^0,$$

$$\mathbf{T}_{(2)}=\left(n^2+\frac{1}{3}b_2\varepsilon_0\right)\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}+b_4\mathbf{Q}_{(2)2}+2b_5\mathbf{Q}_{(3)2}, \tag{35}$$

$$\mathbf{T}_{(3)}=n^3\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}+\frac{2}{3}b_5\mathbf{P}_{(3)}+\frac{1}{3}b_6\mathbf{Q}_{(3)3}.$$

Соотношения (35) содержат деформации во второй степени и являются физически нелинейными соотношениями. В этом случае в неодномерных собственных подпространствах 2D и 3D тензоры напряжений и деформаций $\mathbf{T}_{(2)}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}$, $\mathbf{T}_{(3)}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}$ перестают быть соосными. Во втором подпространстве отклонение от соосности тензоров $\mathbf{T}_{(2)}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}$ связано как с появлением составляющей напряжений вдоль тензора $\mathbf{Q}_{(2)2}$, так и составляющей вдоль $\mathbf{Q}_{(3)2}$. В третьем подпространстве отклонение от соосности тензоров $\mathbf{T}_{(3)}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}$ связано с появлением составляющих напряжений вдоль тензоров $\mathbf{Q}_{(3)3}$ и $\mathbf{P}_{(3)}$, причем последний обращается в ноль, если $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}=\mathbf{0}$.

Анализ показывает, что полученные соотношения (35) не удовлетворяют обобщению частного постулата А.А. Ильюшина на анизотропные материалы, сформулированному в работах [11, 16, 17], и учитывают взаимное влияние процессов, происходящих в различных собственных подпространствах.

3. Анализ нелинейных эффектов, описываемых моделью

Соотношения (35) описывают связь между конечными деформациями кубического материала и напряжениями. Для анализа нелинейных эффектов, описываемых соотношениями (35), будем считать деформации малыми. В этом случае собственные состояния кубического материала $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)},\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)},\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}$ имеют простой физический смысл. Первое собственное состояние $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}$ является чисто объемным деформированием. Второе состояние $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}$ соответствует формоизменению, происходящему в главных осях анизотропии материала и связанному только с изменением длин материальных волокон. Третье собственное состояние $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}$ соответствует чистым сдвигам в координатных плоскостях.

Рассмотрим процесс деформирования, целиком расположенный в первом собственном подпространстве: $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}=\varepsilon_0\mathbf{I}^0$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}=\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}=\mathbf{0}$. В соответствии с (35) в ответ на такие деформации в кубических материалах появляются напряжения $\mathbf{T}_{(1)}=\left(n^1+b_1\varepsilon_0\right)\varepsilon_0\mathbf{I}^0$, которые являются гидростатическими, нелинейно зависящими от объемных деформаций ε_0. Касательные напряжения в главных осях анизотропии не появляются.

Пусть процесс деформирования целиком расположен во втором собственном подпространстве $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}=\varepsilon_1\mathbf{I}^1+\varepsilon_2\mathbf{I}^2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}=\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}=\mathbf{0}$. Такому процессу соответствует изменение длин волокон, расположенных вдоль главных осей анизотропии, без сдвигов. В это случае в соответствии с (35) возникающие напряжения имеют вид $\mathbf{T}=\mathbf{T}_{(1)}+\mathbf{T}_{(2)}$, причем

$$\mathbf{T}_{(1)}=\frac{1}{3}b_2\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)\mathbf{I}^0,\ \mathbf{T}_{(2)}=\left(n^2+\frac{1}{3}b_2\varepsilon_0\right)\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}+b_4\mathbf{Q}_{(2)2},$$

то есть соотношения описывают нелинейную зависимость напряжений от деформаций. В процессе формоизменения $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}$ появляются гидростатические напряжения. Как и в первом случае, касательные напряжения $\mathbf{T}_{(3)}$ в таком процессе не появляются.

Если процесс деформирования $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}=\varepsilon_3\mathbf{I}^3+\varepsilon_4\mathbf{I}^4+\varepsilon_5\mathbf{I}^5$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}=\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}=\mathbf{0}$ заключается в чистых сдвигах хотя бы в одной из плоскостей, содержащих канонические оси анизотропии, то в соответствии с (35) возникают напряжения $\mathbf{T}=\mathbf{T}_{(1)}+\mathbf{T}_{(2)}+\mathbf{T}_{(3)}$, причем

$$\mathbf{T}_{(1)}=\frac{1}{3}b_3\left(\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_5^2\right)\mathbf{I}^0,\ \ \mathbf{T}_{(2)}=2b_5\mathbf{Q}_{(3)2},\ \ \mathbf{T}_{(3)}=n^3\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}+\frac{1}{3}b_6\mathbf{Q}_{(3)3},$$

то есть соотношения (35) описывают нелинейную зависимость касательных напряжений $\mathbf{T}_{(3)}$ от сдвиговых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}$ и прогнозируют возникновение нормальных напряжений, в том числе и гидростатических.

Заключение

Для кубического материала получено разложение тензоров упругости четвертого и шестого рангов по тензорным базисам в собственных подпространствах. Из условия существования упругого потенциала (удельной потенциальной энергии деформации) получены соотношения между напряжениями и конечными деформациями, содержащие деформации во второй степени. Выписаны выражения для напряжений в каждом из собственных подпространств кубического материала.

Предложенный вариант соотношений позволяет учесть взаимное влияние процессов в различных собственных подпространствах кубического материала. Если в предложенных соотношениях обнулить константы упругости третьего порядка, то они будут сведены к линейным соотношениям закона Гука для кубического материала. При сохранении в выражениях упругих констант третьего порядка показана непропорциональность тензоров напряжений и деформаций в каждом из собственных подпространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сиротин Ю.И.*, *Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 639 с.
2. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
3. *Черных К.Ф.* Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 192 с.
4. *Newnham R.E.* Properties of Materials: Anisotropy, Symmetry, Structure. New York: Oxford University Press, 2005. 391 p.
5. *Xiao H.* A new representation theorem for elastic constitutive equations of cubic crystals // Journal of Elasticity. 1999. V. 53. P. 37–45. DOI: 10.1023/A:1007591025837.
6. *Paszkiewicz T.*, *Wolski S.* Elastic properties of cubic crystals: Every's versus Blackman's diagram // Journal of Physics: Conference Series. 2008. V. 104. 012038. DOI: 10.1088/1742-6596/104/1/012038.
7. *Knowles K.M.* The biaxial moduli of cubic materials subjected to an equi-biaxial elastic strain // Journal of Elasticity. 2016. V. 124. P. 1–25. DOI: 10.1007/s10659-015-9558-x.
8. *Knowles K.M.*, *Howie P.R.* The directional dependence of elastic stiffness and compliance shear coefficients and shear moduli in cubic materials // Journal of Elasticity. 2015. V. 120. P. 87–108. DOI: 10.1007/s10659-014-9506-1.
9. *Norris A.* Poisson's Ratio in Cubic Materials // Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2006. V. 462. No. 2075. P. 3385–3405. DOI: 10.1098/rspa.2006.1726.
10. *Duffy T.* Single-crystal elastic properties of minerals and related materials with cubic symmetry // American Mineralogist. 2018. V. 103. Iss. 6. P. 977–988. DOI: 10.2138/am-2018-6285.
11. *Соколова М.Ю.*, *Христич Д.В.* Программа экспериментов по определению типа начальной упругой анизотропии материала // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56. № 5. С. 205–213. DOI: 10.15372/PMTF20150519.
12. *Wright T.W.* Bootstrap elasticity III: minimal nonlinear constitutive representation for cubic materials // Journal of Elasticity. 2015. V. 120. No. 1. P. 109–119. DOI: 10.1007/s10659-014-9507-0.
13. *Claiton J.D.* Nonlinear Elastic and Inelastic Models for Shock Compression of Crystalline Solids. Springer, 2019. 452 p.
14. *Kambouchev N.*, *Fernandez J.*, *Radovitzky R.* A polyconvex model for materials with cubic symmetry // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. 2007. V. 15. No. 5. P. 451–468. DOI: 10.1088/0965-0393/15/5/006.

15. *Kube C.N.*, *Turner J.A.* Estimates of Nonlinear Elastic Constants and Acoustic Nonlinearity Parameters for Textured Polycrystals // Journal of Elasticity. 2016. V. 122. No. 2. P. 157–177. DOI: 10.1007/s10659-015-9538-1.
16. *Маркин А.А.*, *Соколова М.Ю.* Термомеханика упругопластического деформирования. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 320 с.
17. *Соколова М.Ю.*, *Христич Д.В.* О симметрии термоупругих свойств квазикристаллов // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78. Вып. 5. С. 728–734.
18. *Козлов В.В.*, *Маркин А.А.* Апробация определяющих соотношений нелинейной теории упругости при осевом сдвиге полого цилиндра // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 63. С. 102–114. DOI: 10.17223/19988621/63/9
19. *Рыхлевский Я.* О законе Гука // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 420–435.
20. *Mehrabadi M.M.*, *Cowin S.C.* Eigentensors of linear anisotropic elastic materials // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1991. V. 44. Iss. 2. P. 331. DOI: 10.1093/qjmam/44.2.331.
21. *Остросаблин Н.И.* Об уравнениях линейной теории упругости // Прикладная механика и техническая физика. 1992. Вып. 3. С. 131–140.

Статья поступила 29.02.2020

Sokolova M.Yu., Khristich D.V. (2021) FINITE STRAINS OF NONLINEAR ELASTIC ANISOTROPIC MATERIALS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 103–116

DOI 10.17223/19988621/70/9

Keywords: anisotropy, hyperelasticity, finite strains, cubic materials, tensor bases, invariants.

Anisotropic materials with the symmetry of elastic properties inherent in crystals of cubic syngony are considered. Cubic materials are close to isotropic ones by their mechanical properties. For a cubic material, the elasticity tensor written in an arbitrary (laboratory) coordinate system, in the general case, has 21 non-zero components that are not independent. An experimental method is proposed for determining such a coordinate system, called canonical, in which a tensor of elastic properties includes only three nonzero independent constants.

The nonlinear model of the mechanical behavior of cubic materials is developed, taking into account geometric and physical nonlinearities. The specific potential strain energy for a hyperelastic cubic material is written as a function of the tensor invariants, which are projections of the Cauchy-Green strain tensor into eigensubspaces of the cubic material.

Expansions of elasticity tensors of the fourth and sixth ranks in tensor bases in eigensubspaces are determined for the cubic material. Relations between stresses and finite strains containing the second degree of deformations are obtained. The expressions for the stress tensor reflect the mutual influence of the processes occurring in various eigensubspaces of the material under consideration.

Financial support. The reported study was partially funded by the grant from the President of the Russian Federation according to the research project MD-1803.2019.1 and by the grant from RFBR according to the research project No. 18-31-20053.

Marina Yu. SOKOLOVA (Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Dmitriy V. KHRISTICH (Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

REFERENCES

1. Sirotin Yu.I., Shaskol'skaya M.P. (1982) *Osnovy kristallofisiki* [Fundamentals of crystal physics]. Moscow: Mir.
2. Lekhnitskiy S.G. (1963) *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*. San Francisco: Holden Day.
3. Chernykh K.F. (1999) *An Introduction to Modern Anisotropic Elasticity*. Begell House.
4. Newnham R.E. (2005) *Properties of Materials*: *Anisotropy*, *Symmetry*, *Structure*. New York: Oxford University Press.
5. Xiao H. (1999) A new representation theorem for elastic constitutive equations of cubic crystals. *Journal of Elasticity*. 53. pp. 37–45. DOI: 10.1023/A:1007591025837.
6. Paszkiewicz T., Wolski S. (2008) Elastic properties of cubic crystals: Every's versus Blackman's diagram. *Journal of Physics*: *Conference Series*. 104. Article 012038. DOI: 10.1088/1742-6596/104/1/012038.
7. Knowles K.M. (2016) The biaxial moduli of cubic materials subjected to an equi-biaxial elastic strain. *Journal of Elasticity*. 124. pp. 1–25. DOI: 10.1007/s10659-015-9558-x.
8. Knowles K.M., Howie P.R. (2015) The directional dependence of elastic stiffness and compliance shear coefficients and shear moduli in cubic materials. *Journal of Elasticity*. 120. pp. 87–108. DOI: 10.1007/s10659-014-9506-1.
9. Norris A. (2006) Poisson's Ratio in Cubic Materials. *Proceedings*: *Mathematical*, *Physical and Engineering Sciences*. 462(2075). pp. 3385–3405. DOI: 10.1098/rspa.2006.1726.
10. Duffy T. (2018) Single-crystal elastic properties of minerals and related materials with cubic symmetry. *American Mineralogist*. 103(6). pp. 977–988. DOI: 10.2138/am-2018-6285.
11. Sokolova M.Yu., Khristich D.V. (2015) Program of experiments to determine the type of initial elastic anisotropy of material. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 56(5). pp. 913–919. DOI: 10.1134/S0021894415050193.
12. Wright T.W. (2015) Bootstrap elasticity III: minimal nonlinear constitutive representation for cubic materials. *Journal of Elasticity*. 120(1). pp. 109–119. DOI: 10.1007/s10659-014-9507-0.
13. Claiton J.D. (2019) *Nonlinear Elastic and Inelastic Models for Shock Compression of Crystalline Solids*. Springer.
14. Kambouchev N., Fernandez J., Radovitzky R. (2007) A polyconvex model for materials with cubic symmetry. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. 15(5). pp. 451–468. DOI: 10.1088/0965-0393/15/5/006.
15. Kube C.N., Turner J.A. (2016) Estimates of nonlinear elastic constants and acoustic nonlinearity parameters for textured polycrystals. *Journal of Elasticity*. 122(2). pp. 157–177. DOI: 10.1007/s10659-015-9538-1.
16. Markin A.A., Sokolova M.Yu. (2015) *Thermomechanics of elastoplastic deformation*. Cambridge: Cambridge International Science Publishing.
17. Sokolova M.Yu., Khristich D.V. (2014) The symmetry of the thermoelastic properties of quasicrystals. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 78(5). pp. 524–528. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2015.03.012.
18. Kozlov V.V., Markin A.A. (2020) Aprobatsiya opredelyayushchikh sootnosheniy nelineynoy teorii uprugosti pri osevom sdvige pologo tsilindra [Testing of defining relations of nonlinear theory of elasticity in an axial strain of a hollow cylinder]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo univrsiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State university Journal of Mathematics and Mechanics*. 63. pp. 102–114. DOI: 10.17223/19988621/63/9.
19. Rychlewski J. (1984) On Hooke's law. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 48(3). pp. 303–314. DOI: 10.1016/0021-8928(84)90137-0.
20. Mehrabadi M.M., Cowin S.C. (1991) Eigentensors of linear anisotropic elastic materials. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 44(2). p. 331. DOI: 10.1093/qjmam/44.2.331.
21. Ostrosablin N.I. (1992) Equations of the linear theory of elasticity. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 33(3). pp. 438–446. DOI: 10.1007/BF00851743.

Received: February 29, 2020

УДК 532.58
DOI 10.17223/19988621/70/10

О.Н. Филимонова, А.А. Воробьев, А.С. Викулин

ОЦЕНКА НЕОДНОРОДНОСТИ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА В АДСОРБЕРАХ БЛОКОВ КОМПЛЕКСНОЙ ОЧИСТКИ ВОЗДУХОРАЗДЕЛИТЕЛЬНЫХ УСТАНОВОК

На основе погранслойного приближения феноменологического уравнения Дарси – Бринкмана – Форчхеймера движения компримированного атмосферного воздуха через вертикальный цилиндрический адсорбер с неподвижным зернистым слоем адсорбента предложена математическая модель оценки неоднородности гидродинамического поля в радиальном и аксиальном направлениях. Получены аналитические решения модельных уравнений. Показана эффективность такого подхода для оценки гидродинамической обстановки в серийно выпускаемом адсорбционном блоке комплексной очистки воздухоразделительных установок, работающих по термодинамическому циклу высокого давления.

Ключевые слова: *зернистый слой адсорбента, неоднородность поля скоростей, порозность, проницаемость, атмосферный воздух.*

Разделение атмосферного воздуха в воздухоразделительных установках (ВРУ) по термодинамическому циклу высокого давления требует предварительной его очистки от влаги, диоксида углерода и углеводородов в адсорберах с неподвижным слоем гранулированного адсорбента [1, 2]. Для минимизации проскоковых концентраций примесей необходимы оценки геометрических характеристик адсорберов и идентификация рациональных диапазонов их эксплуатационных характеристик [3]. Это позволит нивелировать взрывопожароопасность и увеличить длительность межотогревного периода [4].

Как показывает анализ, проведенный в [5], допущение о гидродинамическом режиме идеального вытеснения воздушного потока через пористую матрицу неподвижного слоя гранулированного адсорбента в адсорбере может привести к искажению прогнозируемых локальных сепарационных характеристик. Правомочность такого упрощения должна решаться в каждом конкретном случае на основе классической смешенной гидродинамики неподвижных зернистых сред [6].

В последнее время наметилась тенденция расширения сегмента применения мобильных криогенных ВРУ двойного назначения АКДС–70М2, ТКДС–100В и других [7], а также разработки новых образцов [8, 9]. В связи с этим целью данного исследования является разработка инструментария для оценки гидродинамической обстановки существующих и вновь проектируемых адсорберов блоков комплексной очистки (БКО).

Математическая модель

Рассуждения проведены на примере серийно выпускаемого адсорбционного БКО типа ЦБ-400/200, имеющего следующие характеристики [10]: объем воздуха, перерабатываемого за один час при нормальных условиях, 2400 м^3/ч; рабочее давление 20 МПа; адсорбент – гранулированный цеолит NaX с характерным диаметром $d_p = 5$мм; диаметр и высота цилиндрического зернистого слоя $2r_0 = 377$ мм и $h = 1900$ мм соответственно.

После компримирования атмосферный воздух перед подачей в БКО охлаждается приблизительно до 15 °С и при таких термодинамических условиях его плотность и динамическая вязкость будут $\rho_g = 242.3$ кг/м^3 и $\mu_g = 2.38\cdot10^{-5}$ Па·с [11]), то число Рейнольдса в пористой матрице гранулированного адсорбента, если принять, что порозность зернистого слоя $\varepsilon = 0.4$, коэффициент формы для цилиндрических частиц $k_V \approx 0.69$, максимальная скорость фильтрации $v_0 = 0.08$ м/с, составит [12]

$$\mathrm{Re} = \frac{2k_V}{3(1-\varepsilon)}\frac{v_0 d_p \rho_g}{\mu_g} = 1447.$$

Отсюда следует наличие турбулентного режима движения газовой смеси в адсорбере ($\mathrm{Re} > 50$), что обосновывает применение феноменологической модели гидродинамики в пористой среде [13]:

$$\nabla\cdot\overline{v} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\rho_g}{\varepsilon}\left[\frac{\partial\overline{v}}{\partial\tau} + (\overline{v}\cdot\nabla)\overline{v}\right] = -\nabla p + \frac{\mu_g}{\varepsilon}\nabla^2\overline{v} - \left(\mu_g\frac{\overline{v}}{K} + \rho_g\frac{f\overline{v}|\overline{v}|}{\sqrt{K}}\right), \tag{2}$$

где τ – время; $\overline{v}$ – вектор скорости газовой среды в зернистом слое; p – давление; K – проницаемость пористой матрицы; f – фактор Форчхеймера. В приближении пограничного слоя [14] система (1), (2) представлена в компонентном виде в цилиндрической осесимметричной системе координат orz (начало координат расположено в центре входного сечения потока; r, z – радиальная и аксиальная координаты):

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) = 0;$$

$$\frac{\rho_g}{\varepsilon}\frac{\partial v_z}{\partial\tau} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu_g}{\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right] - \frac{\mu_g}{K}v_z - \frac{\rho_g f}{\sqrt{K}}v_z^2, \tag{3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0,$$

где v_z, v_r – аксиальная и радиальная скорости несущей среды. Представленная система дополняется условием на входе

$$v_z(r,0) = v_0 = \mathrm{const}, \tag{4}$$

а также граничными условиями «прилипания»

$$v_z(r_0,z) = 0 \tag{5}$$

и непротекания через ось симметрии

$$\frac{\partial v_z(0,z)}{\partial r} = 0 \tag{6}$$

(полагается, что расход среды в любом поперечном сечении трубы постоянен). Система (3) – (6) в безразмерном виде записана следующим образом:

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = -\varepsilon\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial V}{\partial R}\right)\right] - \left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{DaRe}}V + \frac{f\varepsilon}{\sqrt{\mathrm{Da}}}V^2\right); \tag{7}$$

$$V(R,0) = 1; \tag{8}$$

$$V(1,Z)=\frac{\partial V(0,\mathrm{Z})}{\partial R}=0, \tag{9}$$

где $Z = z/r_0$; $R = r/r_0$; $V = v_z/v_0$; $P = p/(\rho_g v_0^2)$; $\mathrm{Re} = v_0 r_0 \rho_g/\mu_g$ – число Рейнольдса; $\mathrm{Da} = K/r_0^2$ – число Дарси.

