

УДК 532.135, 532.542.2
DOI 10.17223/19988621/70/7

И.А. Рыльцев, О.Ю. Фролов, Г.Р. Шрагер

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С ДВОЙНЫМ СУЖЕНИЕМ¹

Выполнено численное моделирование установившегося течения неньютоновской жидкости в осесимметричной трубе с двумя перекрытиями, геометрия которых описывается функцией косинуса. Математическая постановка задачи формулируется в переменных вихрь – функция тока. Для описания свойств среды используется модель Оствальда – де Ваале. Решение дифференциальных уравнений для вихря и функции тока осуществляется численно с использованием метода установления. Для нахождения поля давления решается уравнение Пуассона. В работе исследуется три среды: ньютоновская, псевдопластичная и дилатантная жидкости. Показано влияние числа Рейнольдса, степени нелинейности реологической модели и геометрических параметров канала на характеристики течения.

Ключевые слова: ламинарное течение, двойное сужение / расширение, степенная жидкость, модель Оствальда – де Ваале, преобразование координат, уравнение Пуассона для давления.

Поле течения неньютоновской жидкости в цилиндрических каналах в окрестности препятствий представляет интерес для исследователей, изучающих механику жидкостей. В инженерных приложениях подобные каналы используются в качестве комплектующих элементов различного рода теплообменных установок и гидравлических систем. Кроме того, в биомеханике течение вязкой жидкости в трубке с участком сужения / расширения, описываемым, например, функцией косинуса или Гаусса, применяются для моделирования течения крови в стенозированном сосуде. Эти обстоятельства обуславливают актуальность экспериментального и численного исследований течений в каналах с препятствиями заданной конфигурации.

В настоящее время доступно большое количество численных и экспериментальных работ, в которых исследуются течения ньютоновской жидкости в канале с одним препятствием [1–6]. Результаты этих работ содержат сведения о структуре потока и об основных параметрах задачи, влияющих на характеристики течения. Например, в работе [2] авторы одними из первых численно исследовали влияние числа Рейнольдса и геометрических параметров на распределения основных характеристик задачи. Развитие вычислительных технологий позволило изучить течения неньютоновских жидкостей [7–12]. Авторы работ [7, 8] используют реологические законы Балкли – Гершеля, Каро, Оствальда – де Ваале, Кассона для оценки влияния неньютоновских свойств при моделировании течений в артериях. В обзорной части [13] приведены работы авторов, исследующих ламинарные стационарные и нестационарные течения, как для ньютоновской, так и неньютоновской жидкости в случае, когда в канал включено одно препятствие.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-19-00021).

Течению в трубе с несколькими последовательно размещенными участками сужения / расширения уделено меньше внимания, при этом во всех исследованиях в качестве рассматриваемой среды используется ньютоновская жидкость. Подобные трубы встречаются в системах охлаждения летательных аппаратов и ускорителей ракет, которые функционируют при вхождении в плотные слои атмосферы, где рабочим телом служит газ или жидкость. В [14, 15] изучено влияние числа Рейнольдса в диапазоне от 5 до 200 на распределения напряжения и давления, сделаны выводы о локализации максимальных значений вихря на стенке. Представлены картины течения, демонстрирующие поля вихря и функции тока в зависимости от основных параметров задачи, дана оценка влиянию второго препятствия на структуру потока и на параметры течения. В статье тех же авторов [16] расширен диапазон исследуемых чисел Рейнольдса до 400. В [17] описывается трехмерное моделирование стационарного течения жидкости через несколько последовательно расположенных препятствий. Решение задачи осуществляется с помощью модифицированного метода LBGK, в основе которого лежит метод решеточных уравнений Больцмана (LBM), где столкновение частиц учитывается моделью Батнагара – Гросса – Крука (BGK). Авторы ограничились исследованиями в диапазоне чисел Рейнольдса от 10 до 150. К основным выводам данной работы можно отнести следующее: метод LBGK является полезным инструментом для моделирования установившихся течений; результаты, полученные с помощью трехмерной модели, хорошо согласуются с данными из работы [14], где применяется двумерная постановка задачи.

Целью данной работы является исследование структуры потока и характеристик течения неньютоновской жидкости в осесимметричном канале с двумя препятствиями в зависимости от параметров задачи и оценка влияния геометрических параметров одного из препятствий на распределения характеристик потока около другого.

Постановка задачи

Рассматривается стационарное течение степенной несжимаемой жидкости в круглой трубе с двумя последовательно размещенными в ней участками сужения / расширения, форма которых описывается функцией косинуса. Область течения представлена на рис. 1.

