УДК. 515.12 MSC: 54B20, 54A25
DOI 10.17223/19988621/70/2

Ф.Г. Мухамадиев

О ЛОКАЛЬНОЙ СЛАБОЙ τ-ПЛОТНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Изучены вопросы локальной слабой τ-плотности топологических пространств. Найдены достаточные условия сохранения свойства локальной слабой τ-плотности подмножеств топологических пространств. Показано, что подмножество локально плотного пространства также является локально слабо τ-плотным, если оно удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий: а) подмножество открыто в пространстве; б) подмножество всюду плотно в пространстве; в) подмножество канонически замкнуто в пространстве.

Ключевые слова: *локальная τ-плотность*, *локальная слабая τ-плотность*, *локально компактное пространство*, *пространства Хаттори.*

Актуальным с точки зрения теоретического исследования является раздел общей топологии, где изучаются свойства топологических пространств и их непрерывных отображений, операции над топологическими пространствами и их отображениями, классификация топологических пространств. Этот раздел общей топологии оперирует такими понятиями, как окрестность, замыкание, компактность, плотность, сепарабельность, кардинальное число, π-база множеств, сумма, пересечение, тихоновское произведение и другими. Обзор основных этапов развития теоретико-множественной топологии приведен в работе [1]. Нас интересуют локальная слабая τ-плотность и локальная τ-плотность топологических пространств.

Семейство ν непустых открытых подмножеств топологического пространства X называется π-базой, если для любого открытого подмножества U пространства X найдется элемент семейства ν, лежащий в множестве U.

В работе [2] введено понятие слабой плотности топологического пространства. Слабой плотностью топологического пространства X называется наименьшее кардинальное число $\tau \geq \aleph_0$, такое, что в X существует π-база, распадающаяся на τ центрированных систем открытых множеств. Другими словами, существует π-база $\mathcal{B} = \bigcup\{B_\alpha : \alpha \in A\}$, где B_α – центрированная система открытых множеств для каждого $\alpha \in A$ и $|A| = \tau$. Слабая плотность топологического пространства X обозначается через $wd(X)$. Если $wd(X) = \aleph_0$, то топологическое пространство X называется слабо сепарабельным. В работе [2] получены следующие результаты.

Предложение 1 [2]. Слабая плотность топологических пространств обладает следующими свойствами:

Wd1) $wd(X) \leq d(X)$ для любого топологического пространства X;

Wd2) Пусть Y – непрерывный образ топологического пространства X. Тогда $wd(Y) \leq wd(X)$;

Wd3) $wd(X) = d(X)$ для любого:

а) локального компакта X;

б) метрического пространства X;

с) топологического линейно упорядоченного пространства X;

Wd4) Если Y – всюду плотное подмножество топологического пространства X, то $wd(Y) = wd(X)$;

Wd5) Если Y открыто в X, то $wd(Y) \le wd(X)$;

Wd6). Если $wd(X_s) \le \tau$ для каждого $s \in S$ и $|S| \le 2^{\tau}$, то $wd\left(\prod_{s\in S} X_s\right) \le \tau$.

Топологическое пространство X называется локально слабо сепарабельным [3] в точке $x \in X$, если x имеет слабую сепарабельную окрестность в X. Топологическое пространство X называется локально слабо сепарабельным, если оно локально слабо сепарабельно в каждой точке $x \in X$. Понятие локальной слабой сепарабельности может быть обобщено для любого кардинала $\tau \ge \aleph_0$. Топологическое пространство X называется локально слабо τ-плотным в точке $x \in X$, если τ наименьшее кардинальное число, такое, что x имеет окрестность слабой плотности τ в X [4]. Локальная слабая плотность в точке x обозначается через $lwd(x)$. Локальная слабая плотность пространства X есть точная верхняя грань всех кардинальных чисел $lwd(x)$ для $x \in X$:

$$lwd(X) = \sup\{\ lwd(x)\ : x \in X\ \}.$$

Множество называется канонически замкнутым, если оно является замыканием своей внутренности [5]. Пусть задано семейство $\{X_s\}_{s\in S}$ попарно непересекающихся топологических пространств, т.е. $X_s \cap X_{s'} = \varnothing$ для $s = s'$. Рассмотрим множество $X = \bigcup_{s\in S} X_s$ и семейство τ всех множеств $U \subset X$, таких, что $U \cap X_s$ открыто в X_s для каждого $s \in S$. Легко видеть, что семейство τ удовлетворяет условиям топологии и потому определяет некоторую топологию на множестве X. Множество X с этой топологией называется суммой пространств $\{X_s\}_{s\in S}$ и обозначается $\bigoplus_{s\in S} X_s$ или $X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_k$, если $S = \{1, 2, ..., k\}$ [3].

Топологическое пространство X называется локально τ-плотным в точке $x \in X$, если τ наименьшее кардинальное число такое, что x имеет окрестность плотности τ в X [4]. Локальная плотность в точке x обозначается через $ld(x)$. Локальная плотность пространства X определяется следующим образом:

$$ld(X) = \sup\{\ ld(x)\ : x \in X\ \}.$$

Очевидно, что локальная плотность топологических пространств не превосходит плотности этого пространства, т.е. $ld(X) \le d(X)$.

Пусть R – числовая прямая и $A \subseteq R$. Топология $\tau(A)$ в R определяется следующим образом:

1) Для любой точки $x \in R$ множество $\{(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ является базой окрестностей точки x;

2) Для любой точки $x \in R \setminus A$ множество $\{[x,\ x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ является базой окрестностей точки x [6].

Пространство R с топологией Хаттори называется пространством Хаттори и обозначается через $H(A)$ [7, 8]. В работе [7] изучены некоторые кардинальные и топологические свойства пространства Хаттори.

Пусть τ_E – евклидовая топология в прямой и τ_S – топология Зоргенфрея. Для любых подмножеств $A, B \subseteq R$ имеем отношение $A \supseteq B$ тогда и только тогда, когда $\tau(A) \subseteq \tau(B)$, в частности, имеем $\tau(R) = \tau_E \subseteq \tau(A)$, $\tau(B) \subseteq \tau(\varnothing) = \tau_S$. Положим, $P_{top}(R) = \{\tau(A) : A \subseteq R\}$. На множестве $P_{top}(R) = \{\tau(A) : A \subseteq R\}$ вводится частичный порядок $\leq$ относительно отношения: $A \supseteq B$ тогда и только тогда, когда $\tau(A) \leq \tau(B)$ [6].

В работе [8] доказано, что пространство Хаттори $H(A)$ является локально компактным тогда и только тогда, когда множество $R \backslash A$ замкнуто в R и дискретно в прямой Зоргенфрея S.

Топологическое пространство X называется локально компактным, если для каждого $x \in X$ существует окрестность U точки x, такая, что $\overline{U}$ является компактным подпространством пространства X [3]. В работе [9] доказано, что локальные плотности пространства X и пространства n-й симметрической степени пространства X равны.

Наименьшее кардинальное число $\tau \geq \aleph_0$, такое, что каждое замкнутое подмножество пространства X, состоящее только из изолированных точек, имеет мощность $\leq \tau$, называется экстентом пространства X: $e(X) = \sup\{|Y| : Y$ – замкнутое дискретное в $X\}$ [3].

Спрэд $s(X)$ пространства X есть наименьший бесконечный кардинал τ, такой, что мощность дискретного подпространства X не превосходит τ, т.е. $s(X) = \sup\{\tau : \tau = |Y|, Y \subset X, Y$ – дискретно в $X\}$ [3].