Радиальная неоднородность

Вдали от входа в пористую трубу ($Z \to \infty$; $\partial P/\partial Z = \mathrm{const}$) (7) примет вид

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{dV}{dR}\right)-\frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}V-f\frac{\varepsilon\,\mathrm{Re}}{\sqrt{\mathrm{Da}}}V^2+C\,\mathrm{Re}=0, \tag{10}$$

где $C=-\varepsilon\dfrac{\partial P}{\partial Z}$. Выбор линейно-независимых функций, принадлежащих к полной последовательности [15], для аппроксимирующей функции в методе коллокаций [16] осуществлен из предположения, что в первом приближении инерционными эффектами можно пренебречь [17], то есть положить $f \equiv 0$. Тогда, из (10) следует уравнение Дарси – Бринкмана

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{dV}{dR}\right)-\frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}V+C\,\mathrm{Re}=0, \tag{11}$$

решение которого при граничных условиях (9) получено с помощью конечного интегрального преобразования Ханкеля [18]:

$$H_R[V(R)]=V_H(p)=\int_0^1 RJ_0(pR)V(R)dR,$$

тогда изображение (11) с учетом (9) будет

$$V_H(p)=C\,\mathrm{Re}\frac{J_1(p)}{p(p^2+\varepsilon\mathrm{Da}^{-1})},$$

а возвращаясь к оригиналу, получим

$$V(R)=H_R^{-1}[V_H(p)]=2C\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(p_nR)}{p_nJ_1(p_n)(p_n^2+\varepsilon\mathrm{Da}^{-1})}, \tag{12}$$

где p_n – корни уравнения $J_0(p) = 0$. Если в (12) ограничиться первыми двумя членами ряда, то структура приближенного решения (10) может быть представлена в виде

$$\tilde{V}(R)=2C\,\mathrm{Re}\,\gamma\sum_{k=1}^{2}\frac{J_0(p_kR)}{p_kJ_1(p_k)(p_k^2+\varepsilon\mathrm{Da}^{-1})}\alpha_k, \tag{13}$$

где γ – нормировочный множитель; α_k – неизвестные параметры, подлежащие определению.

Подстановка (13) в (10) приводит к выражению

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{p_kJ_0''(p_kR)+J_0'(p_kR)R^{-1}-\varepsilon\left(p_k\mathrm{Da}\right)^{-1}J_0(p_kR)}{J_1(p_k)(p_k^2+\varepsilon\mathrm{Da}^{-1})}\alpha_k-$$

$$-\frac{2fC\left(\varepsilon\,\mathrm{Re}\right)^2}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{J_0(p_kR)}{p_kJ_1(p_k)(p_k^2+\varepsilon\mathrm{Da}^{-1})}\alpha_k\right]^2+\frac{1}{2\varepsilon}=0. \tag{14}$$

Согласно формуле Козени – Кармана [13],

$$K = \frac{\varepsilon^3 d_p^2}{150(1-\varepsilon)} = 1.8 \cdot 10^{-8}\ \text{м}^2,$$

тогда $\mathrm{Da} = K/r_0^2 = 5.06 \cdot 10^{-7}$, и поэтому из (14) в силу того, что $\mathrm{Da} \to \infty$, следует

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{J_0(p_k R)}{p_k J_1(p_k)(p_k^2 + \varepsilon \mathrm{Da}^{-1})} \alpha_k = -\frac{1}{2fC\varepsilon \mathrm{Re}^2 \sqrt{\mathrm{Da}}}. \qquad (15)$$

Коллокации в точках $R = 0$ и $R = R^*$ $(0 < R^* \le 1)$ позволили из (15) найти

$$\alpha_1 = (2fC\varepsilon \mathrm{Re}^2 \sqrt{\mathrm{Da}})^{-1} \frac{J_0(p_2 R^*) - 1}{J_0(p_2 R^*) - J_0(p_1 R^*)} p_1 J_1(p_1)(p_1^2 + \varepsilon Da^{-1}),$$

$$\alpha_2 = (2fC\varepsilon \mathrm{Re}^2 \sqrt{\mathrm{Da}})^{-1} \frac{1 - J_0(p_1 R^*)}{J_0(p_2 R^*) - J_0(p_1 R^*)} p_2 J_1(p_2)(p_2^2 + \varepsilon Da^{-1}),$$

и соответственно можно записать профиль скорости (13) в окончательном виде

$$\tilde{V}(R) = \frac{[J_0(p_2 R^*) - 1] J_0(p_1 R) + [1 - J_0(p_1 R^*)] J_0(p_2 R^*)}{J_0(p_2 R^*) - J_0(p_1 R^*)}, \qquad (16)$$

причем $\gamma = \varepsilon f \mathrm{Re}\sqrt{\mathrm{Da}}$, $f = 0.0117 d_p(1 - \varepsilon) = 9.75 \cdot 10^{-5}$м [13].

Расчеты с учетом балансового соотношения

$$2\int_0^1 R\tilde{V}(R)dR = 1,$$

и сравнительный анализ (рис. 1) с экспериментальными (для которых $2r_0/d_p >> 10$) показали, что гидродинамический режим в адсорбере близок к режиму идеального вытеснения за исключением узкой приграничной области, примыкающей к внутренней стенке корпуса.

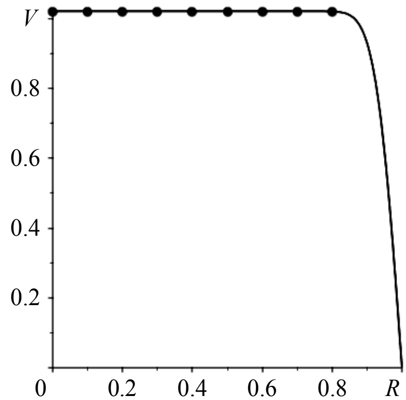


Рис. 1. Профиль безразмерной скорости установившегося режима течения в зернистом слое адсорбента: ● – расчет по формуле (16); ▬ – данные из [19]

Fig. 1. Dimensionless velocity profile for a steady-state flow in a granular adsorbent layer: ● – calculation by formula (16); ▬ – data from [19]

Если в расчетах (формула (14)) положить $f \equiv 0$, то профиль скорости практически не изменяется, что дает возможность использовать для анализа аксиальной неоднородности приближение Дарси – Бринкмана [20].

Аксиальная неоднородность

Осреднение уравнения (7) по поперечному сечению при $f \equiv 0$ позволило получить соотношение для аксиального безразмерного градиента давления

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{2}{\varepsilon \cdot \mathrm{Re}} \frac{\partial V(Z,1)}{\partial R} + \frac{1}{\mathrm{ReDa}},$$

которое использовано при нахождении изображения (7) по одностороннему интегральному преобразованию Лапласа относительно переменной Z

$$\frac{d^2 V_L(s,R)}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{dV_L(s,R)}{dR} - \left(\mathrm{Re}\cdot s + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}\right) V_L(s,R) = 2\frac{\partial V_L(s,1)}{\partial R} - \left(\mathrm{Re} + \frac{\varepsilon}{s \cdot \mathrm{Da}}\right), \quad (17)$$

где $V_L(s,R)$ – изображение $V(Z,R)$. Общее решение (17)

$$V_L(s,R) = C_1 I_0\left(R\sqrt{\mathrm{Re}\cdot s + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}}\right) + C_2 K_0\left(\sqrt{\mathrm{Re}\cdot s + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}}\right) +$$

$$+\left[-2\frac{\partial V_L(s,1)}{\partial R} + \left(\mathrm{Re} + \frac{\varepsilon}{s\cdot \mathrm{Da}}\right)\right] \Bigg/ \left(\mathrm{Re}\cdot s + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}\right),$$

где I_0, K_0 – модифицированные функции Бесселя первого и второго родов, причем константы интегрирования C_1 и C_2 найдены с помощью граничных условий (9)

$$C_1 = \left[2\frac{\partial V_L(s,1)}{\partial R} - \left(\mathrm{Re} + \frac{\varepsilon}{s\cdot \mathrm{Da}}\right)\right] \Bigg/ \left[\left(\mathrm{Re}\cdot s + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}\right) I_0\left(\sqrt{\mathrm{Re}\cdot s + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}}\right)\right], \quad C_2 = 0;$$

в итоге

$$V_L(s,Z) = \frac{\left[I_0\left(\sqrt{\mathrm{Re}\cdot s + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}}\right) - I_0\left(R\sqrt{\mathrm{Re}\cdot s + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}}\right)\right]}{\left\{s\left[I_0\left(\sqrt{\mathrm{Re}\cdot s + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}}\right) - 2I_1\left(\sqrt{\mathrm{Re}\cdot s + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}}\right) \Big/ \sqrt{\mathrm{Re}\cdot s + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}}\right]\right\}}. \quad (18)$$

Вследствие того, что числитель и знаменатель (18) являются бесконечными полиномами относительно целых степеней s, причем порядок полинома знаменателя больше, чем порядок полинома числителя, поэтому оригинал изображения (18) получен с использованием второй теоремы разложения:

$$V(s,Z) = \frac{I_0\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}}\right) - I_0\left(R\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}}\right)}{I_0\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}}\right) - 2I_1\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}}\right) \Big/ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}}} -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[J_0(\mu_n) - J_0(\mu_n R)]\exp\left[-\left(\mu_n^2 + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}\right)\frac{Z}{\mathrm{Re}}\right]}{\left(\mu_n^2 + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}\right)\left[\frac{1}{2\mu_n} J_1(\mu_n) - \frac{1}{\mu_n^2} J_2(\mu_n)\right]}, \quad (19)$$

где μ_n – корни уравнения $J_0(\mu) = 2J_1(\mu)/\mu$.

Структура поля скоростей в области, примыкающей к входному сечению, определяет число Дарси (рис. 2): чем больше число Дарси, тем влияние гидродинамического начального участка более значимо.

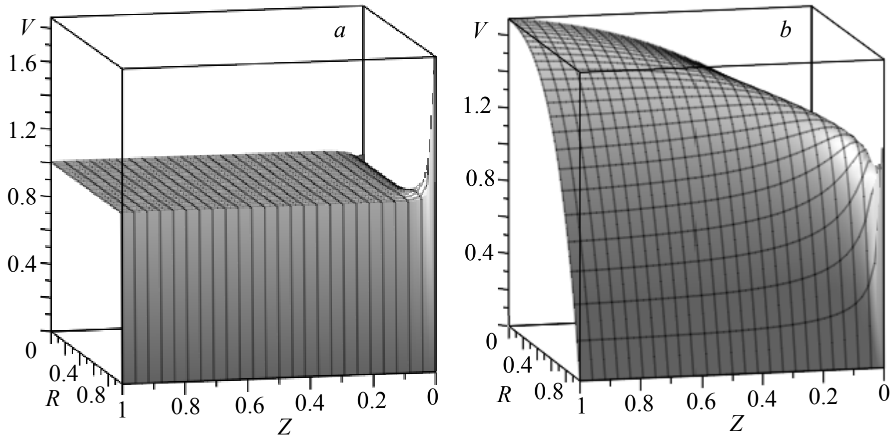


Рис. 2. Поле относительной скорости во входной области цилиндрического пористого канала при Re = 1447 и различных числах Дарси: *a* – $5.06{\cdot}10^{-7}$; *b* – $5.06{\cdot}10^{-3}$
Fig. 2. A relative velocity field at the inlet of a cylindrical porous channel at Re = 1447 and various Darcy numbers: (*a*) $5.06{\cdot}10^{-7}$ and (*b*) $5.06{\cdot}10^{-3}$

Сравнение осевой скорости $V(Z,0)$ с экспериментальными результатами (рис. 3) подтверждает адекватность изложенного подхода.

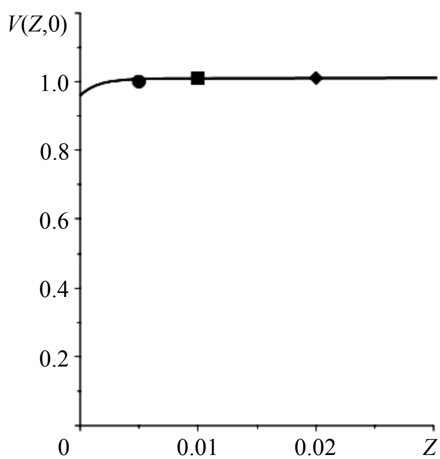


Рис. 3. Экспериментальные результаты измерения длины гидродинамического начального участка (● – [21]; ■ – [22]; ♦ – [23]) и расчетный профиль осевой скорости (сплошная кривая)
Fig. 3. Experimental results of measuring the length of a hydrodynamic initial section (● – [21]; ■ – [22]; ♦ – [23]) and the calculated axial velocity profile (the solid curve)

Расхождение опытных данных о длине гидродинамического начального участка в неподвижном зернистом слое адсорбента объясняется недостаточным объемом исследований влияния $2r_0/d_p$ и v_0 на ее величину [24].

Заключение

Классическое уравнение Дарси – Бринкмана – Форчхеймера позволило построить математическую модель, которая может являться инструментом для оценки неоднородности поля скоростей в радиальном и аксиальном направлениях в цилиндрическом изотропном пористом канале, имитирующем адсорбер блока комплексной очистки воздухоразделительных установок. Эффективность такого подхода продемонстрирована на примере идентификации поля скоростей атмосферного воздуха в блоке комплексной очистки типа ЦБ-400/200.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Singla P.*, *Chowdhury K.* Comparisons of thermodynamic and economic performances of cryogenic air separation plants designed for external and internal compression of oxygen // Applied Thermal Engineering. 2019. V. 160. Article 114025. DOI: 10.17632/r3875vhrjs.2.
2. *Brigagão G.V.*, *de Medeiros J.L.*, *Araújo O.Q.* A novel cryogenic vapor-recompression air separation unit integrated to oxyfuel combined-cycle gas-to-wire plant with carbon dioxide enhanced oil recovery // Energy Conversion and Management. 2019. V. 189. P. 202–214. DOI: 10.1016/j.enconman.2019.03.088.
3. *Suzuki M.* Adsorption Engineering. Tokya: Kodansha Ltg., 1990. 278 p.
4. *Nolan D.P.* Handbook of fire and explosion protection engineering principles for oil, gas, chemical and related facilities. NY: William Andrew, 2014. 487 p.
5. *Toth J.* Adsorption: Theory, Modeling, and Analysis. NY: Marcel Dekker, Inc., 2001. 880 p.
6. *Nield D.A.*, *Bejan A.* Convection in Porous Media. NY: Springer, 2006. 654 p.
7. *Корнилов И.В.*, *Петров Ю.Е.*, *Сагадатов И.И.*, *Тагиров И.Х.*, *Япрынцев П.О.* Автотехническое и электрогазовое обеспечение авиационных частей. Уфа: УГАТУ, 2016. 130 с.
8. *Бумагин Г.И.*, *Рогальский Е.И.*, *Попов Л.В.* Автомобильная многоцелевая воздухоразделительная установка АКДС-100 нового поколения // Технические газы. 2008. № 1. С. 48–51.
9. *Тарасова Е.Ю.* Новые решения, высокая эффективность: опыт создания ВРУ $К_ДА_ДА_Р$-18/14 // Технические газы. 2011. № 6. С. 2–8.
10. *Архаров А.М.* и др. Криогенные системы. Т.2. Основы проектирования аппаратов, установок и систем. М.: Машиностроение, 1999. 720 с.
11. *Варгафтик Н.Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 721 с.
12. *Lai T.*, *Liu X.*, *Xue S.*, *Xu J.*, *He M.*, *Zhang Y.* Extension of Ergun equation for the calculation of the flow resistance in porous media with higher porosity andopen-celled structure // *Applied Thermal Engineering*. 2020. V. 173. Article 115262. DOI: 10.1016/j.applthermaleng. 2020.115262.
13. *Alazmi B.*, *Vafai K.* Analysis of variable porosity, thermal dispersion, and local thermal nonequilibrium on free surface flows through porous media // Journal of Heat Transfer. 2004. V. 126(3). P. 389–399. DOI: 10.1115/1.1723470.
14. *Ряжских В.И.*, *Коновалов Д.А.*, *Слюсарев М.И.*, *Дроздов И.Г.* Анализ математической модели теплосъема с плоской поверхностью ламинарно движущимся хладагентом через сопряженную пористую среду // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2016. Т. 2. № 3. С. 68–81.
15. *Bühber T.*, *Salamon D.A.* Functional analysis. NY: American Mathematical Society, 2018. 482 p.
16. *Коннор Дж.*, *Бреббиа К.* Метод конечных элементов в механике жидкости. Л.: Судостроение, 1979. 264 с.

17. *Izadpanah M.R.*, *Müller-Steinhagen H.*, *Jamialahmadi M.* Experimental and theoretical studies of convective heat transfer in a cylindrical porous medium // International Journal of Heat and Fluid Flow. 1998. V. 19. P. 629-635. DOI: 10.1016/S0142-727X(98)10035-8 22.
18. *Снеддон И.Н.* Преобразование Фурье. М.: ИЛ, 1955. 667 с.
19. *Дидушинский Я.* Основы проектирования каталитических реакторов. М.: Химия, 1972. 376 с.
20. *Hsu C.T.*, *Cheng P.* Thermal dispersion in porous medium // Int. J. Heat Mass Transfer. 1990. V. 33. Iss. 8. P. 1587–1597. DOI: 10.1016/0017-9310(90)90015-M.
21. *Ziolkowska L.*, *Badowska I.*, *Flejter B.*, *Mieskowski Z.* Wplyw wysokosci warstwy zloza na profil predkosci w rurze z wypelnieniem ziarnistym // Inzynieria chemiczna i procesowa. 1980. V. 1. No. 2. P. 393–405.
22. *Newell R.*, *Standish N.* Velocity distribution in rectangular pached beds and non-ferrous blast furnaces // Metallurgical Transactions. 1973. V. 4. No. 8. P. 1851–1857.
23. *Schwartz C.E.*, *Smith J.M.* Flow distribution in packed beds // Ind. and Eng. Chem. 1953. V. 45. No. 6. P. 1209–1218.
24. *Пушнов А.*, *Балтренас П.*, *Каган А.*, *Загорскис А.* Аэродинамика воздухоочистных устройств с зернистым слоем. Вильнюс: Техника, 2010. 348 с.

Статья поступила 30.06.2020

Filimonova O.N., Vorobyov A.A., Vikulin A.S. (2021) ESTIMATION OF HETEROGENEITY OF THE ATMOSPHERIC AIR VELOCITY FIELD IN ADSORBERS OF FRONT-END PURIFICATION UNITS FOR AIR SEPARATION PLANTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 117–126

DOI 10.17223/19988621/70/10

Keywords: granular adsorbent layer, velocity field heterogeneity, porosity, permeability, atmospheric air.

Assuming unidirectional motion of compressed atmospheric air through a vertical cylindrical adsorbent with a fixed granular layer of the front-end purification unit adsorbent, the mathematical model for estimating the heterogeneity of a hydrodynamic velocity field in the radial and axial directions in a turbulent regime is proposed. The model is based on the boundary layer approximation of the Darcy – Brinkman – Forchheimer phenomenological equation. The steady-state flow at low permeability of the granular layer is identified using the collocation method, and the approximate analytical solution is obtained which justifies the applicability of an ideal displacement mode when describing the carrier medium motion. Numerical integration of a boundary value problem of the model equation using the finite-difference method with Richardson extrapolation confirms the conclusion validity. The structure of an accelerated turbulent flow having constant flow velocity in the input section shows that for small Forchheimer coefficients, the Darcy – Brinkman equation is used to obtain the analytical ratio for calculating the length of the initial hydrodynamic section. The proposed mathematical model for estimating the heterogeneity of the velocity field in adsorbers with a stationary dispersed layer is applicable for a laminar flow regime. Testing of this approach by assessing velocity field uniformity for a mass-produced front-end purification unit of air separation plants has shown its efficiency.

