УДК 539.3+517.95
DOI 10.17223/19988621/70/11

А.Д. Чернышов, В.В. Горяйнов, С.Ф. Кузнецов, О.Ю. Никифорова

ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О ПРОГИБЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКИ

С помощью метода быстрых разложений в общем виде решена задача о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки. В качестве примера показано построение точных решений задачи для случаев жестко закрепленной мембраны под действием куполообразной и синусоидальной нагрузок. Определено положение максимального прогиба мембраны и наибольших напряжений, возникающих в ней под действием переменной нагрузки.

Ключевые слова: *прогиб мембраны, компоненты напряжений, переменная нагрузка, точное решение, уравнение Пуассона, быстрые разложения.*

Прогибы мембраны описываются уравнением Пуассона. В литературе встречаются его аналитические [1–10] и численные [11–20] решения. Например, в [1, 2] представлены точные решения первой краевой задачи для уравнения Пуассона, выраженные через функцию Грина. В [3] сформулирована аналитическая формула для определения прогибов прямоугольной мембраны под действием электростатического давления. Приводится сравнение значений прогибов, полученных по предлагаемой формуле, с результатами расчетов по методу конечных элементов. В работах [4, 5] решение задачи о прогибах прямоугольной мембраны с жестким неподвижным контуром постоянного натяжения под действием равномерно распределенного давления осуществлялось методом разделения переменных. Кроме этого, в [5] представлено сравнение методов разделения переменных, Ритца, наименьших квадратов и Канторовича для решения указанной задачи. В [6] привлекаются соотношения обобщенной теории упругости, содержащие структурный параметр и позволяющие получить регулярное решение задачи о прогибе круглой мембраны. В статье [7] предложен подход к получению некоторых точных решений уравнения Пуассона, основанный на введении в уравнение Пуассона членов, содержащих первые производные искомой функции. Для сведения полученного таким способом уравнения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривается связанная с ним система двух уравнений в частных производных. Однако в [7] точные решения краевых задач не рассматриваются. В работе [8] методом преобразования Фурье решается краевая задача Дирихле для уравнения Пуассона в области, ограниченной двумя параллельными гиперплоскостями в R^n. Решение представлено в виде суммы интегралов, ядра которых найдены в конечном виде. В [9] представлено решение этой задачи с полиномиальной правой частью. Векторным методом Галеркина, в котором интегралы выражаются аналитически, в [10] решено двумерное уравнение Пуассона. В работе [11] развивается метод наименьших квадратов с Т-элементами для решения линейных краевых задач с уравнениями Лапласа и Пуассона. Авторы используют разрывные ба-

зисные функции высокого порядка аппроксимации из специальных функциональных пространств. В [12] предложен алгоритм решения общей неоднородной краевой задачи Дирихле для трехмерного уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности и с минимальным 27-точечным шаблоном. Также среди численных методов следует отметить метод коллокаций [13, 14], метод квадратурных элементов [15], модифицированный кубический B-сплайн дифференциально-квадратурный метод [16, 17] и метод, основанный на использовании вейвлетов Хаара [18, 19]. В работе [20] приведена математическая постановка и решение пространственных краевых задач с уравнением Пуассона методом спектральных элементов.

В данной работе с помощью быстрых разложений [21] будет получено в общем виде решение задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки, точно удовлетворяющее дифференциальному уравнению и граничным условиям, т.е. решение будет являться точным. Общий вид решения задачи содержит много свободных коэффициентов, которыми можно аппроксимировать широкий круг инженерных задач. Будет показано построение некоторых точных решений для частных случаев нагрузки.

1. Постановка задачи

Уравнение прогиба прямоугольной мембраны имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+F(x,y)=0,\ \ (x,y)\in\Omega_{\square},\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b, \tag{1}$$

где $F(x,y)$ – нагрузка на мембрану.

Граничные условия зададим в виде

$$w|_{x=0}=f_1(y),\ \ w|_{y=0}=f_2(x),\ \ w|_{x=a}=f_3(y),\ \ w|_{y=b}=f_4(x). \tag{2}$$

Решение краевой задачи (1), (2) должно удовлетворять условиям согласований

$$\begin{gathered} f_1(0)=f_2(0),\ \ f_2(a)=f_3(0),\ \ f_3(b)=f_4(a),\ \ f_1(b)=f_4(0),\\ w_{xx}(0,0)+w_{yy}(0,0)+F(0,0)=0,\ \ w_{xx}(a,0)+w_{yy}(a,0)+F(a,0)=0,\\ w_{xx}(0,b)+w_{yy}(0,b)+F(0,b)=0,\ \ w_{xx}(a,b)+w_{yy}(a,b)+F(a,b)=0. \end{gathered} \tag{3}$$

Равенства (3) следуют из независимости величины прогибов $w(x,y)$ от направления подхода к этим углам.

Функцию $w(x,y)$ представим конечным выражением, заимствованным из теории быстрых разложений [21], в виде суммы граничной функции второго порядка и ряда Фурье по синусам, в котором учтены два коэффициента Фурье

$$w(x,y)=\sum_{i=1}^{4}A_i(y)P_i(x)+A_5(y)\sin\pi\frac{x}{a}+A_6(y)\sin 2\pi\frac{x}{a},\ 0\le x\le a, \tag{4}$$

$$A_i(y)=\sum_{j=1}^{4}A_{i,j}P_j(y)+A_{i,5}\sin\pi\frac{y}{b}+A_{i,6}\sin 2\pi\frac{y}{b},\ i=1\div 6,\ 0\le y\le b,$$

$$P_1(y)=1-\frac{y}{b},\ P_2(y)=\frac{y}{b},\ P_3(y)=\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{3},\ P_4(y)=\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{6},$$

$$P_1(x)=1-\frac{x}{a},\ P_2(x)=\frac{x}{a},\ P_3(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3},\ P_4(x)=\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}.$$

Таким образом, искомая функция $w(x,y)$ представлена в виде конечной двойной суммы, содержащей 36 неизвестных коэффициентов

$$A_{i,j},\ i=1-6,\ \ j=1-6. \tag{5}$$

Зададим функции $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(x)$, входящие в граничные условия (2), следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(y) &= \sum_{j=1}^{4} f_{1,j}P_j(y) + f_{1,5}\sin\pi\frac{y}{b} + f_{1,6}\sin 2\pi\frac{y}{b}, \\ f_2(x) &= \sum_{j=1}^{4} f_{2,j}P_j(x) + f_{2,5}\sin\pi\frac{x}{a} + f_{2,6}\sin 2\pi\frac{x}{a}, \\ f_3(y) &= \sum_{j=1}^{4} f_{3,j}P_j(y) + f_{3,5}\sin\pi\frac{y}{b} + f_{3,6}\sin 2\pi\frac{y}{b}, \\ f_4(x) &= \sum_{j=1}^{4} f_{4,j}P_j(x) + f_{4,5}\sin\pi\frac{x}{a} + f_{4,6}\sin 2\pi\frac{x}{a}, \end{aligned} \tag{6}$$

где постоянные $f_{i,j}$, $i=1-4$, $j=1-6$ считаем известными величинами.