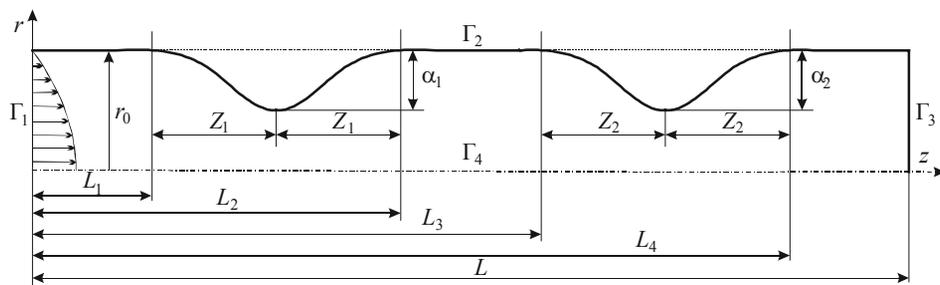


Рис. 1. Область течения
Fig. 1. Flow area

Для математического описания процесса используется постановка задачи в переменных вихрь – функция тока [18]. Реологическое поведение жидкости описы-

ваются законом Освальда – де Ваале [19]. Система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial(u\omega)}{\partial z} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial r} = \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial z \partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial z} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\omega}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -r\omega; \quad (2)$$

$$\mu = A^{m-1}. \quad (3)$$

Безразмерные компоненты скорости и вихрь в уравнении (1) определяются формулами

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Здесь u , v – аксиальная и радиальная компоненты скорости соответственно,

$\text{Re} = \frac{\rho U^{2-m} r_0^m}{k}$ – число Рейнольдса, ρ – плотность, U – среднерасходная скорость,

$A = (2e_{ij}e_{ji})^{\frac{1}{2}}$, e_{ij} – компоненты тензора скоростей деформаций, k – консистенция жидкой среды, m – степень нелинейности жидкости. В качестве масштабов обезразмеривания приняты следующие величины: длины – радиус трубы r_0 ; скорости – среднерасходная скорость U . Граничные условия в переменных вихрь – функция тока имеют вид [18]

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \Psi &= \int_0^r u r dr, \quad \omega = -\frac{\partial u}{\partial r}, \quad \text{при } z = 0; \\ \Gamma_2 : \Psi &= \text{const}, \quad \omega = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n^2}, \quad \text{при } r = f(z); \\ \Gamma_3 : \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad \text{при } z = L; \\ \Gamma_4 : \Psi &= 0, \quad \omega = 0, \quad \text{при } r = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где n – нормаль к границе Γ_2 , $u = \frac{3m+1}{m+1} \left(1 - r^m \right)^{\frac{1}{m+1}}$.

$$\text{Граница } \Gamma_2 \text{ задается функцией } f(z) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha_1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi(z-L_1)}{Z_1} \right), & z \in [L_1; L_2]; \\ 1 - \frac{\alpha_2}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi(z-L_3)}{Z_2} \right), & z \in [L_3; L_4]; \\ 1, & z \in [0; L_1] \cup (L_2; L_3) \cup (L_4; L]. \end{cases}$$

Метод решения

Для получения численного решения сформулированной задачи применяется метод установления, который позволяет получить стационарное решение. В этом случае организуется нестационарный процесс, решение которого с течением времени оказывается независимым от него и устанавливается к решению исходной стационарной задачи [20]. Для реализации нестационарного процесса в уравнения для вихря (1) и функции тока (2) добавляются производные по времени функций ω , ψ соответственно. Итерационный процесс продолжается до установления в пределах заданной точности.

Для аппроксимации дифференциальных уравнений область течения с криволинейной границей $f(z)$ трансформируется в прямоугольную с помощью введения новой системы координат $\xi = z$, $\eta = r/f(z)$. В координатах ξ , η уравнение переноса вихря (1) и уравнение Пуассона для функции тока (2) с введенными производными по времени принимают вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial \xi} - g \frac{\partial(u\omega)}{\partial \eta} + \frac{1}{f} \frac{\partial(v\omega)}{\partial \eta} = \\ & = \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + H \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - 2g \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + G \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{1}{f^2 \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \frac{\omega}{f^2 \eta^2} \right) + \frac{S}{\text{Re}}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \left(H - \frac{1}{f^2 \eta} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - 2g \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + G \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -f\eta\omega, \quad (6)$$

где
$$G = \frac{1}{f^2} + \left(\eta \frac{f'}{f} \right)^2; \quad H = \eta \left(2 \frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f} \right); \quad g = \eta \frac{f'}{f},$$

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \\ S_1 &= 2 \left(\frac{1}{f} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{g}{f\eta} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} - \frac{g}{f} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{1}{f} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} + g \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \\ S_2 &= 2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi} - g \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} - g \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) + 2 \frac{1}{f^2} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \eta}, \\ S_3 &= \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi^2} + H \frac{\partial \mu}{\partial \eta} - 2g \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi \partial \eta} + \left(g^2 - \frac{1}{f^2} \right) \frac{\partial^2 \mu}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{1}{f} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} - g \frac{\partial v}{\partial \eta} \right), \\ S_4 &= \frac{\omega}{f^2 \eta} \frac{\partial \mu}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Численное решение дифференциальных уравнений осуществляется конечно-разностным методом. Преобразованная прямоугольная область решения покрывается равномерной в каждом направлении разностной сеткой

$$\Omega_h = \{ \xi_i = ih, \eta_j = jh, i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2 \},$$

где h – шаг сетки; N_1 – количество узлов в направлении ξ ; N_2 – количество узлов в направлении η . Разностное представление уравнений (5), (6) выполняется с использованием явной разностной схемы. Конвективные слагаемые в уравнении (5) аппроксимируются схемой против потока. Условие сходимости вычислительного процесса к стационарному решению задачи имеет вид

$$\max_{i,j} \left| 1 - \frac{\omega_{i,j}^{q+1}}{\omega_{i,j}^q} \right| < \varepsilon, \quad \max_{i,j} \left| 1 - \frac{\Psi_{i,j}^{q+1}}{\Psi_{i,j}^q} \right| < \varepsilon,$$

где ε – параметр сходимости; q – номер шага по фиктивному времени. Значение параметра ε определяется в ходе численного эксперимента ($\varepsilon = 10^{-5}$). Выбор явной схемы обусловлен простотой реализации расчётного алгоритма. Схема против потока для аппроксимации конвективных слагаемых обеспечивает устойчивость разностной схемы.