Olga N. FILIMONOVA (Doctor of Technical Sciences, Military Educational and Scientific Center of the Air Force «N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin Air Force Academy», Voronezh, Russian Federation). E-mail: olga270757@rambler.ru

Aleksandr A. VOROBYOV (Candidate of Technical Sciences, Military Educational and Scientific Center of the Air Force «N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin Air Force Academy», Voronezh, Russian Federation). E-mail: aleksandr.vorobev.2012@bk.ru

Andrey S. VIKULIN (Military Educational and Scientific Center of the Air Force «N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin Air Force Academy», Voronezh, Russian Federation). E-mail: mmiler5472@yandex.ru

REFERENCES

1. Singla P., Chowdhury K. (2019) Comparisons of thermodynamic and economic performances of cryogenic air separation plants designed for external and internal compression of oxygen. *Applied Thermal Engineering*. 160. Article 114025. DOI: 10.17632/r3875vhrjs.2.
2. Brigagão G.V., de Medeiros J.L., Araújo O.Q. (2019) A novel cryogenic vapor-recompression air separation unit integrated to oxyfuel combined-cycle gas-to-wire plant with carbon dioxide enhanced oil recovery. *Energy Conversion and Management*. 189. pp. 202–214. DOI: 10.1016/j.enconman.2019.03.088.
3. Suzuki M. (1990) *Adsorption Engineering*. Tokyo: Kodansha Ltg.
4. Nolan D.P. (2014) *Handbook of Fire and Explosion Protection Engineering Principles for Oil*, *Gas*, *Chemical and Related Facilities*. New York: William Andrew.
5. Toth J. (2001) *Adsorption*: *Theory*, *Modeling*, *and Analysis*. New York: Marcel Dekker.
6. Nield D.A., Bejan A. (2006) *Convection in Porous Media*. New York: Springer.
7. Kornilov I.V., Petrov Yu.E., Sagadatov I.I., Tagirov I.Kh., Yapryntsev P.O. (2016) *Avtotekhnicheskoe i elektrogazovoe obespechenie aviatsionnykh chastey* [Automotive and gas supply for aviation units]. Ufa: Ufa State Aviation Technical University.
8. Bumagin G.I., Rogal'sky E.I., Popov L.V. (2008) Avtomobil'naya mnogotselevaya vozdukhorazdelitel'naya ustanovka AKDS-100 novogo pokoleniya [Automobile new-generation multi-purpose air separation unit AKDS-100]. *Tekhnicheskie gazy – Technical Gases*. 1. pp. 48–51. DOI: 10.18198 / j.ind.gases.2008.0350.
9. Tarasova E.Yu. (2011) Novye resheniya, vysokaya effektivnost': opyt sozdaniya VRU $K_DA_DA_P$-18/14 [New solutions, high efficiency: the experience of creating the ASU $K_DA_DA_P$-18/14]. *Tekhnicheskie gazy – Technical Gases*. 6. pp. 2–8. DOI: 10.18198/ j.ind.gases.2011.0580.
10. Arkharov A.M. et al. (1999) *Kriogennye sistemy. Tom 2. Osnovy proektirovaniya apparatov*, *ustanovok i sistem* [Cryogenic systems. Volume 2. Fundamentals of the design of apparatuses, plants, and systems]. Moscow: Mashinostroenie.
11. Vargaftik N.B. (1972) *Spravochnik po teplofizicheskim svoystvam gazov i zhidkostey* [Handbook of thermophysical properties of gases and liquids]. Moscow: Nauka.
12. Lai T., Liu X., Xue S., Xu J., He M., Zhang Y. (2020) Extension of Ergun equation for the calculation of the flow resistance in porous media with higher porosity and open-celled structure. *Applied Thermal Engineering*. 173. Article 115262. DOI: 10.1016/ j.applthermaleng.2020.115262.
13. Alazmi B., Vafai K. (2004) Analysis of variable porosity, thermal dispersion, and local thermal nonequilibrium on free surface flows through porous media. *Journal of Heat Transfer*. 126(3). pp. 389–399. DOI: 10.1115/1.1723470.
14. Ryazhskikh V.I., Konovalov D.A., Slyusarev M.I., Drozdov I.G. (2016) Analiz matematicheskoy modeli teplos"yoma s ploskoy poverkhnost'yu laminarno dvizhushchimsya khladagentom cherez sopryazhennuyu poristuyu sredu [Analysis of mathematical model of heat removal from the flat surface by the laminar moving refrigerant through conjugation porous medium]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya*: *Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie – South Ural State University Journal of Mathematical Modeling and Programming*. 2(3). pp. 68–81. DOI: 10.14529/mmp160306.
15. Bühber T., Salamon D.A. (2018) *Functional Analysis*. New York: American Mathematical Society.
16. Connor J.J., Brebbia C.A. (1976) *Finite Element Techniques for Fluid Flow*. London; Boston: Newnes–Butterworths.
17. Izadpanah M.R., Müller-Steinhagen H., Jamialahmadi M. (1998) Experimental and theoretical studies of convective heat transfer in a cylindrical porous medium. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 19. pp. 629–635. DOI: 10.1016/S0142-727X(98)10035-8 22.

18. Sneddon I.N. (1951) *Fourier Transforms*. New York: McGraw-Hill.
19. Didushinskiy Ya. (1972) *Osnovy proektirovaniya kataliticheskikh reaktorov* [Fundamentals of the design of catalytic reactors]. Moscow: Khimiya.
20. Hsu C.T., Cheng P. (1990) Thermal dispersion in porous medium. *International Journal of Heat Mass Transfer*. 33(8). pp. 1587–1597. DOI: 10.1016/0017-9310(90)90015-M.
21. Ziolkowska L., Badowska I., Flejter B., Mieskowski Z. (1980) Wplyw wysokosci warstwy zloza na profil predkosci w rurze z wypelnieniem ziarnistym. *Inzynieria Chemiczna i Procesowa*. 1(2). pp. 393–405.
22. Newell R., Standish N. (1973) Velocity distribution in rectangular packed beds and non-ferrous blast furnaces. *Metallurgical Transactions*. 4(8). pp. 1851–1857.
23. Schwartz C.E., Smith J.M. (1953) Flow distribution in packed beds. *Industrial and Engineering Chemistry*. 45(6). pp. 1209–1218.
24. Pushnov A., Baltrenas P., Kagan A., Zagorskis A. (2010) *Aerodinamika vozdukhoochistnykh ustroystv s zernistym sloem* [Aerodynamics of air-cleaning devices with a granular layer]. Vilnius: Tekhnika.

Received: June 30, 2020

УДК 539.3+517.95
DOI 10.17223/19988621/70/11

А.Д. Чернышов, В.В. Горяйнов, С.Ф. Кузнецов, О.Ю. Никифорова

ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О ПРОГИБЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКИ

С помощью метода быстрых разложений в общем виде решена задача о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки. В качестве примера показано построение точных решений задачи для случаев жестко закрепленной мембраны под действием куполообразной и синусоидальной нагрузок. Определено положение максимального прогиба мембраны и наибольших напряжений, возникающих в ней под действием переменной нагрузки.

Ключевые слова: *прогиб мембраны, компоненты напряжений, переменная нагрузка, точное решение, уравнение Пуассона, быстрые разложения.*

Прогибы мембраны описываются уравнением Пуассона. В литературе встречаются его аналитические [1–10] и численные [11–20] решения. Например, в [1, 2] представлены точные решения первой краевой задачи для уравнения Пуассона, выраженные через функцию Грина. В [3] сформулирована аналитическая формула для определения прогибов прямоугольной мембраны под действием электростатического давления. Приводится сравнение значений прогибов, полученных по предлагаемой формуле, с результатами расчетов по методу конечных элементов. В работах [4, 5] решение задачи о прогибах прямоугольной мембраны с жестким неподвижным контуром постоянного натяжения под действием равномерно распределенного давления осуществлялось методом разделения переменных. Кроме этого, в [5] представлено сравнение методов разделения переменных, Ритца, наименьших квадратов и Канторовича для решения указанной задачи. В [6] привлекаются соотношения обобщенной теории упругости, содержащие структурный параметр и позволяющие получить регулярное решение задачи о прогибе круглой мембраны. В статье [7] предложен подход к получению некоторых точных решений уравнения Пуассона, основанный на введении в уравнение Пуассона членов, содержащих первые производные искомой функции. Для сведения полученного таким способом уравнения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривается связанная с ним система двух уравнений в частных производных. Однако в [7] точные решения краевых задач не рассматриваются. В работе [8] методом преобразования Фурье решается краевая задача Дирихле для уравнения Пуассона в области, ограниченной двумя параллельными гиперплоскостями в R^n. Решение представлено в виде суммы интегралов, ядра которых найдены в конечном виде. В [9] представлено решение этой задачи с полиномиальной правой частью. Векторным методом Галеркина, в котором интегралы выражаются аналитически, в [10] решено двумерное уравнение Пуассона. В работе [11] развивается метод наименьших квадратов с Т-элементами для решения линейных краевых задач с уравнениями Лапласа и Пуассона. Авторы используют разрывные базисные функции высокого порядка аппроксимации из специальных функциональных пространств. В [12] предложен алгоритм решения общей неоднородной краевой задачи Дирихле для трехмерного уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности и с минимальным 27-точечным шаблоном. Также среди численных методов следует отметить метод коллокаций [13, 14], метод квадратурных элементов [15], модифицированный кубический B-сплайн дифференциально-квадратурный метод [16, 17] и метод, основанный на использовании вейвлетов Хаара [18, 19]. В работе [20] приведена математическая постановка и решение пространственных краевых задач с уравнением Пуассона методом спектральных элементов.

В данной работе с помощью быстрых разложений [21] будет получено в общем виде решение задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки, точно удовлетворяющее дифференциальному уравнению и граничным условиям, т.е. решение будет являться точным. Общий вид решения задачи содержит много свободных коэффициентов, которыми можно аппроксимировать широкий круг инженерных задач. Будет показано построение некоторых точных решений для частных случаев нагрузки.

1. Постановка задачи

Уравнение прогиба прямоугольной мембраны имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+F(x,y)=0,\ \ (x,y)\in\Omega_{\square},\ \ 0\le x\le a,\ \ 0\le y\le b, \tag{1}$$

где $F(x,y)$ – нагрузка на мембрану.

Граничные условия зададим в виде

$$w\big|_{x=0}=f_1(y),\ \ w\big|_{y=0}=f_2(x),\ \ w\big|_{x=a}=f_3(y),\ \ w\big|_{y=b}=f_4(x). \tag{2}$$

Решение краевой задачи (1), (2) должно удовлетворять условиям согласований

$$\begin{gathered} f_1(0)=f_2(0),\quad f_2(a)=f_3(0),\ \ f_3(b)=f_4(a),\ \ f_1(b)=f_4(0),\\ w_{xx}(0,0)+w_{yy}(0,0)+F(0,0)=0,\ \ w_{xx}(a,0)+w_{yy}(a,0)+F(a,0)=0,\\ w_{xx}(0,b)+w_{yy}(0,b)+F(0,b)=0,\ \ w_{xx}(a,b)+w_{yy}(a,b)+F(a,b)=0. \end{gathered} \tag{3}$$

Равенства (3) следуют из независимости величины прогибов $w(x,y)$ от направления подхода к этим углам.

Функцию $w(x,y)$ представим конечным выражением, заимствованным из теории быстрых разложений [21], в виде суммы граничной функции второго порядка и ряда Фурье по синусам, в котором учтены два коэффициента Фурье

$$w(x,y)=\sum_{i=1}^{4}A_i(y)P_i(x)+A_5(y)\sin\pi\frac{x}{a}+A_6(y)\sin 2\pi\frac{x}{a},\ \ 0\le x\le a, \tag{4}$$

$$A_i(y)=\sum_{j=1}^{4}A_{i,j}P_j(y)+A_{i,5}\sin\pi\frac{y}{b}+A_{i,6}\sin 2\pi\frac{y}{b},\ \ i=1\div 6,\ \ 0\le y\le b,$$

$$P_1(y)=1-\frac{y}{b},\ \ P_2(y)=\frac{y}{b},\ \ P_3(y)=\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{3},\ \ P_4(y)=\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{6},$$

$$P_1(x)=1-\frac{x}{a},\ \ P_2(x)=\frac{x}{a},\ \ P_3(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3},\ \ P_4(x)=\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}.$$

Таким образом, искомая функция $w(x,y)$ представлена в виде конечной двойной суммы, содержащей 36 неизвестных коэффициентов

$$A_{i,j},\ i=1-6,\quad j=1-6. \tag{5}$$

Зададим функции $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(x)$, входящие в граничные условия (2), следующим образом:

$$\begin{gathered}
f_1(y)=\sum_{j=1}^{4} f_{1,j}P_j(y)+f_{1,5}\sin\pi\frac{y}{b}+f_{1,6}\sin 2\pi\frac{y}{b},\\
f_2(x)=\sum_{j=1}^{4} f_{2,j}P_j(x)+f_{2,5}\sin\pi\frac{x}{a}+f_{2,6}\sin 2\pi\frac{x}{a},\\
f_3(y)=\sum_{j=1}^{4} f_{3,j}P_j(y)+f_{3,5}\sin\pi\frac{y}{b}+f_{3,6}\sin 2\pi\frac{y}{b},\\
f_4(x)=\sum_{j=1}^{4} f_{4,j}P_j(x)+f_{4,5}\sin\pi\frac{x}{a}+f_{4,6}\sin 2\pi\frac{x}{a},
\end{gathered} \tag{6}$$

где постоянные $f_{i,j}$, $i=1-4$, $j=1-6$ считаем известными величинами.

Нагрузку на мембрану $F(x,y)$ запишем конечной суммой по аналогии с зависимостью (4):

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{4} F_i(y)P_i(x)+F_5(y)\sin\pi\frac{x}{a}+F_6(y)\sin 2\pi\frac{x}{a},\ 0\le x\le a, \tag{7}$$

$$F_i(y)=\sum_{j=1}^{4} F_{i,j}P_j(y)+F_{i,5}\sin\pi\frac{y}{b}+F_{i,6}\sin 2\pi\frac{y}{b},\ i=1-6,\ 0\le y\le b.$$

Все коэффициенты F_{ij}, $i=1-6$, $j=1-6$ в выражении (7) для нагрузки считаем известными, так как $F(x,y)$ – заданная функция.

Таким образом, требуется найти такое решение уравнения (1) с заданной нагрузкой на мембрану в виде (7), которое точно удовлетворяет граничным условиям (2) и условиям согласований (3).

2. Решение задачи

Для нахождения неизвестных коэффициентов $A_{i,j}$ из (5) применим метод быстрых разложений [21], согласно которому подставим двойное быстрое разложение функции $w(x,y)$ в граничные условия (2), условия согласований (3) и дифференциальное уравнение (1).

Из граничных условий (2) получим

$$\begin{gathered}
w\big|_{x=0}=f_1(y)\Rightarrow\sum_{j=1}^{4} A_{1,j}P_j(y)+A_{1,5}\sin\pi\frac{y}{b}+A_{1,6}\sin 2\pi\frac{y}{b}=\\
=\sum_{j=1}^{4} f_{1,j}P_j(y)+f_{1,5}\sin\pi\frac{y}{b}+f_{1,6}\sin 2\pi\frac{y}{b},
\end{gathered} \tag{8}$$

$$w|_{y=0}=f_2(x)\Rightarrow\sum_{i=1}^{4}A_{i,1}P_i(x)+A_{5,1}\sin\pi\frac{x}{a}+A_{6,1}\sin 2\pi\frac{x}{a}=$$
$$=\sum_{j=1}^{4}f_{2,j}P_j(x)+f_{2,5}\sin\pi\frac{x}{a}+f_{2,6}\sin 2\pi\frac{x}{a},$$
$$w|_{x=a}=f_3(y)\Rightarrow\sum_{j=1}^{4}A_{2,j}P_j(y)+A_{2,5}\sin\pi\frac{y}{b}+A_{2,6}\sin 2\pi\frac{y}{b}=$$
$$=\sum_{j=1}^{4}f_{3,j}P_j(y)+f_{3,5}\sin\pi\frac{y}{b}+f_{3,6}\sin 2\pi\frac{y}{b},$$
$$w|_{y=b}=f_4(x)\Rightarrow\sum_{i=1}^{4}A_{i,2}P_i(x)+A_{5,2}\sin\pi\frac{x}{a}+A_{6,2}\sin 2\pi\frac{x}{a}=$$
$$=\sum_{j=1}^{4}f_{4,j}P_j(x)+f_{4,5}\sin\pi\frac{x}{a}+f_{4,6}\sin 2\pi\frac{x}{a}.$$

Условия согласований (3) дают следующие уравнения

$$f_{1,1}=f_{2,1}=A_{1,1},\ f_{2,2}=f_{3,1}=A_{2,1},\ f_{3,2}=f_{4,2}=A_{2,2},\ f_{1,2}=f_{4,1}=A_{1,2},\qquad(9)$$
$$A_{3,1}+A_{1,3}+F_{1,1}=0,\ A_{4,1}+A_{2,3}+F_{2,1}=0,\ A_{3,2}+A_{1,4}+F_{1,2}=0,\ A_{4,2}+A_{2,4}+F_{2,2}=0.$$

Равенства (8), (9) позволяют найти 32 неизвестных коэффициента $A_{i,j}$. Для нахождения оставшихся коэффициентов $A_{i,j}$ подставим $w(x,y)$ из (4) в дифференциальное уравнение (1):

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{4}A_{i,j}P_j(y)+A_{i,5}\sin\pi\frac{y}{b}+A_{i,6}\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)P_i''(x)-$$
$$-\frac{\pi^2}{a^2}\left(\sum_{j=1}^{4}A_{5,j}P_j(y)+A_{5,5}\sin\pi\frac{y}{b}+A_{5,6}\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\sin\pi\frac{x}{a}-$$
$$-\frac{4\pi^2}{a^2}\left(\sum_{j=1}^{4}A_{6,j}P_j(y)+A_{6,5}\sin\pi\frac{y}{b}+A_{6,6}\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\sin 2\pi\frac{x}{a}+$$
$$+\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{4}A_{i,j}P_j''(y)-A_{i,5}\frac{\pi^2}{b^2}\sin\pi\frac{y}{b}-A_{i,6}\frac{4\pi^2}{b^2}\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)P_i(x)+$$
$$+\left(\sum_{j=1}^{4}A_{5,j}P_j''(y)-A_{5,5}\frac{\pi^2}{b^2}\sin\pi\frac{y}{b}-A_{5,6}\frac{4\pi^2}{b^2}\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\sin\pi\frac{x}{a}+$$
$$+\left(\sum_{j=1}^{4}A_{6,j}P_j''(y)-A_{6,5}\frac{\pi^2}{b^2}\sin\pi\frac{y}{b}-A_{6,6}\frac{4\pi^2}{b^2}\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\sin 2\pi\frac{x}{a}+$$
$$+\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{4}F_{i,j}P_j(y)+F_{i,5}\sin\pi\frac{y}{b}+F_{i,6}\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)P_i(x)+$$
$$+\left(\sum_{j=1}^{4}F_{5,j}P_j(y)+F_{5,5}\sin\pi\frac{y}{b}+F_{5,6}\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\sin\pi\frac{x}{a}+$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{4} F_{6,j} P_j(y) + F_{6,5}\sin\pi\frac{y}{b} + F_{6,6}\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\sin 2\pi\frac{x}{a} = 0,$$

$$0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b. \tag{10}$$

Уравнение (10) должно выполняться при любых $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$. Далее приравняем коэффициенты в (8) и (10) слева и справа перед линейно независимыми функциями

$$P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x)\ ,\ P_4(x),\ P_1(y)\ ,\ P_2(y),\ P_3(y),\ P_4(y),$$
$$\sin\pi\frac{x}{a}\ ,\ \sin\pi\frac{y}{b},\ \sin 2\pi\frac{x}{a}\ ,\ \sin 2\pi\frac{y}{b},$$

учитывая, что $P_1'' = P_2'' = 0,\ \ P_3'' = P_1,\ \ P_4'' = P_2$. В результате будем иметь переопределенную систему линейных алгебраических уравнений. Благодаря выполнению условий согласований (3) данная переопределенная система имеет решение. Для нахождения неизвестных (5) необходимо использовать 36 уравнений, а остальные уравнения используем для составления соотношений между коэффициентами $f_{i,j},\ i=1-4,\ j=1-6$, заданных для функций (6), и коэффициентами $F_{i,j},\ i=1-6, j=1-6$ нагрузки $F(x,y)$.