Нагрузку на мембрану $F(x,y)$ запишем конечной суммой по аналогии с зависимостью (4):

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{4} F_i(y)P_i(x) + F_5(y)\sin\pi\frac{x}{a} + F_6(y)\sin 2\pi\frac{x}{a},\ \ 0 \le x \le a\,, \tag{7}$$

$$F_i(y) = \sum_{j=1}^{4} F_{i,j}P_j(y) + F_{i,5}\sin\pi\frac{y}{b} + F_{i,6}\sin 2\pi\frac{y}{b},\ \ i=1-6,\ \ 0 \le y \le b\,.$$

Все коэффициенты F_{ij}, $i=1-6$, $j=1-6$ в выражении (7) для нагрузки считаем известными, так как $F(x,y)$ – заданная функция.

Таким образом, требуется найти такое решение уравнения (1) с заданной нагрузкой на мембрану в виде (7), которое точно удовлетворяет граничным условиям (2) и условиям согласований (3).

2. Решение задачи

Для нахождения неизвестных коэффициентов $A_{i,j}$ из (5) применим метод быстрых разложений [21], согласно которому подставим двойное быстрое разложение функции $w(x,y)$ в граничные условия (2), условия согласований (3) и дифференциальное уравнение (1).

Из граничных условий (2) получим

$$\begin{aligned} w\big|_{x=0} = f_1(y) &\Rightarrow \sum_{j=1}^{4} A_{1,j}P_j(y) + A_{1,5}\sin\pi\frac{y}{b} + A_{1,6}\sin 2\pi\frac{y}{b} = \\ &= \sum_{j=1}^{4} f_{1,j}P_j(y) + f_{1,5}\sin\pi\frac{y}{b} + f_{1,6}\sin 2\pi\frac{y}{b}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$w|_{y=0} = f_2(x) \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} A_{i,1} P_i(x) + A_{5,1} \sin \pi \frac{x}{a} + A_{6,1} \sin 2\pi \frac{x}{a} =$$

$$= \sum_{j=1}^{4} f_{2,j} P_j(x) + f_{2,5} \sin \pi \frac{x}{a} + f_{2,6} \sin 2\pi \frac{x}{a},$$

$$w|_{x=a} = f_3(y) \Rightarrow \sum_{j=1}^{4} A_{2,j} P_j(y) + A_{2,5} \sin \pi \frac{y}{b} + A_{2,6} \sin 2\pi \frac{y}{b} =$$

$$= \sum_{j=1}^{4} f_{3,j} P_j(y) + f_{3,5} \sin \pi \frac{y}{b} + f_{3,6} \sin 2\pi \frac{y}{b},$$

$$w|_{y=b} = f_4(x) \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} A_{i,2} P_i(x) + A_{5,2} \sin \pi \frac{x}{a} + A_{6,2} \sin 2\pi \frac{x}{a} =$$

$$= \sum_{j=1}^{4} f_{4,j} P_j(x) + f_{4,5} \sin \pi \frac{x}{a} + f_{4,6} \sin 2\pi \frac{x}{a}.$$

Условия согласований (3) дают следующие уравнения

$$f_{1,1} = f_{2,1} = A_{1,1},\ f_{2,2} = f_{3,1} = A_{2,1},\ f_{3,2} = f_{4,2} = A_{2,2},\ f_{1,2} = f_{4,1} = A_{1,2}, \qquad (9)$$

$$A_{3,1} + A_{1,3} + F_{1,1} = 0,\ A_{4,1} + A_{2,3} + F_{2,1} = 0,\ A_{3,2} + A_{1,4} + F_{1,2} = 0,\ A_{4,2} + A_{2,4} + F_{2,2} = 0.$$

Равенства (8), (9) позволяют найти 32 неизвестных коэффициента $A_{i,j}$. Для нахождения оставшихся коэффициентов $A_{i,j}$ подставим $w(x,y)$ из (4) в дифференциальное уравнение (1):

$$\sum_{i=1}^{4} \left(\sum_{j=1}^{4} A_{i,j} P_j(y) + A_{i,5} \sin \pi \frac{y}{b} + A_{i,6} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) P_i''(x) -$$

$$-\frac{\pi^2}{a^2} \left(\sum_{j=1}^{4} A_{5,j} P_j(y) + A_{5,5} \sin \pi \frac{y}{b} + A_{5,6} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) \sin \pi \frac{x}{a} -$$

$$-\frac{4\pi^2}{a^2} \left(\sum_{j=1}^{4} A_{6,j} P_j(y) + A_{6,5} \sin \pi \frac{y}{b} + A_{6,6} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) \sin 2\pi \frac{x}{a} +$$

$$+\sum_{i=1}^{4} \left(\sum_{j=1}^{4} A_{i,j} P_j''(y) - A_{i,5} \frac{\pi^2}{b^2} \sin \pi \frac{y}{b} - A_{i,6} \frac{4\pi^2}{b^2} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) P_i(x) +$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{4} A_{5,j} P_j''(y) - A_{5,5} \frac{\pi^2}{b^2} \sin \pi \frac{y}{b} - A_{5,6} \frac{4\pi^2}{b^2} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) \sin \pi \frac{x}{a} +$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{4} A_{6,j} P_j''(y) - A_{6,5} \frac{\pi^2}{b^2} \sin \pi \frac{y}{b} - A_{6,6} \frac{4\pi^2}{b^2} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) \sin 2\pi \frac{x}{a} +$$

$$+\sum_{i=1}^{4} \left(\sum_{j=1}^{4} F_{i,j} P_j(y) + F_{i,5} \sin \pi \frac{y}{b} + F_{i,6} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) P_i(x) +$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{4} F_{5,j} P_j(y) + F_{5,5} \sin \pi \frac{y}{b} + F_{5,6} \sin 2\pi \frac{y}{b} \right) \sin \pi \frac{x}{a} +$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{4} F_{6,j} P_j(y) + F_{6,5}\sin\pi\frac{y}{b} + F_{6,6}\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\sin 2\pi\frac{x}{a} = 0,$$

$$0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b. \qquad (10)$$

Уравнение (10) должно выполняться при любых $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$. Далее приравняем коэффициенты в (8) и (10) слева и справа перед линейно независимыми функциями

$$P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x),\ P_4(x),\ P_1(y),\ P_2(y),\ P_3(y),\ P_4(y),$$

$$\sin\pi\frac{x}{a},\ \sin\pi\frac{y}{b},\ \sin 2\pi\frac{x}{a},\ \sin 2\pi\frac{y}{b},$$

учитывая, что $P_1'' = P_2'' = 0,\ \ P_3'' = P_1,\ \ P_4'' = P_2$. В результате будем иметь переопределенную систему линейных алгебраических уравнений. Благодаря выполнению условий согласований (3) данная переопределенная система имеет решение. Для нахождения неизвестных (5) необходимо использовать 36 уравнений, а остальные уравнения используем для составления соотношений между коэффициентами $f_{i,j},\ i = 1-4,\ j = 1-6$, заданных для функций (6), и коэффициентами $F_{i,j},\ i = 1-6, j = 1-6$ нагрузки $F(x,y)$.

