

УДК 531.391  
DOI 10.17223/19988621/70/6

И.П. Попов

## РЕАКТАНСЫ И САССЕПТАНСЫ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Цель исследования состоит в разработке существенно компактных методов расчета механических систем при гармонических силовых воздействиях для установившихся режимов. При решении использованы подходы, применяемые для расчета электрических цепей. Представление гармонических величин в виде вращающихся векторов в комплексной плоскости и операций с их комплексными амплитудами позволяет многократно облегчить расчет механических систем. Ключевую роль в предложенном методе играют механические реактанс, резистанс и импеданс для параллельного соединения потребителей механической мощности и сасцептанс, кондактанс и адмитанс – для последовательного.

**Ключевые слова:** реактанс, резистанс, импеданс, сасцептанс, кондактанс, адмитанс.

Классическое решение задач, связанных с расчетом скоростей и реакций элементов сложных механических систем при гармоническом силовом воздействии, заключается в составлении и интегрировании систем дифференциальных уравнений и является достаточно громоздким и трудоемким [1, 2].

В большинстве случаев интерес ограничивается установившимся режимом.

Цель исследования состоит в разработке существенно компактных методов расчета систем для установившихся режимов.

При решении использованы методы, применяемые для расчета электрических цепей.

### Параллельное соединение потребителей механической мощности

Точки приложения сил к потребителям механической мощности (рис. 1) обла- дают единой скоростью

$$v = V \sin \omega t . \quad (1)$$

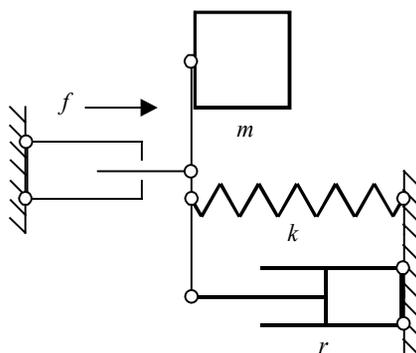


Рис. 1. Параллельное соединение  
Fig. 1. Parallel connection

Силы, приложенные к инертному телу, упругому элементу и демпферу, соответственно равны

$$f_m = m \frac{dv}{dt} = m\omega V \cos \omega t ; \quad (2)$$

$$f_k = -kx = k \int v dt = -\frac{k}{\omega} V \cos \omega t ; \quad (3)$$

$$f_r = rv = rV \sin \omega t . \quad (4)$$

Суммарная сила, развиваемая источником силового гармонического воздействия, равна

$$\begin{aligned} f &= f_m + f_k + f_r = V \left[ \left( m\omega - \frac{k}{\omega} \right) \cos \omega t + r \sin \omega t \right] = \\ &= V \sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2} \left[ \frac{m\omega - k/\omega}{\sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2}} \cos \omega t + \frac{r}{\sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2}} \sin \omega t \right] . \end{aligned}$$

Пусть 
$$\varphi = \arctg \frac{m\omega - k/\omega}{r} . \quad (5)$$

Тогда 
$$\begin{aligned} f &= V \sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2} (\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t) = \\ &= V \sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2} \sin(\omega t + \varphi) = F \sin(\omega t + \varphi) . \end{aligned} \quad (6)$$

Это известная формула вынужденных колебаний, для получения которой не потребовалось составлять и решать дифференциальное уравнение.

Амплитуда суммарной силы

$$F = Vz , \quad (7)$$

где 
$$z = \sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2} \text{ [кг} \cdot \text{с}^{-1}\text{]} . \quad (8)$$

В 1873 г. Максвелл ввел первую (из двух) систему электро-механических аналогий:

- (скорость)  $V \Rightarrow I$  (ток),
- (сила)  $F \Rightarrow U$  (напряжение),
- (масса)  $m \Rightarrow L$  (индуктивность),
- (коэффициент упругости)  $k \Rightarrow 1/C$  ( $C$  – емкость),
- (коэффициент вязкого сопротивления)  $r \Rightarrow R$  (сопротивление).