При расчете эффективной вязкости в случае, когда $m < 1$ значения μ стремятся к «бесконечным». Для устранения этой особенности используется модифицированная запись реологического уравнения (3), которая имеет вид

$$\mu = (A + \lambda)^{m-1}. \quad (7)$$

Здесь λ – параметр регуляризации, значение которого выбиралось экспериментально и принималось равным 0.001.

Для тестирования вычислительного алгоритма выполнены расчеты на вложенных сетках. В таблице приведены значения аксиальной скорости на оси симметрии в трех контрольных сечениях в зависимости от шага сетки, демонстрирующие аппроксимационную сходимость алгоритма. Все дальнейшие расчеты проводились с использованием шага 0.025.

Аппроксимационная сходимость
при $Re = 10$, $m = 0.9$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$, $L_1 = 3$, $L_3 = 7$

h	$u_{\max},$ $z = L_1 + Z_1$	$u_{\max},$ $z = L_3 + Z_2$	$u_{\max},$ $z = L$
0.1	5.3844	5.4860	1.9408
0.05	5.4081	5.49675	1.9469
0.025	5.415	5.4956	1.9478
0.0125	5.4159	5.4959	1.9476

На рис. 2 показано сравнение распределений функции тока, полученных в настоящей работе, с данными, взятыми из работы [14], при этом функция $f(z)$ задаётся в соответствии с [14]. Структура потока характеризуется зонами одномерного течения в окрестности входной и выходной границ. В области препятствий течение имеет двумерный характер, за препятствиями образуются циркуляционные зоны. Наблюдается качественное согласование результатов.

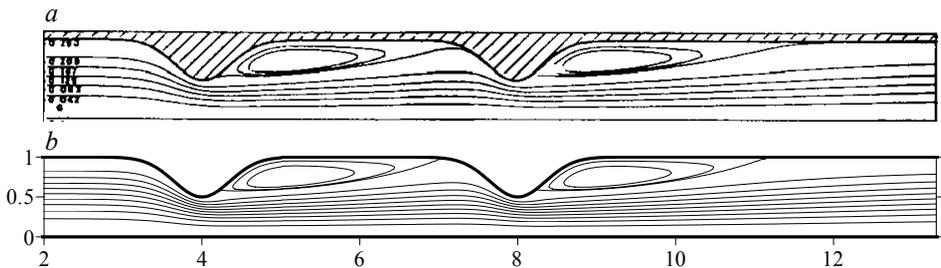


Рис. 2. Сравнение распределений линий тока из статьи [14] (a) и настоящей работы (b) ($Re = 25$, $m = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)
Fig. 2. Comparison of streamline distributions (a) from the paper [14] and (b) in the present work ($Re = 25$, $m = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)

Восстановление давления

Постановка задачи в переменных вихрь – функция тока не содержит давления. Для расчета динамических характеристик потока воспользуемся уравнением Пуассона [18], которое позволяет по известным полям скорости, вихря и функции тока рассчитать поле давления и в физических переменных имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v^2}{r^2} \right) + \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \cdot \nabla^2 u + \frac{\partial \mu}{\partial r} \cdot \nabla^2 v + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z \partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2} \frac{\partial v}{\partial r} \right). \quad (8)$$

Для обезразмеривания величины p используется масштаб ρU^2 . Уравнение (8) в преобразованной системе координат (ξ, η) принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} - 2g \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} + \left(H + \frac{1}{f^2 \eta} \right) \frac{\partial p}{\partial \eta} + G \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} \right) = 2 \left(S_5 \cdot S_6 - S_7 \cdot S_8 - \left(\frac{v}{f \eta} \right)^2 \right) + \frac{2}{\text{Re}} \left(S_9 \left(S_{10} + S_{11} + \frac{S_8}{f \eta} \right) + S_{12} \left(S_{13} + S_{14} + \frac{S_6}{f \eta} \right) + S_{15} (S_8 + S_7) + S_{16} S_5 + S_{17} S_6 \right); \quad (9)$$

$$S_5 = \frac{\partial u}{\partial \xi} - g \frac{\partial u}{\partial \eta}, S_6 = \frac{1}{f} \frac{\partial v}{\partial \eta}, S_7 = \frac{\partial v}{\partial \xi} - g \frac{\partial v}{\partial \eta}, S_8 = \frac{1}{f} \frac{\partial u}{\partial \eta}, S_9 = \frac{\partial \mu}{\partial \xi} - g \frac{\partial \mu}{\partial \eta},$$

$$S_{10} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2g \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + H \frac{\partial u}{\partial \eta} + g^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, S_{11} = \frac{1}{f^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, S_{12} = \frac{1}{f} \frac{\partial \mu}{\partial \eta},$$

$$S_{13} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2g \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + H \frac{\partial v}{\partial \eta} + g^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, S_{14} = \frac{1}{f^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, S_{15} = \frac{1}{f} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{g}{f \eta} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} - \frac{g}{f} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \eta^2},$$

$$S_{16} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi^2} - 2g \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi \partial \eta} + H \frac{\partial \mu}{\partial \eta} + g^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \eta^2}, S_{17} = \frac{1}{f^2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \eta^2}.$$

