

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2021

№ 71

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменшиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Робаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaev (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Peter V. Danchev. Strongly and solidly ω_1 -weak p^{ω_1-2+n} -projective abelian p -groups..... 5

МЕХАНИКА

Архипов В.А., Басалаев С.А., Перфильева К.Г., Усанина А.С. Коэффициент сопротивления твердой сферы в неизотермических условиях 13

Баганов А.П., Бутов В.Г., Носов Г.В., Носова М.Г., Синяев С.В., Солоненко В.А. Электромагнитная катапульта для запуска тяжелых дронов с малоразмерных судов 25

Бубенчиков М.А., Бубенчиков А.М., Мамонтов Д.В. Вращения и вибрации фуллеренов в молекулярном комплексе $C_{20}@C_{80}$ 35

Григорьев Ю.Н., Горобчук А.Г., Ершов И.В. Сходимость локально автомодельных решений к точным численным решениям уравнений пограничного слоя на пластине..... 49

Иванычев Д.А. Метод граничных состояний при решении смешанной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами..... 63

Ищенко А.Н., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Чупашев А.В. Исследование параметров движения инертных конических моделей в воде 78

Кирюшкин А.Е., Миньков Л.Л. Моделирование внутрикамерных процессов в ракетном двигателе на твердом топливе с учетом движения поверхности горения..... 90

Козлов В.В., Маркин А.А. Конечные деформации тороидальной оболочки 106

Маликов З.М., Мадалиев М.Э. Математическое моделирование турбулентного течения в центробежном сепараторе 121

Моисеева К.М., Крайнов А.Ю., Рожкова Е.И. Горение аэрозвеси угольной пыли в закрученном потоке..... 139

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ 148

CONTENTS

MATHEMATICS

Danchev P.V. Strongly and solidly ω_1 -weak $p^{\omega_1 2+n}$ -projective abelian p -groups	5
--	---

MECHANICS

Arkhipov V.A., Basalaev S.A., Perfilieva K.G., Usanina A.S. Drag coefficient of a solid sphere under non-isothermal conditions	13
Baganov A.P., Butov V.G., Nosov G.V., Nosova M.G., Sinyaev S.V., Solonenko V.A. An electromagnetic catapult for launching heavy drones from small vessels.....	25
Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Mamontov D.V. Rotations and vibrations of fullerenes in the molecular complex $C_{20}@C_{80}$	35
Grigoriev Yu.N., Gorobchuk A.G., Ershov I.V. Convergence of locally self-similar solutions to exact numerical solutions of boundary layer equations for a plate	49
Ivanychev D.A. A boundary state method for solving a mixed problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces.....	63
Ishchenko A.N., Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Chupashev A.V. Investigation of underwater motion parameters for inert conical models	78
Kiryushkin A.E., Minkov L.L. Numerical simulation of intra-chamber processes in a solid rocket motor with account for burning surface motion	90
Kozlov V.V., Markin A.A. Finite deformations of a toroidal shell.....	106
Malikov Z.M., Madaliev M.E. Mathematical modeling of a turbulent flow in a centrifugal separator	121
Moiseeva K.M., Krainov A.Yu., Rozhkova E.I. Combustion of a gas suspension of coal dust in a swirling flow	139
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	148

МАТЕМАТИКА

UDC 512.540
DOI 10.17223/19988621/71/1

MSC 2020: 20K10

Peter V. Danchev

STRONGLY AND SOLIDLY ω_1 -WEAK p^{ω_1+2+n} -PROJECTIVE ABELIAN p -GROUPS¹

We define the classes of *strongly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective*, *solidly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective* and *nicely ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective* abelian p -groups and study their crucial properties. This continues our recent investigations of this branch, published in Hacettepe J. Math. Stat. (2013) and Bull. Malaysian Math. Sci. Soc. (2014), respectively.

Keywords: Σ -cyclic groups, p^{ω_1+n} -projective groups, ω_1 - p^{ω_1+2+n} -projective groups, strongly ω_1 - p^{ω_1+n} -projective groups.

1. Introduction and terminology

Let all groups into consideration be p -primary abelian, where p is a fixed prime integer, written additively as it is customary. As usual, for some ordinal $\alpha \geq 0$ and a group G , we state the α -th Ulm subgroup $p^\alpha G$, consisting of all elements of G with height $\geq \alpha$, inductively as follows: $p^0 G = G$, $pG = \{pg \mid g \in G\}$, $p^\alpha G = p(p^{\alpha-1} G)$ if $\alpha - 1$ exists (so α is non-limit) and $p^\alpha G = \bigcap_{\beta < \alpha} p^\beta G$ if $\alpha - 1$ does not exist (so α is limit). The group G is called p^α -bounded if $p^\alpha G = \{0\}$; note that these groups are necessarily reduced. We shall say that G is separable if it is p^ω -bounded, where ω is the first infinite ordinal. A group G is abbreviated as Σ -cyclic if it is a direct sum of cyclic subgroups. Most of the important unexplained here notations and notions will follow mainly those from [7] and [8]. For any non-negative integer $n \geq 0$ recall that a group G is p^{ω_1+n} -projective if G/P is Σ -cyclic for some p^n -bounded $P \leq G$. Note the crucial facts from [1] that if G is either Σ -cyclic or p^{ω_1+n} -projective, then so is G/F for every finite $F \leq G$.

We continue with two crucial concepts investigated in [3] in details.

- A group G is said to be weakly p^{ω_1+2+n} -projective if there is a p^{ω_1+n} -projective subgroup $H \leq G$ such that G/H is Σ -cyclic.

It was established in [3] that these groups are p^{ω_1+2+n} -bounded.

- A group G is said to be ω_1 -weakly p^{ω_1+2+n} -projective if there is a countable subgroup $K \leq G$ such that G/K is weakly p^{ω_1+2+n} -projective.

It was proved in [3] that for such a group G its subgroup $p^{\omega_1+2+n} G$ is always countable.

However, this class of groups is quite large, and it will be better to consider some its restricted modifications by exploiting in various aspects the "niceness" property. Recall that a subgroup N of a group G is nice if, for each limit ordinal τ , the equality $\bigcap_{\alpha < \tau} (N + p^\alpha G) = N + p^\tau G$ holds. Standardly, ω_1 means the first uncountable ordinal.

¹ The work is partially supported by the Bulgarian National Science Fund under Grant KP-06 No. 32/1 of December 07, 2019.

So, we will now state our pivotal machinery like this:

Definition 1.1. A group G is said to be *strongly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective* if it contains a p^{ω_1+2+n} -projective nice subgroup N such that G/N is the direct sum of a countable group and a Σ -cyclic group.

Note that in terms of [6] the quotient G/N is ω -totally Σ -cyclic, i.e., it is ω_1 - p^{ω_1} -projective.

Definition 1.2. A group G is said to be *solidly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective* if it contains a countable nice subgroup M such that G/M is weakly p^{ω_1+2+n} -projective.

Definition 1.3. A group G is said to be *nicely ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective* if it contains a weakly p^{ω_1+2+n} -projective nice subgroup Q such that G/Q is countable.

The goal of the present paper is to give a comprehensive study of these three concepts, thus somewhat enlarging the results from [2], [3], and [4]. The work is organized as follows: in the next two sections, we state some elementary and useful properties of the new group classes. After that, we establish our basic results. In the final section, we list some interesting left-open questions.

And so, we come to our first working section.

2. Elementary properties

Here we shall quote some elementary but helpful properties like these:

- (1) Strongly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective groups are ω_1 -weakly p^{ω_1+2+n} -projective.
- (2) Solidly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective groups are ω_1 -weakly p^{ω_1+2+n} -projective.
- (3) Nicely ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective groups are ω_1 -weakly p^{ω_1+2+n} -projective (this follows from Theorem 2.2 (e) of [3]).
- (4) Weakly p^{ω_1+2+n} -projective groups are both strongly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective and solidly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective.
- (5) Strongly ω_1 - p^{ω_1+2+n} -projective groups are strongly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective.
- (6) Nicely ω_1 - p^{ω_1+2+n} -projective groups are nicely ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective.
- (7) If $p^{\omega_1}G = \{0\}$, then G is strongly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective $\Leftrightarrow G$ is solidly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective $\Leftrightarrow G$ is nicely ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective $\Leftrightarrow G$ is weakly p^{ω_1+2+n} -projective.

In fact, in [3] was showed even that p^{ω_1} -bounded ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective groups are weakly p^{ω_1+2+n} -projective.

The following relationship sounds interesting.

Proposition 2.1. *If G is a strongly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective group, then G is nicely ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective.*

Proof. Write $G/N = (K/N) \oplus (S/N)$ for some p^{ω_1+2+n} -projective nice subgroup N of G with $N \leq K$ and $N \leq S$, where the first term of the direct decomposition is countable whereas the second one is Σ -cyclic. Thus $G/S \cong (G/N)/(S/N) \cong K/N$ is countable. But S/N is nice in G/N as a direct summand, whence by virtue of [7] we derive that S is nice in G . Moreover, S is by definition weakly p^{ω_1+2+n} -projective, as required. ■

3. Some useful preliminaries

The following three affirmations, dealing with weakly p^{ω_1+2+n} -projective groups, seem not to appear in [3], and so we will document them here.

Proposition 3.1. (i) *The group G is weakly p^{ω_1+2} -projective if and only if p^nG is weakly p^{ω_1+2} -projective for some $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *If G is weakly p^{ω_1+2} -projective and $T \leq G$ with $p^nT = \{0\}$, then G/T is weakly p^{ω_1+2+n} -projective.*

Proof. (i) (\Rightarrow) Suppose there is a Σ -cyclic subgroup X of G such that G/X is Σ -cyclic. Hence $p^n(G/X) = (p^nG + X)/X \cong p^nG/(p^nG \cap X)$ and $p^nC \cap X$ are both Σ -cyclic groups being subgroups of G/X and X , respectively (see, e.g., [7]). (\Leftarrow) Suppose that there exists a Σ -cyclic subgroup Y of p^nG , and hence of G , with $p^nG/Y = p^n(G/Y)$ also a Σ -cyclic group. But consulting with [7], the quotient $p^n(G/Y)$ being Σ -cyclic implies the same for G/Y as well. This gives the wanted result.

(ii) Let G/U be Σ -cyclic for some Σ -cyclic subgroup U . Thus $U + T$ is also Σ -cyclic (see [7]) and $U' = (U + T)/T \cong U/(U \cap T)$ is therefore p^{ω_2+n} -projective. But

$$(G/T)/((U + T)/T) \cong G/(U + T) \cong (G/U)/((U + T)/U)$$

is p^{ω_2+n} -projective, because $(U + T)/U$ is p^n -bounded. Denote $G/T = G'$. Since G'/U' is p^{ω_2+n} -projective, there is $Z' \leq G'$ with $U' \subseteq Z'$ and $p^nZ' \subseteq U'$ such that $(G'/U')/(Z'/U') \cong G'/Z'$ is Σ -cyclic. But p^nZ' is p^{ω_2+n} -projective, whence so is Z' .