Таким образом, значения коэффициентов $A_{i,j}$ будут определяться равенствами:

$$A_{1,j} = f_{1,j},\ A_{2,j} = f_{3,j},\ j = 1-6,$$

$$A_{3,1} = f_{2,3},\ A_{3,2} = f_{4,3},\ A_{3,3} = -F_{1,3},\ A_{3,4} = -F_{1,4},$$

$$A_{3,5} = \frac{\pi^2}{b^2} f_{1,5} - F_{1,5},\ A_{3,6} = \frac{4\pi^2}{b^2} f_{1,6} - F_{1,6},$$

$$A_{4,1} = f_{2,4},\ A_{4,2} = f_{4,4},\ A_{4,3} = -F_{4,1},\ A_{4,4} = -F_{2,4},$$

$$A_{4,5} = \frac{\pi^2}{b^2} f_{3,5} - F_{2,5},\ A_{4,6} = \frac{4\pi^2}{b^2} f_{3,6} - F_{2,6}, \tag{11}$$

$$A_{5,1} = f_{2,5},\ A_{5,2} = f_{4,5},\ A_{5,3} = \frac{\pi^2}{a^2} f_{2,5} - F_{5,1},\ A_{5,4} = \frac{\pi^2}{a^2} f_{4,5} - F_{5,2},$$

$$A_{5,5} = F_{5,5}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right),\ A_{5,6} = F_{5,6}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2}\right),$$

$$A_{6,1} = f_{2,6},\ A_{6,2} = f_{4,6},\ A_{6,3} = \frac{4\pi^2}{a^2} f_{2,6} - F_{6,1},\ A_{6,4} = \frac{4\pi^2}{a^2} f_{4,6} - F_{6,2},$$

$$A_{6,5} = F_{6,5}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right),\ A_{6,6} = F_{6,6}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2}\right).$$

Подставив коэффициенты из (11) в выражение (4), будем иметь точное решение задачи.

При задании граничных условий (2) и нагрузки на мембрану (7) должны выполняться следующие условия:

$$f_{1,1} = f_{2,1},\ \ f_{2,2} = f_{3,1},\ \ f_{3,2} = f_{4,2},\ \ f_{1,2} = f_{4,1}\,; \tag{12}$$

$$F_{3,3} = F_{3,4} = F_{4,3} = F_{4,4} = 0\,; \tag{13}$$

$$f_{1,3} = -f_{2,3} - F_{1,1},\ \ f_{1,4} = -f_{4,3} - F_{1,2},\ \ f_{3,3} = -f_{2,4} - F_{2,1},\ \ f_{3,4} = -f_{4,4} - F_{2,2}\,; \tag{14}$$

$$F_{1,3} = F_{3,1},\ \ F_{1,4} = F_{3,2},\ \ F_{4,1} = F_{2,3},\ \ F_{2,4} = F_{4,2}\,; \tag{15}$$

$$\begin{gathered}
f_{1,5} = \frac{b^2}{\pi^2}\left(\frac{b^2}{\pi^2}F_{3,5} + F_{1,5}\right),\ \ f_{1,6} = \frac{b^2}{4\pi^2}\left(\frac{b^2}{4\pi^2}F_{3,6} + F_{1,6}\right),\\
f_{2,5} = \frac{a^2}{\pi^2}\left(\frac{a^2}{\pi^2}F_{5,3} + F_{5,1}\right),\ \ f_{2,6} = \frac{a^2}{4\pi^2}\left(\frac{a^2}{4\pi^2}F_{6,3} + F_{6,1}\right),\\
f_{3,5} = \frac{b^2}{\pi^2}\left(\frac{b^2}{\pi^2}F_{4,5} + F_{2,5}\right),\ \ f_{3,6} = \frac{b^2}{4\pi^2}\left(\frac{b^2}{4\pi^2}F_{4,6} + F_{2,6}\right),\\
f_{4,5} = \frac{a^2}{\pi^2}\left(\frac{a^2}{\pi^2}F_{5,4} + F_{5,2}\right),\ \ f_{4,6} = \frac{a^2}{4\pi^2}\left(\frac{a^2}{4\pi^2}F_{6,4} + F_{6,2}\right).
\end{gathered} \tag{16}$$

Следовательно, решение (11) имеет место, когда выполнены условия (12) – (16).

3. Построение точных решений и их анализ

Пусть прогибы мембраны на ее границах будут равны нулю, тогда граничные условия (2) примут вид

$$w\big|_{x=0} = w\big|_{y=0} = w\big|_{x=a} = w\big|_{y=b} = 0\,. \tag{17}$$

Условия (17) получаются заданием в формулах (6) следующих коэффициентов:

$$f_{i,j} = 0,\ i = 1-4,\ j = 1-6\,. \tag{18}$$

Для граничных условий (17) рассмотрим два вида переменной нагрузки на мембрану: куполообразную и синусоидальную.

Куполообразную нагрузку $F(x,y)$ подберем таким образом, чтобы только коэффициенты из равенств (15) были не равны нулю. Обозначим

$$F_{3,1} = F_{1,3} = Q_1,\ \ F_{1,4} = F_{3,2} = Q_2,\ \ F_{4,1} = F_{2,3} = Q_3,\ \ F_{2,4} = F_{4,2} = Q_4\,. \tag{19}$$

Тогда с учетом (19) нагрузку $F(x,y)$ в виде (7) запишем следующим образом:

$$\begin{gathered}
F(x,y) = \left(Q_1\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}\right) + Q_2\left(\frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}\right)\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right) +\\
+\left(Q_3\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}\right) + Q_4\left(\frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}\right)\right)\frac{x}{a} +\\
+\left(Q_1\left(1 - \frac{y}{b}\right) + Q_2\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + \left(Q_3\left(1 - \frac{y}{b}\right) + Q_4\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right).
\end{gathered} \tag{20}$$

Подставляя коэффициенты из (18) и (19) в формулы (11), найдем

$$A_{3,3} = -Q_1,\ A_{3,4} = -Q_2,\ A_{4,3} = -Q_3,\ A_{4,4} = -Q_4\,. \tag{21}$$

Учитывая (21), получим решение задачи в виде (4) для куполообразной нагрузки (20):

$$w(x,y) = -\left(Q_1\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{3}\right)+Q_2\left(\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{6}\right)\right)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)-$$
$$-\left(Q_3\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{3}\right)+Q_4\left(\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{6}\right)\right)\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right). \tag{22}$$

При подстановке в (22) $x = a/2$ и $y = b/2$ имеем формулу для прогиба в центре мембраны под действием куполообразной нагрузки

$$w\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right) = -\frac{a^2b^2}{256}(Q_1+Q_2+Q_3+Q_4)\,. \tag{23}$$

Из формулы (23) следует, что при $a = b$ прогиб в центре квадратной мембраны пропорционален четвертой степени ее линейного размера.

Синусоидальную нагрузку $F(x,y)$ зададим так, чтобы только $F_{5,5}$, $F_{5,6}$, $F_{6,5}$, $F_{6,6}$ и коэффициенты, входящие в равенства (16), были не равны нулю. Обозначим

$$\begin{gathered} F_{3,5}=Q_5,\ F_{3,6}=Q_6,\quad F_{5,3}=Q_7,\ \ F_{6,3}=Q_8,\quad F_{4,5}=Q_9,\ \ F_{4,6}=Q_{10},\\ F_{5,4}=Q_{11},\ F_{6,4}=Q_{12},\ \ F_{5,5}=Q_{13},\ \ F_{5,6}=Q_{14},\ \ F_{6,5}=Q_{15},\ F_{6,6}=Q_{16}. \end{gathered} \tag{24}$$

Тогда из равенств (16) найдем

$$\begin{gathered} F_{1,5}=-\frac{b^2}{\pi^2}Q_5,\ \ F_{1,6}=-\frac{b^2}{4\pi^2}Q_6,\quad F_{5,1}=-\frac{a^2}{\pi^2}Q_7,\ \ F_{6,1}=-\frac{a^2}{4\pi^2}Q_8,\\ F_{2,5}=-\frac{b^2}{\pi^2}Q_9,\ \ F_{2,6}=-\frac{b^2}{4\pi^2}Q_{10},\ \ F_{5,2}=-\frac{a^2}{\pi^2}Q_{11},\ \ F_{6,2}=-\frac{a^2}{4\pi^2}Q_{12}. \end{gathered} \tag{25}$$

Следовательно, с учетом (24) и (25) функцию $F(x,y)$ запишем в виде

$$F(x,y)=$$
$$=-\left(\frac{b^2}{\pi^2}Q_5\sin\pi\frac{y}{b}+\frac{b^2}{4\pi^2}Q_6\sin2\pi\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)-\left(\frac{b^2}{\pi^2}Q_9\sin\pi\frac{y}{b}+\frac{b^2}{4\pi^2}Q_{10}\sin2\pi\frac{y}{b}\right)\frac{x}{a}+$$
$$+\left(Q_5\sin\pi\frac{y}{b}+Q_6\sin2\pi\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+\left(Q_9\sin\pi\frac{y}{b}+Q_{10}\sin2\pi\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)+$$
$$+\left(-\frac{a^2}{\pi^2}Q_7\left(1-\frac{y}{b}\right)-\frac{a^2}{\pi^2}Q_{11}\frac{y}{b}+Q_7\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{3}\right)+Q_{11}\left(\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{6}\right)+Q_{13}\sin\pi\frac{y}{b}+\right.$$
$$\left.+Q_{14}\sin2\pi\frac{y}{b}\right)\sin\pi\frac{x}{a}+\left(-\frac{a^2}{4\pi^2}Q_8\left(1-\frac{y}{b}\right)-\frac{a^2}{4\pi^2}Q_{12}\frac{y}{b}+Q_8\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{3}\right)+\right.$$
$$\left.+Q_{12}\left(\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{6}\right)+Q_{15}\sin\pi\frac{y}{b}+Q_{16}\sin2\pi\frac{y}{b}\right)\sin2\pi\frac{x}{a}. \tag{26}$$

Подставляя коэффициенты из (24) и (25) в формулы (11), получим

$$A_{3,5}=\frac{b^2}{\pi^2}Q_5,\ A_{3,6}=\frac{b^2}{4\pi^2}Q_6,\ A_{4,5}=\frac{b^2}{\pi^2}Q_9,\ \ A_{4,6}=\frac{b^2}{4\pi^2}Q_{10},$$

$$A_{5,3}=\frac{a^2}{\pi^2}Q_7,\ A_{5,4}=\frac{a^2}{\pi^2}Q_{11},\ A_{5,5}=\ Q_{13}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right),\ A_{5,6}=Q_{14}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}\right),\quad (27)$$

$$A_{6,3}=\frac{a^2}{4\pi^2}Q_8,\ A_{6,4}=\frac{a^2}{4\pi^2}Q_{12},\ A_{6,5}=Q_{15}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right),\ A_{6,6}=Q_{16}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}\right).$$

Таким образом, с учетом (27) точное решение задачи для граничных условий (17) и синусоидальной нагрузки (26) будет иметь вид

$$w(x,y)=\left(\frac{b^2}{\pi^2}Q_5\sin\pi\frac{y}{b}+\frac{b^2}{4\pi^2}Q_6\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+$$

$$+\left(\frac{b^2}{\pi^2}Q_9\sin\pi\frac{y}{b}+\frac{b^2}{4\pi^2}Q_{10}\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)+\left(\frac{a^2}{\pi^2}Q_7\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{3}\right)+\right.$$

$$+\frac{a^2}{\pi^2}Q_{11}\left(\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{6}\right)+Q_{13}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)\sin\pi\frac{y}{b}+Q_{14}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}\right)\sin 2\pi\frac{y}{b}\left.\right)\sin\pi\frac{x}{a}+$$

$$+\left(\frac{a^2}{4\pi^2}Q_8\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{3}\right)+\frac{a^2}{4\pi^2}Q_{12}\left(\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{6}\right)+Q_{15}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)\sin\pi\frac{y}{b}+\right.$$

$$+Q_{16}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}\right)\sin 2\pi\frac{y}{b}\left.\right)\sin 2\pi\frac{x}{a}.\qquad (28)$$

Подставляя в (28) $x=a/2$ и $y=b/2$, получим формулу вычисления прогиба в центре мембраны под действием синусоидальной нагрузки:

$$w\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)=-\frac{a^2b^2}{16\pi^2}(Q_5+Q_7+Q_9+Q_{11})+\frac{a^2b^2}{\pi^2\left(a^2+b^2\right)}Q_{13}.\qquad (29)$$

Если в (26) принять все Q_i равными нулю, кроме Q_{13}, то получим частный случай синусоидальной нагрузки, приведенный в [22] при рассмотрении задачи о свободно опертой прямоугольной пластинке.

Выберем в качестве материала мембраны сталь конструкционную углеродистую обыкновенного качества марки ВСт3пс [23] со следующими характеристиками [24, 25]:

$$R_y=2.35\cdot 10^8\ \text{Па},\ \nu=0{,}25\,,\ E=2{,}13\cdot 10^{11}\ \text{Па},$$

где R_y – расчетное сопротивление материала мембраны.

Значения параметров a, b, Q_i, $i=1-16$ подбирались так, чтобы напряжения не превосходили расчетное сопротивление материала мембраны при двухосном напряженном состоянии [22, 23]

$$\sqrt{\sigma_x^2-\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2}=\tilde{\sigma}\le R_y,\qquad (30)$$

где
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right),\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right),$$
$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\ \varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2. \tag{31}$$

Вид куполообразной нагрузки (20) для данных
$$Q_i = 4\cdot 10^{-2},\ i = 1-4,\ a = 1.5\ \text{м},\ b = 2.5\ \text{м} \tag{32}$$
показан на рис. 1, *a*. Вид синусоидальной нагрузки (26) для данных
$$Q_i = 4\cdot 10^{-2},\ i = 5-16,\ a = 1.5\ \text{м},\ b = 2.5\ \text{м} \tag{33}$$
изображен на рис. 1, *b*. Соответствующие этим видам нагрузки прогибы мембраны, вычисленные по формулам (22) и (28), представлены на рис. 2.

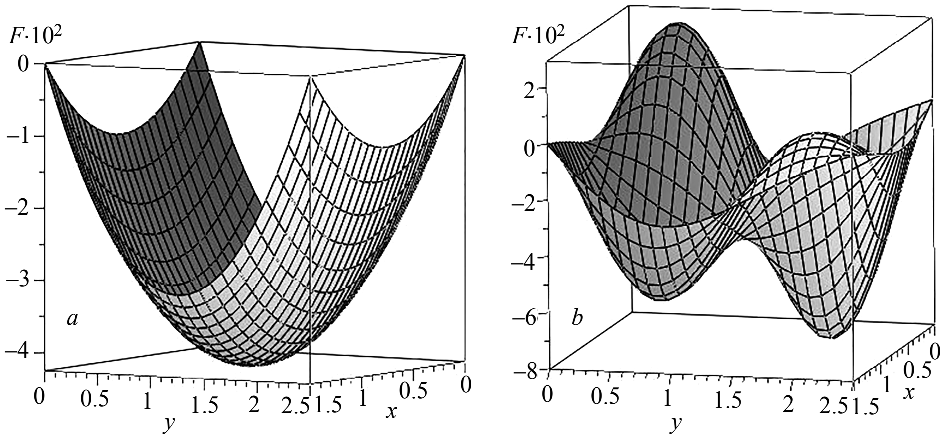


Рис. 1. Виды нагрузок на мембрану: (*a*) куполообразной; (*b*) синусоидальной
Fig. 1. Types of membrane loads: (*a*) dome-shaped and (*b*) sinusoidal

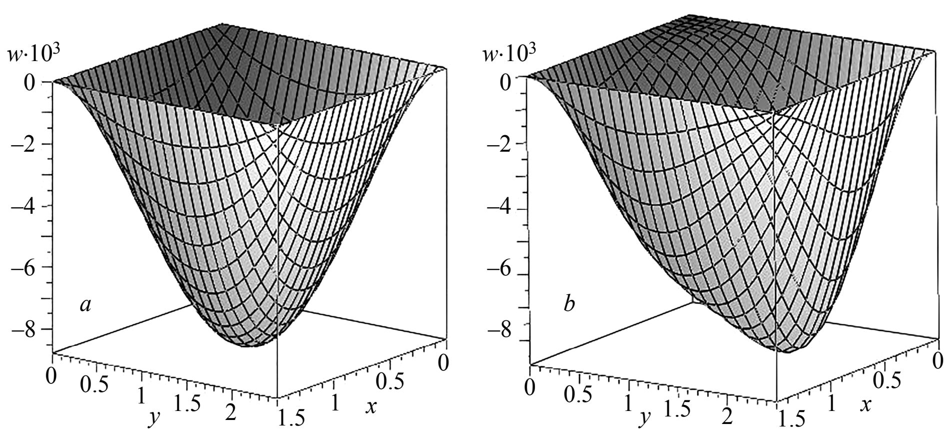


Рис. 2. Прогиб прямоугольной мембраны под действием нагрузки:
(*a*) куполообразной; (*b*) синусоидальной
Fig. 2. Rectangular membrane deflection under a load:
(*a*) dome-shaped and (*b*) sinusoidal

Из рис. 1 и 2 видно, что при задании всех Q_i, $i=1-16$, одинаковыми (см. (32) и (33)) куполообразная нагрузка (рис. 1, *a*) и соответствующий ей прогиб (рис. 2, *a*) имеют две плоскости симметрии, проходящие через $x/2$ и $y/2$. Синусоидальная нагрузка (рис. 1, *b*) и вызванный ею прогиб мембраны (рис. 2, *b*), плоскостей симметрии не имеют. Если же для куполообразной нагрузки некоторые из значений Q_i, $i=1-4$, взять равными нулю или не все значения из Q_i, $i=1-4$, будут равны друг другу, то нагрузка и соответствующий ей прогиб станут несимметричными. Профили прогибов мембраны при куполообразной нагрузке показаны на рис. 3.

Из рис. 2, *a* и рис. 3 (кривые *4*) можно сделать вывод, что при симметричной куполообразной нагрузке максимальный прогиб находится в центре мембраны, т.е. $w_{\max} = w(a/2;\, b/2)$ и определяется по формуле (23). Если же куполообразная нагрузка несимметричная (см. рис. 3, кривые *1*, *2*, *3*), то максимальный прогиб $w_{\max} \neq w(a/2;\, b/2)$ и будет находиться в окрестности точки $(a/2;\, b/2)$.

