

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 530.182

DOI: 10.17223/00213411/64/4/170

М.А. КНЯЗЕВ

**РЕШЕНИЕ ТИПА КИНКА ДЛЯ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО
УРАВНЕНИЯ ДЛИННЫХ ВОЛН**

Ключевые слова: кинк, регуляризованное уравнение длинных волн, метод Хироты.

Регуляризованное уравнение длинных волн (RLW) записывается в виде

$$u_t + \gamma u_x - \alpha u_{xxt} + 2\beta uu_x = 0, \tag{1}$$

где α, β, γ – положительные константы, $u_t = \partial u / \partial t$ и т.п. Оно было построено в качестве альтернативы уравнению Кортевега – де Фриза [1, 2] и позволяет описывать нелинейные среды в более широком динамическом диапазоне. Уравнение (1) применяется при описании физических явлений в средах со слабой нелинейностью и дисперсией волн, включая поперечные волны на мелкой воде, ионно-акустические волны в плазме, магнитогидродинамические волны в холодной плазме, упругие среды, оптические волокна, акустические волны в ангармонических кристаллах и т.д. Математическая теория длинных волн в дисперсионных средах, в том числе в водных каналах, подробно изучена в работах [3, 4]. Уравнение RLW обладает решениями типа солитонов. Проблема, однако, заключается в том, что построить аналитическое решение удастся только для очень ограниченного набора начальных и граничных условий, а также коэффициентов уравнения. Аналитическое выражение в явном виде получено только для односолитонного решения [5]. Поэтому обычно основное внимание уделяется численным методам, при помощи которых на начальном этапе исследований и было показано существование солитонного и двухсолитонного решений уравнения RLW [6, 7].

Наряду с уравнением RLW используется более общее уравнение, так называемое обобщенное регуляризованное уравнение длинных волн (GRLW). Это уравнение не получило, однако, широкого распространения, поскольку, во-первых, оно допускает высокие порядки нелинейности, а во-вторых, устойчивость его решений зависит от скорости их распространения [8]. Больше внимание привлекает введенное в работе [7] модифицированное регуляризованное уравнение длинных волн (mRLW). Это уравнение можно записать следующим образом

$$q_{xxtt} + 2q_{xx}q_{tt} + 4q_{xt}^2 - q_{xt} - q_{tt} = 0, \tag{2}$$

где $q(x, t)$ – вещественная функция, такая, что солитон определяется соотношением $u = -q_{xt}$. Используя прямой метод Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных [9], для уравнения (2) можно явно построить решения в виде одиночного солитона и связанного состояния двух солитонов. При этом дисперсионное соотношение имеет вид $\omega = k / (1 - k^2)$. В то же время трехсолитонное решение этого уравнения в аналитической форме получить не удастся, хотя численные исследования указывают на его наличие.

Возможны и другие модификации регуляризованного уравнения длинных волн. В частности, представляет интерес такая модификация этого уравнения, в результате которой изменится характер решения и вместо солитона появится решение, имеющее вид кинка. В этом случае уравнение записывается в виде

$$u_t + \gamma u_x - \alpha u_{xxt} + 2\beta uu_x - (u\eta)_x = 0. \tag{3}$$

Последнее слагаемое в этом уравнении учитывает взаимодействие процессов дисперсии и диссипации и, кроме того, оно само по себе является нелинейным. При помощи метода Хироты удастся построить решение уравнения (3) типа кинка. Это решение можно записать в следующем виде:

$$u(x, t) = \alpha k \left[1 + \tanh \left(\frac{kx - \omega t + \eta^0}{2} \right) \right], \tag{4}$$

где дисперсионное соотношение записывается как $\omega = \gamma k / (1 - \alpha k^2)$. В том, что соотношение (4) является решением уравнения (3), можно убедиться непосредственной подстановкой. Параметр решения η^0 описывает положение кинка в начальный момент времени и, без потери общности, может быть принят равным нулю. Параметры решения k и ω удастся вычислить точно: $\omega = 2\beta$; k удовлетворяет квадратному уравнению

$$2\beta k^2 + \gamma k - 2\beta = 0.$$

Уважаемые читатели!

Доступ к полнотекстовой версии журнала
«Известия высших учебных заведений. Физика»
осуществляется на платформе
Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU
на платной основе:

<https://elibrary.ru/contents.asp?titleid=7725>