Finally, $G' = G/T$ is weakly p^{ω_2+n} -projective, as claimed. ■

Theorem 3.2. *The following four points are equivalent:*

- (a) G is weakly p^{ω_2+n} -projective;
- (b) there exists a p^{ω_2+n} -projective subgroup $P \leq G$ such that G/P is Σ -cyclic;
- (c) there exists a p^n -bounded subgroup $T \leq G$ such that G/T is weakly p^{ω_2} -projective;
- (d) there exist a p^n -bounded subgroup L and a weakly p^{ω_2} -projective group S such that $G \cong S/L$.

Proof. (a) \Leftrightarrow (b) is just the definition.

(b) \Rightarrow (c). Assume G/P is Σ -cyclic for some $p^nX = \{0\}$. Thus $G/P \cong (G/X)/(P/X)$ is Σ -cyclic, whence G/X is by definition weakly p^{ω_2} -projective, as expected.

(c) \Rightarrow (b). Let A/T be Σ -cyclic for some $A \leq G$ containing T such that $(G/T)/(A/T) \cong G/A$ is also Σ -cyclic. But it is plainly seen that A is p^{ω_2+n} -projective, as required.

The implication (d) \Rightarrow (a), or its equivalence (d) \Rightarrow (b), follows from Proposition 3.1 (ii). So, we consider the reverse implication (a) \Rightarrow (d) or its tantamount relationship (c) \Rightarrow (d). To that aim, if X is a group with $p^nX = G$, then let $S = X/T$. Consequently, $p^nS = p^nX/T = G/T$ is weakly p^{ω_2} -projective by hypothesis. Referring to Proposition 3.1 (i), the last condition forces that S is weakly p^{ω_2} -projective. Letting $L = X[p^n]/T \subseteq S[p^n]$, we deduce that $S/L \cong X/X[p^n] \cong p^nX = G$, proving the desired relation. ■

Lemma 3.3. *If A is a weakly p^{ω_2+n} -projective group and $F \leq A$ is finite, then A/F is also weakly p^{ω_2+n} -projective.*

Proof. Write A/B is Σ -cyclic for some p^{ω_2+n} -projective subgroup B . Since $(F + B)/B \cong F/(F \cap B)$ is obviously finite, one sees that $(A/B)/(F+B)/B \cong A/(F+B) \cong (A/F)/(F+B)/F$ is Σ -cyclic. However, $(F + B)/F \cong B/(B \cap F)$ is p^{ω_2+n} -projective too (see [1]), as required. ■

4. Main Results

The following two assertions strengthen point (5) listed above.

Proposition 4.1. *If G is a strongly ω_1 -weak p^{ω_2+n} -projective group and $p^{\omega_2+n}G = \{0\}$, then G is weakly p^{ω_2+n} -projective.*

Proof. Write G/N is the direct sum of a countable group and a Σ -cyclic group for some nice p^{ω_2+n} -projective subgroup N of G . Since $p^{\omega_2+n}(G/N) = (p^{\omega_2+n}G + N)/N = \{0\}$, we have that G/N is p^{ω_2+n} -projective. Hence there is a subgroup $X \leq G$ containing N such that $p^nX \subseteq N$ and $(G/N)/(X/N) \cong G/X$ is Σ -cyclic.

Since p^nX is p^{ω_2+n} -projective, we infer that so is X , as required. ■

Proposition 4.2. *If G is a strongly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective group and p^0G is finite, then G is weakly p^{ω_1+2+n} -projective.*

Proof. Let G/N be the direct sum of a countable group and a Σ -cyclic group for some p^{ω_1+2+n} -projective nice subgroup N of G . Therefore, $(G/N)/p^0(G/N) = (G/N)/(p^0G+N)/N \cong G/(p^0G+N)$ is Σ -cyclic. Denote $V = p^0G+N$, and hence $V/T = (p^0G + N)/T = [(p^0G + T)/T] + [N/T]$, where $T \leq N$ with the property that $p^nT = \{0\}$ and N/T is Σ -cyclic. Since $(p^0G + T)/T \cong p^0G/(p^0G \cap T)$ is finite, it follows that V/T is Σ -cyclic. Thus V is p^{ω_1+2+n} -projective and G/V is Σ -cyclic, as required. ■

We continue with

Proposition 4.3. *If G is a strongly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective group and p^0G is countable, then G/p^0G is weakly p^{ω_1+2+n} -projective.*

Proof. Observe that $(N + p^0G)/p^0G \cong N/(N \cap p^0G) \cong [N/p^0N] / [(N \cap p^0G)/p^0N]$ is separable being embedded in G/p^0G , and thus it is p^{ω_1+2+n} -projective according to Theorem 4.2 of [5]. But $p^0(G/N)$ is countable being contained in a direct summand of G/N , whence it easily follows that

$$\begin{aligned} (G/N)/p^0(G/N) &= (G/N)/((p^0G + N)/N) \cong G/(p^0G + N) \cong \\ &\cong (G/p^0G)/((p^0G + N)/p^0G) \end{aligned}$$

is Σ -cyclic, as required for the factor-group G/p^0G to be weakly p^{ω_1+2+n} -projective. ■

Remark 1. The last statement follows also from Theorem 2.4 in [3], but the stated above argument gives a new more simple and conceptual proof. Analyzing the corresponding definitions, especially Definition 1.2, and again utilizing the same theorem, we then can say even a little more:

Theorem 4.4. *If G is a group such that p^0G is countable, then the following points are equivalent:*

- (i) G is ω_1 -weakly p^{ω_1+2+n} -projective;
- (ii) G is solidly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective;
- (iii) G/p^0G is weakly p^{ω_1+2+n} -projective.

Thus Proposition 4.3 can be extended to nicely ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective groups (compare with Proposition 2.1 quoted above).

However, when the subgroups $p^\alpha G$ are finite for some infinite ordinal α , we obtain the following strengthening.

Proposition 4.5. *If G is a strongly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective group and $p^\alpha G$ is finite for some $\alpha \geq \omega$, then $G/p^\alpha G$ is strongly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective.*

Proof. Given $G/N = (C/N) \oplus (S/N)$, where C/N is countable and S/N is Σ -cyclic for some p^{ω_1+2+n} -projective subgroup N of G which is nice in G . But $p^\alpha(G/N) = p^\alpha(C/N)$ and thus

$$(G/N)/p^\alpha(G/N) \cong [(C/N)/p^\alpha(C/N)] \oplus (S/N)$$

and therefore, since $p^\alpha(G/N) = (p^\alpha G + N)/N$, we obtain that

$$G/(p^\alpha G + N) \cong (G/p^\alpha G)/(p^\alpha G + N)/p^\alpha G$$

is the direct sum of a countable group and a Σ -cyclic group. However, $(p^\alpha G + N)/p^\alpha G$ is nice in $G/p^\alpha G$ because $p^\alpha G + N$ is so in G (see, e.g., [7]), and moreover $(p^\alpha G + N)/p^\alpha G \cong N/(N \cap p^\alpha G)$ is p^{ω_1+2+n} -projective since $N \cap p^\alpha G$ is finite (see, for instance, [1]). ■

Proposition 4.6. *If G is a solidly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective group and $p^\alpha G$ is finite for some $\alpha \geq \omega$, then $G/p^\alpha G$ is solidly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective.*

Proof. Let M be a countable nice subgroup of G such that G/M is weakly p^{ω_1+2+n} -projective. Since $p^\alpha(G/M) = (p^\alpha G + M)/M \cong p^\alpha G/(p^\alpha G \cap M)$ is finite, according to Lemma 3.3, we deduce that

$$(G/M)/p^\alpha(G/M) \cong G/(p^\alpha G + M) \cong (G/p^\alpha G)/(p^\alpha G + M)/p^\alpha G$$

is weakly p^{ω_2+n} -projective as well. Moreover, $(p^\alpha G + M)/p^\alpha G \cong M/(M \cap p^\alpha G)$ is countable and nice in $G/p^\alpha G$ (cf. [7]), as desired. ■

Proposition 4.7. *If G is a nicely ω_1 -weak p^{ω_2+n} -projective group and $p^\alpha G$ is finite for some $\alpha \geq \omega$, then $G/p^\alpha G$ is nicely ω_1 -weak p^{ω_2+n} -projective.*

Proof. Write G/Q is countable for some nice weakly p^{ω_2+n} -projective subgroup Q . Likewise, in virtue of Lemma 3.3, the quotient $(Q + p^\alpha G)/p^\alpha G \cong Q/(Q \cap p^\alpha G)$ is again weakly p^{ω_2+n} -projective. We also derive that $G/(Q + p^\alpha G) \cong (G/p^\alpha G)/(Q + p^\alpha G)/p^\alpha G$ is countable. But $(Q + p^\alpha G)/p^\alpha G$ is nice in $G/p^\alpha G$ by [7], as wanted. ■

The following technicality is well-known, but we list and prove it here only for the sake of completeness and for the convenience of the reader.

Lemma 4.8. *If A is a Σ -cyclic group and $C \leq A$ is its countable subgroup, then A/C is a direct sum of a countable group and a Σ -cyclic group. In particular, if C is nice in A , then A/C is also a Σ -cyclic group.*

Proof. Since C is countable, there exists a countable subgroup K of A with the property that $K \supseteq C$ and $A = K \oplus T$ for some $T \leq A$. Therefore, $A/C \cong (K/C) \oplus T$, where C is nice in K . Thus, K/C is a separable countable group and hence a Σ -cyclic group, as wanted. ■

For arbitrary infinite ordinals α and countable Ulm subgroups $p^\alpha G$, we have the following:

Proposition 4.9. *If $\alpha \geq \omega$ and G is a strongly ω_1 -weak p^{ω_2} -projective group such that $p^\alpha G$ is countable, then $G/p^\alpha G$ modulo a countable subgroup is nicely ω_1 -weak p^{ω_2} -projective.*

Proof. Suppose that there is a nice Σ -cyclic subgroup N of G such that G/N is the direct sum of a countable group and a Σ -cyclic group. Since $(p^\alpha G + N)/N = p^\alpha(G/N)$ is countable and contained in the countable direct summand of G/N , it easily follows that

$$G/(p^\alpha G + N) \cong (G/N)/p^\alpha(G/N) \cong (G/p^\alpha G)/(p^\alpha G + N)/p^\alpha G$$

is again the direct sum of a countable group and a Σ -cyclic group. Moreover, $(p^\alpha G + N)/p^\alpha G$ is nice in $G/p^\alpha G$ (see [7]) and, because $N \cap p^\alpha G$ is countable, one can infer by Lemma 4.8 that $(p^\alpha G + N)/p^\alpha G \cong N/(N \cap p^\alpha G)$ is the direct sum of a countable group and a Σ -cyclic group, say $(p^\alpha G + N)/p^\alpha G = K \oplus S$, where the first term K is countable and the second one S is Σ -cyclic. Consequently, denoting $G_\alpha = G/p^\alpha G$, we write

$$G_\alpha/(K \oplus S) = [R/(K \oplus S)] \oplus [V/(K \oplus S)],$$

where $R/(K \oplus S)$ is countable while $V/(K \oplus S)$ is Σ -cyclic. Since $K \oplus S$ is nice in G_α , it follows from [7] that V is also nice in G_α . Besides, G_α/V is countable.

On the other hand, both $(V/K)/(K \oplus S)/K \cong V/(K \oplus S)$ and $(K \oplus S)/K \cong S$ must be Σ -cyclic, whence V/K must be weakly p^{ω_2} -projective. So V is ω_1 -weakly p^{ω_2} -projective. Finally, one sees that $(G_\alpha/K)/(V/K) \cong G_\alpha/V$, as required. ■

We will now consider how the three new properties are inherited by the action on Ulm subgroups.