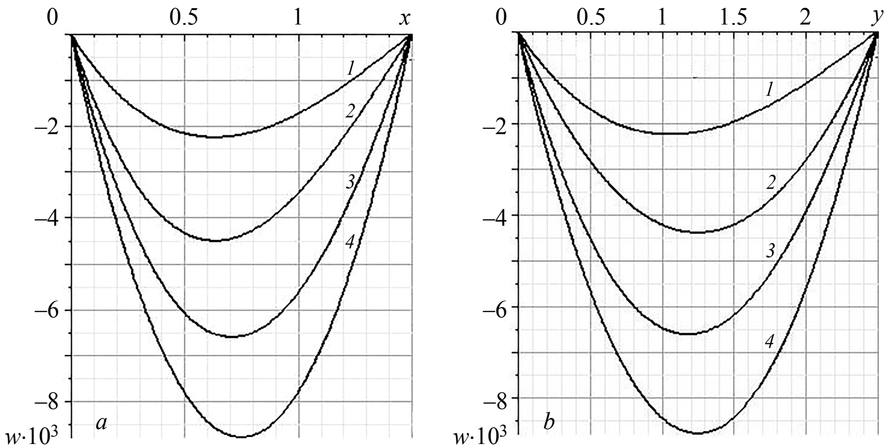


Рис. 3. Профили прогибов мембраны под действием куполообразной нагрузки в сечениях: $y=b/2$ (*a*); $x=a/2$ (*b*); кр. *1* – $Q_1=4\cdot10^{-2}, Q_2=Q_3=Q_4=0$; кр. *2* – $Q_1=Q_2=4\cdot10^{-2}, Q_3=Q_4=0$; кр. *3* – $Q_1=Q_2=Q_3=4\cdot10^{-2}, Q_4=0$; кр. *4* – $Q_1=Q_2=Q_3=Q_4=4\cdot10^{-2}$

Fig. 3. Membrane deflection profiles under a dome-shaped load in sections: (*a*) $y=b/2$; (*b*) $x=a/2$; (*1*) $Q_1=4\cdot10^{-2}, Q_2=Q_3=Q_4=0$; (*2*) $Q_1=Q_2=4\cdot10^{-2}, Q_3=Q_4=0$; (*3*) $Q_1=Q_2=Q_3=4\cdot10^{-2}, Q_4=0$, and (*4*) $Q_1=Q_2=Q_3=Q_4=4\cdot10^{-2}$

Для мембраны под действием симметричной куполообразной нагрузки компоненты напряжений, вычисленные по формулам (31) и данным (32), показаны на рис. 4, а распределение $\tilde{\sigma}$, рассчитанное по формуле (30), изображено на рис. 5, *a*. Из рис. 4 и рис. 5, *a* видно, что напряжения возрастают в направлении от центра мембраны к ее границам и достигают своего максимума в серединах сторон мембраны. Наибольшие напряжения находятся в серединах обеих длинных сторон прямоугольной мембраны, а наименьшие (равные нулю) – в ее углах и середине. Этот результат совпадает с результатом, описанным в [4] для постоянной нагрузки на мембрану. Если же нагрузка будет несимметричной, то наибольшее напряжение будет находиться в середине только одной из двух длинных сторон прямоугольника, а в центре мембраны напряжения уже не будут равны нулю (рис. 5, *b*). Распределение $\tilde{\sigma}$, изображенное на рис. 5, *b*, построено по данным (33) для синусоидальной нагрузки (26), которая является несимметричной.

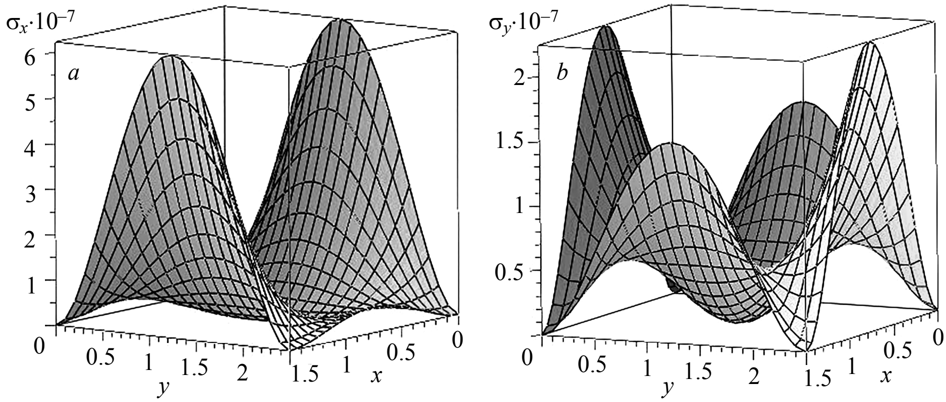


Рис. 4. Компоненты напряжений в прямоугольной мембране под действием симметричной куполообразной нагрузки: σ_x (*a*); σ_y (*b*)

Fig. 4. Stress components in the rectangular membrane under a symmetrical dome-shaped load: (*a*) σ_x and (*b*) σ_y

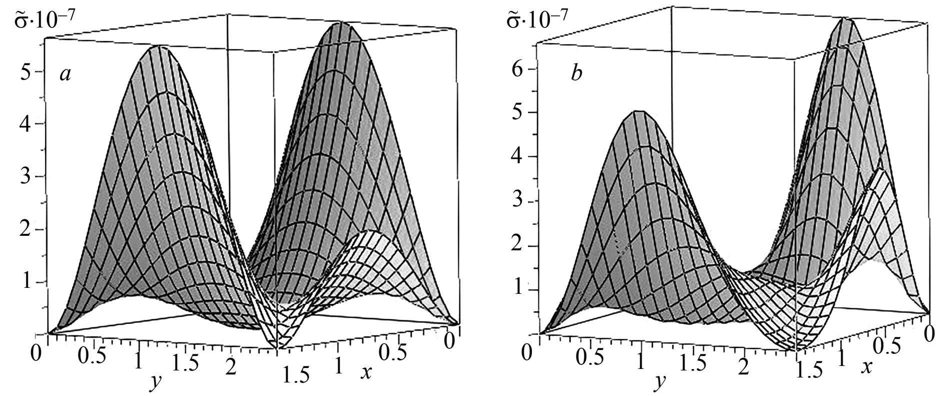


Рис. 5. Распределение $\tilde{\sigma}$ в прямоугольной мембране под действием нагрузки: (*a*) симметричной куполообразной; (*b*) синусоидальной

Fig. 5. Distribution of $\tilde{\sigma}$ in the rectangular membrane under a load: (*a*) symmetrical dome-shaped and (*b*) sinusoidal

Заключение

С помощью быстрых разложений можно получать не только новые приближенные аналитические решения задач, связанных с дифференциальными уравнениями в частных производных [26, 27], с интегро-дифференциальными [28] и обыкновенными дифференциальными уравнениями [29] для криволинейных областей [30] и с подвижными границами [31], но и новые точные.

Подбор численных значений коэффициентов функций, входящих в граничные условия и нагрузку $F(x,y)$, следует вести с учетом равенств (12) – (16). Анализ представленных точных решений показал, что для переменной по координатам мембраны нагрузки максимальный прогиб $w_{\max}$ находится в центре только в случае симметричности нагрузки относительно плоскостей, проходящих через центр мембраны. Напряжения достигают своего наибольшего значения в серединах обеих длинных сторон прямоугольной мембраны только в случае симметричной переменной нагрузки. Для несимметричной нагрузки наибольшее напряжение находится в середине одной из двух длинных сторон прямоугольника.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
2. *Liemert A.*, *Kienle A.* Exact solution of Poisson's equation with an elliptical boundary // Applied Mathematics and Computation. 2014. V. 238. P. 123–131. DOI: 10.1016/j.amc.2014.04.003.
3. *Zheng Zh.*, *Sun W.*, *Suo X.*, *Wong L. L. P.*, *Yeow J. T. W.* A novel deflection shape function for *rectangular* capacitive micromachined ultrasonic transducer diaphragms // Sensing and Bio-Sensing Research. 2015. V. 5. P. 62–70. DOI: 10.1016/j.sbsr.2015.07.006.
4. *Тимошенко С.П.*, *Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
5. *Ванько В.И.*, *Косакян Н.К.* Сравнительный анализ некоторых прямых методов решения задач математической физики // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2018. Т. 50. № 2 С. 197–206. DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-2-197-206
6. *Васильев В.В.*, *Лурье С.А.* Обобщенное решение задачи о круглой мембране, нагруженной сосредоточенной силой // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2016. № 3. С. 115–118. DOI: 10.3103/S0025654416030109.
7. *Рубина Л.И.*, *Ульянов О.Н.* Об одном подходе к решению неоднородных уравнений в частных производных // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С 355–364. DOI: 10.20537/vm170306.
8. *Алгазин О.Д.*, *Копаев А.В.* Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое // Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 4. С. 41–53. DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943.
9. *Алгазин О.Д.* Полиномиальные решения краевых задач для уравнения Пуассона в слое // Математика и математическое моделирование. 2017. № 06. С. 1–18. DOI: 10.24108/mathm.0517.0000082
10. *Ghadimi P.*, *Dashtimanesh A.*, *Hosseinzadeh H.* Solution of Poisson's equation by analytical boundary element integration // Applied Mathematics and Computation. 2010. V. 217. Iss. 1. P. 152–163. DOI: 10.1016/j.amc.2010.05.034.
11. *Юлдашев О.И.*, *Юлдашева М.Б.* Граничный метод взвешенных невязок с разрывными базисными функциями для высокоточного решения линейных краевых задач с уравнениями Лапласа и Пуассона // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. 2013. № 4. С. 143–153
12. *Пастухов Д.Ф.*, *Пастухов Ю.Ф.*, *Волосова Н.К.* Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. 2019. № 4. С.154–173.
13. *Исаев В.И.*, *Шапеев В.П.*, *Идимешев С.В.* Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнения Пуассона // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16. № 1. С. 85–93.
14. *Ворожцов Е.В.*, *Шапеев В.П.* Численное решение уравнения Пуассона в полярных координатах методом коллокаций и наименьших невязок // Моделирование и анализ ин-

формационных систем. 2015. Т. 22. № 5. С. 648–664. DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-648-664.

15. *Zhong H.*, *He Y.* Solution of Poisson and Laplace equations by quadrilateral quadrature element // International Journal of Solids and Structures. 1998. V. 35. Iss. 21. P. 2805–2819. DOI: 10.1016/S0020-7683(97)00277-1.
16. *Elsherbeny A.M.*, *El-hassani R.M.I.*, *El-badry H.*, *Abdallah M.I.* Solving 2D-Poisson equation using modified cubic B-spline differential quadrature method // Ain Shams Engineering Journal. 2018. V. 9. Iss. 4. P. 2879–2885. DOI: 10.1016/j.asej.2017.12.001.
17. *Ghasemi M.* Spline-based DQM for multi-dimensional PDEs: Application to biharmonic and Poisson equations in 2D and 3D // Computers & Mathematics with Applications. 2017. V. 73. Iss. 7. P. 1576–1592. DOI: 10.1016/j.camwa.2017.02.006.
18. *Shi Z.*, *Cao Y.-y.*, *Chen Q.-j.* Solving 2D and 3D Poisson equations and biharmonic equations by the Haar wavelet method // Applied Mathematical Modelling. 2012. V. 36. Iss. 11. P. 5143–5161. DOI: 10.1016/j.apm.2011.11.078.
19. *Zhi S. Cao Y.-y.* A spectral collocation method based on Haar wavelets for Poisson equations and biharmonic equations // Mathematical and Computer Modelling. 2011. V. 54. Iss. 11–12. P. 2858–2868. DOI: 10.1016/j.mcm.2011.07.006.
20. *Бубенчиков А.М.*, *Попонин В.С.*, *Мельникова В.Н.* Математическая постановка и решение пространственных краевых задач методом спектральных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2008. № 3 (4). С. 70–76.
21. *Чернышов А.Д.* Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 13–24. DOI: 10.7868/S0044466914010062.
22. *Тимошенко С.П.*, *Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Наука. 1966. 636 с.
23. *Еремеев П.Г.* Пространственные тонколистовые металлические конструкции покрытий: М.: Издательство ассоциации строительных вузов, 2006. 560 с.
24. http://www.vashdom.ru/snip/II-23-81/index-7.htm
25. http://metallicheckiy-portal.ru/marki_metallov/stk/VSt3ps
26. *Чернышов А.Д.*, *Попов В.М.*, *Горяйнов В.В.*, *Лешонков О.В.* Исследование контактного термического сопротивления в конечном цилиндре с внутренним источником методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 5. С. 1288–1297.
27. *Chernyshov A.D.*, *Goryainov V.V.*, *Danshin A.A.* Analysis of the stress field in a wedge using the fast expansions with pointwise determined coefficients // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2018. V. 973. 012002. DOI: 10.1088/174265.
28. *Чернышов А.Д.*, *Горяйнов В.В.* Решение одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения методом быстрых разложений // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: механика предельного состояния. 2012. № 4(12). С. 105–112.
29. *Чернышов А.Д.*, *Горяйнов В.В.*, *Чернышов О.А.* Применение метода быстрых разложений для расчета траекторий космических кораблей // Известия вузов. Авиационная техника. 2015. № 2. С. 41–47.
30. *Чернышов А.Д.* Решение нелинейного уравнения теплопроводности для криволинейной области с условиями Дирихле методом быстрых разложений // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91. № 2. С. 456–468.
31. *Чернышов А.Д.* Метод расширения границ для задач теплопроводности в телах подвижной формы // Инженерно-физический журнал. 2010. Т. 83. № 5. С. 989–994.

Статья поступила 28.01.2020

Chernyshov A.D., Goryainov V.V., Kuznetsov S.F., Nikiforova O.Yu. (2021) APPLICATION OF FAST EXPANSIONS TO OBTAIN EXACT SOLUTIONS TO A PROBLEM ON RECTANGULAR MEMBRANE DEFLECTION UNDER ALTERNATING LOAD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 127–142

DOI 10.17223/19988621/70/11

Keywords: membrane deflection, stress components, alternating load, exact solution, Poisson equation, fast expansions.

The problem of rectangular membrane deflection under alternating loads is solved in general terms by means of the method of fast expansions. The exact solution is represented by the finite expression borrowed from the theory of fast expansions as a sum of the boundary function and Fourier sine series with two Fourier coefficients taken into account. The obtained exact solution includes free parameters. Changing the values of these parameters, one can derive many new exact solutions.

Obtaining of exact solutions to a problem of the rigidly fixed membrane under two types of loads (dome-shaped and sinusoidal) is shown as an example. Graphs of the dome-shaped and sinusoidal loads on the membrane and the curves of the corresponding deflections and stress components are presented in the paper.

From the analysis of the exact solutions, it is obvious that only when a symmetrical alternating load is used, the membrane maximum deflection is attained in the center of the membrane, and the stresses reach the highest values in the middle of both long sides. In the case of a non-symmetrical load, the maximum stress occurs in the middle of either one of two long sides of the rectangular membrane, and the maximum deflection is found in the central region.

Aleksandr D. CHERNYSHOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russian Federation). E-mail: chernyshovad@mail.ru

Vitaliy V. GORYAINOV (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation). E-mail: gorvit77@mail.ru

Sergey F. KUZNETSOV (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russian Federation). E-mail: sfs134@mail.ru

Olga Yu. NIKIFOROVA (Senior Lecturer, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russian Federation). E-mail: niki22@mail.ru

REFERENCES

1. Polyanin A.D. (2001) *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Handbook of linear equations in mathematical physics]. Moscow: Fizmatlit.
2. Liemert A., Kienle A. (2014) Exact solution of Poisson's equation with an elliptical boundary. *Applied Mathematics and Computation*. 238. pp. 123–131. DOI: 10.1016/j.amc.2014.04.003.
3. Zheng Zh., Sun W., Suo X., Wong L.L.P., Yeow J.T.W. (2015) A novel deflection shape function for rectangular capacitive micromachined ultrasonic transducer diaphragms. *Sensing and Bio-Sensing Research*. 5. pp. 62–70. DOI: 10.1016/j.sbsr.2015.07.006.
4. Timoshenko S.P., Goodier J.N. (1970) *Theory of Elasticity*. 3rd edition. McGraw-Hill.
5. Van'ko V.I., Kosakyan N.K. (2018) Sravnitel'nyy analiz nekotorykh pryamykh metodov resheniya zadach matematicheskoy fiziki [Comparative analysis of some direct methods for solving problems in mathematical physics]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya*: *Matematika. Fizika – Belgorod State University Scientific bulletin. Mathematis & Physis*. 50(2). pp. 197–206. DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-2-197-206.

6. Vasil'ev V.V., Lurie S.A. (2016) Generalized solution of the problem on a circular membrane loaded by a lumped force. *Mechanics of Solids*. 51(3). pp. 334–338. DOI: 10.3103/S0025654416030109.
7. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. (2017) Ob odnom podkhode k resheniyu neodnorodnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh [On one approach to solving nonhomogeneous partial differential equations]. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 27(3). pp. 355–364. DOI: 10.20537/vm170306.
8. Algazin O.D., Kopaev A.V. (2015) Reshenie zadachi Dirikhle dlya uravneniya Puassona v mnogomernom beskonechnom sloe [Solution of the Dirichlet problem for the Poisson's equation in a multidimensional infinite layer]. *Matematika i Matematicheskoe modelirovanie. MGTU im. N.E. Baumana – Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU*. 4. pp. 41–53. DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943.
9. Algazin O.D. (2017) Polinomial'nye resheniya kraevykh zadach dlya uravneniya Puassona v sloe [Polynomial solutions of the boundary value problems for the Poisson equation in a layer]. *Matematika i Matematicheskoe modelirovanie – Mathematics and Mathematical Modelling*. 6. pp. 1–18. DOI: 10.24108/mathm.0517.0000082.
10. Ghadimi P., Dashtimanesh A., Hosseinzadeh H. (2010) Solution of Poisson's equation by analytical boundary element integration. *Applied Mathematics and Computation*. 217(1). pp. 152–163. DOI: 10.1016/j.amc.2010.05.034.
11. Yuldashev O.I., Yuldasheva M.B. (2013) Granichnyy metod vzveshennykh nevyazok s razryvnymi bazisnymi funktsiyami dlya vysokotochnogo resheniya lineynykh kraevykh zadach s uravneniyami Laplasa i Puassona [Boundary method of weighted residuals with discontinuous basis functions for high-accuracy solving linear boundary value problems with Laplace and Poisson's equation]. *Vestnik RUDN. Seriya Matematika. Informatika. Fizika – Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*. 4. pp. 143–153.
12. Pastukhov D., Pastukhov Yu., Volosova N. (2019) Minimal'naya raznostnaya skhema dlya uravneniya Puassona na parallelepipede s shestym poryadkom pogreshnosti [Minimum scheme of the differences for equation of the Poisson on box with sixth rather inaccuracy]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C. Fundamental'nye nauki – Vestnik of Polotsk State University. Part C. Fundamental Sciences*. 4. pp.154–173.
13. Isaev V.I., Shapeev V.P., Idimeshev S.V. (2011) Varianty metoda kollokatsiy i naimen'shikh kvadratov povyshennoy tochnosti dlya chislennogo resheniya uravneniya Puassona [High-accuracy versions of the collocations and least squares method for numerical solution of the Poisson equation]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 16(1). pp. 85–93.
14. Vorozhtsov E.V., Shapeev V.P. (2015) Chislennoe reshenie uravneniya Puassona v polyarnykh koordinatakh metodom kollokatsiy i naimen'shikh nevyazok [Numerical solution of the Poisson equation in polar coordinates by the method of collocations and least residuals]. *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem – Modeling and Analysis of Information Systems*. 22(5). pp. 648–664. DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-648-664.
15. Zhong H., He Y. (1998) Solution of Poisson and Laplace equations by quadrilateral quadrature element. *International Journal of Solids and Structures*. 35(21). pp. 2805–2819. DOI: 10.1016/S0020-7683(97)00277-1.
16. Elsherbeny A.M., El-hassani R.M.I., El-badry H., Abdallah M.I. (2018) Solving 2D-Poisson equation using modified cubic B-spline differential quadrature method. *Ain Shams Engineering Journal*. 9(4). pp. 2879–2885. DOI: 10.1016/j.asej.2017.12.001.
17. Ghasemi M. (2017) Spline-based DQM for multi-dimensional PDEs: Application to biharmonic and Poisson equations in 2D and 3D. *Computers & Mathematics with Applications*. 73(7). pp. 1576–1592. DOI: 10.1016/j.camwa.2017.02.006.
18. Shi Z., Cao Y.-y., Chen Q.-j. (2012) Solving 2D and 3D Poisson equations and biharmonic equations by the Haar wavelet method. *Applied Mathematical Modelling*. 36(11). pp. 5143–5161. DOI: 10.1016/j.apm.2011.11.078.