Таким образом, значения коэффициентов $A_{i,j}$ будут определяться равенствами:

$$A_{1,j} = f_{1,j},\ \ A_{2,j} = f_{3,j},\ \ j = 1-6,$$

$$A_{3,1} = f_{2,3},\ \ A_{3,2} = f_{4,3},\ \ A_{3,3} = -F_{1,3},\ \ A_{3,4} = -F_{1,4},$$

$$A_{3,5} = \frac{\pi^2}{b^2} f_{1,5} - F_{1,5},\ A_{3,6} = \frac{4\pi^2}{b^2} f_{1,6} - F_{1,6},$$

$$A_{4,1} = f_{2,4},\ \ A_{4,2} = f_{4,4},\ \ A_{4,3} = -F_{4,1},\ \ A_{4,4} = -F_{2,4},$$

$$A_{4,5} = \frac{\pi^2}{b^2} f_{3,5} - F_{2,5},\ \ A_{4,6} = \frac{4\pi^2}{b^2} f_{3,6} - F_{2,6}, \qquad (11)$$

$$A_{5,1} = f_{2,5},\ \ A_{5,2} = f_{4,5},\ \ A_{5,3} = \frac{\pi^2}{a^2} f_{2,5} - F_{5,1},\ \ A_{5,4} = \frac{\pi^2}{a^2} f_{4,5} - F_{5,2},$$

$$A_{5,5} = F_{5,5}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right),\ A_{5,6} = F_{5,6}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2}\right),$$

$$A_{6,1} = f_{2,6},\ \ A_{6,2} = f_{4,6},\ \ A_{6,3} = \frac{4\pi^2}{a^2} f_{2,6} - F_{6,1},\ A_{6,4} = \frac{4\pi^2}{a^2} f_{4,6} - F_{6,2},$$

$$A_{6,5} = F_{6,5}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right),\ A_{6,6} = F_{6,6}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2}\right).$$

Подставив коэффициенты из (11) в выражение (4), будем иметь точное решение задачи.

При задании граничных условий (2) и нагрузки на мембрану (7) должны выполняться следующие условия:

$$f_{1,1} = f_{2,1},\ \ f_{2,2} = f_{3,1},\ \ f_{3,2} = f_{4,2},\ \ f_{1,2} = f_{4,1}; \tag{12}$$

$$F_{3,3} = F_{3,4} = F_{4,3} = F_{4,4} = 0; \tag{13}$$

$$f_{1,3} = -f_{2,3} - F_{1,1},\ \ f_{1,4} = -f_{4,3} - F_{1,2},\ \ f_{3,3} = -f_{2,4} - F_{2,1},\ \ f_{3,4} = -f_{4,4} - F_{2,2}; \tag{14}$$

$$F_{1,3} = F_{3,1},\ \ F_{1,4} = F_{3,2},\ \ F_{4,1} = F_{2,3},\ \ F_{2,4} = F_{4,2}; \tag{15}$$

$$\begin{gathered}
f_{1,5} = \frac{b^2}{\pi^2}\left(\frac{b^2}{\pi^2}F_{3,5} + F_{1,5}\right),\ \ f_{1,6} = \frac{b^2}{4\pi^2}\left(\frac{b^2}{4\pi^2}F_{3,6} + F_{1,6}\right),\\
f_{2,5} = \frac{a^2}{\pi^2}\left(\frac{a^2}{\pi^2}F_{5,3} + F_{5,1}\right),\ \ f_{2,6} = \frac{a^2}{4\pi^2}\left(\frac{a^2}{4\pi^2}F_{6,3} + F_{6,1}\right),\\
f_{3,5} = \frac{b^2}{\pi^2}\left(\frac{b^2}{\pi^2}F_{4,5} + F_{2,5}\right),\ \ f_{3,6} = \frac{b^2}{4\pi^2}\left(\frac{b^2}{4\pi^2}F_{4,6} + F_{2,6}\right),\\
f_{4,5} = \frac{a^2}{\pi^2}\left(\frac{a^2}{\pi^2}F_{5,4} + F_{5,2}\right),\ \ f_{4,6} = \frac{a^2}{4\pi^2}\left(\frac{a^2}{4\pi^2}F_{6,4} + F_{6,2}\right).
\end{gathered} \tag{16}$$

Следовательно, решение (11) имеет место, когда выполнены условия (12) – (16).

3. Построение точных решений и их анализ

Пусть прогибы мембраны на ее границах будут равны нулю, тогда граничные условия (2) примут вид

$$w|_{x=0} = w|_{y=0} = w|_{x=a} = w|_{y=b} = 0. \tag{17}$$

Условия (17) получаются заданием в формулах (6) следующих коэффициентов:

$$f_{i,j} = 0,\ i = 1-4,\ j = 1-6. \tag{18}$$

Для граничных условий (17) рассмотрим два вида переменной нагрузки на мембрану: куполообразную и синусоидальную.

Куполообразную нагрузку $F(x,y)$ подберем таким образом, чтобы только коэффициенты из равенств (15) были не равны нулю. Обозначим

$$F_{3,1} = F_{1,3} = Q_1,\ \ F_{1,4} = F_{3,2} = Q_2,\ \ F_{4,1} = F_{2,3} = Q_3,\ \ F_{2,4} = F_{4,2} = Q_4. \tag{19}$$

Тогда с учетом (19) нагрузку $F(x,y)$ в виде (7) запишем следующим образом:

$$\begin{gathered}
F(x,y) = \left(Q_1\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}\right) + Q_2\left(\frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}\right)\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right) +\\
+\left(Q_3\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}\right) + Q_4\left(\frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}\right)\right)\frac{x}{a} +\\
+\left(Q_1\left(1 - \frac{y}{b}\right) + Q_2\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + \left(Q_3\left(1 - \frac{y}{b}\right) + Q_4\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right).
\end{gathered} \tag{20}$$

Подставляя коэффициенты из (18) и (19) в формулы (11), найдем

$$A_{3,3} = -Q_1,\ A_{3,4} = -Q_2,\ A_{4,3} = -Q_3,\ A_{4,4} = -Q_4. \tag{21}$$

Учитывая (21), получим решение задачи в виде (4) для куполообразной нагрузки (20):

$$w(x,y) = -\left(Q_1\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}\right) + Q_2\left(\frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}\right)\right)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) -$$
$$-\left(Q_3\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}\right) + Q_4\left(\frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}\right)\right)\left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right). \tag{22}$$

При подстановке в (22) $x = a/2$ и $y = b/2$ имеем формулу для прогиба в центре мембраны под действием куполообразной нагрузки

$$w\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right) = -\frac{a^2b^2}{256}(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4). \tag{23}$$

Из формулы (23) следует, что при $a = b$ прогиб в центре квадратной мембраны пропорционален четвертой степени ее линейного размера.