Proposition 4.10. *If G is strongly ω_1 -weak p^{ω_2+n} -projective, then so is $p^\alpha G$ for any ordinal α .*

Proof. Let there exist a nice p^{ω_2+n} -projective subgroup N of G such that G/N is the direct sum of a countable group and a Σ -cyclic group. Therefore, $N \cap p^\alpha G$ is by [7] nice in $p^\alpha G$ and is also p^{ω_2+n} -projective being a subgroup of N . Moreover, $p^\alpha G/(p^\alpha G \cap N) \cong (p^\alpha G + N)/N \subseteq G/N$ is ω -totally Σ -cyclic as well (cf. [6]), thus proving the assertion, as promised. ■

Proposition 4.11. *If G is solidly ω_1 -weak p^{ω_2+n} -projective, then so is $p^\alpha G$ for any ordinal α .*

Proof. There is a countable nice subgroup M of G such that G/M is weakly p^{ω_2+n} -projective. Thus, in view of [3], we have that $p^\alpha(G/M) = (p^\alpha G + M)/M \cong p^\alpha G/(p^\alpha G \cap M)$ is also weakly p^{ω_2+n} -projective. But $M \cap p^\alpha G$ is countable and nice in $p^\alpha G$ (cf. [7]), as required. ■

Proposition 4.12. *If G is nicely ω_1 -weak p^{ω_2+n} -projective, then so is $p^\alpha G$ for any ordinal α .*

Proof. Write G/Q is countable for some nice p^{ω_2+n} -projective subgroup Q of G . Therefore, $p^\alpha(G/Q) = (p^\alpha G + Q)/Q \cong p^\alpha G/(p^\alpha G \cap Q)$ is countable, where $p^\alpha G \cap Q$ is nice in $p^\alpha G$ (see [7]) and $p^\alpha G \cap Q$ is p^{ω_2+n} -projective being a subgroup of Q (see [3]). ■

The next technicality is well-known but we, however, will give a proof for the sake of completeness and for the readers' convenience.

Lemma 4.13. *If C is a countable group and L is a Σ -cyclic group, then there are a countable group K and a Σ -cyclic group S such that $C + L = K \oplus S$.*

Proof. Since $C \cap L \subseteq L'$ for some countable subgroup L' of L with $L = L' \oplus L''$, we have that $C + L = C + L' + L'' = (C + L') \oplus L''$. In fact, $x \in (C + L') \cap L''$ gives that $x = c + b$, where $b \in L'$ and $c \in C$. Thus $x - b = c \in C \cap L$ and hence $x - b \in L'$ which forces that $x \in L'' \cap L' = 0$, as required. Putting now $C + L' = K$ and $L'' = S$, we are set. ■

The following two technical claims are pivotal (see also [4]).

Lemma 4.14. *Suppose that α is an ordinal, and that G and F are groups where F is finite. Then the following formula is fulfilled:*

$$p^\alpha(G + F) = p^\alpha G + F \cap p^\alpha(G + F).$$

Proof. We will use a transfinite induction on α . First, if $\alpha - 1$ exists, we have

$$\begin{aligned} p^\alpha(G + F) &= p(p^{\alpha-1}(G + F)) = p(p^{\alpha-1}G + F \cap p^{\alpha-1}(G + F)) = \\ &= p(p^{\alpha-1}G) + p(F \cap p^{\alpha-1}(G + F)) \subseteq p^\alpha G + F \cap p^\alpha(G + F) = \\ &= p^\alpha G + F \cap p^\alpha(G + F). \end{aligned}$$

Since the reverse inclusion " \supseteq " is obvious, we obtain the desired equality.

If now $\alpha - 1$ does not exist, we have that $p^\alpha(G + F) = \bigcap_{\beta < \alpha} p^\beta(G + F) \subseteq \bigcap_{\beta < \alpha} (p^\beta G + F) = \bigcap_{\beta < \alpha} p^\beta G + F = p^\alpha G + F$. In fact, the second sign " $=$ " follows like this: Given $x \in \bigcap_{\beta < \alpha} (p^\beta G + F)$, we write that $x = g_{\beta_1} + f_1 = \dots = g_{\beta_s} + f_s = \dots$, where $f_1, \dots, f_s \in F$ are all the elements of F ; $g_{\beta_1} \in p^{\beta_1} G, \dots, g_{\beta_s} \in p^{\beta_s} G$ with $\beta_1 < \dots < \beta_s < \dots$.

Since F is finite, while the number of equalities is infinite due to the infinite cardinality of α , we infer that $g_{\beta_s} \in p^{\beta_s} G$ for any ordinal $\beta < \alpha$ which means that $g_{\beta_s} \in \bigcap_{\beta < \alpha} p^\beta G = p^\alpha G$. Thus $x \in \bigcap_{\beta < \alpha} p^\beta G + F = p^\alpha G + F$, as claimed. Furthermore, $p^\alpha(G + F) \subseteq (p^\alpha G + F) \cap p^\alpha(G + F) = p^\alpha G + F \cap p^\alpha(G + F)$ which is obviously equivalent to an equality, as wanted. ■

Lemma 4.15. *Let N be a nice subgroup of a group G . Then*

- (i) $N + R$ is nice in G for every finite subgroup $R \leq G$;
- (ii) N is nice in $G + F$ for each finite group F .

Proof. (i) For any limit ordinal γ , we deduce that $\bigcap_{\delta < \gamma} (N + R + p^\delta G) \subseteq R + \bigcap_{\delta < \gamma} (N + p^\delta G) = R + N + p^\gamma G$, as required. Indeed, the relation " \subseteq " follows like this: Given $x \in \bigcap_{\delta < \gamma} (N + R + p^\delta G)$, we write $x = a_1 + r_1 + g_1 = \dots = a_s + r_s + g_s = \dots = a_k + r_1 + g_k = \dots$, where $a_1, \dots, a_k \in N$; $r_1, \dots, r_s \in R$; $g_1 \in p^{\delta_1} G, \dots, g_k \in p^{\delta_k} G$ with $\delta_1 < \dots < \delta_k$. So $a_1 + g_1 = \dots = a_k + g_k = \dots \in \bigcap_{\delta < \gamma} (N + p^\delta G)$ and hence $x \in R + \bigcap_{\delta < \gamma} (N + p^\delta G)$, as requested.

(ii) Since N is nice in G , we may write $\bigcap_{\delta < \gamma} [N + p^\delta G] = N + p^\gamma G$ for every limit ordinal γ . Furthermore, with Lemma 4.14 at hand, we subsequently deduce that

$$\begin{aligned} \bigcap_{\delta < \gamma} [N + p^\delta (G + F)] &= \bigcap_{\delta < \gamma} [N + p^\delta G + F \cap p^\delta (G + F)] \subseteq \\ &\subseteq \bigcap_{\delta < \gamma} (N + p^\delta G) + F \cap p^\gamma (G + F) = N + p^\gamma G + F \cap p^\gamma (G + F) = N + p^\gamma (G + F). \end{aligned}$$

In fact, the inclusion " \subseteq " follows thus: Given $x \in \bigcap_{\delta < \gamma} [N + p^\delta G + F \cap p^\delta (G + F)]$, we write $x = a_1 + g_1 + f_1 = \dots = a_s + g_s + f_s = \dots = a_k + g_k + f_1 = \dots$, where $a_1, \dots, a_k \in N$; $g_1 \in p^{\delta_1} G, \dots, g_k \in p^{\delta_k} G$; $f_1 \in F \cap p^{\delta_1} (G + F), \dots, f_k = f_1 \in F \cap p^{\delta_k} (G + F)$ with $\delta_1 < \dots < \delta_k$. Hence $a_1 + g_1 = \dots = a_k + g_k = \dots \in \bigcap_{\delta < \gamma} (N + p^\delta G)$ and because the number of the f_i 's ($1 \leq i \leq k$) is finite whereas the number of equalities is not, we can deduce that $f_1 \in \bigcap_{\delta < \gamma} (F \cap p^\delta (G + F)) = F \cap p^\gamma (G + F)$, as needed. ■

We are now in a position to proceed by proving with the following statement concerning finite extensions of the three new group classes:

Proposition 4.16. *Let G be a group with a subgroup H such that G/H is finite. The following three points are true:*

- (1) *If H is strongly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective, then G is strongly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective.*
- (2) *If H is solidly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective, then G is solidly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective.*
- (3) *If H is nicely ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective, then G is nicely ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective.*

Proof. Write $G = H + F$ for some finite $F \leq G$.

(1) Suppose that $H/N = (K/N) \oplus (S/N)$, where the first direct summand is countable and the second direct summand is Σ -cyclic, for some nice p^{ω_1+2+n} -projective subgroup N of H . By Lemma 4.15, N is nice in G and, moreover, $G/N = (H/N) + (F + N)/N = (L/N) + (S/N)$, where $L = K + F + N$. Clearly, L/N is countable and thus, according to Lemma 4.13, we are set.

(2) We first shall show that if A is a weakly p^{ω_1+2+n} -projective group, then $A + F$ is again a weakly p^{ω_1+2+n} -projective group. In fact, letting A/T be Σ -cyclic where T is p^{ω_1+2+n} -projective, we have that $(A + F)/T = (A/T) + (F + T)/T$. Since the first term is Σ -cyclic and the second term is finite, the sum remains Σ -cyclic appealing to [1], as required.

We are now ready to continue with the proof the major assertion. To that goal, assume that H/M is weakly p^{ω_1+2+n} -projective for some countable nice subgroup M of H . By Lemma 4.15, M is nice in G . Furthermore, $G/M = (H/M) + [(F + M)/M]$. Since $(F + M)/M$ is obviously finite, by what we have shown in the preceding paragraph, we are finished.

(3) Suppose H/Q is countable for some weakly p^{ω_1+2+n} -projective nice subgroup Q of H . So, $G/Q = (H + F)/Q = (H/Q) + (F + Q)/Q$ is also countable because the second summand is finite. Since by Lemma 4.15 the subgroup Q remains nice in G , we are thus done. ■

Remark 2. It is interesting to know whether or not the converses of these three implications hold.

5. Open problems

In closing, we state here three problems of interest.

Problem 1. Does it follow that a group G is strongly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective if and only if $p^{\omega_1+2+n}G$ is countable and $G/p^{\omega_1+2+n}G$ is weakly p^{ω_1+2+n} -projective?

Problem 2. If G is strongly ω_1 -weak p^{ω_1+2+n} -projective and $p^{\omega_1+2+n}G = \{0\}$ (in particular, p^0G is countable with $p^{\omega_1+2}G = \{0\}$), is then G weakly p^{ω_1+2+n} -projective?

Problem 3. Is it true that G is strongly ω_1 -weak $p^{\omega_1 2+n}$ -projective if and only if G is solidly ω_1 -weak $p^{\omega_1 2+n}$ -projective if and only if G is nicely ω_1 -weak $p^{\omega_1 2+n}$ -projective if and only if G is ω_1 -weakly $p^{\omega_1 2+n}$ -projective?

Acknowledgement. The author would like to thank the anonymous expert referee for the careful reading of the paper and the constructive suggestion made.