19. Zhi S., Cao Y.-y. (2011) A spectral collocation method based on Haar wavelets for Poisson equations and biharmonic equations. *Mathematical and Computer Modelling*. 54(11–12). pp. 2858–2868. DOI: 10.1016/j.mcm.2011.07.006.
20. Bubenchikov A.M., Poponin V.S., Mel'nikova V.N. (2008) Matematicheskaya postanovka i reshenie prostranstvennykh kraevykh zadach metodom spektral'nykh elementov [Mathematical formulation and solution of spatial boundary value problems by means of spectral element method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(4). pp. 70–76.
21. Chernyshov A.D. (2014) Method of fast expansions for solving nonlinear differential equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 54(1). pp. 11–21. DOI: 10.1134/S0965542514010060.
22. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. (1959) *Theory of Plates and Shells*. 2nd edition. McGraw-Hill.
23. Eremeev P.G. (2006) *Prostranstvennye tonkolistovye metallicheskie konstruktsii pokrytiy* [Spatial light-gage metal construction coatings]. Moscow: Izdatel'stvo assotsiatsii stroitel'nykh vuzov.
24. Access mode: http://www.vashdom.ru/snip/II-23-81/index-7.htm.
25. Access mode: http://metallicheckiy-portal.ru/marki_metallov/stk/VSt3ps.
26. Chernyshov A.D., Popov V.M., Goryainov V.V., Leshonkov O.V. (2017) Investigation of contact thermal resistance in a finite cylinder with an internal source by the fast expansion method and the problem of consistency of boundary conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 90(5). pp. 1288–1297. DOI: 10.1007/s10891-017-1678-7.
27. Chernyshov A.D., Goryainov V.V., Danshin A.A. (2018) Analysis of the stress field in a wedge using the fast expansions with pointwise determined coefficients. *IOP Conference Series*: *Journal of Physics*. 973. Article 012002. DOI: 10.1088/174265.
28. Chernyshov A.D., Goryainov V.V. (2012) Reshenie odnogo nelineynogo integro-differentsial'nogo uravneniya metodom bystrykh razlozheniy [Solution of a nonlinear integro-differential equation by the fast expansion method]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya*: *Mekhanika predel'nogo sostoyaniya – Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series*: *Mechanics of Limit State*. 4(12). pp. 105–112.
29. Chernyshov A.D., Goryainov V.V., Chernyshov O.A. (2015) Application of the fast expansion method for spacecraft trajectory calculation. *Russian Aeronautics*. 58(2). pp. 180–186. DOI: 10.3103/S1068799815020075.
30. Chernyshov A.D. (2018) Solution of a nonlinear heat conduction equation for a curvilinear region with Dirichlet conditions by the fast-expansion method. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 91(2). pp. 433–444. DOI: 10.1007/s10891-018-1764-5.
31. Chernyshov A.D. (2010) Method of extension of boundaries for problems of heat conduction in bodies of mobile shape. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 83(5). pp. 1054–1060. DOI: 10.1007/s10891-010-0430-3.

Received: January 28, 2020

УДК 539.3
DOI 10.17223/19988621/70/12

А.А. Черняев

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМЫ ПАРАЛЛЕЛОГРАММНЫХ ПЛАСТИН В ЗАДАЧЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ

Рассмотрена задача свободных колебаний параллелограммных пластин, для решения которой исследована возможность использования приема геометрического моделирования формы пластин с помощью конформных радиусов. Показано, что изучение свободных колебаний параллелограммных пластин при изменении их геометрических параметров можно производить с использованием конформных радиусов, возникающих при конформном отображении области, ограниченной контуром пластины, на единичный круг. Рассмотрено использование данного приема для решения различных практических инженерных задач.

Ключевые слова: *геометрическое моделирование, параллелограммная пластина, свободные колебания, конформные радиусы.*

Параллелограммные пластины часто встречаются в качестве отдельных элементов конструкций, испытывающих различные виды нагрузок. Например колебания, возбужденные различными факторами, в частности свободные колебания от собственной массы. Так, в конструкциях обшивки крыла самолета, отличного от прямоугольного (треугольного, трапециевидного), неизбежно встречаются косоугольные пластины (параллелограммные, трапециевидные, треугольные), испытывающие во время эксплуатации, наряду со всеми элементами, динамические нагрузки, возбуждающие колебания этих элементов. Важной задачей при проектировании крыла является изучение колебаний как конструкции крыла в целом, так и отдельных его элементов, для недопущения таких опасных явлений, как резонанс или флаттер.

Трудность изучения колебаний параллелограммных пластин обусловлена тем, что геометрическая фигура в форме параллелограмма является сложной. Под формой фигуры подразумеваем совокупность инвариантов этой фигуры относительно группы подобий. Под сложной фигурой согласно [1] будем понимать фигуру, форма которой задается двумя и более независимыми геометрическими параметрами. Для параллелограмма это, например, острый угол при основании и отношение основания к высоте (два независимых параметра). А простой – фигуру, форма которой задается лишь одним геометрическим параметром. Это, например, прямоугольник, форму которого можно задать только соотношением сторон или ромб, форму которого можно задать одним внутренним углом между сторонами, или правильный многоугольник, форму которого можно задать количеством сторон и т.д.

Само по себе решение прямой задачи по определению частот и (или) форм колебаний параллелограммной пластины с заданными геометрическими параметрами и граничными условиями, в том числе сложными, в настоящее время не представляет большой сложности. Для ее решения можно воспользоваться различными как аналитическими [2] так и численными методами [3]. Однако, как известно [3], использование численных методов лишает задачу физического смысла и возможности качественной оценки результатов, а для их количественной оценки, например, при изменении геометрической формы пластины, и вовсе требуется выполнять полностью перерасчет задачи. Решения, получаемые отдельными аналитическими методами применительно к пластинам сложной формы, могут быть значительно трудоемкими, а получаемые результаты – сильно громоздкими и неудобными для качественной оценки задачи.

Геометрические методы лишены недостатков численных методов и значительно проще известных аналитических методов. Здесь под геометрическими методами понимается решения задач по определению различных физических и механических параметров, например частот колебаний, а также параметров напряженно-деформированного состояния, основанных на анализе только геометрической формы и использовании некоторых известных решений. Термин «геометрический метод» в широком использовании введен В.И. Коробко и А.В. Коробко при решении различных двумерных задач механики твердого тела, строительной механики, теории упругости, пластин и оболочек [4 – 6]. Кратко с геометрическими методами можно ознакомиться в обзорной статье [7]. Более подробно можно ознакомиться в указанных выше работах. Разработанные методы и приемы В.И. Коробко и А.В. Коробко, в широком смысле называемые «геометрическими», появились на основе развития известных изопериметрических неравенств и изопериметрических теорем [8], в которых геометрическую форму плоской области (пластины, мембраны, сечения) предложено характеризовать с помощью изопериметрического частного

$$\frac{4\pi A}{L^2}, \tag{1}$$

где A – площадь фигуры; L – ее периметр.

В этой же работе [8] при исследовании отдельных задач математической физики и теории упругости в качестве параметров были выбраны внутренний и внешний конформные радиусы плоской области (пластины), возникающие при конформном отображении внутренности и внешности области на единичный круг [9]. Причем конформные радиусы использовались как два независимых параметра, что повлекло существенные ограничения такого подхода. Первое ограничение – это невозможность изучать изменение исследуемых параметров при переходе одной фигуры в другую. Так, невозможно будет выяснить, как будет меняться какой-то параметр, например частота колебаний косоугольной пластины, когда при геометрическом преобразовании сдвига вершин ее форма будет меняться от треугольника до четырехугольника и квадрата, так как формулы по определению конформных радиусов различны для различных фигур. Второе ограничение следует из первого и заключается в том, что нельзя будет сравнить изучаемые параметры, скажем, для треугольной пластины и прямоугольной, так как это фигуры различных классов форм. Третий недостаток – это необходимость учитывать геометрические размеры (масштаб) пластины, так как конформные радиусы – размерные величины.

Для преодоления этих недостатков и развития геометрических методов в предыдущих работах [10 – 14] и др. в качестве параметра, определяющего форму плоской области (пластины, мембраны, поперечного сечения стержня), было предложено использовать отношение внутреннего и внешнего конформных радиусов, представляющее собой уже безразмерную величину, тем самым снимая указанные выше недостатки. Такой подход позволяет установить ряд изопериметрических свойств и закономерностей этого отношения, заменить решения математически сложных задач решениями простых геометрических задач. Также в [10] было установлено, что такая геометрическая характеристика формы имеет ряд преимуществ по сравнению с другими характеристика геометрической формы и является более перспективной к ее развитию.

Целью данной работы является изучение предлагаемого приема геометрического моделирования формы пластин с помощью отношения конформных радиусов в решении ряда задач свободных колебаний параллелограммных пластин.

Конформные радиусы и их отношение

Внутренний радиус плоской области относительно точки a – r_a, точка a берется внутри области. Отображаем конформно внутреннюю часть области на внутреннюю часть круга так, чтобы точке a соответствовал центр круга, а линейное растяжение в точке a равнялось единице. Радиус полученного таким образом круга будет равен r_a. Величина r_a изменяется в зависимости от точки a. При определенном положении точки a внутренний радиус достигает своего максимального значения, который обозначается $\dot{r}$.

Внешний радиус плоской области – $\overline{r}$. Отображаем конформно внешнюю область на внешнюю область круга так, чтобы бесконечно удаленные точки соответствовали друг другу, а линейное растяжение на бесконечности равнялось единице. Радиус полученного таким образом круга будет равен $\overline{r}$ [8, 15].

В научной литературе [8, 16] приводятся формулы по определению конформных радиусов для ряда односвязных областей. Приведем формулы для областей, которые будем использовать в работе:

- для ромбов с углом $\pi\alpha$

$$\dot{r} = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}L, \quad \overline{r} = \frac{\pi^{1/2}}{8\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}L; \tag{2}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, L – периметр;

- для прямоугольников со сторонами a и b ($a \geq b$)

$$\dot{r} = \frac{2}{\pi}b\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\right)^{-2}, \quad \begin{cases} \dfrac{a}{\overline{r}} = \pi\cos^2\alpha\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((2k-1)!!)^2}{2^{2k}(k+1)!k!}\cos^{2k}\alpha; \\ \dfrac{b}{\overline{r}} = \pi\sin^2\alpha\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((2k-1)!!)^2}{2^{2k}(k+1)!k!}\sin^{2k}\alpha, \end{cases} \tag{3}$$

где $q = e^{-\pi a/b}$; α – аргумент одного из прообразов вершин, расположенных симметрично; $(-1)!! = 1$.

В табл. 1 и 2 приводятся значения конформных радиусов и их отношения, полученные по формулам (2) и (3).

На рис. 1 показаны графики изменения отношения конформных радиусов $\dot{r}/\overline{r}$ и сами области.

Таблица 1

Значения внутреннего $\dot{r}$, внешнего $\overline{r}$ конформных радиусов и их отношения $\dot{r}/\overline{r}$ для ромбов

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\dot{r}/a$	0.1066	0.2036	0.2898	0.3643	0.4264	0.4754	0.5108	0.5322	0.5394
$\overline{r}/a$	0.5183	0.5348	0.5492	0.5616	0.5718	0.5798	0.5855	0.5890	0.5902
$\dot{r}/\overline{r}$	0.2057	0.3807	0.5277	0.6487	0.7457	0.8199	0.8724	0.9036	0.9139

Примечания: α – острый угол ромба; a – сторона ромба.

Таблица 2

Значения внутреннего $\dot{r}$, внешнего $\overline{r}$ конформных радиусов и их отношения $\dot{r}/\overline{r}$ для прямоугольников

a/b	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	10.0	$\to\infty$
$\dot{r}/a$	0.5394	0.4096	0.3159	0.2543	0.2121	0.1592	0.1273	0.0637	$2b/\pi$
$\overline{r}/a$	0.5902	0.4898	0.4374	0.4049	0.3826	0.3539	0.3361	0.2981	$a/4$
$\dot{r}/\overline{r}$	0.9139	0.8363	0.7222	0.6281	0.5544	0.4498	0.3788	0.2137	0

Примечание: a и b – стороны прямоугольника ($a \ge b$).

Для параллелограммов общих формул по определению конформных радиусов в научной литературе не приводится. Для их численного определения ранее [17] была использована формула Кристоффеля – Шварца [9] и приемы, предложенные в работе [18]. Численные значения отношения конформных радиусов $\dot{r}/\overline{r}$ для различных геометрических параметров приведены в табл. 3, в графической форме – на рис. 1, *c*.

Таблица 3

Значения отношения конформных радиусов $\dot{r}/\overline{r}$ для параллелограммов

α / a/h	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
1.0	–	–	–	–	–	–	–	–	0.9139
1.25	–	–	–	–	–	0.8191	0.8610	0.8822	0.8885
1.5	–	–	–	–	0.7415	0.7914	0.8185	0.8321	0.8363
1.75	–	–	–	0.6482	0.7136	0.7474	0.7658	0.7751	0.7779
2.0	–	–	0.5277	0.6302	0.6766	0.7007	0.7137	0.7203	0.7222
2.5	–	–	0.5185	0.5761	0.6022	0.6157	0.6231	0.6268	0.6281
3.0	–	0.3825	0.4861	0.5220	0.5383	0.5468	0.5514	0.5537	0.5544
4.0	–	0.3682	0.4173	0.4344	0.4421	0.4461	0.4482	0.4494	0.4498
5.0	–	0.3335	0.3609	0.3703	0.3747	0.3769	0.3781	0.3787	0.3788

Примечания: a/h – отношение большей стороны параллелограмма к меньшей высоте ($a/h \ge 1$); α – острый угол параллелограмма; прочерк «–» означает, что такой параллелограмм уже есть в таблице.

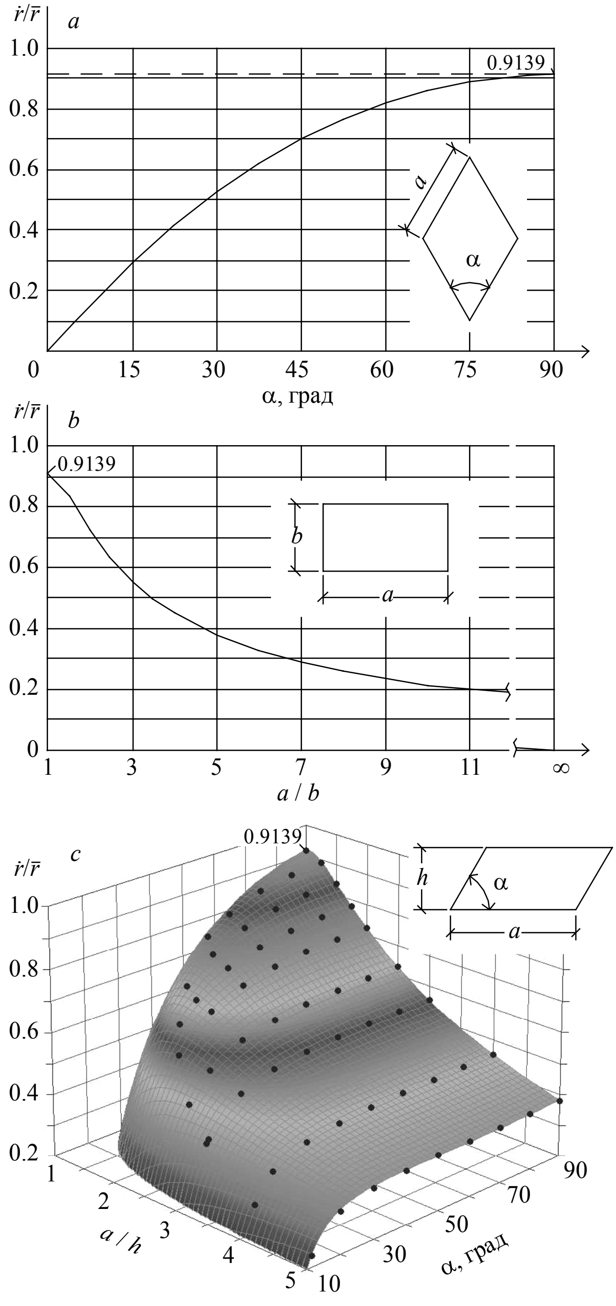


Рис. 1. Графики изменения отношения конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$ для рассматриваемых областей: *a* – для ромбов, *b* – для прямоугольников, *c* – для параллелограммов

Fig. 1. Graphical variation of the conformal radii ratio $\dot{r}/\bar{r}$ for the considered domains: (*a*) rhombus, (*b*) rectangle, and (*c*) parallelogram

По полученным табличным данным (табл. 1 – 3) с помощью программы Table Curve были получены аппроксимирующие функции по определению отношения конформных радиусов $\dot{r}/\overline{r}$:

- для ромбов

$$\dot{r}/\overline{r} = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4, \tag{4}$$

где $a = 7.0709 \cdot 10^{-5}$; $b = 0.022191$; $c = -0.00016784$; $d = 5.2896 \cdot 10^{-7}$; $e = -1.6694 \cdot 10^{-9}$ (погрешность функции не превышает 0.1%);

- для прямоугольников

$$\dot{r}/\overline{r} = p + j(a/b)^{-1} + c(a/b)^{-2} + d(a/b)^{-3} + e(a/b)^{-4} + f(a/b)^{-5} + g(a/b)^{-6}, \tag{5}$$

где $p = -1.3099 \cdot 10^{-5}$; $j = 2.5514$; $c = -2.6183$; $d = 2.4652$; $e = -2.682$; $f = 1.6828$; $g = -0.39913$ (погрешность функции не превышает 0.1%);

- для параллелограммов

$$\dot{r}/\overline{r} = k + b(a/h)^{-1} + c(\ln\alpha) + d(a/h)^{-2} + e(\ln\alpha)^2 + f(\ln\alpha)(a/h)^{-1} +$$

$$+ g(a/h)^{-3} + j(\ln\alpha)^3 + i(\ln\alpha)^2(a/h)^{-1} + p(\ln\alpha)(a/h)^{-2}, \tag{6}$$

где $k = -0.35747$; $b = -8.0875$; $c = 0.87769$; $d = -4.2622$; $e = -0.36236$; $f = 5.0926$; $g = 0.048766$; $j = 0.041774$; $i = -0.64312$; $p = 0.72539$ (погрешность функции не превышает 1.7%).

Взаимосвязь частоты колебаний пластин с отношением конформных радиусов

В предыдущих работах [10, 19] с помощью вариационного представления собственного значения дифференциального уравнения свободных колебаний мембраны и конформного представления внутренности ее области при отображении на единичный круг, а также на основе известной аналогии задач колебаний шарнирно опертых полигональных пластин и мембран [2] была получена следующая оценка сверху основной частоты колебаний пластин ω_0 с отношением конформных радиусов $\dot{r}/\overline{r}$ в виде неравенства

$$\omega_0 \le k\left(\frac{\dot{r}}{\overline{r}}\right)^{-1}\frac{\sqrt{D/m}}{A}, \tag{7}$$

где k – числовая константа, зависящая от вида граничных условий и обращающая неравенство (7) в равенство для круглой пластины; m – масса единицы площади пластины; A – площадь пластины; D – цилиндрическая жесткость пластины,

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \tag{8}$$

где E – модуль упругости материала первого рода (модуль Юнга); t – толщина пластины; ν – коэффициент Пуассона.

В случае жесткого защемления по контуру в неравенстве (7) $k = 32.08$. В случае шарнирного опирания по контуру значение k можно указать лишь для конкретного материала пластины, поскольку при переходе правильной n-угольной пластины в круглую с шарнирным опиранием возникает известный парадокс [20], согласно которому величина частоты колебаний будет зависеть от коэффициента Пуассона. Для такого случая граничных условий укажем, для сравнения, значение

$k = 17.8$, соответствующее пластине в форме правильного 16-угольника, по форме достаточно близкой к кругу.

Как показали исследования [19], завышенность оценки частоты ω_0 сверху, получаемой по выражению (7) при вытягивании формы пластины от круглой до «иглы», монотонно возрастает и достигает больших значений для сильно вытянутых пластин. Поэтому вместо числовой константы k были определены «подправляющие» функции вида $k_\omega = f\left(\dot{r}/\overline{r}\right)$ для всех простых форм пластин и получены соответствующие графики и функции. Приведем выборку [19] из этих графиков на рис. 2 для ромбовидных и прямоугольных пластин, которые будем использовать в работе. На рис. 2 значения k_ω основной частоты колебаний для удобства представлены в обратном виде.