В 1919 г. Вебстер ввел в механику заимствованное из электротехники понятие о механических реактансах, являющихся аналогами электрических реактивных сопротивлений:

- (инертный реактанс)  $\omega m \Rightarrow \omega L$  (индуктивное сопротивление),
- (упругий реактанс)  $k/\omega \Rightarrow 1/(\omega C)$  (емкостное сопротивление).

В соответствии с представленной системой аналогий выражение (7) дуально закону Ома для участка электрической цепи

$$U = IZ ,$$

где  $Z = \sqrt{[\omega L - 1/(\omega C)]^2 + R^2}$  – полное сопротивление. Следовательно, выражение (8) – это *механический импеданс* (impedance), как в силу дуального соответствия, так и потому, что в его состав входят инертный и упругий реактансы.

Механический реактанс (reactance) равен

$$x = m\omega - \frac{k}{\omega}.$$

При  $x = 0$  получается известная формула  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Имеет место резонанс сил [3]. Если при этом  $r = 0$ , то и  $z = 0$ . Физический смысл этого состоит в том, что система не оказывает сопротивления внешнему силовому гармоническому воздействию.

Для единообразия терминологии величина  $r$  в дальнейшем называется механическим резистансом (resistance).

### Комплексное представление при параллельном соединении.

По аналогии с электротехникой гармоническую величину можно представить в виде

$$a = A \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im}[Ae^{i(\omega t + \varphi)}],$$

где  $Ae^{i(\omega t + \varphi)}$  – вращающийся в комплексной плоскости вектор.

Векторы в комплексной плоскости принято изображать для нулевого момента времени. При этом величина

$$Ae^{i(\omega 0 + \varphi)} = Ae^{i\varphi} = \dot{A}$$

называется комплексной амплитудой.

В соответствии с этим выражение (1) можно представить в виде

$$v = V \sin \omega t = \text{Im}(Ve^{i\omega t}),$$

$$\dot{V} = Ve^{i0}.$$

Формула (2) показывает, что  $f_m$  опережает по фазе  $v$  на  $\pi/2$ . Следовательно,

$$\dot{F}_m = m\omega \dot{V} e^{i\frac{\pi}{2}} = \underline{x}_m \dot{V},$$

$$\text{где} \quad \underline{x}_m = \omega m e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega m \quad (9)$$

– инертный реактанс в комплексном представлении.

Над комплексными величинами, не являющимися изображениями синусоиды, точка не ставится, такие величины подчеркиваются.

Комплексная амплитуда инертной силы равна

$$\dot{F}_m = \omega m e^{i\frac{\pi}{2}} V e^{i0} = \omega m V e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Аналогично, с учетом (3) и (4)

$$\dot{F}_k = -\frac{k}{\omega} \dot{V} e^{i\frac{\pi}{2}} = \underline{x}_k \dot{V},$$

$$\text{где} \quad \underline{x}_k = -\frac{k}{\omega} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{k}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \frac{k}{\omega} \quad (10)$$

– упругий реактанс;

$$\dot{F}_r = r \dot{V} = \underline{r} \dot{V}, \quad \underline{r} = r$$

– резистанс.

Комплексные амплитуды упругой и резистивной сил соответственно равны

$$\dot{F}_k = \frac{k}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} V e^{i0} = \frac{k}{\omega} V e^{-i\frac{\pi}{2}};$$

$$\dot{F}_r = r \dot{V} = r e^{i0} V e^{i0}.$$

а механические реактанс и импеданс

$$\underline{x} = \underline{x}_m + \underline{x}_k = \left( m\omega - \frac{k}{\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}};$$

$$\underline{z} = r + \underline{x} = r + \left( m\omega - \frac{k}{\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Модуль механического импеданса совпадает с (8):

$$Z = \sqrt{r^2 + \left( m\omega - \frac{k}{\omega} \right)^2}.$$

Его фаза равна (5). Таким образом,

$$\underline{z} = Z e^{i\varphi}.$$

Суммарная сила, развиваемая источником силового гармонического воздействия, равна

$$\dot{F} = \underline{z} \dot{V} = Z V e^{i\varphi}, \quad (11)$$

что соответствует (6).