В настоящей работе изучаются вопросы локальной слабой τ-плотности топологических пространств, устанавливаются достаточные условия сохранения свойства локальной слабой τ-плотности подмножеств топологических пространств. Доказывается, что подмножество локально плотного пространства также является локально слабо τ-плотным, если оно удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий: а) подмножество открыто в пространстве; б) подмножество всюду плотно в пространстве; в) подмножество канонически замкнуто в пространстве. Приводится доказательство того, что сумма, пересечение и произведение локально слабо τ-плотных пространств также являются локально слабо τ-плотными пространствами. А также рассматриваются в локально компактных пространствах вопросы локальной τ-плотности и локальной слабой τ-плотности. Доказывается, что в локально компактных пространствах эти два понятия совпадают.

Основные результаты

Утверждение 1. Пусть X – локально слабо τ-плотное пространство и $f : X \to Y$ – непрерывное открытое отображение «на». Тогда Y также является локально слабо τ-плотным пространством.

Доказательство. Так как f – отображение «на», то для всякой точки $y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ – непустое подмножество в X. Для каждой точки $x \in f^{-1}(y)$ существует окрестность O_x, такая, что O_x – слабо τ-плотно. Так как f – открытое отображение, то $f(O_x)$ – открытое множество в Y и содержит точку y. В силу непрерывности f и предложения 1 из [2], множество $f(O_x)$ – слабо τ-плотно в Y. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Пусть X локально слабо τ-плотно и G – некоторое подмножество X. Если G удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий: а) G открыто в X; б) G всюду плотно в X; в) G канонически замкнуто в X, то G является локально слабо τ-плотным.

Доказательство. а) Пусть G – непустое открытое подмножество пространства X. Для любой точки $x \in G$ по определению существует окрестность $O_x \subset X$, такая, что O_x слабо τ-плотно. Тогда $O_x \cap G = O_x^{'}$ – непустое открытое множество в G, содержащее точку x. Так как всякое открытое подмножество слабо τ-плотного пространства слабо τ-плотно, то $O_x^{'}$ слабо τ-плотно.

б) Пусть $M \subset X$ – всюду плотное подмножество пространства X. Рассмотрим произвольную точку $y \in M$. Так как X локально слабо τ-плотно, то существует окрестность $O_y \subset X$ точки y, такая, что O_y слабо τ-плотно. Рассмотрим $O_y \cap M = O_y^{'}$. Тогда $O_y^{'}$ непустое открытое подмножество в M. Кроме того, $O_y^{'} \subseteq O_y$ и $O_y^{'}$ всюду плотно в O_y. Так как всякое всюду плотное подмножество слабо τ-плотного пространства слабо τ-плотно (см. предложение 1), то $O_y^{'}$ слабо τ-плотно.

в) Пусть G – канонически замкнутое подмножество пространства X. Тогда существует открытое множество U, такое, что $G = [U]$. Тогда, в силу пункта а) U локально слабо τ-плотно. Возьмем произвольную точку $z \in G$ и слабо τ-плотную окрестность $O_z \subset X$. Тогда $O_z^{'} = O_z \cap G$ – непустое открытое подмножество в G. Рассмотрим $V = O_z \cap U$, поскольку всякое открытое подмножество слабо τ-плотного пространства слабо τ-плотно, то V слабо τ-плотно. С другой стороны, V всюду плотно в $O_z^{'}$. Тогда в силу предложения 1 из [2, Wd4] окрестность $O_z^{'}$ точки z является слабо τ-плотным. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. Пусть X_α – локально слабо τ-плотное пространство для каждого $\alpha \in A$. Тогда $X = \oplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ также локально слабо τ-плотно.

Доказательство. Пусть $x \in X$ – произвольная точка. Тогда существует такой $\alpha \in A$, что $x_\alpha \in X_\alpha$. Так как пространство X_α локально слабо τ-плотно, то существует окрестность $O_{x_\alpha} \subset X_\alpha$ точки x_α, где O_{x_α} – слабо τ-плотно. Так как пространство X_α открыто-замкнуто в X, то O_{x_α} открыто и слабо τ-плотно в X. Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. Пусть $X_i \subset X$, $i = 1, 2, ..., n$, и каждое X_i локально слабо τ-плотно. Тогда $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$ также локально слабо τ-плотно.