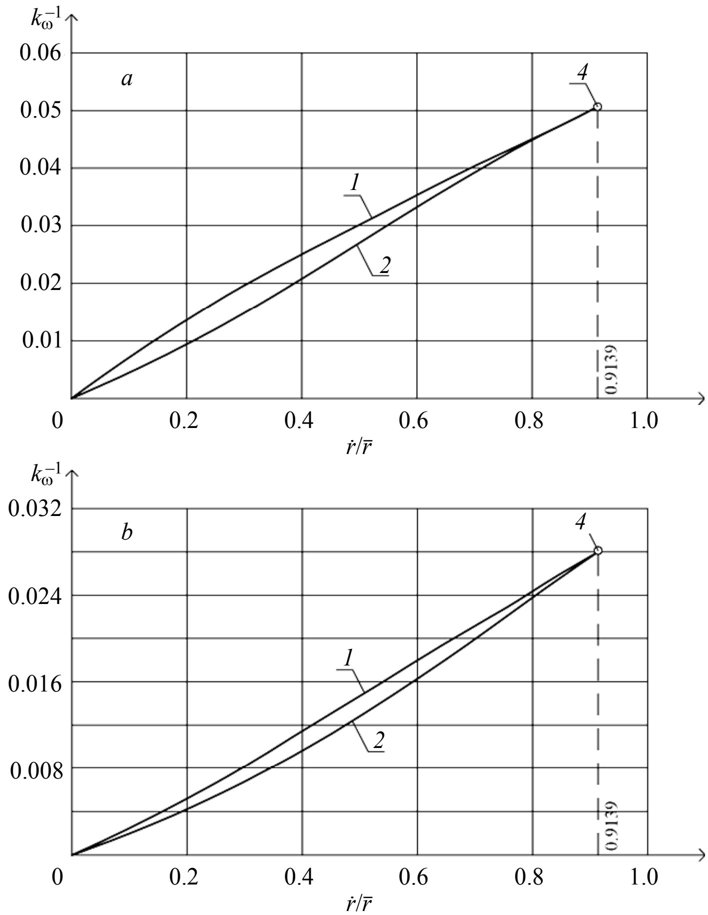


Рис. 2. Графики взаимосвязи частоты колебаний пластин с отношением конформных радиусов: *a* – шарнирное опирание, *b* – жесткое защемление; *1* – для ромбовидных, *2* – для прямоугольных, *4* – квадратная пластина

Fig. 2. Frequency of vibrations of plates as a function of conformal radii ratio: (*a*) hinged fixing and (*b*) rigid fixing; *1*, rhombus plates; *2*, rectangle plates; and *4*, a square plate

Приведем полученные в [19] функции, описывающие эти кривые.

При шарнирном опирании:

- для ромбовидных пластин

$$k_\omega = \frac{1 + 10.5197\left(\dot{r}/\overline{r}\right)^2 - 0.25437\left(\dot{r}/\overline{r}\right)^4}{0.38104\left(\dot{r}/\overline{r}\right)^2 + 0.24668\left(\dot{r}/\overline{r}\right)^4}; \qquad (9)$$

- для прямоугольных пластин

$$k_\omega = \frac{1}{0.03740\left(\dot{r}/\overline{r}\right) + 0.04951\left(\dot{r}/\overline{r}\right)^2 - 0.03260\left(\dot{r}/\overline{r}\right)^3}. \qquad (10)$$

При жестком защемлении:

- для ромбовидных пластин

$$k_\omega = \frac{1 + 5.0032\left(\dot{r}/\overline{r}\right)^2 - 1.2123\left(\dot{r}/\overline{r}\right)^4}{0.1241\left(\dot{r}/\overline{r}\right)^2 + 0.0254\left(\dot{r}/\overline{r}\right)^4}; \qquad (11)$$

- для прямоугольных пластин

$$k_\omega = \frac{1 - 0.7171\left(\dot{r}/\overline{r}\right) + 0.2996\left(\dot{r}/\overline{r}\right)^2}{0.0182\left(\dot{r}/\overline{r}\right)}. \qquad (12)$$

Приведенные аппроксиммирующие функции (9), (11) для ромбовидных пластин построены по известным из [2] приближенным решениям, полученным методом конечных элементов, для прямоугольных – (10) по известному точному решению и (12) – по решениям, полученным с помощью метода Галеркина [2].

В предыдущих работах [10, 19] было доказано, что значения основной частоты колебаний для всех параллелограммных пластин, представленные в зависимости от отношения конформных радиусов $\dot{r}/\overline{r}$, будут лежать внутри этих двух кривых и ограничены сверху значениями для прямоугольных пластин, снизу – для ромбовидных. Это важное свойство, построенные выше графики и функции для двух простых форм пластин (ромбовидных и прямоугольных), позволяет решать другие поставленные задачи для всех параллелограммных пластин, используя различные приемы геометрического моделирования формы. Варьирование форм невелико – это позволяет ожидать, что получаемые результаты будут достаточно точными.

Использование приемов геометрического моделирования формы в решении задач

Покажем на наглядном примере сущность геометрических методов с использованием отношения конформных радиусов. Требуется определить основную частоту колебаний шарнирно опертой параллелограммной пластины при следующих исходных данных: основание $a = 1$ м, высота $h = 0.5$ м, угол $\alpha = 60°$ (см. рис. 1, *c*), толщина пластины $t = 5$ мм; материал пластины сталь: модуль упругости $E = 2.06 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность $\rho = 7850$ кг/м^3.

Частота колебаний для заданной параллелограммной пластины может быть получена на основе значений для ромбовидных и прямоугольных. Сначала получим для частоты колебаний ω_0 оценки сверху и снизу.

Определяем значение отношения $\dot{r}/\overline{r}$ для заданной параллелограммной пластины по табл. 3 или функции (6) $\dot{r}/\overline{r} = 0.7007$. Графически по рис. 2, *a* или с помощью функций (9), (10) при $\dot{r}/\overline{r} = 0.7007$ определяем значение основной частоты колебаний в общем виде (7): для ромбовидной $k_\omega = 24.776$ ($k^{-1}{}_\omega = 0.04036$) и прямоугольной $k_\omega = 25.472$ ($k^{-1}{}_\omega = 0.03925$) пластин. Таким образом, значение основной частоты колебаний заданной параллелограммной пластины будет лежать между полученными двумя значениями:

$$24.776 \cdot \frac{\sqrt{D/m}}{A} < \omega_0 < 25.472 \cdot \frac{\sqrt{D/m}}{A}. \tag{13}$$

Заметим, что полученный интервал получился достаточно узким.

Определим значение цилиндрической жесткости по (8):

$$D = \frac{2.06 \cdot 10^{11} \cdot 0.005^3 \cdot 10^{-3}}{12\left(1 - 0.3^2\right)} = 2.358 \text{ кН·м},$$

массу единицы площади пластины, переведенную в кН (вес)

$$m = \rho \cdot t = 78.5 \cdot 0.005 = 0.3925 \text{ кН}.$$

и площадь пластины

$$A = a \cdot h = 1 \cdot 0.5 = 0.5 \text{ м}^2.$$

Тогда по (13), абсолютное значение основной частоты колебаний заданной параллелограммной пластины будет находиться между значениями

$$24.776 \cdot \frac{\sqrt{2.358/0.3925}}{0.5} < \omega_0 < 25.472 \cdot \frac{\sqrt{2.358/0.3925}}{0.5},$$

$$121.4 < \omega_0 < 124.8 \text{ с}^{-1}.$$

Теперь получим приближенное значение для ω_0. Выберем два «опорных» решения, одно для ромбовидной пластины, другое для прямоугольной таким образом чтобы заданная параллелограммная и «опорные» две пластины были связаны некоторым геометрическим преобразованием. В монографии [6] приводится ряд возможных геометрических преобразований, которые могут быть дополнены самостоятельно. Ограничимся рассмотрением трех наиболее наглядных преобразований, показанных на рис. 3.

Каждое геометрическое преобразование заданной параллелограммной пластины в пределе с одной стороны приводит к прямоугольной с (конкретным) геометрическим параметром a/b, определяющим ее форму, с другой – к ромбовидной с параметром α_1. Как видно из рис. 3, «опорные» прямоугольные и ромбовидные пластины получаются различными и это будет влиять на результат (точность) решения. Запишем полученные геометрические параметры «опорных» пластин для трех рассматриваемых преобразований. Для преобразования на рис. 3, *a* соотношение $a/b = 2.0$ для прямоугольной пластины, угол $\alpha_1 = 30°$ для ромбовидной пластины. Для преобразования на рис. 3, *b* соотношение $a/b = 2.909$ для прямоугольной пластины, угол $\alpha_1 = 46.76°$ для ромбовидной пластины. Для преобразования на рис. 3, *c* соотношение $a/b = 1.7778$ для прямоугольной пластины, угол $\alpha_1 = 18.9°$ для ромбовидной пластины. Геометрические параметры и все геометрические преобразования формы удобно выполнять и вычислять в любых современных компьютерных программах 2D-черчения.

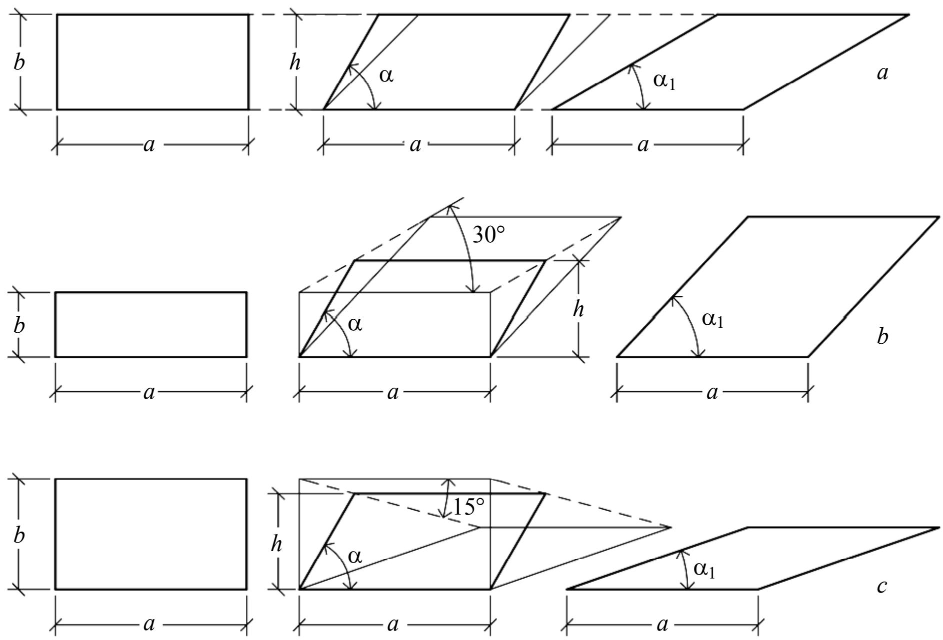


Рис. 3. Рассматриваемые геометрические преобразования: *a* – аффинный сдвиг, *b* – аффинный сдвиг с растяжением под углом 30°, *c* – аффинный сдвиг с сжатием под углом 15°
Fig. 3. Considered geometrical transformations: (*a*) affine shift, (*b*) affine shift with stretching at an angle of 30°, and (*c*) affine shift with compression at an angle of 15°

Отметим, что геометрические параметры, которые мы используем для нахождения и анализа решений, – это параметры, которые характеризуют лишь форму пластин. Масштаб (размеры, площадь) заданной пластины вводится в расчет лишь на последнем этапе, когда вычисляется абсолютное значение искомой величины (основной частоты колебаний). До этого момента все вычисления и анализ строились лишь на параметрах, характеризующих только форму заданной и «опорных» пластин, и решение рассматривалось в общем виде (7).

Вычислим по полученным геометрическим параметрам «опорных» пластин значения отношения $\dot{r}/\overline{r}$ по табл. 1, 2 или функциям (4), (5), а через него – значения основной частоты колебаний в общем виде (7) по рис. 2, *a* или с помощью функций (9), (10). Для преобразования на рис. 3, *a*: для ромбовидной $\dot{r}/\overline{r} = 0.5277$, $k_\omega = 31.218$ ($k^{-1}_\omega = 0.03203$) и прямоугольной $\dot{r}/\overline{r} = 0.7222$, $k_\omega = 24.665$ ($k^{-1}_\omega = 0.04054$). Для преобразования на рис. 3, *b*: для ромбовидной $\dot{r}/\overline{r} = 0.7168$, $k_\omega = 24.292$ ($k^{-1}_\omega = 0.04116$) и прямоугольной $\dot{r}/\overline{r} = 0.5664$, $k_\omega = 32.11$ ($k^{-1}_\omega = 0.03114$). Для преобразования на рис. 3, *c*: для ромбовидной $\dot{r}/\overline{r} = 0.3628$, $k_\omega = 43.732$ ($k^{-1}_\omega = 0.02286$) и прямоугольной $\dot{r}/\overline{r} = 0.7715$, $k_\omega = 23.066$ ($k^{-1}_\omega = 0.04335$). Покажем на рис. 4 полученные точки *1*, *2* для «опорных» пластин и кривую *3* для всех параллелограммных пластин, объединенных соответствующим геометрическим преобразованием.

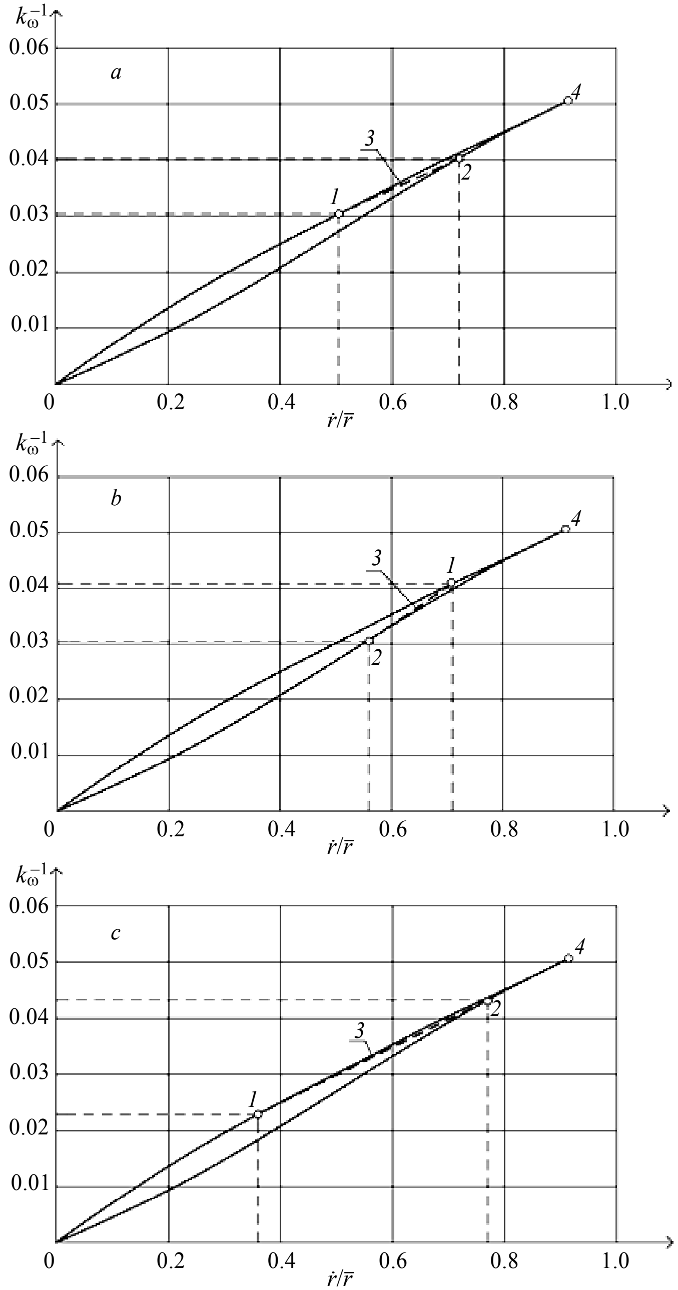


Рис. 4. Кривые, соответствующие рассматриваемым геометрическим преобразованиям: *a* – рис. 3, *a*; *b* – рис. 3, *b*; *c* – рис. 3, *c*: *1* – ромбовидная пластина, *2* – прямоугольная пластина, *3* – параллелограммные пластины

Fig. 4. Curves corresponding to the considered geometrical transformations: (*a*) fig. 3, *a*; (*b*) fig. 3, *b*; and (*c*) fig. 3, *c*: *1*, a rhombus plate; *2*, a rectangle plate; and *3*, parallelogram plates

Искомое решение для заданной параллеограммной пластины k_ω будет лежать на некоторой неизвестной кривой *3*, для приближенного описания которой в работе [6] были предложены и в работе [17] были аппробированы две простые интерполирующие (аппроксимирующие) функции:

- линейная (через две точки *1* и *2*)

$$k_\omega = k_{\omega 1} + \frac{\dot r/\overline{r} - (\dot r/\overline{r})_1}{(\dot r/\overline{r})_2 - (\dot r/\overline{r})_1}(k_{\omega 2} - k_{\omega 1}); \tag{14}$$

- и степенная (через три точки *0*, *1* и *2* или *1*, *2* и *4*), запишем вид функции для первого случая

$$k_\omega = k_{\omega 1}\left(\frac{\dot r/\overline{r}}{(\dot r/\overline{r})_1}\right)^n, \quad n = \frac{\ln(k_{\omega 2}/k_{\omega 1})}{\ln\left((\dot r/\overline{r})_2/(\dot r/\overline{r})_1\right)}. \tag{15}$$

Вопрос выбора линейной (14) или степенной (15) функции рассмотрен в работе [21], где приводятся рекомендации в каких случаях какую функцию использовать для получения результата с большей точностью. Также возможно применение и более сложных функций [6]. Ограничимся рассмотрением более простой функции (14) и посчитаем результаты для трех преобразований:

- для преобразования на рис. 3, *a*

$$k_\omega = 31.218 + \frac{0.7007 - 0.5277}{0.7222 - 0.5277}(24.665 - 31.218) = 25.389;$$

- для преобразования на рис. 3, *b* (нумерация индексов *1* и *2* при этом меняется местами)

$$k_\omega = 32.11 + \frac{0.7007 - 0.5664}{0.7168 - 0.5664}(24.292 - 32.11) = 25.128;$$

- для преобразования на рис. 3, *c*

$$k_\omega = 43.732 + \frac{0.7007 - 0.3628}{0.7715 - 0.3628}(23.066 - 43.732) = 26.646.$$

Первые два результата находятся в интервале (13), полученном ранее, и их можно дальше рассматривать и оценивать. Третий выпадает из интервала (13), поэтому уже на этом этапе его можно не рассматривать. Получилось это из-за того, что при геометрическом преобразовании по рис. 3, *c* «опорные» решения оказались сильно удалены друг от друга, поэтому вычисленный для этого преобразования результат является достаточно грубым приближением. Отсюда следует основная рекомендация при выборе преобразований: для того чтобы результат был наиболее точным, геометрические преобразования следует подбирать таким образом, чтобы «опорные» решения отстояли друг от друга на как можно меньшем расстоянии друг от друга, чтобы интерполяция (линейная или степенная) осуществлялась на наименьшем интервале.

Точного решения для заданной параллелограммной пластины нет. Поэтому, чтобы оценить полученные результаты, воспользуемся решением, полученным методом конечного элемента с использованием программного комплекса SCAD Office [22] в работе [21] с числом конечных элементов 992 и треугольной сеткой, полученным в общем виде (7) $k_\omega = 25.5$, абсолютное значение $\omega_0 = 125.0\ \text{с}^{-1}$.

Как видим, первое геометрическое преобразованием по рис. 3, *a* дает более близкий результат к численному, с отклонением всего –0.43%.

Рассмотренный в работе прием геометрического моделирования формы с помощью безразмерного параметра в виде отношения $\dot{r}/\overline{r}$ позволяет решать различные задачи как по нахождению непосредственно значения основной частоты колебаний для заданной конкретной пластины с конкретными геометрическими размерами и граничными условиями закрепления, так и более сложные и интересные для приложений задачи, связанные с отслеживанием изменения исследуемого параметра (основной частоты колебаний) при различном изменении геометрии параллелограммной пластины, а также поиску оптимальной геометрии по данным для двух «опорных» пластин простой формы (в форме ромба и прямоугольника).