Для постановки граничного условия на границе Γ_2 используются уравнения движения, которые с учетом условий прилипания на твердой стенке при $\eta = 1$ в системе координат (ξ, η) запишутся в виде

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} - g \frac{\partial p}{\partial \eta} = - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\mu}{f} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{\omega}{\eta} \right) + \frac{\omega}{f} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \right); \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{f}{\text{Re}} \left(\mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} - g \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) - \omega \left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi} - g \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \right) \right). \quad (11)$$

Используя (10) и (11), получим уравнения для расчета давления на границах Γ_1 и Γ_2 . В выходном сечении Γ_3 безразмерное давление задается равным нулю, на оси симметрии Γ_4 реализуется условие симметрии. Таким образом, граничные условия для расчета давления принимают вид

$$\Gamma_1: \frac{\partial p}{\partial \xi} = - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\mu}{f} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{\omega}{\eta} \right) + \frac{\omega}{f} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \right) \text{ при } \xi = 0;$$

$$\Gamma_2: \frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{1}{\text{Re}} \left(g f \left(\mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} - g \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) - \omega \left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi} - g \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \right) \right) - \left(\frac{\mu}{f} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{\omega}{\eta} \right) + \frac{\omega}{f} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \right) \right) \text{ при } \eta = 1;$$

$$\Gamma_3: p=0 \text{ при } \xi=L;$$

$$\Gamma_4: \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \text{ при } \eta=0.$$

Решение дифференциального уравнения для давления, как и в случае нахождения функций ω , ψ , осуществляется конечно-разностным методом в явном виде с использованием метода установления. Условие для определения сходимости по давлению имеет вид

$$\max_{i,j} \left| 1 - \frac{p_{i,j}^{q+1}}{p_{i,j}^q} \right| < \varepsilon, \text{ где } \varepsilon = 10^{-7}.$$

Результаты

Рисунок 3 демонстрирует типичные картины течения псевдопластичной жидкости ($m < 1$) в виде распределений линий тока в зависимости от Re . При числе Рейнольдса равном 5 за препятствиями формируются циркуляционные зоны одинакового размера. При дальнейшем увеличении Re до 15 циркуляционная зона за первым участком сужения / расширения увеличивается и занимает всю область между препятствиями выше сечения $r = 0.5$, зона за вторым препятствием также увеличивается. На рис. 4 второе препятствие смещено относительно первого в сторону выходной границы, в результате тенденция распределения линий тока для Re , равного 1 и 5, сохраняется, а для $Re = 15$ зона за первым перекрытием стала равной зоне за вторым.

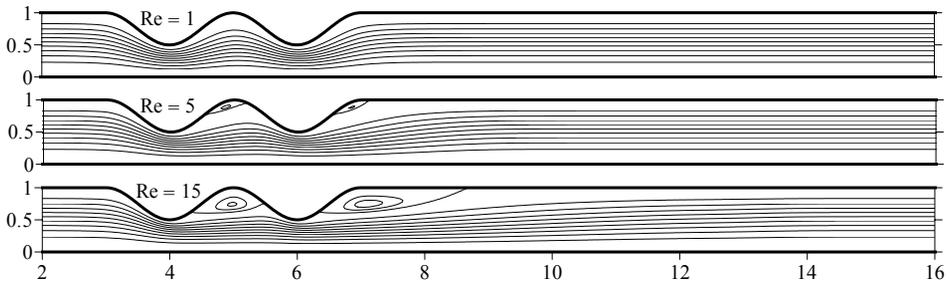


Рис. 3. Линии тока ($m = 0.8$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)
 Fig. 3. Streamline distributions ($m = 0.8$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)

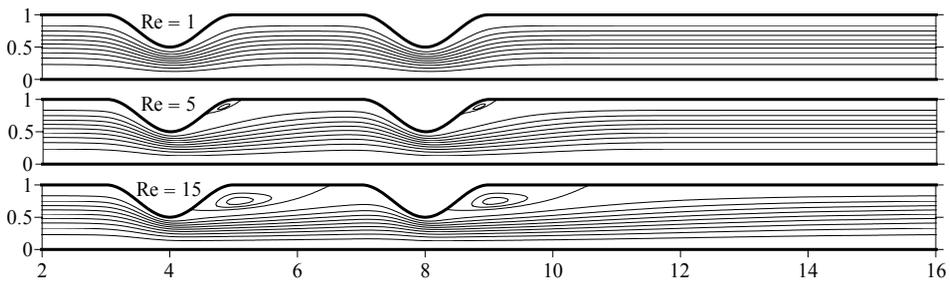


Рис. 4. Линии тока ($m = 0.8$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)
 Fig. 4. Streamline distributions ($m = 0.8$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)

Влияние параметра нелинейности на структуру потока показано на рис. 5. С уменьшением m размер циркуляционных зон за препятствиями увеличивается, начиная с некоторого значения параметра нелинейности, первая зона занимает все пространство между препятствиями, а размер второй продолжает расти в направлении выходной границы.