Синусоидальную нагрузку $F(x,y)$ зададим так, чтобы только $F_{5,5}$, $F_{5,6}$, $F_{6,5}$, $F_{6,6}$ и коэффициенты, входящие в равенства (16), были не равны нулю. Обозначим

$$\begin{gathered} F_{3,5} = Q_5,\ F_{3,6} = Q_6,\ \ F_{5,3} = Q_7,\ F_{6,3} = Q_8,\ \ F_{4,5} = Q_9,\ F_{4,6} = Q_{10}, \\ F_{5,4} = Q_{11},\ F_{6,4} = Q_{12},\ F_{5,5} = Q_{13},\ F_{5,6} = Q_{14},\ F_{6,5} = Q_{15},\ F_{6,6} = Q_{16}. \end{gathered} \tag{24}$$

Тогда из равенств (16) найдем

$$\begin{gathered} F_{1,5} = -\frac{b^2}{\pi^2}Q_5,\ \ F_{1,6} = -\frac{b^2}{4\pi^2}Q_6,\ \ F_{5,1} = -\frac{a^2}{\pi^2}Q_7,\ \ F_{6,1} = -\frac{a^2}{4\pi^2}Q_8, \\ F_{2,5} = -\frac{b^2}{\pi^2}Q_9,\ \ F_{2,6} = -\frac{b^2}{4\pi^2}Q_{10},\ \ F_{5,2} = -\frac{a^2}{\pi^2}Q_{11},\ \ F_{6,2} = -\frac{a^2}{4\pi^2}Q_{12}. \end{gathered} \tag{25}$$

Следовательно, с учетом (24) и (25) функцию $F(x,y)$ запишем в виде

$$F(x,y) =$$
$$= -\left(\frac{b^2}{\pi^2}Q_5\sin\pi\frac{y}{b} + \frac{b^2}{4\pi^2}Q_6\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \left(\frac{b^2}{\pi^2}Q_9\sin\pi\frac{y}{b} + \frac{b^2}{4\pi^2}Q_{10}\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\frac{x}{a} +$$
$$+\left(Q_5\sin\pi\frac{y}{b} + Q_6\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + \left(Q_9\sin\pi\frac{y}{b} + Q_{10}\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) +$$
$$+\left(-\frac{a^2}{\pi^2}Q_7\left(1 - \frac{y}{b}\right) - \frac{a^2}{\pi^2}Q_{11}\frac{y}{b} + Q_7\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}\right) + Q_{11}\left(\frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}\right) + Q_{13}\sin\pi\frac{y}{b} +\right.$$
$$\left.+Q_{14}\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\sin\pi\frac{x}{a} + \left(-\frac{a^2}{4\pi^2}Q_8\left(1 - \frac{y}{b}\right) - \frac{a^2}{4\pi^2}Q_{12}\frac{y}{b} + Q_8\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}\right) +\right.$$
$$\left.+Q_{12}\left(\frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}\right) + Q_{15}\sin\pi\frac{y}{b} + Q_{16}\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\sin 2\pi\frac{x}{a}. \tag{26}$$

Подставляя коэффициенты из (24) и (25) в формулы (11), получим

$$A_{3,5}=\frac{b^2}{\pi^2}Q_5,\ A_{3,6}=\frac{b^2}{4\pi^2}Q_6,\ A_{4,5}=\frac{b^2}{\pi^2}Q_9,\ \ A_{4,6}=\frac{b^2}{4\pi^2}Q_{10},$$

$$A_{5,3}=\frac{a^2}{\pi^2}Q_7,\ A_{5,4}=\frac{a^2}{\pi^2}Q_{11},\ A_{5,5}=\ Q_{13}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right),\ A_{5,6}=Q_{14}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}\right),\quad (27)$$

$$A_{6,3}=\frac{a^2}{4\pi^2}Q_8,\ A_{6,4}=\frac{a^2}{4\pi^2}Q_{12},\ A_{6,5}=Q_{15}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right),\ A_{6,6}=Q_{16}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}\right).$$

Таким образом, с учетом (27) точное решение задачи для граничных условий (17) и синусоидальной нагрузки (26) будет иметь вид

$$w(x,y)=\left(\frac{b^2}{\pi^2}Q_5\sin\pi\frac{y}{b}+\frac{b^2}{4\pi^2}Q_6\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+$$

$$+\left(\frac{b^2}{\pi^2}Q_9\sin\pi\frac{y}{b}+\frac{b^2}{4\pi^2}Q_{10}\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)+\left(\frac{a^2}{\pi^2}Q_7\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{3}\right)+\right.$$

$$+\frac{a^2}{\pi^2}Q_{11}\left(\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{6}\right)+Q_{13}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)\sin\pi\frac{y}{b}+Q_{14}\Big/\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}\right)\sin 2\pi\frac{y}{b}\Bigg)\sin\pi\frac{x}{a}+$$

$$+\left(\frac{a^2}{4\pi^2}Q_8\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{3}\right)+\frac{a^2}{4\pi^2}Q_{12}\left(\frac{y^3}{6b}-\frac{by}{6}\right)+Q_{15}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)\sin\pi\frac{y}{b}+\right.$$

$$\left.+Q_{16}\Big/\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}\right)\sin 2\pi\frac{y}{b}\right)\sin 2\pi\frac{x}{a}.\qquad (28)$$

Подставляя в (28) $x=a/2$ и $y=b/2$, получим формулу вычисления прогиба в центре мембраны под действием синусоидальной нагрузки:

$$w\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)=-\frac{a^2b^2}{16\pi^2}(Q_5+Q_7+Q_9+Q_{11})+\frac{a^2b^2}{\pi^2\left(a^2+b^2\right)}Q_{13}\,.\qquad (29)$$

Если в (26) принять все Q_i равными нулю, кроме Q_{13}, то получим частный случай синусоидальной нагрузки, приведенный в [22] при рассмотрении задачи о свободно опертой прямоугольной пластинке.

Выберем в качестве материала мембраны сталь конструкционную углеродистую обыкновенного качества марки ВСт3пс [23] со следующими характеристиками [24, 25]:

$$R_y=2.35\cdot 10^8\ \text{Па},\ \nu=0,25\,,\ E=2,13\cdot 10^{11}\ \text{Па},$$

где R_y – расчетное сопротивление материала мембраны.

Значения параметров a, b, Q_i, $i=1-16$ подбирались так, чтобы напряжения не превосходили расчетное сопротивление материала мембраны при двухосном напряженном состоянии [22, 23]

$$\sqrt{\sigma_x^2-\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2}=\tilde{\sigma}\le R_y\,,\qquad (30)$$

где
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right),\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right),$$
$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\ \varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2. \tag{31}$$

Вид куполообразной нагрузки (20) для данных
$$Q_i = 4\cdot 10^{-2},\ i = 1-4,\ a = 1.5\ \text{м},\ b = 2.5\ \text{м} \tag{32}$$
показан на рис. 1, *a*. Вид синусоидальной нагрузки (26) для данных
$$Q_i = 4\cdot 10^{-2},\ i = 5-16,\ a = 1.5\ \text{м},\ b = 2.5\ \text{м} \tag{33}$$
изображен на рис. 1, *b*. Соответствующие этим видам нагрузки прогибы мембраны, вычисленные по формулам (22) и (28), представлены на рис. 2.