Программная реализация предложенного приема

Рассмотренный в работе прием геометрического моделирования формы реализован в специально разработанной программе для ЭВМ, посвященной исследованию задачи на колебания пластин различной геометрии с использованием отношения $\dot{r}/\overline{r}$. На рис. 5 показана отдельная вкладка, посвященная параллелограммным пластинам.

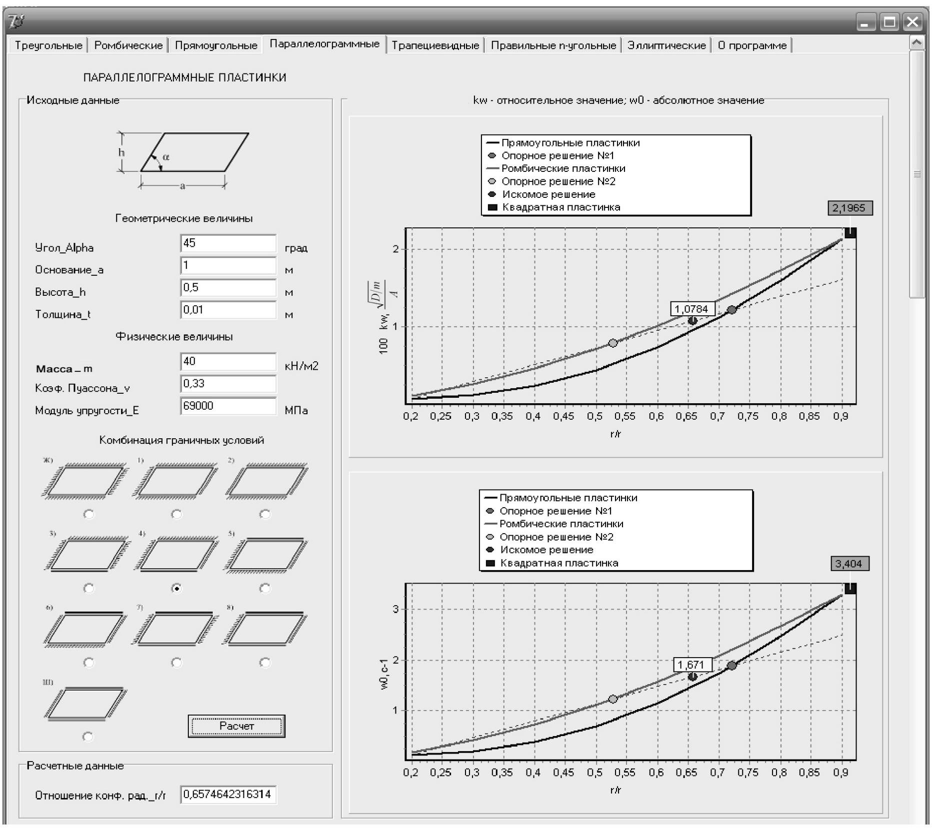


Рис. 5. Окно компьютерной программы для геометрического моделирования формы параллелограммных пластин

Fig. 5. Window of the computer program implementing geometric modeling of parallelogram plates

В программе добавлены граничные условия свободного края и также предусмотрен самостоятельный выбор закрепления сторон пластины, в том числе любые их комбинации. Возможен самостоятельный или автоматический выбор «опорных» пластин и геометрических преобразований из различного множества, встроенного в программу, с учетом отслеживания «непригодных» преобразований, дающих результаты «выпадающие» из границ (области значений). Возможен самостоятельный или автоматический выбор интерполирующих (аппроксимирующих) функций. Программа позволяет подобрать геометрию на заданную частоту колебаний, а также наглядно в «онлайн» режиме отследить ее изменение при изменении геометрических параметров. Результаты всех вычислений выводятся одновременно как в общем виде (7), когда производится анализ только геометрии пластин независимо от материала, так и в абсолютном значении с учетом всех характеристик материала и толщины пластины.

Заключение

Рассмотрено использование приема геометрического моделирования формы пластин с помощью отношения конформных радиусов в исследовании задачи по определению основной частоты колебаний на основе геометрических преобразований для параллелограммных пластин. Показано, что изучение свободных колебаний параллелограммных пластин при изменении ее геометрических параметров можно производить с использованием отношения конформных радиусов и ряда полученных ранее результатов для пластин в форме прямоугольника и ромба, не прибегая при этом к каким-либо дополнительным методам, а получая решения путем анализа лишь геометрической формы пластин и различных геометрических преобразований. Приводится краткое описание и общий вид разработанной программы для ЭВМ, реализующей предложенный прием.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коробко В.И.*, *Коробко А.В.* Количественная оценка симметрии. М.: Изд-во АСВ, 2008. 128 с.
2. *Коробко В.И.*, *Коробко А.В.* Строительная механика пластинок: Техническая теория. М.: Спектр, 2010. 410 с.
3. *Розин Л.А.* Задачи теории упругости и численные методы их решения. СПб.: СПбГПУ, 1998. 260 с.
4. *Коробко А.В.* Исследование напряженно-деформированного состояния косоугольных пластинок, мембран и сечений геометрическими методами: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17. Днепропетровск, 1993. 153 с.
5. *Коробко В.И.* Изопериметрический метод в строительной механике: Теоретические основы изопериметрического метода. М.: Изд-во АСВ, 1997. 390 с.
6. *Коробко А.В.* Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости. М.: Изд-во АСВ, 1999. 320 с.
7. *Коробко В.И.*, *Коробко А.В.*, *Савин С.Ю.*, *Черняев А.А.* Основные этапы развития геометрических методов решения двумерных задач теории упругости и строительной механики пластинок // Научное обозрение. Технические науки. 2016. № 3. С. 54–69.
8. *Полиа Г.*, *Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: КомКнига, 2006. 336 с.
9. *Driscoll T.A.*, *Trefethen L.N.* Schwarz – Christoffel Mapping. Cambridge University Press, 2002. 149 p.
10. *Коробко В.И.*, *Черняев А.А.* Отношение конформных радиусов – новый аргумент геометрических методов решения двумерных задач теории упругости // Вестник отделения строительных наук РААСН. 2012. № 16. Т. 1. С. 149–161.

11. *Korobko A.*, *Chernyaev A.*, *Korobko V.* Determination of basic dynamic vibration frequency at trapezoid plates using conformal radius ratio interpolation technique // Procedia Engineering. 2017. V. 206. P. 25–30. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.10.432.
12. *Chernyaev A.A.* Isoperimetric solution to problem of prismatic bar torsion // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2017. V. 87. P. 082009. DOI: 10.1088/1755-1315/87/8/082009.
13. *Korobko V.I.*, *Korobko A. V.*, *Savin S.Y.*, *Chernyaev A.A.* Solving the transverse bending problem of thin elastic orthotropic plates with form factor interpolation method // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. 2016. V. 10. No. 2. P. 9–17. DOI: 10.5937/jsscm1602009K.
14. *Черняев А.А.* Развитие метода интерполяции по отношению конформных радиусов для решения задач поперечного изгиба пластинок: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17. Орел, 2013. 211 с.
15. *Иванов В.И.*, *Попов В.Ю.* Конформные отображения и их приложения. М.: Едиториал УРСС, 2002. 324 с.
16. *Казанцев В.П.*, *Золотов О.А.*, *Долгополова М.В.* Электростатика на плоскости. Нормировка потенциала. Емкости уединенного проводника и линии относительно точки. Конформные радиусы // Вестник Красноярского государственного университета. Серия: физико-математические науки. 2005. № 1. С. 32–38.
17. *Коробко А.В.*, *Черняев А.А.* Определение максимального прогиба при поперечном изгибе параллелограммных пластинок с использованием отношения конформных радиусов // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2013. № 2. С. 19–22.
18. *Власов В.И.*, *Пальцев А.Б.* Аналитико-численный метод конформного отображения сложных областей // Доклады Академии наук. 2009. Т. 429. № 1. С. 12–14.
19. *Коробко А.В.*, *Черняев А.А.* Определение основной частоты свободных колебаний пластинок с использованием конформных радиусов // Строительство и реконструкция. 2011. № 1. С. 12–8.
20. *Мазья В. Г.*, *Назаров С. А.* Парадоксы предельного перехода в решениях краевых задач при аппроксимации гладких областей многоугольными // Известия академии наук СССР. Серия математическая. 1986. Т. 50. № 6. С. 1156–1177.
21. *Chernyaev A.* Improving the accuracy of geometric interpolation for determining fundamental frequency of parallelogram plates vibration // Procedia Engineering. 2017. V. 206. P. 31–34. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.10.433.
22. SCAD Office. Официальный сайт разработчиков. URL: http://scadsoft.com/ (дата обращения: 02.09.2019).

Статья поступила 10.09.2019

Chernyaev A.A. (2021) GEOMETRIC MODELING OF A SHAPE OF PARALLELOGRAM PLATES IN A PROBLEM OF FREE VIBRATIONS USING CONFORMAL RADII. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 143–159

DOI 10.17223/19988621/70/12

Keywords: geometric modeling, parallelogram plates, free vibrations, conformal radii.

The paper considers a method of geometric modeling applied when solving basic two-dimensional problems of the theory of elasticity and structural mechanics, in particular the applied problems of engineering. The subject of this study is vibrations of thin elastic parallelogram plates of constant thickness. To determine a basic frequency of vibrations, the interpolation method based on the geometric characteristic of the shape of plates (membrane, cross sections of a rod) is proposed. This characteristic represents a ratio of interior and exterior conformal radii of the plate. As is known from the theory of conformal mappings, conformal radii are those obtained by mapping of a plate onto the interior and exterior of a unit disk.

The paper presents basic terms, tables, and formulas related to the considered geometric method with a comparative analysis of the curve diagrams obtained using various interpolation formulas. The original computer program is also developed.

The main advantage of the proposed method of determining the basic frequency of plate vibrations is a graphic representation of results that allows one to accurately determine the required solution on the graph among the other solutions corresponding to the considered case of parallelogram plates. Although there are many known approximate approaches, which are used to solve the considered problems, only geometric modeling technique based on the conformal radii ratio gives such an opportunity.

Andrey A. CHERNYAEV (Candidate of Technical Sciences, Orel State University, Orel, Russian Federation). E-mail: chernyev87@yandex.ru

REFERENCES

1. Korobko V.I., Korobko A.V. (2008) *Kolichestvennaya otsenka simmetrii* [Quantitative evaluation of symmetry]. Moscow: ASV.
2. Korobko V.I., Korobko A.V. (2010) *Stroitel'naya mekhanika plastinok*: *Tekhnicheskaya teoriya* [Structural mechanics of plates: Technical theory]. Moscow: Spectr.
3. Rozin L.A. (1998) *Zadachi teorii uprugosti i chislennye metody ikh resheniya* [Problems of the theory of elasticity and numerical methods for their solving]. Saint Petersburg: SPbGPU.
4. Korobko A.V. (1993) *Issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya kosougol'nykh plastinok*, *membran i secheniy geometricheskimi metodami* [Investigation of the stress-strain state of oblique-angle plates, membranes, and sections by geometric methods]. Dissertation. Rostov-on-Don.
5. Korobko V.I. (1997) *Izoperimetricheskiy metod v stroitel'noy mekhanike*: *Teoreticheskie osnovy izoperimetricheskogo metoda* [Isoperimetric method in structural mechanics: Theoretical foundations of the isoperimetric method]. Moscow: ASV.
6. Korobko A.V. (1999) *Geometricheskoe modelirovanie formy oblasti v dvumernykh zadachakh teorii uprugosti* [Geometric modeling of a domain shape in two-dimensional problems of the elasticity theory]. Moscow: ASV.
7. Korobko V.I., Korobko A.V., Savin S.Yu., Chernyaev A.A. (2016) Osnovnye etapy razvitiya geometricheskikh metodov resheniya dvumernykh zadach teorii uprugosti i stroitel'noy mekhaniki plastinok [The main stages of development of geometric methods for solving two-dimensional problems in the theory of elasticity and structural mechanics of plates]. *Nauchnoe obozrenie. Tekhnicheskie nauki – Scientific Review. Technical science.* 3. pp. 54–69.
8. Polia G., Sege G. (2006) *Izoperimetricheskie neravenstva v matematicheskoy fizike* [Isoperimetric inequalities in mathematical physics]. Moscow: KomKniga.
9. Driscoll T.A., Trefethen L.N. (2002) *Schwarz – Christoffel Mapping*. Cambridge University Press.
10. Korobko V.I., Chernyaev A.A. (2012) Otnoshenie konformnykh radiusov – novyy argument geometricheskikh metodov resheniya dvumernykh zadach teorii uprugosti [The ratio of conformal radii is a new point of geometric methods for solving two-dimensional problems of the elasticity theory]. *Vestnik otdeleniya stroitel'nykh nauk RAASN*. 16(1). pp. 149–161.
11. Korobko A., Chernyaev A., Korobko V. (2017) Determination of basic dynamic vibration frequency at trapezoid plates using conformal radius ratio interpolation technique. *Procedia Engineering*. 206. pp. 25–30. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.10.432.
12. Chernyaev A.A. (2017) Isoperimetric solution to problem of prismatic bar torsion. *IOP Conference Series*: *Earth and Environmental Science*. 87. Article 082009. DOI: 10.1088/1755-1315/87/8/082009.
13. Korobko V.I., Korobko A.V., Savin S.Yu., Chernyaev A.A. (2016) Solving the transverse bending problem of thin elastic orthotropic plates with form factor interpolation method. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 10(2). pp. 9–17. DOI: 10.5937/jsscm1602009K.

14. Chernyaev A.A. (2013) *Razvitie metoda interpolyatsii po otnosheniyu konformnykh radiusov dlya resheniya zadach poperechnogo izgiba plastinok* [Development of an interpolation method with respect to conformal radii for solving problems on the transverse bending of plates]. Dissertation. Orel.
15. Ivanov V.I., Popov V.Yu. (2002) *Konformnye otobrazheniya i ikh prilozheniya* [Conformal mappings and their application]. Moscow: Editorial URSS.
16. Kazantsev V.P., Zolotov A.O., Dolgopolov M.V. (2005) Elektrostatika na ploskosti. Normirovka potentsiala. Yomkosti uedinennogo provodnika i linii otnositel'no tochki. Konformnye radiusy [Electrostatics on a plane. Normalization of potential. Capacity of the isolated conductor and the lines with respect to a point. Conformal radii]. *Vestnik Krasnoyarskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya*: *fiziko-matematicheskie nauki*. 1. pp. 32–38.
17. Korobko A.V., Chernyaev A.A. (2013) Determination of maximum deflection in transverse bending of parallelogram plates using the conformal radiuses ratio. *Russian Aeronautics*. 2. pp. 19–22. DOI: 10.3103/S1068799813020049.
18. Vlasov V.I., Paltsev A.B. (2009) An analytical-numerical method for conformal mappings of complex-shaped domains. *Doklady Mathematics*. 80(3). pp. 790–792. DOI: 10.1134/S1064562409060027.
19. Korobko A.V., Chernyaev A.A. (2011) Opredelenie osnovnoy chastoty svobodnykh kolebaniy plastinok s ispol'zovaniem konformnykh radiusov [Determination of a basic frequency of free oscillations of plates using conformal radii]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya – Journal of Building and Reconstruction*. 1. pp. 12–8.
20. Maz'ya V.G., Nazarov S.A. (1986) Paradoksy predel'nogo perekhoda v resheniyakh kraevykh zadach pri approksimatsii gladkikh oblastey mnogougol'nymi [Paradoxes of limit transition in solutions of boundary value problems with approximation of smooth domains by polygons]. *Izvestiya akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya – Izvestiya*: *Mathematics*. 50(6). pp. 1156–1177.
21. Chernyaev A. (2017) Improving the accuracy of geometric interpolation for determining fundamental frequency of parallelogram plates vibration. *Procedia Engineering*. 206. pp. 31–34. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.10.433.
22. SCAD Office. Official website of developers. URL: http://scadsoft.com/.

Received: September 10, 2019

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ВИКУЛИН Андрей Сергеевич – адъюнкт научно-исследовательского центра Военно-воздушной академии им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Россия. E-mail: mmiler5472@yandex.ru

ВОЛОДЧЕНКОВ Сергей Игоревич – кандидат физико-математических наук, руководитель отделения 7133 РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров, Россия. E-mail: serg_vol666@mail.ru

ВОРОБЬЕВ Александр Александрович – кандидат технических наук, начальник 22 отдела научно-исследовательского центра Военно-воздушной академии им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Россия. E-mail: aleksandr.vorobev.2012@bk.ru

ГАЛАЕВ Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия. E-mail: sgalaev@mail.ru

ГЛАЗУНОВ Анатолий Алексеевич – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией 105 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

ГОРЯЙНОВ Виталий Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и механики Воронежского государственного технического университета, г. Воронеж, Россия. E-mail: gorvit77@mail.ru

ИОХИМ Кристина Владимировна – инженер кафедры механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: iokhim.k@mail.ru

ИЩЕНКО Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

КАСИМОВ Владимир Зинатович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией 72 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ksm@niipmm.tsu.ru

КУЗНЕЦОВ Сергей Федорович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и информационных технологий Воронежского государственного университета инженерных технологий, г. Воронеж, Россия. E-mail: sfs134@mail.ru

МУХАМАДИЕВ Фарход Гафуржанович – доктор философии (PhD), доцент кафедры геометрии и топологии математического факультета Национального университета Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: farhod8717@mail.ru

НИКИФОРОВА Ольга Юрьевна – старший преподаватель кафедры высшей математики и информационных технологий Воронежского государственного университета инженерных технологий, г. Воронеж, Россия. E-mail: niki22@mail.ru

ПИМЕНОВ Станислав Александрович – доктор технических наук, старший научный сотрудник сектора имитационного моделирования филиала ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ» «НИИИС им. Ю.Е. Седакова», г. Нижний Новгород, Россия. E-mail: spimenov_m_fem@mail.ru

ПОПОВ Игорь Павлович – старший преподаватель кафедры технологии машиностроения, металлорежущих станков и инструментов Курганского государственного университета, г. Курган, Россия. E-mail: ip.popow@yandex.ru

РЫЛЬЦЕВ Иван Александрович – аспирант кафедры прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: stalak133@mail.ru

СИНЯЕВ Сергей Витальевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории 105 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ssv@niipmm.tsu.ru

СКРИПНЯК Владимир Альбертович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой деформируемого твердого тела Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: skrp2006@yandex.ru

СКРИПНЯК Владимир Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: skrp2012@yandex.ru

СОКОЛОВА Марина Юрьевна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной механики и математики Тульского государственного университета, г. Тула, Россия. E-mail: m.u.sokolova@gmail.com

УШАКОВА Ольга Владимировна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: olga@ftf.tsu.ru

ФИЛИМОНОВА Ольга Николаевна – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник научно-исследовательского центра Военно-воздушной академии им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Россия. E-mail: olga270757@rambler.ru

ФРОЛОВ Олег Юрьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: frolov@ftf.tsu.ru

ХРИСТИЧ Дмитрий Викторович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной механики и математики Тульского государственного университета, г. Тула, Россия. E-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

ЧЕРНЫШОВ Александр Данилович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и информационных технологий Воронежского государственного университета инженерных технологий, г. Воронеж, Россия. E-mail: chernyshovad@mail.ru

ЧЕРНЯЕВ Андрей Александрович – кандидат технических наук, доцент кафедры городского хозяйства и строительства автомобильных дорог Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева, г. Орел, Россия. E-mail: chernyev87@yandex.ru

ШРАГЕР Геннадий Рафаилович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: shg@ftf.tsu.ru

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634034, г. Томск, ул. Студенческая, 4

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 19.04.2021. Выпуск в свет 21.04.2021.
Формат 70 × 100 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 13.06. Уч.-изд. л. 14.63. Тираж 250 экз. Заказ № 8. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 4657.
http://publish.tsu.ru E-mail: rio.tsu@mail.ru