Доказательство. Пусть $x \in \bigcap_{i=1}^{n} X_i$ – произвольная точка. Тогда $x \in X_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Так как пространство X_i локально слабо τ-плотно, то существует окрестность $O_x^i \subset X_i$, такая, что O_x^i слабо τ-плотно для каждого $i = 1, 2, ..., n$. Положим $\bigcap_{i=1}^{n} O_x^i = O_x$. Тогда O_x открытое множество в O_x^i, $i = 1, 2, ..., n$, и в силу предложения 1 из [2] получим, что O_x слабо τ-плотно в $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$. Утверждение 4 доказано.

Теорема 1. Тихоновское произведение $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ локально слабо τ-плотно тогда и только тогда, когда X_i локально слабо τ-плотно для каждого $i = 1, 2, ..., n$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ и $p_i : X \to X_i$ проекция X на X_i, т. е. $p\ (\{x_k\}) = x_i$, $x = \{x_k\} \in X$, $k = 1, 2, ..., n$. Так как $p_i\ \ (i = 1, 2, ..., n)$ – непрерывные открытые отображения «на», то в силу предложения 1 получим, что для каждого $i = 1, 2, ..., n$ пространство X_i локально слабо τ-плотно.

Достаточность. Пусть $x = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ произвольная точка из *X*. Поскольку X_i локально слабо τ-плотно для каждого $i = 1, 2, ..., n$, то существует слабо τ-плотные окрестности O_{x_i} точки x_i в X_i. Пусть $O_x = O_{x_1} \times O_{x_2} \times ... \times O_{x_n}$ – декартово произведение окрестностей O_{x_i}, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда O_x слабо τ-плотно (см. предложение 1 из [2, Wd6]). Значит, O_x – слабо τ-плотная окрестность точки *x*. Теорема 1 доказана.

Пусть τ – некоторое бесконечное кардинальное число. Рассмотрим семейство топологических пространств $\{X_s : s \in S\}$, где $|S| \le 2^\tau$.

Теорема 2. Если все пространства X_s локально слабо τ-плотны и существует конечное множество $S_0 \subset S$, такое, что X_s слабо τ-плотны при всех $s \in S \setminus S_0$, то произведение $\prod_{s \in S} X_s$ локально слабо τ-плотно.

Доказательство. Возьмем любую точку $x = \{x_s : s \in S\}$ из произведения $\prod_{s \in S} X_s$. Для точки $x_s \in X_s$ при $s \in S_0$, в силу локальной слабой τ-плотности пространства X_s существует окрестность U_s слабой плотности $\le \tau$. Множество $\prod_{s \in S_0} U_s \times \prod_{s \in S \setminus S_0} X_s$ является окрестностью точки x в $\prod_{s \in S} X_s$ и в силу предложения 1 из [2] $wd\left(\prod_{s \in S_0} U_s \times \prod_{s \in S \setminus S_0} X_s\right) \le \tau$. Итак, мы нашли слабую τ-плотную окрестность точки x в $\prod_{s \in S} X_s$. В силу произвольности точки *x*, произведения $\prod_{s \in S} X_s$ локально слабо τ-плотно. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Если пространство X_s локально слабо сепарабельно для каждого $s \in S$ и $|S| \leq c$ и, кроме того, существует конечное подмножество S_0 множества S, такое, что все X_s слабо сепарабельны для $s \in S \setminus S_0$, то произведение $\prod_{s \in S} X_s$ локально слабо сепарабельно.

Теорема 3. Пусть произведение $\prod_{s \in S} X_s$ локально слабо τ-плотно. Тогда существует конечное подмножество S_0 множества *S*, такое, что X_s является слабо τ-плотным при $s \in S \setminus S_0$.