REFERENCES

1. Danchev P.V. (2009) On primary abelian groups modulo finite subgroups. *Communications in Algebra*. 37. pp. 933–947.
2. Danchev P.V. (2014) On strongly and separably ω_1 - p^{ω_1+n} -projective abelian p -groups. *Hacetatepe Journal of Mathematics and Statistics*. 43. pp. 51–64.
3. Danchev P.V. (2014) On ω_1 -weakly p^n -projective abelian p -groups. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*. 37. pp. 1057–1074.
4. Danchev P.V. (2015) On nicely and separately ω_1 - p^{ω_1+n} -projective abelian p -groups. *Mathematical Reports*. 17. pp. 91–105.
5. Danchev P.V. and Keef P.W. (2009), Generalized Wallace theorems. *Mathematica Scandinavica*. 104. pp. 33–50.
6. Danchev P.V. and Keef P.W. (2011) An application of set theory to $\omega + n$ -totally p^{ω_1+n} -projective primary abelian groups. *Mediterranean Journal of Mathematics*. 8. pp. 525–542.
7. Fuchs L. (1970, 1973) *Infinite Abelian Groups*. Vol. I and II. New York: Academic Press.
8. Griffith P. (1970) *Infinite Abelian Group Theory*. Chicago: University of Chicago Press.

Received: February 3, 2021

Peter V. DANCHEV (Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria). E-mail: pvdanchev@yahoo.com, danchev@math.bas.bg

Danchev P.V. (2021) STRONGLY AND SOLIDLY ω_1 -WEAK $p^{\omega_1 2+n}$ -PROJECTIVE ABELIAN p -GROUPS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 71. pp. 5–12

DOI 10.17223/19988621/71/1

Keywords: Σ -cyclic groups, p^{ω_1+n} -projective groups, ω_1 - $p^{\omega_1 2+n}$ -projective groups, strongly ω_1 - p^{ω_1+n} -projective groups.

We define the classes of *strongly* ω_1 -weak $p^{\omega_1 2+n}$ -projective, *solidly* ω_1 -weak $p^{\omega_1 2+n}$ -projective and *nicey* ω_1 -weak $p^{\omega_1 2+n}$ -projective abelian p -groups and study their crucial properties. This continues our recent investigations of this branch, published in *Hacetatepe J. Math. Stat.* (2013) and *Bull. Malaysian Math. Sci. Soc.* (2014), respectively.

Ключевые слова: Σ -циклические группы, p^{ω_1+n} -проективные группы, ω_1 - $p^{\omega_1 2+n}$ -проективные группы, строго ω_1 - p^{ω_1+n} -проективные группы.

Определены строго ω_1 -слабо $p^{\omega_1 2+n}$ -проективные, плотно ω_1 -слабо $p^{\omega_1 2+n}$ -проективные и хорошо ω_1 -слабо $p^{\omega_1 2+n}$ -проективные p -группы и изучены важнейшие их свойства. Данная статья является продолжением исследований автора, опубликованных в *Hacetatepe J. Math. Stat.* (2013) и *Bull. Malaysian Math. Sci. Soc.* (2014) соответственно.

AMS Mathematical Subject Classification: 20K10

Financial support. The work is partially supported by the Bulgarian National Science Fund under Grant KP-06 No. 32/1 of December 07, 2019.

МЕХАНИКА

УДК 532.5.011

DOI 10.17223/19988621/71/2

В.А. Архипов, С.А. Басалаев, К.Г. Перфильева, А.С. Усанина

КОЭФФИЦИЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ ТВЕРДОЙ СФЕРЫ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ¹

Представлены результаты экспериментального исследования гравитационного осаждения одиночных твердых сферических частиц в неизотермических условиях (при неравенстве температуры частицы и несущей среды) в вязкой жидкости в области чисел Рейнольдса $Re < 1$. Проанализировано влияние неравенства температуры частицы и несущей среды на коэффициент сопротивления твердой сферы. Проведено сравнение экспериментальных данных по охлаждению и нагреву частицы на стационарную скорость ее осаждения. Получены эмпирические зависимости для коэффициента сопротивления одиночной твердой сферы в неизотермических условиях.

Ключевые слова: твердая сфера, гравитационное осаждение, охлажденная частица, нагретая частица, коэффициент гидродинамического сопротивления, разность температур, экспериментальное исследование.

Вопрос о закономерностях движения одиночной частицы дисперсной фазы (твердой частицы, капли или пузырька) относится к фундаментальным задачам классической гидродинамики и механики двухфазных потоков и представляет интерес, например, при моделировании процессов в тепло- и массообменных аппаратах химической технологии, при оценивании последствий катастрофических явлений техногенного или природного характера, в вопросах образования атмосферных осадков и т.д. Закономерности движения частицы дисперсной фазы в первую очередь определяются силой динамического сопротивления. Корректное определение коэффициента сопротивления несущей среды движению частицы играет ключевую роль при создании адекватных моделей многофазных, в том числе двухфазных, течений.

Стандартная кривая сопротивления для одиночной твердой сферы, движущейся при числах Рейнольдса $Re < 1$, получена в изотермических условиях (при равенстве температуры несущей среды и частицы дисперсной фазы) и описывается формулой Стокса [1]

$$C_D = \frac{24}{Re}. \quad (1)$$

Однако в ряде технологических процессов температура частицы может быть ниже или выше температуры среды (например, тушение пожаров с применением авиации, плазмохимический синтез керамических порошков, процессы охлаж-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания №. 0721-2020-0036.

дения частиц в аппаратах химической технологии и т.д.) [2–8]. В этом случае зависимость (1) не может быть использована для расчета скорости движения частицы ввиду изменения физических свойств несущей среды в пограничном слое частицы.

В большинстве публикаций, посвященных исследованию характеристик движения частицы дисперсной фазы в неизотермических условиях, динамика частицы исследуется преимущественно теоретически [9–20]. В частности, в работе [13] на основе аналитического решения уравнений Навье – Стокса для задачи обтекания равномерно нагретой сферической частицы газовым потоком при малых числах Рейнольдса показано, что коэффициент сопротивления частицы линейно возрастает с ростом разницы температуры частицы и внешней среды за счет изменения плотности и вязкости обтекающего потока.

Авторами работ [11, 14] показано, что при увеличении температуры частицы кривая для коэффициента сопротивления изначально достигает максимума, а затем начинает резко уменьшаться до нуля. При этом коэффициент сопротивления не только уменьшается до нуля, но и принимает отрицательное значение.

О.Г. Фридлендер [15], рассмотрев задачу по обтеканию нагретой частицы потоком газа с минимальным влиянием температурных напряжений при малых числах Кнудсена и Рейнольдса, обнаружил, что учет температурных напряжений в уравнениях Навье – Стокса приводит к незначительному изменению силы сопротивления за счет равномерного нагрева сферической частицы и выбора оптимального значения неравномерности температуры по поверхности частицы.

Неустановившееся термофоретическое движение первоначально нагретой (охлажденной) относительно газа и остывающей (нагревающейся) сферической частицы теоретически рассмотрено в работе А.Ю. Бориса [16]. Определено, что при учете температурных напряжений существенно изменяется значение термофоретической силы, действующей на частицу в начале движения, что приводит к значительному повышению скорости движения частицы в отличие от случая стационарного термофореза. Для охлажденной частицы при учете температурных напряжений термофоретическая сила направлена противоположно направлению силы при установившемся термофорезе.

Учет и влияние «пленочной» температуры рассмотрены в работах [4, 6, 7] для одномерной модели движения частицы в тепловой плазме. Выявлено, что в зависимости от конкретных значений температур и размеров частицы метод приближения «пленочной» температуры приводит к погрешности расчета коэффициента сопротивления до 50 %.

Численное исследование динамики нагретых несферических частиц рассмотрено в работе [17]. Авторы обнаружили, что в отличие от случая движения сферической частицы при моделировании движения несферической частицы следует учитывать термофоретическую силу.

Стоит также отметить целый цикл работ Н.В. Малая с соавторами [10, 18–20]. Авторами выполнено теоретическое описание процесса обтекания равномерно и неравномерно нагретой сферической (жидкой и твердой) частицы в вязкой неизотермической газообразной среде в приближении Стокса. В формулу для расчета силы сопротивления сферической частицы при произвольных перепадах температуры вокруг ее поверхности авторы вводят поправочные коэффициенты, учитывающие зависимость вязкости и плотности газообразной среды от температуры.

Среди экспериментальных исследований можно выделить работы [9, 21–23], в которых исследуется влияние смешанной конвекции на силу сопротивления оди-

ночной сферической левитирующей частицы, нагреваемой лазерным лучом в электродинамической камере, при малых числах Рейнольдса. Авторы предлагают при определении силы сопротивления нагретой частицы учитывать «плеченочную» температуру и силы, возникающие в результате свободной конвекции:

Из анализа существующих литературных данных по динамике движения частицы в неизотермических условиях очевидно, что ряд вопросов остаются нерешенными. В частности, для уточнения выражения для коэффициента сопротивления одиночной сферической частицы в неизотермических условиях необходимы дополнительные экспериментальные исследования. В настоящей работе представлены результаты экспериментального исследования закономерностей гравитационного осаждения одиночной твердой сферы в неизотермических условиях (при нагреве и охлаждении частицы) в вязкой жидкости в области чисел Рейнольдса $Re = 10^{-3}-1$.

Описание экспериментальной установки и методики

Исследование проводилось на установке, состоящей из вертикально установленной прозрачной кюветы с жидкостью и системы визуализации процесса осаждения частицы. Кювета, выполненная в виде прямоугольной призмы размером $300 \times 300 \times 900$ мм (объемом 81 л), изготовлена из оптического стекла толщиной 15 мм. Система визуализации включала высокоскоростную видеокамеру «Citius C100». Видеосъемка проводилась с пространственным разрешением 576×1024 пикселей с темпом 300 кадров в секунду и временем экспозиции 0.5–2.0 мс. Для контроля расстояния, пройденного частицами, использовалась масштабная линейка с ценой деления 1 мм, отградуированная с учетом оптического искажения стенками кюветы.

Для получения условий неизотермичности в экспериментах варьировалась температура частицы; температура жидкости оставалась неизменной и составляла $T_l = 298$ К. В экспериментах рассматривалось осаждение нагретых ($T = 373, 473$ и 573 К) и охлажденных частиц ($T = 82, 250$ К). Также проводились эксперименты для эталонных частиц, температура которых равнялась температуре жидкости $T = 298$ К.

В качестве жидкости использовались глицерин и полиметилсилоксановые жидкости марки ПМС-10000 и ПМС-30000. В экспериментах исследовалось гравитационное осаждение стальных шариков марки 95X18.

Плотность используемых жидкостей ρ_l измерялась ареометром с относительной погрешностью $\delta\rho_l = 0.1$ %.

Коэффициент динамической вязкости жидкостей μ_l определялся по измеренной скорости стационарного осаждения u_p твердой сферической частицы в стоковском режиме ($Re < 1$, $C_D = 24/Re$) по формуле

$$\mu_l = \frac{gd_p^2(\rho_p - \rho_l)}{18u_p},$$

где g – ускорение свободного падения; d_p, ρ_p – диаметр и плотность одиночной сферической частицы; u_p – скорость гравитационного осаждения одиночной сферической частицы. В качестве частиц для определения коэффициента динамической вязкости использовались алюминиевые ($d_p = 3.1$ мм, $\rho_p = 2835$ кг/м³) и стальные ($d_p = 3$ мм, $\rho_p = 7905$ кг/м³) шарики. Скорость u_p вычислялась времяпролетным методом по формуле

$$u_p = \frac{h}{t},$$

где h – расстояние, пройденное частицей за время t .