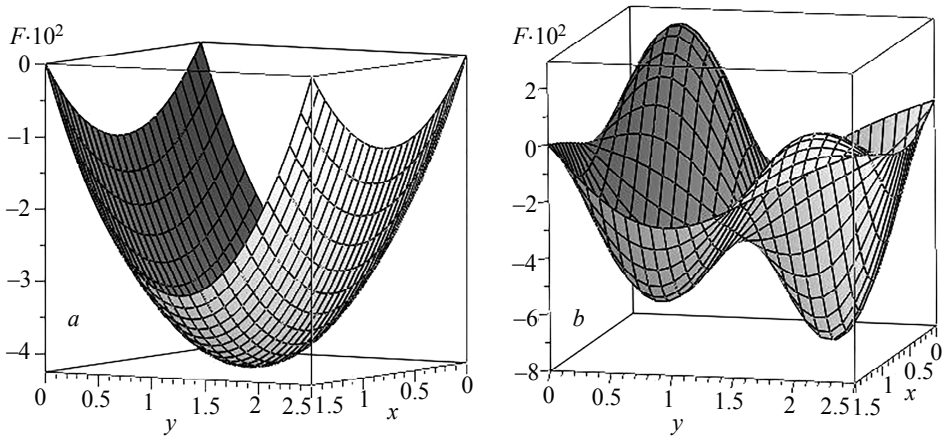

Рис. 1. Виды нагрузок на мембрану: (*a*) куполообразной; (*b*) синусоидальной
Fig. 1. Types of membrane loads: (*a*) dome-shaped and (*b*) sinusoidal

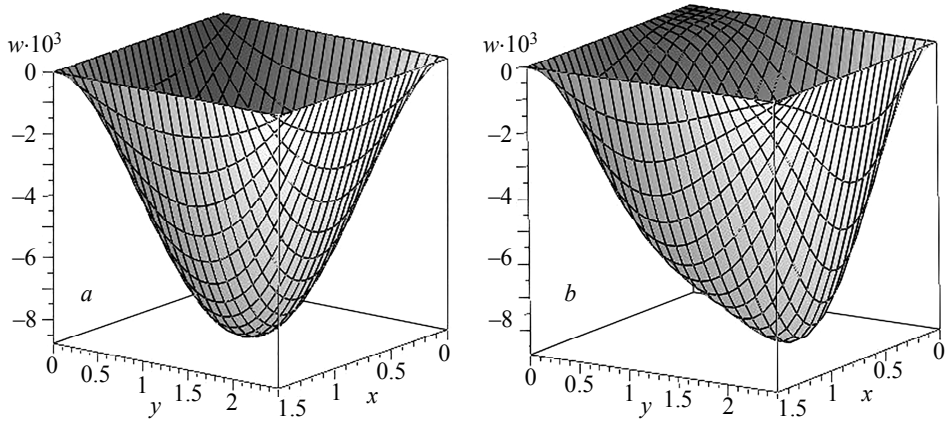

Рис. 2. Прогиб прямоугольной мембраны под действием нагрузки:
(*a*) куполообразной; (*b*) синусоидальной
Fig. 2. Rectangular membrane deflection under a load:
(*a*) dome-shaped and (*b*) sinusoidal

Из рис. 1 и 2 видно, что при задании всех Q_i, $i = 1-16$, одинаковыми (см. (32) и (33)) куполообразная нагрузка (рис. 1, *a*) и соответствующий ей прогиб (рис. 2, *a*) имеют две плоскости симметрии, проходящие через $x/2$ и $y/2$. Синусоидальная нагрузка (рис. 1, *b*) и вызванный ею прогиб мембраны (рис. 2, *b*), плоскостей симметрии не имеют. Если же для куполообразной нагрузки некоторые из значений Q_i, $i = 1-4$, взять равными нулю или не все значения из Q_i, $i = 1-4$, будут равны друг другу, то нагрузка и соответствующий ей прогиб станут несимметричными. Профили прогибов мембраны при куполообразной нагрузке показаны на рис. 3.

Из рис. 2, *a* и рис. 3 (кривые *4*) можно сделать вывод, что при симметричной куполообразной нагрузке максимальный прогиб находится в центре мембраны, т.е. $w_{\max} = w(a/2;\, b/2)$ и определяется по формуле (23). Если же куполообразная нагрузка несимметричная (см. рис. 3, кривые *1*, *2*, *3*), то максимальный прогиб $w_{\max} \neq w(a/2;\, b/2)$ и будет находиться в окрестности точки $(a/2;\, b/2)$.

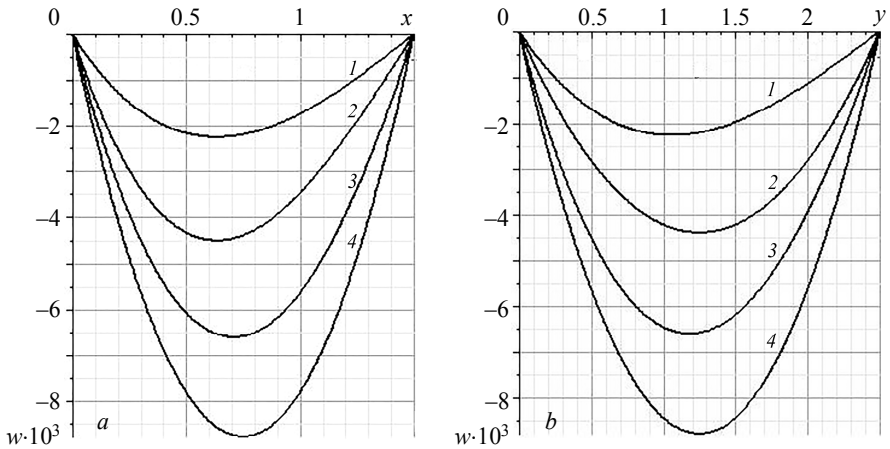

Рис. 3. Профили прогибов мембраны под действием куполообразной нагрузки в сечениях: $y = b/2$ (*a*); $x = a/2$ (*b*); кр. *1* – $Q_1 = 4\cdot10^{-2}, Q_2 = Q_3 = Q_4 = 0$; кр. *2* – $Q_1 = Q_2 = 4\cdot10^{-2}, Q_3 = Q_4 = 0$; кр. *3* – $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 4\cdot10^{-2}, Q_4 = 0$; кр. *4* – $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 4\cdot10^{-2}$

Fig. 3. Membrane deflection profiles under a dome-shaped load in sections: (*a*) $y = b/2$; (*b*) $x = a/2$; (*1*) $Q_1 = 4\cdot10^{-2}, Q_2 = Q_3 = Q_4 = 0$; (*2*) $Q_1 = Q_2 = 4\cdot10^{-2}, Q_3 = Q_4 = 0$; (*3*) $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 4\cdot10^{-2}, Q_4 = 0$, and (*4*) $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 4\cdot10^{-2}$

Для мембраны под действием симметричной куполообразной нагрузки компоненты напряжений, вычисленные по формулам (31) и данным (32), показаны на рис. 4, а распределение $\tilde{\sigma}$, рассчитанное по формуле (30), изображено на рис. 5, *a*. Из рис. 4 и рис. 5, *a* видно, что напряжения возрастают в направлении от центра мембраны к ее границам и достигают своего максимума в серединах сторон мембраны. Наибольшие напряжения находятся в серединах обеих длинных сторон прямоугольной мембраны, а наименьшие (равные нулю) – в ее углах и середине. Этот результат совпадает с результатом, описанным в [4] для постоянной нагруз-

ки на мембрану. Если же нагрузка будет несимметричной, то наибольшее напряжение будет находиться в середине только одной из двух длинных сторон прямоугольника, а в центре мембраны напряжения уже не будут равны нулю (рис. 5, *b*). Распределение $\tilde{\sigma}$, изображенное на рис. 5, *b*, построено по данным (33) для синусоидальной нагрузки (26), которая является несимметричной.