**Пример 1.**  $\dot{F} = 100e^{i0}$  Н,  $\omega = 2$  рад/с,  $m = 10$  кг,  $k = 20$  кг·с<sup>-2</sup>,  $r = 7$  кг·с<sup>-1</sup>.  
Найти скорость и составляющие силы в установившемся режиме.

$$\underline{x}_m = \omega m e^{i90^\circ} = 20e^{i90^\circ} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\underline{x}_k = \frac{k}{\omega} e^{-i90^\circ} = 10e^{-i90^\circ} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1}.$$

$$Z = \sqrt{r^2 + (x_m - x_k)^2} = \sqrt{7^2 + (20 - 10)^2} = 12,207 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1}.$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{x_m - x_k}{r} = \text{arctg} \frac{20 - 10}{7} = 55^\circ,$$

$$\underline{z} = Z e^{i\varphi} = 12,207 e^{i55^\circ} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1}.$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100e^{i0}}{12,207 e^{i55^\circ}} \approx 8,192 e^{-i55^\circ} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (12)$$

$$\dot{F}_m = \underline{x}_m \dot{V} = 20e^{i90^\circ} \cdot 8,192 e^{-i55^\circ} = 163,846 e^{i35^\circ} \text{ Н},$$

$$\dot{F}_k = \underline{x}_k \dot{V} = 10e^{-i90^\circ} \cdot 8,192 e^{-i55^\circ} = 81,923 e^{-i145^\circ} \text{ Н},$$

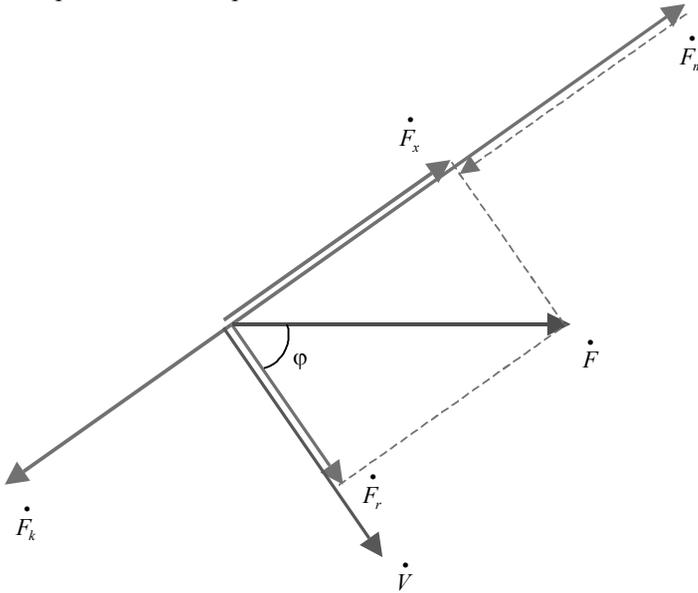
$$\dot{F}_r = r \dot{V} = 7e^{i0} \cdot 8,192 e^{-i55^\circ} = 57,344 e^{-i55^\circ} \text{ Н}.$$

Разумеется,

$$\dot{F}_m + \dot{F}_k + \dot{F}_r = 163,846e^{i35^\circ} + 81,923e^{-i145^\circ} + 57,344e^{-i55^\circ} = 100e^{i0} \text{ (Н)} = \dot{F}.$$

Классический расчет по сравнению с примером 1 несоизмеримо сложнее и объемнее.

Векторная диаграмма (не является необходимой частью расчета) для величин из примера 1 представлена на рис. 2.



**Рис. 2.** Векторная диаграмма при параллельном соединении  
**Fig. 2.** Vector diagram for parallel connection

### Резонанс сил

В дополнение к вышесказанному о резонансе сил можно ограничиться численным примером.