Параметры используемых жидкостей приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры используемых в экспериментах жидкостей

№	Жидкость	ρ , кг/м ³	μ , Па·с
1	Глицерин	1265	1.4
2	ПМС-10000	970	11
3	ПМС-30000	975	31.5

Диаметр используемых в экспериментах частиц определялся с помощью микрометра с погрешностью 0.01 мм. Эксперименты проведены для трех диаметров D стальных шариков: 15.1, 8.7 и 6.7 мм.

Для определения плотности стальных шариков использовались электронные весы с погрешностью 1 мг. Плотность стальных шариков составляла $\rho = 7753$ кг/м³ и определялась как $\rho = 6M/N\pi D^3$, где M – масса N частиц.

В экспериментах с нагретыми частицами исследуемый стальной шарик помещался в специальный контейнер, размер которого соответствовал диаметру исследуемого шарика. Нагрев стального шарика осуществлялся с помощью встроенного внутри контейнера нагревательного элемента, который накалял рабочую область, в которой расположен стальной шарик.

При проведении экспериментов с охлажденными частицами использовалась холодильная установка, позволяющая остудить стальной шарик до температуры 250 К, и жидкий азот, имеющий температуру 82 К.

Температура T нагретой и охлажденной частицы измерялась с помощью цифрового мультиметра марки АРРА-109N.

Для обеспечения полного охлаждения (или нагрева) частицы стальной шарик находился в неизотермических условиях заранее определенный промежуток времени. Время, необходимое для полного охлаждения (нагрева) стального шарика до заданной температуры, рассчитывалось по формуле

$$t_2 = \frac{1}{3} \frac{D^2}{\chi} \frac{\lambda}{\lambda_g},$$

где λ – коэффициент теплопроводности твердой сферы; λ_g – коэффициент теплопроводности внешней среды; $\chi = \lambda/\rho c$ – коэффициент температуропроводности материала твердой сферы; c – удельная теплоемкость твердой сферы. Значения времени полного охлаждения (нагрева) исследуемых стальных шариков приведены в табл. 2.

Таблица 2

Время полного охлаждения и нагрева исследуемых стальных шариков (в минутах)

D , мм	T , К				
	82	250	373	473	573
6.7	7	41.6	29.5	24.1	20.6
8.7	11.7	69.5	49.5	40.3	34.5
15.1	34.9	208	147.8	120.7	103.1

Результаты экспериментального исследования и их анализ

Результаты видеосъемки процесса гравитационного осаждения стального шарика в вязкой жидкости в неизотермических условиях показали, что охлаждение частицы приводит к увеличению коэффициента сопротивления C_D (и, следовательно, к уменьшению стационарной скорости u , а нагрев частицы, наоборот, способствует уменьшению C_D (или увеличению u). Для условий проведенных экспериментов максимальное снижение скорости частицы наблюдалось для стального шарика диаметром $D = 6.7$ мм, охлажденного до температуры $T = 82$ К и движущегося в глицерине, и составляло 31 %. Наибольшее увеличение стационарной скорости в экспериментах обнаружено для нагретого до температуры $T = 473$ К шарика диаметром $D = 8.7$ мм, движущегося в глицерине, и составляло 50 %.

Анализ экспериментальных данных показал, что нагрев (или охлаждение) частицы не влияет на динамику ее осаждения. На рис. 1 приведены экспериментальные данные для пройденного стальным шариком расстояния s от времени t для нагретой, охлажденной и эталонной твердой сферы. На рис. 1 сплошными линиями показаны аппроксимационные зависимости $s(t)$. Из приведенных графиков следует линейность зависимости $s(t)$ и, следовательно, квазистационарность процесса осаждения.

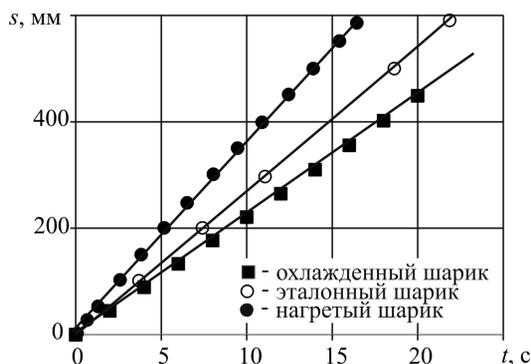


Рис. 1. Зависимость пройденного охлажденным ($T = 82$ К) и нагретым ($T = 573$ К) стальным шариком ($D = 8.7$ мм) расстояния от времени в ПМС-10000

Fig. 1. Time dependence of the distance traveled by a cooled ($T = 82$ K) and a heated ($T = 573$ K) steel ball ($D = 8.7$ mm) in methyl silicone oil (PDMS-10000)

На рис. 2 приведены зависимости стационарной скорости осаждения стального шарика диаметром $D = 8.7$ мм от температуры частицы для трех используемых в экспериментах жидкостей (сплошными линиями на рис. 2 показаны аппроксимационные кривые). Наибольшее отклонение скорости осаждения нагретой (или охлажденной) частицы от скорости эталонной частицы наблюдается для случая движения в жидкости с наименьшим коэффициентом динамической вязкости, а именно в глицерине. Таким образом, скорость и коэффициент сопротивления частицы, движущейся в неизотермических условиях, по аналогии с эталонной частицей определяется величиной числа Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho_l u D}{\mu_l},$$

где u – скорость осаждения частицы.

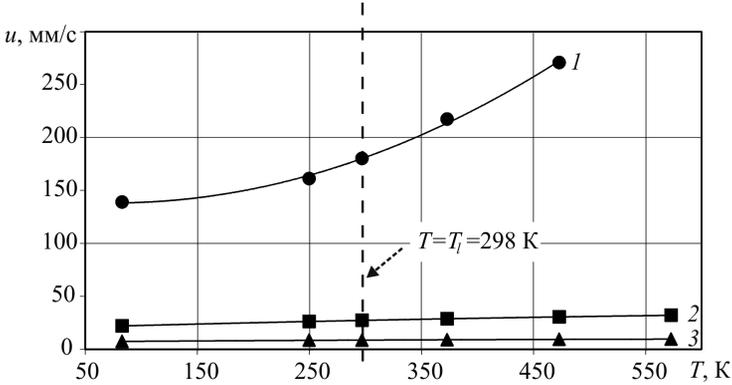


Рис. 2. Зависимость стационарной скорости осаждения стального шарика ($D = 8.7$ мм) от его температуры: 1 – глицерин; 2 – ПМС-10000; 3 – ПМС-30000

Fig. 2. Stationary settling velocity of a steel ball ($D = 8.7$ mm) as a function of its temperature: 1, glycerin; 2, PDMS-10000; and 3, PDMS-30000

Экспериментальное значение коэффициента сопротивления одиночной твердой сферы определялось по формуле, полученной из уравнения движения твердой сферы в стационарном режиме [1]

$$C_D = \frac{4}{3} \frac{gD}{\rho_l u^2} (\rho - \rho_l).$$

Для условий экспериментов проведена оценка изменения температуры частицы за время ее осаждения $t_{\text{осажд}}$ в кювете с жидкостью [24]. Расчет процента максимального изменения (нагрева для охлажденных частиц и охлаждения для нагретых частиц) температуры частицы для трех используемых размеров стальных шариков проведен по формуле $\delta = (k t_{\text{осажд}} / t_2) \cdot 100\%$ (для нагретых частиц $k = 0.98$, для охлажденных частиц $k = 1.02$). Значения δ приведены в таблице 3. Из данных табл. 3 видно, что температура частицы мало отличается от температуры внешней среды, поэтому при расчете коэффициента сопротивления предполагалось, что температура стального шарика в процессе осаждения оставалась постоянной.

Таблица 3

Максимальное изменение температуры частицы в процессе ее осаждения

D , мм	6.7	8.7	15.1
δ , %	3.9	1.6	0.2

Экспериментальные данные по коэффициенту сопротивления C_D в зависимости от безразмерного комплекса $Re \cdot \bar{T}$ (где $\bar{T} = T/T_l$ – отношение температуры частицы к температуре жидкости) приведены на рис. 3. Экспериментальные данные, полученные при $\bar{T} = 1$, хорошо согласуются с зависимостью Стокса (1) для коэффициента сопротивления.

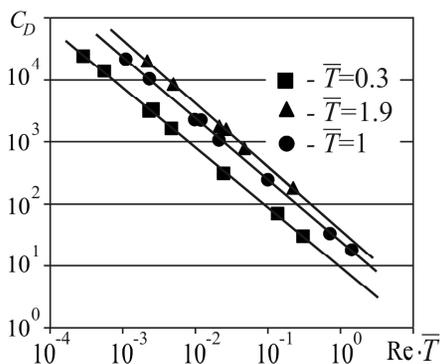


Рис. 3. Зависимость коэффициента сопротивления одиночной твердой сферы от безразмерного комплекса $Re \cdot \bar{T}$ (сплошные линии – аппроксимационные кривые)

Fig. 3. Dependence of the drag coefficient of a single solid sphere on the dimensionless complex $Re \cdot \bar{T}$ (the solid lines are the approximation curves)

Из рис. 3 видно, что вид зависимости коэффициента сопротивления от безразмерного комплекса $Re \cdot \bar{T}$ при нагреве и охлаждении частицы аналогичен выражению Стокса и может быть записан следующим образом:

$$C_D = \frac{a}{Re}, \tag{2}$$

где a – коэффициент, который зависит от отношения температур \bar{T} .

На рис. 4 показана зависимость эмпирически полученного коэффициента a в выражении (2) от отношения температуры частицы и жидкости \bar{T} для исследованного диапазона чисел Рейнольдса $Re = 10^{-3}-1$.

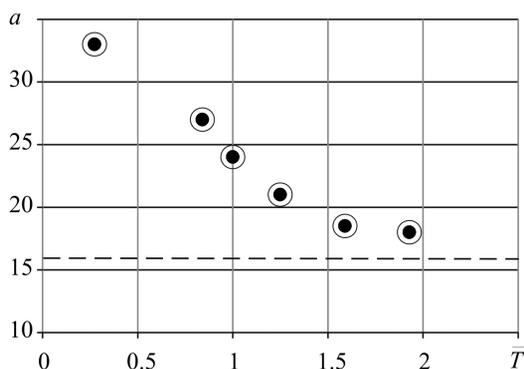


Рис. 4. Зависимость коэффициента a в выражении (2) от \bar{T}

Fig. 4. Dependence of the coefficient a in expression (2) on \bar{T}

Из рис. 4 видно, что при $\bar{T} \gg 1$ коэффициент асимптотически стремится к значению $a = 16$, поэтому при $T \gg T_l$ зависимость для коэффициента сопротивления твердой частицы в неизотермических условиях будет соответствовать выражению Адамара – Рыбчинского, полученного для сферического пузырька (или капли) $C_D = 16/Re$.

При решении ряда практических задач необходимо знать зависимость коэффициента сопротивления от разности температуры частицы и жидкости (внешней среды) $\delta T = \left| 1 - \frac{T}{T_l} \right|$. В качестве примера на рис. 5 приведены экспериментальные данные для коэффициента сопротивления одиночного нагретого (рис. 5, *a*) и охлажденного (рис. 5, *b*) стального шарика диаметром $D = 8.7$ мм от разности температур δT . Сплошными линиями на рис. 5 показаны аппроксимационные кривые.