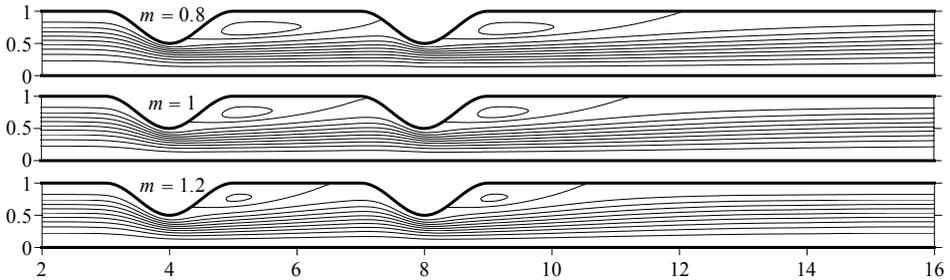


Рис. 5. Линии тока ($Re = 25$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)
Fig. 5. Streamline distributions ($Re = 25$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)

На рис. 6 показано влияние глубины второго перекрытия (α_2) на распределение линий тока в случае течения псевдопластичной жидкости. Уменьшение α_2 приводит к распространению первой циркуляционной зоны в область второго препятствия.

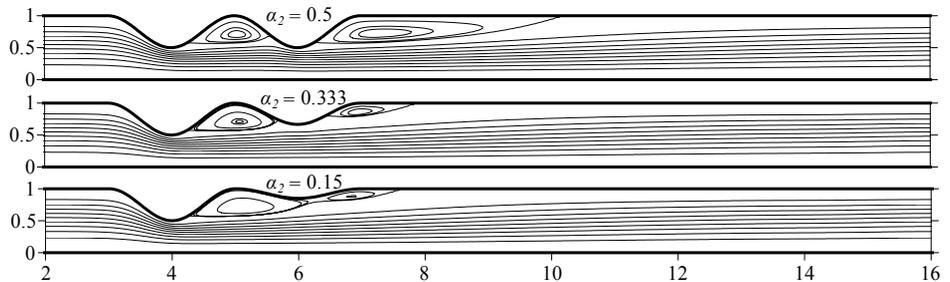


Рис. 6. Линии тока ($Re = 25$, $m = 0.8$, $\alpha_1 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)
Fig. 6. Streamline distributions ($Re = 25$, $m = 0.8$, $\alpha_1 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$)

Графики на рис. 7 демонстрируют сравнение распределений давления на твердой стенке с данными [16]. Для сравнения динамических характеристик потока функция $f(z)$ задавалась в соответствии с [16], кроме того, безразмерное давление на входе в канал принималось равным нулю. В зоне одномерного течения давление падает линейным образом, а на участках с препятствиями распределение давления носит сложный характер. Кривые на рис. 7 демонстрируют согласование полученных результатов с данными [16].

На рис. 8 показаны распределения давления вдоль оси симметрии для трех значений параметра m в канале, изображенном на рис. 5. Минимальному перепаду давления между входом и выходом соответствует течение вязкопластичной жидкости, что согласуется с изменением эффективной вязкости в зависимости от m .

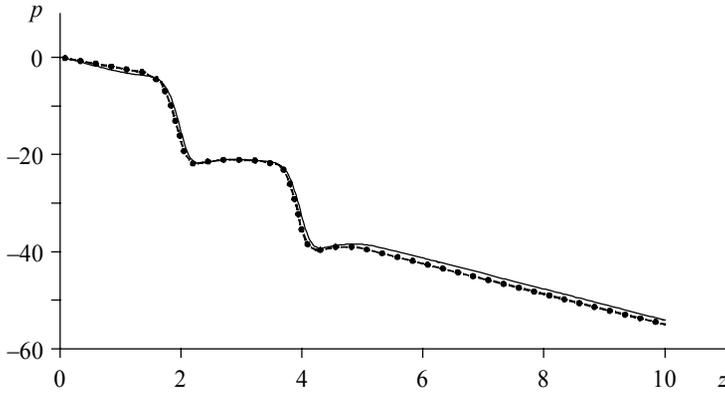


Рис. 7. Распределения давления вдоль стенки
($Re = 2.5$, $m = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.333$, $Z_1 = Z_2 = 1$).
Обозначения: — — настоящая работа; •-•-• — работа [16]
Fig. 7. Pressure distributions along the wall
($Re = 2.5$, $m = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.333$, $Z_1 = Z_2 = 1$).
Notations: — — present work; •-•-• — paper [16]

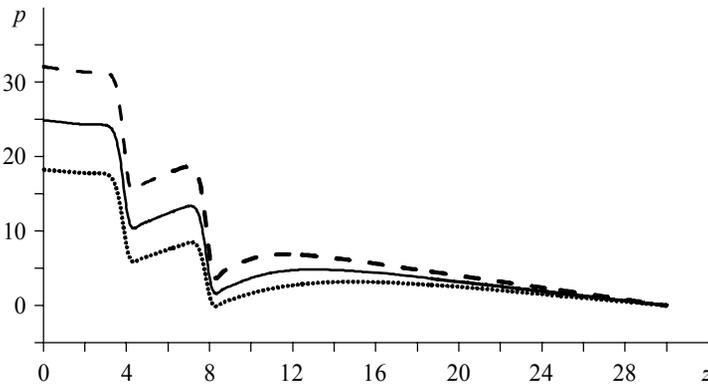


Рис. 8. Распределение давления вдоль оси симметрии
($Re = 25$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$).
Обозначения: — $m = 0.8$, — — — — $m = 1$, - - - - $m = 1.2$
Fig. 8. Pressure distributions along the symmetry axis
($Re = 25$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Z_1 = Z_2 = 1$).
Notations: — $m = 0.8$, — — — — $m = 1$, - - - - $m = 1.2$

На рис. 9 и 10 приведены распределения аксиальной скорости на оси симметрии канала для псевдопластичной, ньютоновской и дилатантной жидкостей. Графики на рис. 9 и 10 показывают, что рост числа Рейнольдса приводит к уменьшению максимальных значений скорости в зоне двумерного течения, что согласуется с кинематикой течения, показанной на рис. 3 и 5.