**Пример 2.** Пусть  $k = 40 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-2}$ . Остальные данные – из примера 1. Потребители механической мощности соединены параллельно.

$$\underline{x}_k = 20e^{-i90^\circ} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\underline{z} = r = 7e^{i0^\circ} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100e^{i0}}{7e^{i0^\circ}} \approx 14,286e^{i0^\circ} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\dot{F}_m = \underline{x}_m \dot{V} = 20e^{i90^\circ} \cdot 14,286e^{i0^\circ} = 285,72e^{i90^\circ} \text{ Н},$$

$$\dot{F}_k = \underline{x}_k \dot{V} = 20e^{-i90^\circ} \cdot 14,286e^{i0^\circ} = 285,72e^{-i90^\circ} \text{ Н},$$

$$\dot{F}_r = r \dot{V} = 7e^{i0} \cdot 14,286e^{i0^\circ} = 100e^{i0^\circ} \text{ Н}.$$

Разумеется,

$$\dot{F}_m + \dot{F}_k + \dot{F}_r = 285,72e^{i90^\circ} + 285,72e^{-i90^\circ} + 100e^{i0^\circ} = 100e^{i0} \text{ Н} = \dot{F} = \dot{F}_r.$$

Векторная диаграмма для величин из примера 2 представлена на рис. 3. Реактивные силы  $\dot{F}_m$  и  $\dot{F}_k$  (термин заимствован из электротехники) существенно выше, чем в примере 1.

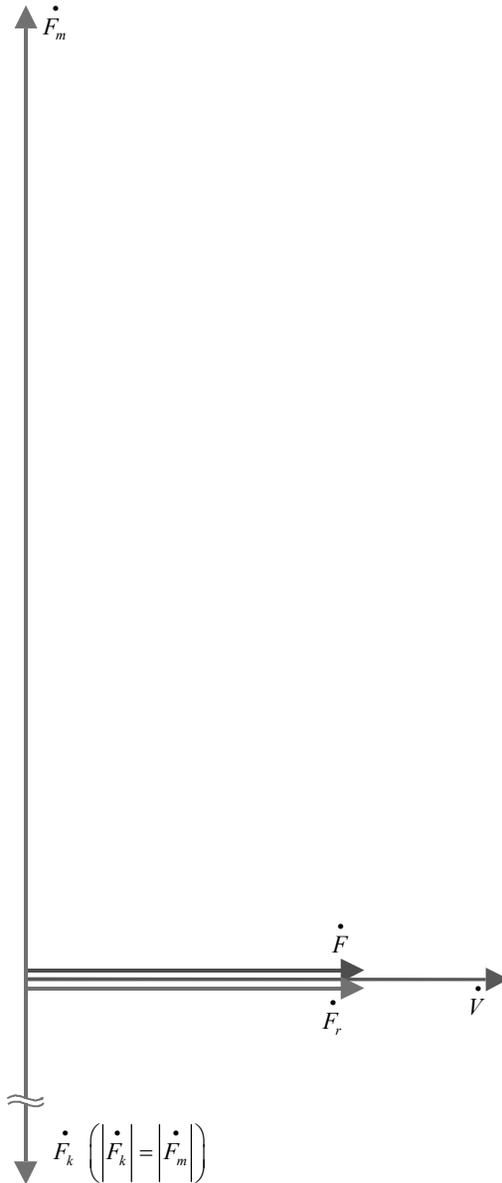
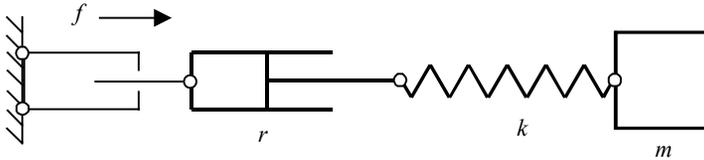


Рис. 3. Векторная диаграмма резонанса сил  
 Fig. 3. Vector diagram of force resonance

**Последовательное соединение  
потребителей механической мощности**

Ко всем потребителям механической мощности (рис. 4) приложена единая сила

$$f = F \cos \omega t .$$



**Рис. 4.** Последовательное соединение  
**Fig. 4.** Serial connection

Скорости инертного тела и изменения размеров упругого элемента и демпфера соответственно равны

$$v_m = \frac{1}{m} \int f dt = \frac{F}{\omega m} \sin \omega t ; \quad (13)$$

$$v_k = -\frac{1}{k} k \frac{dx}{dt} = \frac{1}{k} \frac{df}{dt} = -\frac{\omega F}{k} \sin \omega t ; \quad (14)$$