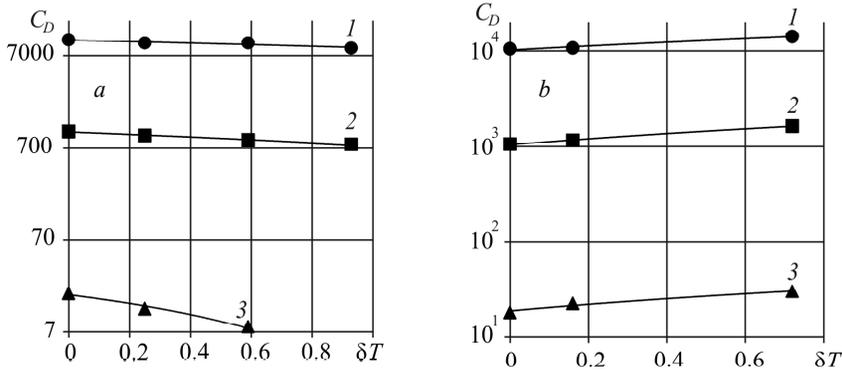


Рис. 5. Коэффициент сопротивления нагретого (*a*) и охлажденного (*b*) стального шарика в зависимости от δT : 1 – ПМС-30000; 2 – ПМС-10000; 3 – глицерин

Fig. 5. Drag coefficient of (*a*) a heated steel ball and (*b*) a cooled steel ball as a function of δT : 1, PDMS-30000; 2, PDMS-10000; and 3, glycerin

Для исследованного диапазона чисел Рейнольдса $Re = 10^{-3}-1$ в зависимости от разности температур δT получено следующее эмпирическое выражение для коэффициента сопротивления одиночной твердой сферической охлажденной частицы (с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.95$):

$$C_D = C_{D0} + 27.6 \frac{\delta T}{Re_0^{0.808}}, \text{ в диапазоне } \delta T = 0-0.7,$$

и нагретой частицы (с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.98$):

$$C_D = C_{D0} - 18.2 \frac{\delta T}{Re_0^{0.722}}, \text{ в диапазоне } \delta T = 0-0.9,$$

где $C_{D0} = 24/Re_0$ – коэффициент сопротивления эталонной твердой сферы (при $T = T_l$); Re_0 – число Рейнольдса для эталонной твердой сферы (при $T = T_l$).

Заключение

Результаты экспериментального исследования процесса гравитационного осаждения твердой сферы в неизотермических условиях позволяют сделать следующие выводы:

- Получены новые экспериментальные данные по закономерностям гравитационного осаждения одиночной охлажденной ($T = 82$ К, 250 К) и нагретой ($T = 373$ К, 473 К, 573 К) сферической твердой частицы в вязкой жидкости в области чисел Рейнольдса $Re = 10^{-3}-1$.

● Показано, что стационарная скорость гравитационного осаждения одиночной частицы уменьшается при ее охлаждении и возрастает при нагреве частицы.

● В исследованном диапазоне чисел Рейнольдса $Re = 10^{-3}-1$ обнаружено, что коэффициент сопротивления одиночной твердой сферической частицы описывается зависимостью вида $C_D = a/Re$, где a – эмпирический коэффициент, зависящий от отношения температуры частицы и жидкости (внешней среды) \bar{T} . Методом регрессионного анализа получены значения коэффициента a для условий проведенных экспериментов и обнаружено, что при $\bar{T} \gg 1$ величина коэффициента асимптотически стремится к значению $a = 16$.

● Для исследованных жидкостей (глицерин, ПМС-10000, ПМС-30000), широко используемых в различных лабораторных исследованиях, в диапазоне чисел Рейнольдса $Re = 10^{-3}-1$ получены эмпирические выражения для коэффициентов сопротивления одиночной твердой сферической охлажденной и нагретой частицы в зависимости от разности температуры частицы и жидкости (внешней среды).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
2. Асовский В.П. Особенности тушения лесных пожаров вертолетами с использованием подвесных водосливных устройств // Научный вестник МГТУ ГА: Аэромеханика и прочность. 2009. № 138. С. 142–149.
3. Пискунов М.В., Стрижак П.А. Рост площади поверхности отделившихся фрагментов жидкости при высокотемпературном дроблении неоднородной капли воды // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43. № 12. С. 34–41. DOI: 10.21883/PJTF.2017.12.44706.16709.
4. Pfender E., Lee Y.C. Particle dynamics and particle heat and mass transfer in thermal plasmas. Part 1. The motion of a single particle without thermal effects // Plasma Chemistry and Plasma Processing. 1985. V. 5. No. 3. P. 211–237.
5. Eisenklam P., Arunachalam S.A. The drag resistance of burning drops // Combustion and Flame. 1966. V. 10. No. 2. P. 171–181. DOI: 10.1016/0010-2180(66)90065-4.
6. Бороненко М.П., Гуляев И.П., Серегин А.Е. Модель движения и нагрева частиц в плазменной струе // Вестник Югорского государственного университета. 2012. № 2 (25). С. 7–15.
7. Гуляев И.П., Солоненко О.П. Моделирование поведения полых частиц ZrO_2 в плазменной струе с учетом их термического расширения // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20. № 6. С. 789–802.
8. Трапезников С.Ю., Лушкин К.А. Исследование коэффициента гидравлического сопротивления при неизотермическом движении высоковязкой нефти по трубопроводу // Сетевое издание «Нефтегазовое дело». 2011. № 2. С. 304–312.
9. Bar-Ziv E., Zhao B., Mograbi E., Katoshevski D., Ziskind G. Experimental validation of the Stokes law at nonisothermal conditions // Physics of Fluids. 2002. V. 14. No. 6. P. 2015–2018. DOI: 10.1063/1.1476305
10. Малай Н.В., Глушак А.В., Лиманская А.В. Решение краевой задачи медленного обтекания сферы вязким неизотермическим газом // Изв. вузов. Математика. 2016. № 12. С. 54–65.
11. Александров В.Ю., Фридлиндер О.Г. Медленные течения газа и эффект отрицательного сопротивления сильно нагретой сферической частицы // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2008. № 3. С. 168–177.
12. Завершинский И.П., Коган Е.Я. Влияние гетерогенных процессов на поверхности, обтекаемой потоками неравновесных газов на гидродинамическое сопротивление // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 25. Вып. 5. С. 76–79.
13. Kassoy D.R., Adamson T.C., Messiter A.F. Compressible low Reynolds number flow around a sphere // The Physics of Fluids. 1966. V. 9. No. 4. P. 671–681. DOI: 10.1063/1.1761732.
14. Галкин В.С., Коган М.Н., Фридлиндер О.Г. Обтекание сильно нагретой сферы потоком газа при малых числах Рейнольдса // Прикладная математика и механика. 1972. Т. 36. № 5. С. 880–885.

15. Фридлиндер О.Г. Течение газа около неравномерно нагретой сферы // Ученые записки ЦАГИ. 1975. Т. 6. № 5. С. 55–57.
16. Борис А.Ю. Движение остывающей или нагревающейся в газе сферической частицы // Ученые записки ЦАГИ. 1984. Т. 15. № 6. С. 43–50.
17. Dong-Yan X., Xin-Can W., Xi C. Motion and heating of non-spherical particles in a plasma jet // Surface and Coatings Technology. 2003. V. 171. P. 149–156. DOI: 10.1016/S0257-8972(03)00259-7
18. Malai N.V., Limanskaya A.V., Shchukin E.R. Solution of a boundary value problem for the Navier–Stokes equations linearized with respect to velocity: non isothermal flow of a gaseous medium past a uniformly heated sphere // Differential Equations. 2015. V. 51. No. 10. P. 1319–1329. DOI: 10.1134/S0012266115100079
19. Малай Н.В., Шукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С. Гравитационное движение равномерно нагретой твердой частицы в газовой среде // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 1. С. 74–80.
20. Малай Н.В., Шукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С. К вопросу о гравитационном движении неравномерно нагретой твердой частицы в газообразной среде // Журнал технической физики. 2010. Т. 80. № 3. С. 49–54.
21. Ziskind G., Zhao B., Katoshevski D., Bar-Ziv E. Experimental study of the forces associated with mixed convection from a heated sphere at small Reynolds and Grashof numbers. Part I: Cross-flow // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2001. V. 44. No. 23. P. 4381–4389. DOI: 10.1016/S0017-9310(01)00095-3
22. Mograbi E., Ziskind G., Katoshevski D., Bar-Ziv E. Experimental study of the forces associated with mixed convection from a heated sphere at small Reynolds and Grashof numbers. Part II: Assisting and opposing flows // International journal of heat and mass transfer. 2002. V. 45. No. 12. P. 2423–2430. DOI: 10.1016/S0017-9310(01)00350-7
23. Матвиенко О.В., Андропова А.О. Исследование движения частицы в потоке жидкости вблизи подвижной стенки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 36. С. 85–92. DOI 10.17223/19988621/36/10
24. Васенин И.М., Архипов В.А., Бутов В.Г., Глазунов А.А., Трофимов В.Ф. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1986.

Статья поступила 25.12.2020

Arkhipov V.A., Basalaev S.A., Perfilieva K.G., Usanina A.S. (2021) DRAG COEFFICIENT OF A SOLID SPHERE UNDER NON-ISOTHERMAL CONDITIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 71. pp. 13–24

DOI 10.17223/19988621/71/2

Keywords: solid sphere, gravitational settling, cooled particle, heated particle, hydrodynamic drag coefficient, temperature difference, experimental study.

The results of an experimental study of gravitational settling of a cooled ($T = 82$ K, 250 K) and a heated ($T = 373$ K, 473 K, 573 K) steel ball in glycerin and polymethylsiloxane liquids (PDMS-10000, PDMS-30000) in the range of the Reynolds numbers $Re = 10^{-3} - 1$ are presented. It is shown that the stationary velocity of gravitational settling of a particle decreases with its cooling and, conversely, it increases with heating of the particle. A time dependence of the distance traveled by the particle is found to be linear for both heated, cooled, and etalon ($T = T_l$) solid spheres. The effect of the difference in the particle and carrier medium temperatures on the drag coefficient of the solid sphere is analyzed. For the considered Reynolds numbers, it is revealed that the drag coefficient of a single solid sphere is determined by $C_D = a/Re$, where a is the empirical coefficient depending on the ratio of the particle and liquid temperatures $\bar{T} = T/T_l$. Using the regression analysis method, the expression for a drag coefficient of a solid particle under non-isothermal conditions at $\bar{T} \gg 1$ is found to be similar to the Hadamard –

Rybczynski expression $C_D = 16/\text{Re}$, which is obtained for a spherical bubble (or a drop). The empirical dependences of the drag coefficient for a cooled and a heated solid sphere on the difference in the particle and liquid temperatures $\delta T = |1 - \bar{T}|$ are obtained.

Financial support. This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of state assignment No. 0721-2020-0036.