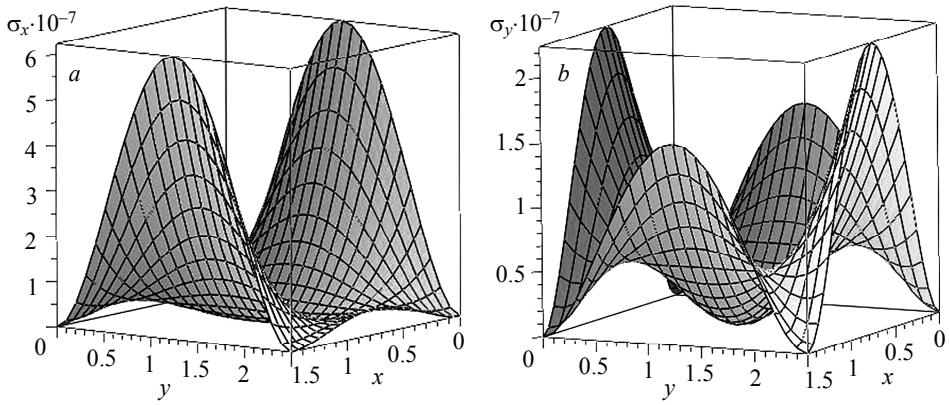

Рис. 4. Компоненты напряжений в прямоугольной мембране под действием симметричной куполообразной нагрузки: σ_x (*a*); σ_y (*b*)
Fig. 4. Stress components in the rectangular membrane under a symmetrical dome-shaped load: (*a*) σ_x and (*b*) σ_y

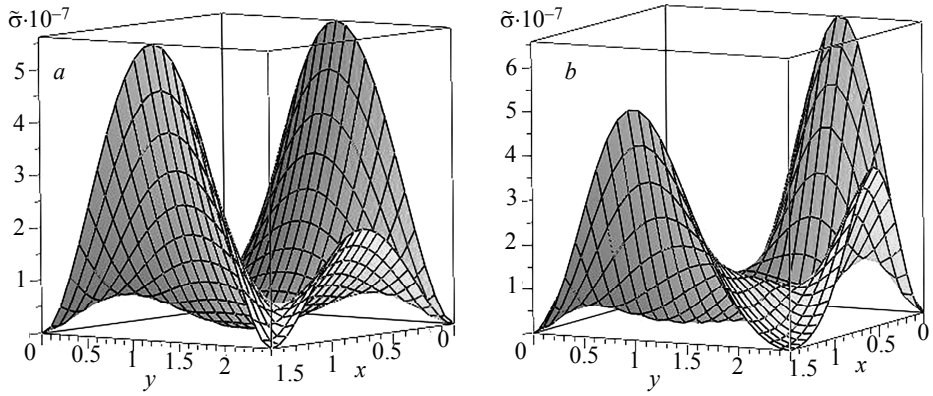

Рис. 5. Распределение $\tilde{\sigma}$ в прямоугольной мембране под действием нагрузки: (*a*) симметричной куполообразной; (*b*) синусоидальной
Fig. 5. Distribution of $\tilde{\sigma}$ in the rectangular membrane under a load: (*a*) symmetrical dome-shaped and (*b*) sinusoidal

Заключение

С помощью быстрых разложений можно получать не только новые приближенные аналитические решения задач, связанных с дифференциальными уравнениями в частных производных [26, 27], с интегро-дифференциальными [28] и обыкновенными дифференциальными уравнениями [29] для криволинейных областей [30] и с подвижными границами [31], но и новые точные.

Подбор численных значений коэффициентов функций, входящих в граничные условия и нагрузку $F(x,y)$, следует вести с учетом равенств (12) – (16). Анализ представленных точных решений показал, что для переменной по координатам мембраны нагрузки максимальный прогиб $w_{\max}$ находится в центре только в случае симметричности нагрузки относительно плоскостей, проходящих через центр мембраны. Напряжения достигают своего наибольшего значения в серединах обеих длинных сторон прямоугольной мембраны только в случае симметричной переменной нагрузки. Для несимметричной нагрузки наибольшее напряжение находится в середине одной из двух длинных сторон прямоугольника.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
2. *Liemert A.*, *Kienle A.* Exact solution of Poisson's equation with an elliptical boundary // Applied Mathematics and Computation. 2014. V. 238. P. 123–131. DOI: 10.1016/j.amc.2014.04.003.
3. *Zheng Zh.*, *Sun W.*, *Suo X.*, *Wong L. L. P.*, *Yeow J. T. W.* A novel deflection shape function for *rectangular* capacitive micromachined ultrasonic transducer diaphragms // Sensing and Bio-Sensing Research. 2015. V. 5. P. 62–70. DOI: 10.1016/j.sbsr.2015.07.006.
4. *Тимошенко С.П.*, *Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
5. *Ванько В.И.*, *Косакян Н.К.* Сравнительный анализ некоторых прямых методов решения задач математической физики // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2018. Т. 50. № 2 С. 197–206. DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-2-197-206
6. *Васильев В.В.*, *Лурье С.А.* Обобщенное решение задачи о круглой мембране, нагруженной сосредоточенной силой // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2016. № 3. С. 115–118. DOI: 10.3103/S0025654416030109.
7. *Рубина Л.И.*, *Ульянов О.Н.* Об одном подходе к решению неоднородных уравнений в частных производных // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С 355–364. DOI: 10.20537/vm170306.
8. *Алгазин О.Д.*, *Копаев А.В.* Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое // Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 4. С. 41–53. DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943.
9. *Алгазин О.Д.* Полиномиальные решения краевых задач для уравнения Пуассона в слое // Математика и математическое моделирование. 2017. № 06. С. 1–18. DOI: 10.24108/mathm.0517.0000082
10. *Ghadimi P.*, *Dashtimanesh A.*, *Hosseinzadeh H.* Solution of Poisson's equation by analytical boundary element integration // Applied Mathematics and Computation. 2010. V. 217. Iss. 1. P. 152–163. DOI: 10.1016/j.amc.2010.05.034.
11. *Юлдашев О.И.*, *Юлдашева М.Б.* Граничный метод взвешенных невязок с разрывными базисными функциями для высокоточного решения линейных краевых задач с уравнениями Лапласа и Пуассона // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. 2013. № 4. С. 143–153
12. *Пастухов Д.Ф.*, *Пастухов Ю.Ф.*, *Волосова Н.К.* Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. 2019. № 4. С.154–173.
13. *Исаев В.И.*, *Шапеев В.П.*, *Идимешев С.В.* Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнения Пуассона // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16. № 1. С. 85–93.
14. *Ворожцов Е.В.*, *Шапеев В.П.* Численное решение уравнения Пуассона в полярных координатах методом коллокаций и наименьших невязок // Моделирование и анализ ин-