$$v_r = \frac{f}{r} = \frac{F}{r} \cos \omega t . \quad (15)$$

Скорость штока источника силового гармонического воздействия

$$v = v_m + v_k + v_r = F \left[ \left( \frac{1}{\omega m} - \frac{\omega}{k} \right) \sin \omega t + \frac{1}{r} \cos \omega t \right] = F \sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + (1/r)^2} \times$$

$$\times \left[ \frac{1/(\omega m) - \omega/k}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + (1/r)^2}} \sin \omega t + \frac{1/r}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + (1/r)^2}} \cos \omega t \right] ;$$

$$\varphi = \arctg \frac{1/(\omega m) - \omega/k}{1/r} ;$$

$$v = F \sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + (1/r)^2} (\sin \varphi \sin \omega t + \cos \varphi \cos \omega t) =$$

$$= F \sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + (1/r)^2} \cos(\omega t - \varphi) = V \cos(\omega t - \varphi) .$$

Это формула вынужденных колебаний при последовательном соединении потребителей механической мощности, для получения которой не потребовалось составлять и решать дифференциальное уравнение.

Амплитуда суммарной скорости равна

$$V = Fy ,$$

$$y = \sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + (1/r)^2} . \quad (16)$$

При  $1/(\omega m) - \omega/k = 0$  также получается известная формула  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Имеет место *резонанс скоростей* [3], при котором точка приложения силы к системе упругий элемент – инертное тело неподвижна, при этом сами по себе инертное тело и упругий элемент совершают колебания. Если дополнительно  $1/r = 0$ , то и  $y = 0$ . Физический смысл этого состоит в том, что система оказывает бесконечно большое сопротивление внешнему силовому гармоническому воздействию, вследствие чего шток источника силового гармонического воздействия неподвижен, хотя инертное тело и упругий элемент совершают колебания.

**Комплексное представление при последовательном соединении**

Порядок рассуждений аналогичен представленному выше:

$$f = F \cos \omega t = \text{Re}(F e^{i\omega t}),$$

$$\dot{F} = F e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Формула (13) показывает, что  $v_m$  отстает по фазе  $f$  на  $\pi/2$ . Следовательно,

$$\dot{V}_m = -\frac{1}{\omega m} \dot{F} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\underline{x}_m} \dot{F} = \underline{b}_m \dot{F},$$

$$\underline{b}_m = \frac{1}{\omega m} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \frac{1}{\omega m} = \frac{1}{\underline{x}_m}$$

– *инертный сасцептанс* (susceptance) в комплексном представлении.

Комплексная амплитуда инертной скорости равна

$$\dot{V}_m = \frac{1}{\omega m} e^{-i\frac{\pi}{2}} F e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega m} F e^{i0}.$$

Аналогично, с учетом (14) и (15)

$$\dot{V}_k = \frac{\omega}{k} \dot{F} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\underline{x}_k} \dot{F} = \underline{b}_k \dot{F},$$

$$\underline{b}_k = \frac{\omega}{k} e^{i\frac{\pi}{2}} = i \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\underline{x}_k}$$

– упругий сасцептанс.

Комплексные амплитуды упругой и резистивной скоростей соответственно равны

$$\dot{V}_k = \frac{\omega}{k} e^{i\frac{\pi}{2}} F e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{\omega}{k} F e^{i\pi},$$

$$\dot{V}_r = \frac{1}{r} \dot{F} = g \dot{F} = g F e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$\underline{g} = g = \frac{1}{r}$$

– *механический кондуктанс* (conductance).

Механический сдвиг равен

$$\underline{b} = \underline{b}_k + \underline{b}_m = \left( \frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Механический адмитанс (admittance)

$$\underline{y} = g + \underline{b} = g + \left( \frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Модуль механического адмитанса совпадает с (16):

$$Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2} = \sqrt{\frac{1}{r^2} + \left( \frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right)^2},$$

$$\varphi = \arctg \frac{b_k - b_m}{g} = \arctg \frac{\omega/k - 1/(\omega m)}{g} = \arctg \left[ (m\omega - k/\omega) \frac{r}{mk} \right],$$

$$\underline{y} = Y e^{i\varphi}.$$

Суммарная скорость равна скорости штока источника силового гармонического воздействия

$$\dot{V} = \underline{y} \dot{F} = Y e^{i\varphi} F e^{i\frac{\pi}{2}} = Y F e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}. \quad (17)$$