Vladimir A. Arkhipov (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Sergey A. Basalaev (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

Kseniya G. Perfilieva (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: k.g.perfiljeva@yandex.ru

Anna S. Usanina (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: usaninaanna@mail.ru

REFERENCES

1. Nigmatulin R.I. (1990) *Dynamics of Multiphase Medium*. Vol. 1. New York: Hemisphere Publishing Corporation.
2. Asovskiy V.P. (2009) Osobennosti tusheniya lesnykh pozharov vertoletami s ispol'zovaniem podvesnykh vodoslivnykh ustroystv [Features of the extinguishing of forest fires from helicopters with suspended spillways]. *Nauchnyy vestnik MGTU GA: Aeromekhanika i prochnost' – Civil Aviation High Technologies*. 138. pp. 142–149.
3. Piskunov M.V., Strizhak P.A. (2017) Growth of the surface area of separated liquid fragments during high-temperature fragmentation of an inhomogeneous liquid drop. *Technical Physics Letters*. 43(12). pp. 558–561. DOI: 10.1134/S1063785017060256.
4. Pfender E., Lee Y.C. (1985) Particle dynamics and particle heat and mass transfer in thermal plasmas. Part 1. The motion of a single particle without thermal effects. *Plasma Chemistry and Plasma Processing*. 5(3). pp. 211–237.
5. Eisenklam P., Arunachalam S.A. (1966) The drag resistance of burning drops. *Combustion and Flame*. 10(2). pp. 171–181. DOI: 10.1016/0010-2180(66)90065-4.
6. Boronenko M.P., Gulyaev I.P., Seregin A.E. (2012) Model' dvizheniya i nagreva chastits v plazmennoy strue [Model of the motion and heating of particles in a plasma flow]. *Vestnik Yugorskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Yugorsky State University*. 2(25). pp. 7–15.
7. Gulyaev I.P., Solonenko O.P. (2013) Modelling of the behavior of hollow ZrO_2 particles in plasma jet with regard to their thermal expansion. *Thermophysics and Aeromechanics*. 20(6). pp. 769–782.
8. Trapeznikov S.Yu., Lushkin K.A. (2011) Issledovanie koeffitsienta gidravlicheskogo soprotivleniya pri neizotermicheskom dvizhenii vysokovyazkoy nefti po truboprovodu [Study of a hydraulic resistance coefficient in a non-isothermal flow of highly viscous oil through a pipeline]. *Neftegazovoe delo – Petroleum Engineering*. (2). pp. 304–312.
9. Bar-Ziv E., Zhao B., Mograbi E., Katoshevski D., Ziskind G. (2002) Experimental validation of the Stokes law at nonisothermal conditions. *Physics of Fluids*. 14(6). pp. 2015–2018. DOI: 10.1063/1.1476305.
10. Malay N.V., Glushak A.V., Limanskaya A.V. (2016) Investigation of boundary-value problem for slow flow of a sphere by viscous non-isothermal gas. *Russian Mathematics*. 60(12). pp. 43–53. DOI: 10.3103/S1066369X16120070.

11. Aleksandrov V.Yu., Fridlender O.G. (2008) Slow gas motions and the negative drag of a strongly heated spherical particle. *Fluid Dynamics*. 43(3). pp. 485–492. DOI: 10.1134/S0015462808030162.
12. Zavershinsky I.P., Kogan E.Ya. (2000) Heterogeneous processes affect the hydrodynamic resistance of a surface streamlined by a nonequilibrium gas flow. *Technical Physics Letters*. 26(3). pp. 215–216. DOI: 10.1134/1.1262795.
13. Kassoy D.R., Adamson T.C., Messiter A.F. (1966) Compressible low Reynolds number flow around a sphere. *The Physics of Fluids*. 9(4). pp. 671–681. DOI: 10.1063/1.1761732.
14. Galkin V.S., Kogan M.N., Fridlender O.G. (1972) Flow past a strongly heated sphere by a gas with low Reynolds numbers. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 36(5). pp. 829–833. DOI: 10.1016/0021-8928(72)90136-0.
15. Friedlander O.G. (1975) Techenie gaza okolo neravnomerno nagretoy sfery [Gas flow around a nonuniformly heated sphere]. *Uchenye zapiski TsAGI – TsAGI Science Journal*. 6(5). pp. 55–57.
16. Boris A.Yu. (1984) Dvizhenie ostyvayushchey ili nagrevayushcheysya v gaze sfericheskoy chastitsy [The motion of a cooling or heating spherical particle in a gas]. *Uchenye zapiski TsAGI – TsAGI Science Journal*. 15(6). pp. 43–50.
17. Dong-Yan X., Xin-Can W., Xi C. (2003) Motion and heating of non-spherical particles in a plasma jet. *Surface and Coatings Technology*. 171. pp. 149–156. DOI: 10.1016/S0257-8972(03)00259-7.
18. Malai N.V., Limanskaya A.V., Shchukin E.R. (2015) Solution of a boundary value problem for the Navier–Stokes equations linearized with respect to velocity: nonisothermal flow of a gaseous medium past a uniformly heated sphere. *Differential Equations*. 51(10). pp. 1319–1329. DOI: 10.1134/S0012266115100079.
19. Malay N.V., Shchukin E.R., Stukalov A.A., Ryazanov K.S. (2008) Gravity-induced motion of a uniformly heated solid particle in a gaseous medium. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 49(1). pp. 58–63. DOI: 10.1007/s10808-008-0008-4.
20. Malay N.V., Shchukin E.R., Stukalov A.A., Ryazanov K.S. (2010) On the gravitational motion of a nonuniformly heated solid particle in a gaseous medium. *Technical Physics*. 55(3). pp. 367–372. DOI: 10.1134/S1063784210030060.
21. Ziskind G., Zhao B., Katoshevski D., Bar-Ziv E. (2001) Experimental study of the forces associated with mixed convection from a heated sphere at small Reynolds and Grashof numbers. Part I: Cross-flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 44(23). pp. 4381–4389. DOI: 10.1016/S0017-9310(01)00095-3.
22. Mograbi E., Ziskind G., Katoshevski D., Bar-Ziv E. (2002) Experimental study of the forces associated with mixed convection from a heated sphere at small Reynolds and Grashof numbers. Part II: Assisting and opposing flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 45(12). pp. 2423–2430. DOI: 10.1016/S0017-9310(01)00350-7.
23. Matvienko O.V., Andropova A.O. (2015) Issledovanie dvizheniya chastitsy v potoke zhidkosti vblizi podvizhnoy stenki [Studying the particle motion in a fluid flow in the vicinity of a movable wall]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 36. pp. 85–92. DOI: 10.17223/19988621/36/10.
24. Vasenin I.M., Arkhipov V.A., Butov V.G., Glazunov A.A., Trofimov V.F. (1986) *Gazovaya dinamika dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Tomsk: Tomsk State University Publishing House.

Received: December 25, 2020

УДК 537.85
DOI 10.17223/19988621/71/3

**А.П. Баганов, В.Г. Бутов, Г.В. Носов, М.Г. Носова,
С.В. Синяев, В.А. Солоненко**

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ КАТАПУЛЬТА ДЛЯ ЗАПУСКА ТЯЖЕЛЫХ ДРОНОВ С МАЛОРАЗМЕРНЫХ СУДОВ¹

Представлены результаты математического моделирования работы оригинальной схемы электромагнитной катапульти, основными элементами которой являются односекционный многорельсовый ускоритель с металлическим якорем и импульсный источник энергии на основе мощного импульсного МГД-генератора и повышающего ток трансформатора. Исследуются возможности такой схемы для разгона тел массой 7 т до скоростей ≈ 150 км/ч при максимально допустимом ускорении $15g$. Математическая модель описывает согласованную работу устройства, начиная с подключения импульсного МГД-генератора в режиме холостого хода к первичной обмотке трансформатора и до момента разгона дрона до заданной скорости взлета. С помощью предложенной модели исследована эффективность электромеханического преобразования энергии в предложенной схеме катапульти, определены параметры основных элементов устройства, включая длину разгонного участка катапульти и максимальное ускорение дрона при разгоне.

Ключевые слова: *МГД-генератор, вольт-амперная характеристика, повышающий трансформатор, многорельсовый ускоритель, скорость взлета, длина разгона, математическое моделирование, параметрический анализ.*

В течение последнего десятилетия в ряде промышленно развитых стран разрабатываются и испытываются электромагнитные ускорители (катапульти) для запуска самолетов палубной авиации с авианосцев и тяжелых авианесущих крейсеров. На судах только этих классов возможно размещение устройств разгона самолетов со взлетной массой 30–40 т. Так, разгонный участок электромагнитной катапульти (EMALS) авианосца «Gerald R. Ford» [1] имеет длину 91 м. Сокращение разгонной части катапульти ограничено величиной допустимого пикового ускорения для пилотируемого самолета, примерно равного $7g$. Даже при оптимальном режиме разгона с постоянным ускорением $7g$ до взлетной скорости 250 км/ч длина разгонного участка составляет ≈ 35 м. Реальная длина разгонной части катапульти в разы больше из-за конструктивных особенностей индукционного ускорителя, состоящего из нескольких разнесенных по трассе последовательно включаемых разгонных блоков. При запуске тяжелых беспилотных летательных аппаратов (дронов) величина предельно допустимого ускорения обусловлена его динамической прочностью и составляет не менее $15g$, а взлетная скорость дрона заметно ниже, чем у самолета за счет его конструктивных особенностей. Это позволяет производить запуск тяжелого дрона с помощью моноблочного ускорителя, что в разы сокращает длину разгонного участка катапульти. При оптимальном

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности ТГУ, проекты 8.2.05.2020 и 8.2.10.2020

режиме разгона с ускорением $15 g$ длина ускорителя при взлетной скорости дрона 150 км/ч составит $\approx 6 \text{ м}$. Указанные особенности электромагнитных катапульта для запуска тяжелых дронов позволят располагать их на относительно малоразмерных судах автономного плавания. С учетом развития Арктической зоны России и необходимостью защиты ее природных ресурсов актуальной задачей является разработка и создание судов ледового класса с возможностями оперативного запуска летательных аппаратов различного назначения с использованием автономных источников электрической энергии высокой степени готовности. В отличие от накопителя катапульта авианосца «Gerald R. Ford», заряжаемого от основной энергетической установки авианосца в течение 45 с при отключении других потребителей [2], предлагаемый генератор [3] представляет собой автономный импульсный источник энергии с постоянной оперативной готовностью к работе.

Общая схема и особенности работы катапульта

Моделируемая электромагнитная катапульта состоит из трех основных функциональных узлов: генератора электрической энергии, накопителя-преобразователя энергии и многорельсового ускорителя [4] с металлическим якорем, выполняющим функцию электродинамического поддона, разгоняющего дрон.

Общая схема катапульта приведена на рис. 1. Генератором электрической энергии является мощный импульсный МГД-генератор на твердом плазмообразующем топливе [5]. В качестве преобразователя энергии рассматривается трансформатор с повышающей ток вторичной обмоткой, к которой подключен рельсовый ускоритель. Традиционные рельсовые ускорители, имеющие одну пару направляющих рельсов, обладают низкой погонной индуктивностью, что обычно компенсируется заметным увеличением пропускаемого тока. Погонная индуктивность ускорителей из нескольких индуктивно связанных пар рельсов [6] существенно выше, что позволяет значительно уменьшить ток при сохранении силы, ускоряющей якорь. Тыльные торцы рельсов ускорителя гальванически соединены по диагонали, как показано на рис. 1. Такое соединение обеспечивает последовательное прохождение тока по каждой паре рельсов и замыкающих их токосъемных скоб якоря. Якорь I состоит из n токосъемных скоб в виде «ласточкиного хвоста», каждая из которых замыкает советующую пару рельсов 2 . Все скобы размещены в жестком неэлектропроводном поддоне с зацепом для разгона дрона. Рельсы одной полярности электроизолированы друг от друга.