Доказательство. Берем произвольную точку $x = \{x_s : s \in S\}$ из произведения $\prod_{s \in S} X_s$. В силу локальной слабой τ-плотности произведения $\prod_{s \in S} X_s$, точка *x* имеет базовую окрестность $\prod_{s \in S_0} U_s \times \prod_{s \in S \setminus S_0} X_s$ слабую плотности τ, где S_0 конечное подмножество множества S и $x_s \in U_s$ для $s \in S_0$. Так как слабая плотность сохраняется при открытом отображении и проектирование есть открытое отображение, то все X_s слабо τ-плотны при $s \in S \setminus S_0$. Теорема 3 доказана.

Следствие 2. Пусть произведение $\prod_{s \in S} X_s$ локально слабо сепарабельно. Тогда существует конечное подмножество S_0 множества *S*, такое, что все X_s слабо сепарабельны при $s \in S \setminus S_0$.

Утверждение 5. Пусть *X* – локально компактное пространство. Тогда пространства *X* локально τ-плотно в том и только в том случае, когда *X* локально слабо τ-плотно.

Доказательство. Сначала докажем случай, когда *X* – локально компактное пространство. Тогда следующие два условия эквивалентны: 1) X локально слабо τ-плотно; 2) *X* локально τ-плотно. Пусть $x \in X$ и O_x – слабо τ-плотная окрестность точки x. Поскольку всякое открытое подмножество локально компактного пространства локально компактно, то O_x локально компактно. Так как слабо τ-плотное локально компактное пространство τ-плотно (см. предложение 1 из [2, Wd3]), то O_x τ-плотно. Следовательно, *X* локально τ-плотно. Обратное утверждение следует из того, что $wd(X) \leq d(X)$ [2].

Как мы отмечали выше, в работе [8] доказано, что пространства Хаттори $H(A)$ является локально компактным тогда и только тогда, когда множество $R \setminus A$ замкнуто в *R* и дискретно в прямой Зоргенфрея *S*. Поэтому, в силу утверждения 5, мы приходим к следующему следствию.

Следствие 3. Континуальная степень пространства Хаттори $(H(A))^c$ слабо сепарабельно при любом *A* из *R*.

Следствие 4. Пусть множество $R \setminus A$ замкнуто в *R* и дискретно в прямой Зоргенфрея *S*. Тогда континуальная степень пространства Хаттори $(H(A))^c$ локально сепарабельна и локально слабо сепарабельна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров П.С.*, *Федорчук В.В.*, *Зайцев В.И.* Основные моменты в развитии теоретико-множественной топологии // УМН. 1978. Т. 33. Вып. 3(201). С. 3–48.
2. *Бешимов Р.Б.* О слабой плотности топологических пространств // ДАН РУз. 2000. № 11. С. 10–13.
3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
4. *Beshimov R.B.*, *Mukhamadiev F.G.*, *Mamadaliev N.K.* The local density and the local weak density of hyperspaces // International Journal of Geometry – Romania. 2015. V. 4. No. 1. P. 42–49.
5. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций. М.: МГУ, 1989. 151 с.
6. *Hattory Y.* Order and topological structures of posets of the formal balls on metric spaces // Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Ser. B Math. Sci. 2010. V. 43. P. 13–26.
7. *Beshimov R.B.*, *Mukhamadiev F.G.* Cardinal properties of Hattori spaces and their hyperspaces // Questions and Answers in General Topology. 2015. V. 33. P. 33–38.
8. *Bouziad A.*, *Sukhacheva E.* On Hattori spaces. // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 2017. No. 2. P. 213–223. DOI: 10.14712/1213-7243.2015.199.
9. *Yuldashev T.K.*, *Mukhamadiev F.G.* The local density and the local weak density in the space of permutation degree and in Hattori space // Ural Mathematical Journal. 2020. V. 6. No. 2. P. 108–116.