Рисунок 11 иллюстрирует распределения вихря на твердой стенке в зависимости от местоположения второго препятствия относительно первого для трех значений параметра Re . Расчеты показали, что увеличение числа Рейнольдса приводит к росту максимальных значений вихря на стенке. С изменением геометрии происходит соответствующее перераспределение максимумов в функции $\omega(z)$.

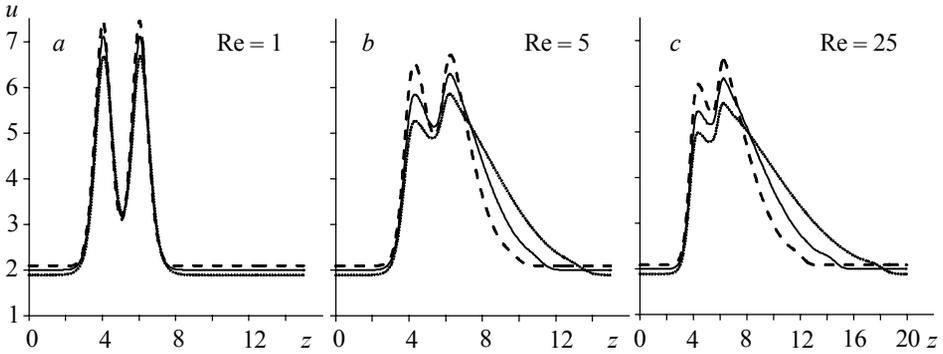


Рис. 9. Распределения аксиальной скорости на оси симметрии ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, Z_1 = Z_2 = 1, L_1 = 3, L_3 = 5$). Обозначения: - $m = 0.8$, — - - - $m = 1.2$

Fig. 9. Axial velocity distributions along the symmetry axis ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, Z_1 = Z_2 = 1, L_1 = 3, L_3 = 5$). Notations: - $m = 0.8$, — - - - $m = 1.2$

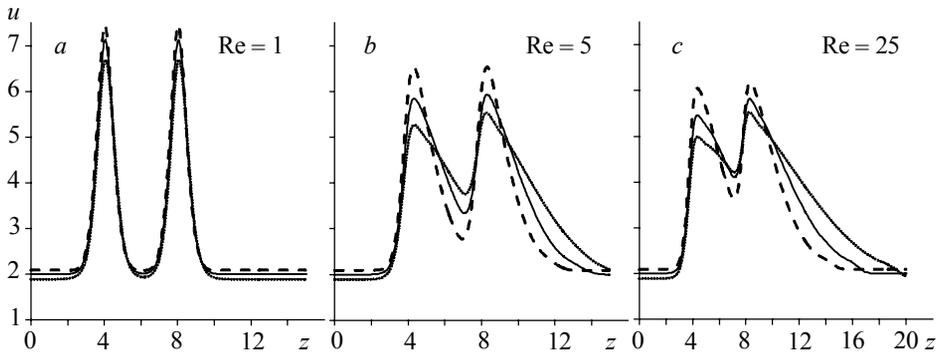


Рис. 10. Распределения аксиальной скорости на оси симметрии ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, Z_1 = Z_2 = 1, L_1 = 3, L_3 = 7$). Обозначения: - $m = 0.8$, — - - - $m = 1.2$

Fig. 10. Axial velocity distributions along the symmetry axis ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, Z_1 = Z_2 = 1, L_1 = 3, L_3 = 7$). Notations: - $m = 0.8$, — - - - $m = 1.2$

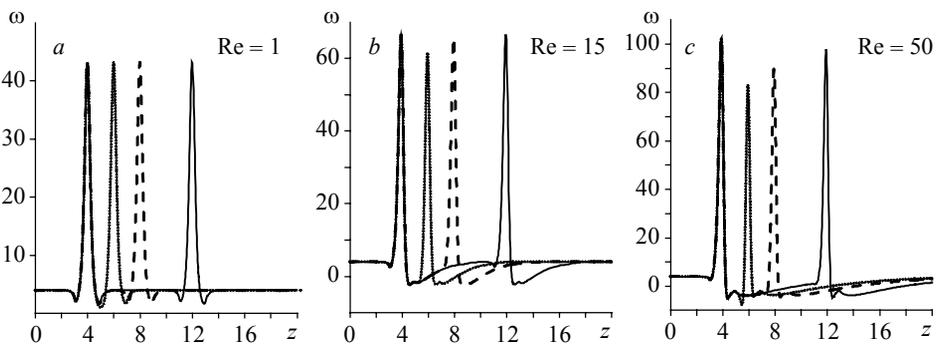


Рис. 11. Распределения вихря на стенке ($m = 1, Re = 5, \alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, Z_1 = Z_2 = 1$).