формационных систем. 2015. Т. 22. № 5. С. 648–664. DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-648-664.
15. *Zhong H.*, *He Y.* Solution of Poisson and Laplace equations by quadrilateral quadrature element // International Journal of Solids and Structures. 1998. V. 35. Iss. 21. P. 2805–2819. DOI: 10.1016/S0020-7683(97)00277-1.
16. *Elsherbeny A.M.*, *El-hassani R.M.I.*, *El-badry H.*, *Abdallah M.I.* Solving 2D-Poisson equation using modified cubic B-spline differential quadrature method // Ain Shams Engineering Journal. 2018. V. 9. Iss. 4. P. 2879–2885. DOI: 10.1016/j.asej.2017.12.001.
17. *Ghasemi M.* Spline-based DQM for multi-dimensional PDEs: Application to biharmonic and Poisson equations in 2D and 3D // Computers & Mathematics with Applications. 2017. V. 73. Iss. 7. P. 1576–1592. DOI: 10.1016/j.camwa.2017.02.006.
18. *Shi Z.*, *Cao Y.-y.*, *Chen Q.-j.* Solving 2D and 3D Poisson equations and biharmonic equations by the Haar wavelet method // Applied Mathematical Modelling. 2012. V. 36. Iss. 11. P. 5143–5161. DOI: 10.1016/j.apm.2011.11.078.
19. *Zhi S. Cao Y.-y.* A spectral collocation method based on Haar wavelets for Poisson equations and biharmonic equations // Mathematical and Computer Modelling. 2011. V. 54. Iss. 11–12. P. 2858–2868. DOI: 10.1016/j.mcm.2011.07.006.
20. *Бубенчиков А.М.*, *Попонин В.С.*, *Мельникова В.Н.* Математическая постановка и решение пространственных краевых задач методом спектральных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2008. № 3 (4). С. 70–76.
21. *Чернышов А.Д.* Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 13–24. DOI: 10.7868/S0044466914010062.
22. *Тимошенко С.П.*, *Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Наука. 1966. 636 с.
23. *Еремеев П.Г.* Пространственные тонколистовые металлические конструкции покрытий: М.: Издательство ассоциации строительных вузов, 2006. 560 с.
24. http://www.vashdom.ru/snip/II-23-81/index-7.htm
25. http://metallicheckiy-portal.ru/marki_metallov/stk/VSt3ps
26. *Чернышов А.Д.*, *Попов В.М.*, *Горяйнов В.В.*, *Лешонков О.В.* Исследование контактного термического сопротивления в конечном цилиндре с внутренним источником методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 5. С. 1288–1297.
27. *Chernyshov A.D.*, *Goryainov V.V.*, *Danshin A.A.* Analysis of the stress field in a wedge using the fast expansions with pointwise determined coefficients // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2018. V. 973. 012002. DOI: 10.1088/174265.
28. *Чернышов А.Д.*, *Горяйнов В.В.* Решение одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения методом быстрых разложений // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: механика предельного состояния. 2012. № 4(12). С. 105–112.
29. *Чернышов А.Д.*, *Горяйнов В.В.*, *Чернышов О.А.* Применение метода быстрых разложений для расчета траекторий космических кораблей // Известия вузов. Авиационная техника. 2015. № 2. С. 41–47.
30. *Чернышов А.Д.* Решение нелинейного уравнения теплопроводности для криволинейной области с условиями Дирихле методом быстрых разложений // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91. № 2. С. 456–468.
31. *Чернышов А.Д.* Метод расширения границ для задач теплопроводности в телах подвижной формы // Инженерно-физический журнал. 2010. Т. 83. № 5. С. 989–994.

Статья поступила 28.01.2020

Chernyshov A.D., Goryainov V.V., Kuznetsov S.F., Nikiforova O.Yu. (2021) APPLICATION OF FAST EXPANSIONS TO OBTAIN EXACT SOLUTIONS TO A PROBLEM ON RECTANGULAR MEMBRANE DEFLECTION UNDER ALTERNATING LOAD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 127–142

DOI 10.17223/19988621/70/11

Keywords: membrane deflection, stress components, alternating load, exact solution, Poisson equation, fast expansions.

The problem of rectangular membrane deflection under alternating loads is solved in general terms by means of the method of fast expansions. The exact solution is represented by the finite expression borrowed from the theory of fast expansions as a sum of the boundary function and Fourier sine series with two Fourier coefficients taken into account. The obtained exact solution includes free parameters. Changing the values of these parameters, one can derive many new exact solutions.

Obtaining of exact solutions to a problem of the rigidly fixed membrane under two types of loads (dome-shaped and sinusoidal) is shown as an example. Graphs of the dome-shaped and sinusoidal loads on the membrane and the curves of the corresponding deflections and stress components are presented in the paper.

From the analysis of the exact solutions, it is obvious that only when a symmetrical alternating load is used, the membrane maximum deflection is attained in the center of the membrane, and the stresses reach the highest values in the middle of both long sides. In the case of a non-symmetrical load, the maximum stress occurs in the middle of either one of two long sides of the rectangular membrane, and the maximum deflection is found in the central region.

Aleksandr D. CHERNYSHOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russian Federation). E-mail: chernyshovad@mail.ru

Vitaliy V. GORYAINOV (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation). E-mail: gorvit77@mail.ru

Sergey F. KUZNETSOV (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russian Federation). E-mail: sfs134@mail.ru

Olga Yu. NIKIFOROVA (Senior Lecturer, Voronezh State University of Engineering Technology, Voronezh, Russian Federation). E-mail: niki22@mail.ru

REFERENCES

1. Polyanin A.D. (2001) *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Handbook of linear equations in mathematical physics]. Moscow: Fizmatlit.
2. Liemert A., Kienle A. (2014) Exact solution of Poisson's equation with an elliptical boundary. *Applied Mathematics and Computation*. 238. pp. 123–131. DOI: 10.1016/j.amc.2014.04.003.
3. Zheng Zh., Sun W., Suo X., Wong L.L.P., Yeow J.T.W. (2015) A novel deflection shape function for rectangular capacitive micromachined ultrasonic transducer diaphragms. *Sensing and Bio-Sensing Research*. 5. pp. 62–70. DOI: 10.1016/j.sbsr.2015.07.006.
4. Timoshenko S.P., Goodier J.N. (1970) *Theory of Elasticity*. 3rd edition. McGraw-Hill.
5. Van'ko V.I., Kosakyan N.K. (2018) Sravnitel'nyy analiz nekotorykh pryamykh metodov resheniya zadach matematicheskoy fiziki [Comparative analysis of some direct methods for solving problems in mathematical physics]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya*: *Matematika. Fizika – Belgorod State University Scientific bulletin. Mathematis & Physis*. 50(2). pp. 197–206. DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-2-197-206.