Статья поступила 22.01.2021

Mukhamadiev F.G. (2021) ON LOCAL WEAK τ-DENSITY OF TOPOLOGICAL SPACES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 16–23

DOI 10.17223/19988621/70/2

Keywords: local τ-density, local weak τ-density, locally compact space, Hattori spaces.

A topological space X is locally weakly separable [3] at a point $x \in X$ if x has a weakly separable neighbourhood. A topological space X is locally weakly separable if X is locally weakly separable at every point $x \in X$. The notion of local weak separability can be generalized for any cardinal $\tau \geq \aleph_0$. A topological space X is locally weakly τ-dense at a point $x \in X$ if τ is the smallest cardinal number such that x has a weak τ-dense neighborhood in X [4]. The local weak density at a point x is denoted as $lwd(x)$. The local weak density of a topological space X is defined in following way: $lwd(X) = \sup\{ lwd(x) : x \in X \}$. A topological space X is locally τ-dense at a point $x \in X$ if τ is the smallest cardinal number such that x has a τ-dense neighborhood in X [4]. The local density at a point x is denoted as $ld(x)$. The local density of a topological space X is defined in following way: $ld(X) = \sup\{ ld(x) : x \in X \}$. It is known that for any topological space we have $ld(X) \leq d(X)$.

In this paper, we study questions of the local weak τ-density of topological spaces and establish sufficient conditions for the preservation of the property of a local weak τ-density of subsets of topological spaces. It is proved that a subset of a locally τ-dense space is also locally weakly τ-dense if it satisfies at least one of the following conditions: (a) the subset is open in the space; (b) the subset is everywhere dense in space; (c) the subset is canonically closed in space. A proof is given that the sum, intersection, and product of locally weakly τ-dense spaces are also locally weakly τ-dense spaces. And also questions of local τ-density and local weak τ-density are considered in locally compact spaces. It is proved that these two concepts coincide in locally compact spaces.

AMS Mathematical Subject Classification: 54B20, 54A25

Farkhod Gafurjanovich MUKHAMADIEV (Doctor of Philosophy (PhD) Physical and Mathematical Science, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; Yeoju Technical Institute in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: farhod8717@mail.ru

REFERENCES

1. Aleksandrov P.S., Fedorchuk V.V., Zaytsev V.I. (1978) The main aspects in the development of set-theoretical topology. *Russian Mathematical Surveys*. 33: 3(1). pp. 1–53.
2. Beshimov R.B. (2000) O slaboy plotnosti topologicheskikh prostranstv [On weak density of topological spaces]. *Doklady Akademii Nauk Respubliki Uzbekistan*. 11. pp. 10–13.
3. Engelking R. (1989) *General Topology*. Berlin: Heldermann.
4. Beshimov R.B., Mukhamadiev F.G., Mamadaliev N.K. (2015) The local density and the local weak density of hyperspaces. *International Journal of Geometry*. 4(1). pp. 42–49.
5. Arkhangel'skii A.V. (1992) *Topological Function Spaces*. Springer.
6. Hattory Y. (2010) Order and topological structures of posets of the formal balls on metric spaces. *Memoirs of the Faculty of Science and Engineering Shimane University. Series B. Mathematical Science.* 43. pp. 13–26.
7. Beshimov R.B., Mukhamadiev F.G. (2015) Cardinal properties of Hattori spaces and their hyperspaces. *Questions and Answers in General Topology*. 33. pp. 33–38.
8. Bouziad A., Sukhacheva E. (2017) On Hattori spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*. 58(2). pp. 213–223. DOI: 10.14712/1213-7243.2015.199.
9. Yuldashev T.K., Mukhamadiev F.G. (2020) The local density and the local weak density in the space of permutation degree and in Hattori space. *Ural Mathematical Journal*. 6(2). pp. 108–116.

Received: January 22, 2021