**Пример 3.** Для данных примера 1 найти все скорости в установившемся режиме.

$$\underline{b}_m = \underline{x}_m^{-1} = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с},$$

$$\underline{b}_k = \underline{x}_k^{-1} = 10 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с},$$

$$g = r^{-1} = 14,286 \cdot 10^{-2} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с}.$$

$$Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2} = \sqrt{(14,286 \cdot 10^{-2})^2 + (10 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-2})^2} = 15,135 \cdot 10^{-2} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с}.$$

$$\varphi = \arctg \frac{b_k - b_m}{g} = \arctg \frac{10 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-2}}{14,286 \cdot 10^{-2}} = 19,29^\circ,$$

$$\underline{y} = Y e^{i\varphi} = 15,135 \cdot 10^{-2} e^{i19,29^\circ} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с}.$$

$$\dot{V} = \underline{y} \dot{F} = 15,135 \cdot 10^{-2} e^{i19,29^\circ} \cdot 100 = 15,135 e^{i19,29^\circ} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\dot{V}_m = \underline{b}_m \dot{F} = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 100 = 5 e^{-i90^\circ} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\dot{V}_k = \underline{b}_k \dot{F} = 10 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 100 = 10 e^{i90^\circ} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\dot{V}_r = g \dot{F} = 14,286 \cdot 10^{-2} \cdot 100 = 14,286 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Разумеется,

$$\dot{V}_m + \dot{V}_k + \dot{V}_r = 5 e^{-i90^\circ} + 10 e^{i90^\circ} + 14,286 = 15,135 e^{i19,29^\circ} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} = \dot{V}.$$

Классический расчет по сравнению с примером 3 несоизмеримо сложнее и объемнее.

Векторная диаграмма для величин из примера 3 представлена на рис. 5.

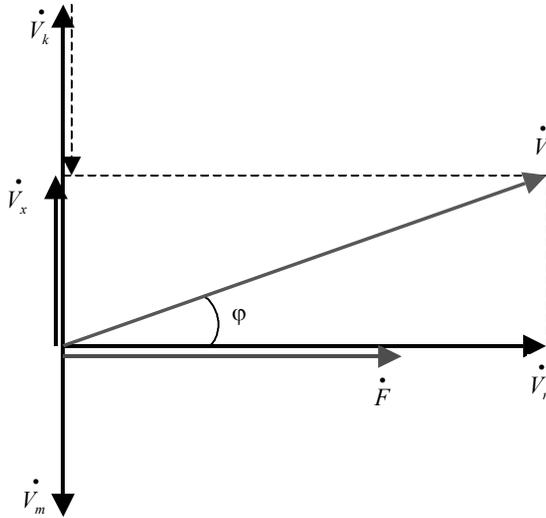


Рис. 5. Векторная диаграмма при последовательном соединении  
Fig. 5. Vector diagram for serial connection

### Резонанс скоростей

В дополнение к вышесказанному о резонансе скоростей можно ограничиться численным примером.

**Пример 4.** Все данные – из примера 2. Потребители механической мощности соединены последовательно.

$$b_k = 5 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с} ,$$

$$Y = g = 14,286 \cdot 10^{-2} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с} ,$$

$$\varphi = 0^\circ ,$$

$$\underline{y} = Y e^{i\varphi} = 14,286 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{с} ,$$

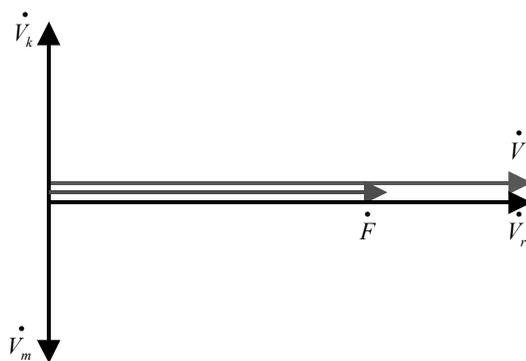
$$\dot{V} = \underline{y} \dot{F} = 14,286 \cdot 10^{-2} \cdot 100 = 14,286 e^{i0^\circ} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} ,$$

$$\dot{V}_k = \underline{b}_k \dot{F} = 5 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 100 = 5 e^{i90^\circ} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} .$$

Разумеется,

$$\dot{V}_m + \dot{V}_k + \dot{V}_r = 5 e^{-i90^\circ} + 5 e^{i90^\circ} + 14,286 = 14,286 e^{i0^\circ} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} = \dot{V} = \dot{V}_r$$

Векторная диаграмма для величин из примера 4 представлена на рис. 6.