Обозначения: - $L_1 = 3, L_3 = 5$; - - - - $L_1 = 3, L_3 = 7$; — - - - $L_1 = 3, L_3 = 11$

Fig. 11. Shear stress distributions on the wall ($m = 1, Re = 5, \alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, Z_1 = Z_2 = 1$).

Notations: - $L_1 = 3, L_3 = 5$; - - - - $L_1 = 3, L_3 = 7$; — - - - $L_1 = 3, L_3 = 11$

Заключение

Выполнено численное моделирование течения неньютоновской жидкости в осесимметричном канале с двумя препятствиями. Создана и протестирована программа расчета течений для ЭВМ. Показаны и описаны картины течения степенной жидкости в зависимости от параметров процесса. Проведены параметрические расчеты динамических и кинематических характеристик течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Forrester J.H., Young D.F.* Flow through a converging-diverging tube and its implications in occlusive vascular disease – I. Theoretical development // *Journal of Biomechanics*. 1970. V. 3. Iss. 3. P. 297–305.
2. *Lee J.S., Fung Y.C.* Flow in locally constricted tubes at low Reynolds numbers // *Journal of Applied Mechanics*. 1970. V. 37. Iss. 1. P. 9–16.
3. *Young D.F., Tsai F.Y.* Flow characteristics in model of arterial stenoses-I. Steady flow // *Journal of Biomechanics*. 1973. V. 6. Iss. 4. P. 395–402.
4. *Deshpande M.D., Giddens D.P., Mabon R.F.* Steady laminar flow through modelled vascular stenosis // *Journal of Biomechanics*. 1976. V. 9. Iss. 4. P. 13–20.
5. *MacDonald D.A.* On steady flow through modelled vascular stenosis // *Journal of Biomechanics*. 1979. V. 12. Iss. 1. P. 165–174.
6. *Liepsch D., Singh M., Lee M.* Experimental analysis of the influence of stenotic geometry on steady flow // *Biorheology*. 1992. V. 29. Iss. 4. P. 419–431.
7. *Shukla J.B., Parihar R.S., Rao B.R.* Effects of stenosis on non-newtonian flow of the blood in an artery // *Bulletin of Mathematical Biology*. 1980. V. 42. Iss. 3. P. 283–294.
8. *Manimaran R.* CFD simulation of non-Newtonian fluid flow in arterial stenoses with surface irregularities // *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 2011. V. 73. P. 957–962.
9. *Leuprecht A., Perktold K.* Computer simulation of non-newtonian effects on blood flow in large arteries // *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. 2001. V. 4. Iss. 2. P. 149–163.
10. *Jahangiri M., Saghafian M., Sadeghi M.R.* Numerical simulation of non-Newtonian models effect on hemodynamic factors of pulsatile blood flow in elastic stenosed artery // *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2017. V. 31. Iss. 2. P. 1003–1013.
11. *Tu C., Deville M.* Pulsatile flow of non-Newtonian fluids through arterial stenosis // *Journal of Biomechanics*. 1996. V. 29. Iss. 7. P. 899–908.
12. *Prakash O., Makinde O.D., Singh S.P., Jain N., Kumar D.* Effects of stenoses on non-Newtonian flow of blood in blood vessels // *International Journal of Biomathematics*. 2015. V. 8 Iss. 1. P. 1550010-1–1550010-13.
13. *Рыльцев И.А., Рыльцева К.Е., Шрагер Г.Р.* Кинематика течения степенной жидкости в трубе переменного сечения // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 63. С. 125–138.
14. *Lee T.S.* Numerical studies of fluid flow through tubes with double constrictions // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 1990. V. 11. Iss. 8. P. 1113–1126.
15. *Lee T.S.* Steady laminar fluid flow through variable constrictions in vascular tubes // *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*. 1994. V. 116. Iss. 1. P. 66–71.
16. *Lee T.S., Liao W., Low H.T.* Numerical simulation of turbulent flow through series stenosis // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2003. V. 42. Iss. 7. P. 717–740.
17. *Huang H., Lee T.S., Shu C.* Lattice-BGK simulation of steady flow through vascular tubes with double constrictions // *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*. 2006. V. 16. Iss. 2. P. 185–203.
18. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
19. *Ostwald W.* Ueber die rechnerische Darstellung des Strukturgebietes der Viskosität // *Kolloid Zeitschrift*. 1929. V. 47. Iss. 2. P. 176–187.
20. *Годунов С.К., Рябенкий В.С.* Введение в теорию разностных схем. М.: Физматгиз, 1962. 340 с.

Ryltsev I.A., Frolov O.Yu. Shrager G.R. (2021) NUMERICAL SIMULATION OF A POWER-LAW FLUID FLOW IN A CHANNEL WITH DOUBLE CONSTRICTION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 76–88

DOI 10.17223/19988621/70/7

Keywords: laminar flow, double constriction, power-law fluid, Ostwald-de Waele model, coordinate transformation, pressure Poisson equation.

Flow fields of non-Newtonian fluids in cylindrical channels with obstacles are of great interest for researchers studying the mechanics of fluids. In engineering techniques, such channels represent component parts of heat exchangers and hydraulic systems of various types.