6. Vasil'ev V.V., Lurie S.A. (2016) Generalized solution of the problem on a circular membrane loaded by a lumped force. *Mechanics of Solids*. 51(3). pp. 334–338. DOI: 10.3103/S0025654416030109.
7. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. (2017) Ob odnom podkhode k resheniyu neodnorodnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh [On one approach to solving nonhomogeneous partial differential equations]. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science.* 27(3). pp. 355–364. DOI: 10.20537/vm170306.
8. Algazin O.D., Kopaev A.V. (2015) Reshenie zadachi Dirikhle dlya uravneniya Puassona v mnogomernom beskonechnom sloe [Solution of the Dirichlet problem for the Poisson's equation in a multidimensional infinite layer]. *Matematika i Matematicheskoe modelirovanie. MGTU im. N.E. Baumana – Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU*. 4. pp. 41–53. DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943.
9. Algazin O.D. (2017) Polinomial'nye resheniya kraevykh zadach dlya uravneniya Puassona v sloe [Polynomial solutions of the boundary value problems for the Poisson equation in a layer]. *Matematika i Matematicheskoe modelirovanie – Mathematics and Mathematical Modelling*. 6. pp. 1–18. DOI: 10.24108/mathm.0517.0000082.
10. Ghadimi P., Dashtimanesh A., Hosseinzadeh H. (2010) Solution of Poisson's equation by analytical boundary element integration. *Applied Mathematics and Computation*. 217(1). pp. 152–163. DOI: 10.1016/j.amc.2010.05.034.
11. Yuldashev O.I., Yuldasheva M.B. (2013) Granichnyy metod vzveshennykh nevyazok s razryvnymi bazisnymi funktsiyami dlya vysokotochnogo resheniya lineynykh kraevykh zadach s uravneniyami Laplasa i Puassona [Boundary method of weighted residuals with discontinuous basis functions for high-accuracy solving linear boundary value problems with Laplace and Poisson's equation]. *Vestnik RUDN. Seriya Matematika. Informatika. Fizika – Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*. 4. pp. 143–153.
12. Pastukhov D., Pastukhov Yu., Volosova N. (2019) Minimal'naya raznostnaya skhema dlya uravneniya Puassona na parallelepipede s shestym poryadkom pogreshnosti [Minimum scheme of the differences for equation of the Poisson on box with sixth rather inaccuracy]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C. Fundamental'nye nauki – Vestnik of Polotsk State University. Part C. Fundamental Sciences*. 4. pp.154–173.
13. Isaev V.I., Shapeev V.P., Idimeshev S.V. (2011) Varianty metoda kollokatsiy i naimen'shikh kvadratov povyshennoy tochnosti dlya chislennogo resheniya uravneniya Puassona [High-accuracy versions of the collocations and least squares method for numerical solution of the Poisson equation]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 16(1). pp. 85–93.
14. Vorozhtsov E.V., Shapeev V.P. (2015) Chislennoe reshenie uravneniya Puassona v polyarnykh koordinatakh metodom kollokatsiy i naimen'shikh nevyazok [Numerical solution of the Poisson equation in polar coordinates by the method of collocations and least residuals]. *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem – Modeling and Analysis of Information Systems*. 22(5). pp. 648–664. DOI: 10.18255/1818-1015-2015-5-648-664.
15. Zhong H., He Y. (1998) Solution of Poisson and Laplace equations by quadrilateral quadrature element. *International Journal of Solids and Structures*. 35(21). pp. 2805–2819. DOI: 10.1016/S0020-7683(97)00277-1.
16. Elsherbeny A.M., El-hassani R.M.I., El-badry H., Abdallah M.I. (2018) Solving 2D-Poisson equation using modified cubic B-spline differential quadrature method. *Ain Shams Engineering Journal*. 9(4). pp. 2879–2885. DOI: 10.1016/j.asej.2017.12.001.
17. Ghasemi M. (2017) Spline-based DQM for multi-dimensional PDEs: Application to biharmonic and Poisson equations in 2D and 3D. *Computers & Mathematics with Applications*. 73(7). pp. 1576–1592. DOI: 10.1016/j.camwa.2017.02.006.
18. Shi Z., Cao Y.-y., Chen Q.-j. (2012) Solving 2D and 3D Poisson equations and biharmonic equations by the Haar wavelet method. *Applied Mathematical Modelling*. 36(11). pp. 5143–5161. DOI: 10.1016/j.apm.2011.11.078.

19. Zhi S., Cao Y.-y. (2011) A spectral collocation method based on Haar wavelets for Poisson equations and biharmonic equations. *Mathematical and Computer Modelling*. 54(11–12). pp. 2858–2868. DOI: 10.1016/j.mcm.2011.07.006.
20. Bubenchikov A.M., Poponin V.S., Mel'nikova V.N. (2008) Matematicheskaya postanovka i reshenie prostranstvennykh kraevykh zadach metodom spektral'nykh elementov [Mathematical formulation and solution of spatial boundary value problems by means of spectral element method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(4). pp. 70–76.
21. Chernyshov A.D. (2014) Method of fast expansions for solving nonlinear differential equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 54(1). pp. 11–21. DOI: 10.1134/S0965542514010060.
22. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. (1959) *Theory of Plates and Shells*. 2nd edition. McGraw-Hill.
23. Eremeev P.G. (2006) *Prostranstvennye tonkolistovye metallicheskie konstruktsii pokrytiy* [Spatial light-gage metal construction coatings]. Moscow: Izdatel'stvo assotsiatsii stroitel'nykh vuzov.
24. Access mode: http://www.vashdom.ru/snip/II-23-81/index-7.htm.
25. Access mode: http://metallicheckiy-portal.ru/marki_metallov/stk/VSt3ps.
26. Chernyshov A.D., Popov V.M., Goryainov V.V., Leshonkov O.V. (2017) Investigation of contact thermal resistance in a finite cylinder with an internal source by the fast expansion method and the problem of consistency of boundary conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 90(5). pp. 1288–1297. DOI: 10.1007/s10891-017-1678-7.
27. Chernyshov A.D., Goryainov V.V., Danshin A.A. (2018) Analysis of the stress field in a wedge using the fast expansions with pointwise determined coefficients. *IOP Conference Series*: *Journal of Physics.* 973. Article 012002. DOI: 10.1088/174265.
28. Chernyshov A.D., Goryainov V.V. (2012) Reshenie odnogo nelineynogo integro-differentsial'nogo uravneniya metodom bystrykh razlozheniy [Solution of a nonlinear integro-differential equation by the fast expansion method]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya*: *Mekhanika predel'nogo sostoyaniya – Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series*: *Mechanics of Limit State*. 4(12). pp. 105–112.
29. Chernyshov A.D., Goryainov V.V., Chernyshov O.A. (2015) Application of the fast expansion method for spacecraft trajectory calculation. *Russian Aeronautics*. 58(2). pp. 180–186. DOI: 10.3103/S1068799815020075.
30. Chernyshov A.D. (2018) Solution of a nonlinear heat conduction equation for a curvilinear region with Dirichlet conditions by the fast-expansion method. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 91(2). pp. 433–444. DOI: 10.1007/s10891-018-1764-5.
31. Chernyshov A.D. (2010) Method of extension of boundaries for problems of heat conduction in bodies of mobile shape. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 83(5). pp. 1054–1060. DOI: 10.1007/s10891-010-0430-3.

Received: January 28, 2020