**Рис. 6.** Векторная диаграмма резонанса скоростей  
**Fig. 6.** Vector diagram of velocity resonance

### Заключение

Применение комплексного представления позволило получить существенно более компактные алгебраические методы расчета сложных механических систем в установившихся режимах по сравнению с классическими методами, основанными на составлении и интегрировании систем дифференциальных уравнений. При этом объем вычислений сокращается в несколько раз. Ключевую роль в предложенном методе играют механические реактансы, резистансы и импедансы для параллельного соединения потребителей механической мощности и сасцептансы, кондуктансы и адмиттансы – для последовательного.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Томилин А.К., Прокопенко Е.В. Продольные колебания упругого электропроводного стержня в неоднородном магнитном поле // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 21. С. 104–111.
2. Попов И.П. Колебательные системы, состоящие только из инертных или только упругих элементов, и возникновение в них свободных гармонических колебаний // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 21. С. 95–103.
3. Попов И.П. Дифференциальные уравнения двух механических резонансов // Прикладная физика и математика. 2019. № 2. С. 37–40. DOI: 10.25791/pfim.02.2019.599

Статья поступила 18.06.2019

Popov I.P. (2021) REACTANCES AND SUSCEPTANCES OF MECHANICAL SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 64–75

DOI 10.17223/19988621/70/6

Keywords: reactance, resistance, impedance, susceptance, conductance, admittance.

The classical solution to the problems associated with calculating the velocities and reactions of elements of complex mechanical systems under harmonic force consists in the compilation and integration of systems of differential equations and is rather cumbersome and time-consuming. In most cases, a steady state is of major interest. The purpose of this study is to develop essentially compact methods for calculating systems under steady-state conditions. The problem is solved by the methods which are typically used to calculate electrical circuits. Representation of harmonic

quantities as rotating vectors in a complex plane and the operations with their complex amplitudes can greatly facilitate the calculation of arbitrarily complex mechanical systems under harmonic effects in the steady state. In the proposed method, a key role is played by mechanical reactance, resistance, and impedance for the parallel connection of consumers of mechanical power, as well as susceptance, conductance, and admittance for the serial one. At force resonance, the total reactance of the mechanical system is zero. This means that the system does not exhibit reactive resistance to the external harmonic force. At velocity resonance, the total susceptibility of the mechanical system is zero. This means that the system has infinitely high resistance to the external harmonic force. As a result, the stock of the source of harmonic force is stationary, although the inert body and the elastic element oscillate.

Igor P. POPOV (Scientific Consultant, High Tech Center, Kurgan, Russian Federation). E-mail: ip.popow@yandex.ru

#### REFERENCES

1. Tomilin A.K., Prokopenko E.V. (2013) Prodol'nye kolebaniya uprugogo elektroprovodnogo sterzhnya v neodnorodnom magnitnom pole [Longitudinal oscillations of an elastic electrically conductive rod in a non-uniform magnetic field]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 21. pp. 104–111.
2. Popov I.P. (2013) Kolebatel'nye sistemy, sostoyashchie tol'ko iz inertnykh ili tol'ko uprugikh elementov, i vzniknovenie v nikh svobodnykh garmonicheskikh kolebaniy [Oscillatory systems consisting only of inert or only elastic elements and the appearance of free harmonic vibrations in them]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 21. pp. 95–103.
3. Popov I.P. (2019) Differentsial'nye uravneniya dvukh mekhanicheskikh rezonansov [Differential equations of two mechanical resonances]. *Prikladnaya fizika i matematika – Applied Physics and Mathematics*. 2. pp. 37–40. DOI: 10.25791/pfim.02.2019.599.

Received: June 18, 2019