In this work, the numerical simulation of a steady non-Newtonian fluid flow in an axisymmetric pipe with two overlaps, whose geometry is described by a cosine function, is carried out. Mathematical formulation of the problem is written in terms of vortex and stream function variables. The Ostwald – de Waele model is used to describe rheological properties of the medium. The solution to a system of differential equations is obtained numerically using the false transient method. To determine the pressure field, the Poisson equation for pressure is solved. Three media are considered in the paper: Newtonian, pseudoplastic, and dilatant fluids. The influence of the Reynolds number, power-law index in the rheological model, and geometric parameters of the channel on the flow characteristics is shown as streamline distributions and functional curves.

Financial support. The research is implemented at the expenses of the Russian Science Foundation (project No. 18-19-00021).

Ivan A. RYLITSEV (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ryltsev_i@ftf.tsu.ru

Oleg Yu. FROLOV (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: frolovoy@mail.tsu.ru

Gennady R. SHRAGER (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shg@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Forrester J.H., Young D.F. (1970) Flow through a converging-diverging tube and its implications in occlusive vascular disease – I. Theoretical development. *Journal of Biomechanics*. 3(3). pp. 297–305. DOI: 10.1016/0021-9290(70)90031-X.
2. Lee J.S., Fung Y.C. (1970) Flow in locally constricted tubes at low Reynolds numbers. *Journal of Applied Mechanics*. 37(1). pp. 9–16. DOI: 10.1115/1.3408496.
3. Young D.F., Tsai F.Y. (1973) Flow characteristics in model of arterial stenoses-I. Steady flow. *Journal of Biomechanics*. 6(4). pp. 395–402. DOI: 10.1016/0021-9290(73)90099-7.
4. Deshpande M.D., Giddens D.P., Mabon R.F. (1976) Steady laminar flow through modelled vascular stenoses. *Journal of Biomechanics*. 9(4). pp. 13–20. DOI: 10.1016/0021-9290(76)90001-4.
5. MacDonald D.A. (1979) On steady flow through modelled vascular stenosis. *Journal of Biomechanics*. 12(1). pp. 165–74. DOI: 10.1016/0021-9290(79)90004-6.
6. Liepsch D., Singh M., Lee M. (1992) Experimental analysis of the influence of stenotic geometry on steady flow. *Biorheology*. 29(4). pp. 419–431. DOI: 10.3233/BIR-1992-29405.
7. Shukla J.B., Parihar R.S., Rao B.R. (1980) Effects of stenosis on non-Newtonian flow of the blood in an artery. *Bulletin of Mathematical Biology*. 42(3). pp. 283–294. DOI: 10.1007/BF02460787.
8. Manimaran R. (2011) CFD simulation of non-Newtonian fluid flow in arterial stenoses with surface irregularities. *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 73. pp. 957–962.

9. Leuprecht A., Perktold K. (2001) Computer simulation of non-Newtonian effects on blood flow in large arteries. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. 4(2). pp. 149–163. DOI: 10.1080/10255840008908002.
10. Jahangiri M., Saghafian M., Sadeghi M.R. (2017) Numerical simulation of non-Newtonian models effect on he
11. modynamic factors of pulsatile blood flow in elastic stenosed artery. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 31(2). pp. 1003–1013. DOI: 10.1007/ s12206-017-0153-x.
12. Tu C., Deville M. (1996) Pulsatile flow of non-Newtonian fluids through arterial stenosis. *Journal of Biomechanics*. 29(7). pp. 899–908. DOI: 10.1016/0021-9290(95)00151-4.
13. Prakash O., Makinde O.D., Singh S.P., Jain N., Kumar D. (2015) Effects of stenoses on non-Newtonian flow of blood in blood vessels. *International Journal of Biomathematics*. 8(1). pp. 1550010-1–1550010-13 . DOI: 10.1142/S1793524515500102.
14. Ryltsev I.A., Ryltseva K.E., Shrager G.R. (2020) Kinematika techeniya stepennoy zhidkosti v trube peremennogo secheniya [Kinematics of a power-law fluid flow in a pipe with a varying cross section]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 63. pp. 125–138. DOI: 10.17223/19988621/63/11.
15. Lee T.S. (1990) Numerical studies of fluid flow through tubes with double constrictions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 11(8). pp. 1113–1126. DOI: 10.1002/flid.1650110805.
16. Lee T.S. (1994) Steady laminar fluid flow through variable constrictions in vascular tubes. *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*. 116(1). pp. 66–71. DOI: 10.1115/1.2910244.
17. Lee T.S., Liao W., Low H.T. (2003) Numerical simulation of turbulent flow through series stenoses. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 42(7). pp. 717–740. DOI: 10.1002/flid.550.
18. Huang H., Lee T.S., Shu C. (2006) Lattice-BGK simulation of steady flow through vascular tubes with double constrictions. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*. 16(2). pp. 185–203. DOI: 10.1108/09615530610644262.
19. Roache P.J. (1982) *Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque: Hermosa. DOI: 10.1016/0041-5553(80)90297-9.
20. Ostwald W. (1929) Ueber die rechnerische Darstellung des Strukturgebietes der Viskosität. *Kolloid Zeitschrift*. 47(2). pp. 176–187. DOI: 10.1007/BF01496959.
21. Godunov S.K., Ryabenkiy V.S. (1987) *Difference Schemes*. North-Holland: Elsevier Science Ltd.

Received: September 25, 2020