Работа начинается с зажигания плазмообразующего топлива в камере генератора плазмы (ГП). В момент выхода МГД-генератора на режим холостого хода его электроды с помощью ключа K_1 подключаются к первичной обмотке L_1 трансформатора. Трансформатор с подключенным к нему ускорителем является активно-индуктивной нагрузкой для МГД-генератора. Накопление и преобразование электрической энергии в обмотках трансформатора происходят во время нарастания тока в его первичной обмотке, т.е. в процессе выхода МГД-генератора на максимальную мощность. Предполагается, что заряд плазмообразующего топлива сгорает на заключительной стадии разгона дрона. Перед завершением работы МГД-генератора катапульта переводится в режим «кроубар» [7] ключом K_2 , который замыкает первичную обмотку трансформатора на балластное сопротивление R_1 , которое утилизирует большую часть остаточной магнитной энергии

трансформатора и ускорителя. После начала механического торможения якоря выходные торцы каждой пары рельсов гальванически замыкаются на сопротивления (на рис. 1 не показаны) до полного обесточивания катапульты перед следующим запуском.

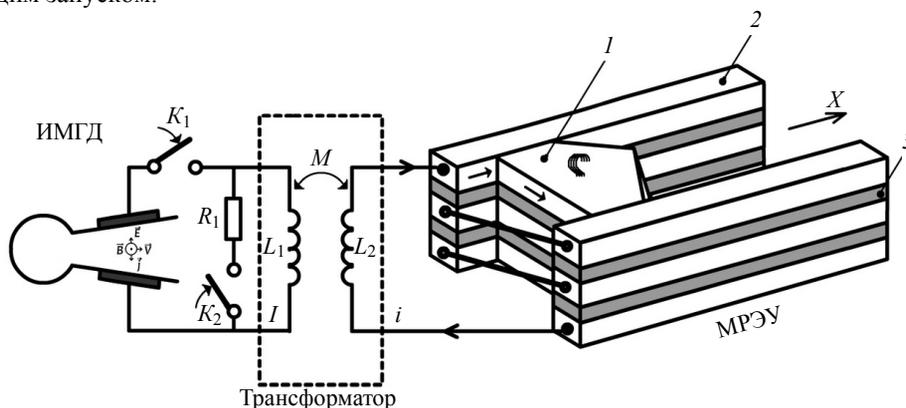


Рис. 1. Общая схема электромагнитной катапульты: ИМГДГ – импульсный МГД-генератор; ГП – генератор плазмы; МРЭУ – многорельсовый электродинамический ускоритель; K_1, K_2 – быстродействующие замыкающие ключи; R_1 – балластное сопротивление; L_1, L_2, M – индуктивности обмоток трансформатора и их взаимная индуктивность; $I(t), i(t)$ – токи в обмотках трансформатора; 1 – металлический якорь; 2 – направляющие рельсы-электроды; 3 – изоляторы

Fig. 1. General diagram of an electromagnetic catapult: ИМГДГ is the pulsed MHD generator; ГП is the plasma generator; МРЭУ is the multi-rail electrodynamic accelerator; K_1, K_2 are the high-speed closing keys; R_1 is the ballast resistance; L_1, L_2, M are the inductances of the transformer windings and their mutual inductance; $I(t), i(t)$ are the currents in the transformer windings; 1, a metal anchor; 2, guide rails-electrodes; and 3, insulators

Таким образом, с момента выхода МГД-генератора на режим холостого хода процесс катапультирования дрона включает в себя три последовательных этапа. На первом этапе происходит накопление магнитной энергии трансформатором при неподвижном якорь. Сцепка «якорь – дрон» начинает ускоряться в момент t_1 , когда действующая на якорь электромагнитная сила достигает значения «форсирования» F_{sp} . На втором этапе дрон разгоняется при работающем МГД-генераторе до момента t_2 перехода в режим «кρουбар». Финишное ускорение дрона происходит на третьем этапе за счет накопленной трансформатором магнитной энергии до начала механического торможения якоря.

Постановка задачи

Электрические схемы замещения для катапульты на каждом из трех этапов ее работы приведены на рис. 2. Наклонная стрелка указывает на изменение соответствующей величины во времени.

Вольт-амперная характеристика МГД-генератора моделируется квадратичной зависимостью

$$U(I) = U_0 - rI + qI^2, \quad (1)$$

где U_0 – напряжение холостого хода генератора; r и q – параметры внутреннего сопротивления МГД-канала.

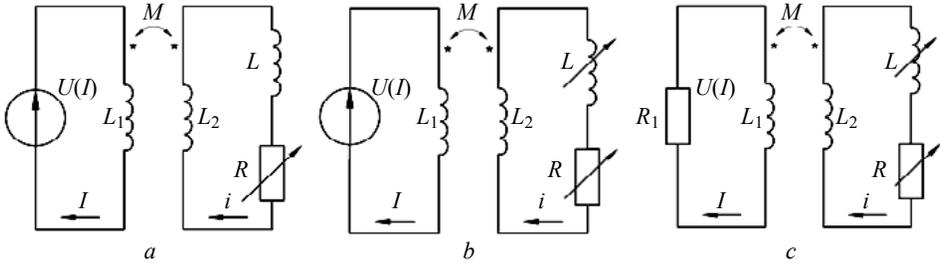


Рис. 2. Электрические цепи на трех этапах работы катапульты: *a* – до момента t_1 «форсирования» дрона; *b* – ускорение дрона с работающим МГД-генератором до момента t_2 ; *c* – режим «кроубар» до момента t_3

Fig. 2. Electric circuits at the three stages of catapult operation: (*a*) before the drone "forcing" instant t_1 ; (*b*) acceleration of the drone with an operating MHD generator up to a time instant of t_2 ; and (*c*) "crowbar" mode till the instant of t_3

Индуктивности обмоток трансформатора L_1 и L_2 , а также их взаимная индуктивность M рассчитываются по следующим формулам:

$$L_1 = \frac{2W_0}{(1-k_c^2)I_m^2}, \quad L_2 = \frac{2k_c^2W_0}{(1-k_c^2)i_m^2}, \quad M = \frac{2k_c^2W_0}{(1-k_c^2)I_m|i_m|}, \quad k_c = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}, \quad (2)$$

где I_m – предельно допустимое значение тока в МГД-генераторе; i_m – максимальное значение тока во вторичной обмотке; W_0 – магнитная энергия трансформатора при токах I_m и i_m ; k_c – коэффициент связи его обмоток. Значение $|i_m|$ определяется из условия предельно допустимого ускорения для дрона:

$$|i_m| = \sqrt{2m a_m / \chi},$$

где χ – погонная индуктивность ускорителя; $m = m_a + m_d$ – масса сцепки «якорь-дрон». Обмотки трансформатора предполагаются сверхпроводящими. Такое состояние обмоток из сверхчистой меди практически достигается при температуре жидкого водорода [8].

Индуктивность ускорителя L зависит от положения якоря x :

$$L(x) = L_0 + \chi(x + l_0) + \gamma - \delta \exp[-\varepsilon(x + l_0)], \quad (3)$$

где L_0 – индуктивность токоподводящих шин; l_0 – расстояние между тыльным торцом ускорителя и начальным положением якоря $x(t=0) = 0$; γ , δ , ε – постоянные коэффициенты в выражении для индуктивности системы «якорь – обратные провода».

Сопротивление ускорителя R описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{2n\eta_0}{S} u(t) + \alpha i(t)^2 R(t), \quad (4)$$

где t – время; n – число пар рельсов в ускорителе; η_0 – удельное сопротивление материала рельсов при начальной температуре T_0 ; S – площадь поперечного сечения направляющего рельса; $\alpha = \eta_0\beta/\rho cS^2$; ρ – плотность; c – удельная теплоёмкость; β – температурный коэффициент материала рельсов; u – скорость якоря.

Уравнение (4) получено при следующих предположениях: нагрев рельсов в ускорителе определяется протекающим по ним током $i(t)$, влияние теплопроводности и теплоотдачи на распределение температуры $T(t,x)$ в рельсах пренебрежи-

мо мало, удельное сопротивление материала рельсов является линейной функцией температуры [7]: $\eta(T) = \eta_0 (1 + \beta(T - T_0))$.

Уравнения движения сцепки «якорь – дрон» имеют вид

$$m \frac{du(t)}{dt} = F(t) + F_{tr} - F_f, \quad \frac{dx(t)}{dt} = u(t), \quad F(t) = \frac{1}{2} \frac{dL(x(t))}{dx} i^2(t), \quad (5)$$

где $F(t)$ – электромагнитная сила, ускоряющая якорь; F_{tr} – тяга двигателей дрона; F_f – сила трения якоря в ускорителе.

При работающем МГД-генераторе электротехнические уравнения катапульты следующие:

$$L_1 \frac{dI}{dt} + M \frac{di}{dt} = U(I),$$

$$[L_2 + L(t)] \frac{di}{dt} + \left[(\chi + \delta \varepsilon e^{-\varepsilon(x(t)+l_0)}) u(t) + R(t) \right] i + M \frac{dI}{dt} = 0. \quad (6)$$

На первом этапе при неподвижном якоре процесс описывается с помощью (4) и (6) с учетом (1) – (3) при $x = 0, u = 0, I(0) = i(0) = 0$. Второй этап работы катапульты при работающем МГД-генераторе моделируется уравнениями (4) – (6) при начальных значениях токов, определяемых в момент t_1 окончания первого этапа работы катапульты. На третьем заключительном этапе работы катапульты в режиме «кρούбар» электротехнические уравнения преобразуются к виду

$$L_1 \frac{dI}{dt} + R_1 I + M \frac{di}{dt} = 0, \quad [L_2 + L(t)] \frac{di}{dt} + [\chi u(t) + R(t)] i + M \frac{dI}{dt} = 0, \quad (7)$$

поскольку работа МГД-генератора предполагается завершённой, а эффект «обратных проводов» на ускорение сцепки пренебрежимо мал. Разгон дрона завершается в момент t_3 . Начальными условиями для третьего этапа разгона служат значения соответствующих величин в момент t_2 срабатывания ключа K_2 при завершении второго этапа работы катапульты.

Результаты расчетов

Моделирование процесса разгона дрона проведено для электромагнитной катапульты с параметрами: импульсный МГД-генератор мощностью 50 МВт [3] – $U_0 = 1435$ В, $r = 0.0216$ Ом, $q = 0.127 \cdot 10^{-6}$ Ом/А²; трансформатор – $L_1 = 0.078$ Гн, $L_2 = 0.59 \cdot 10^{-3}$ Гн, $M = 6.1 \cdot 10^{-3}$ Гн, $k_c = 0.9, L_0 = 0.7 \cdot 10^{-6}$ Гн, $R_1 = 2.5$ Ом; ускоритель – $n = 5, \chi = 14.44 \cdot 10^{-6}$ Гн/м, $S = 0.035$ м², зазор между рельсами одной пары $l = 0.4$ м, $l_0 = 0.1$ м, $\gamma = 4.7 \cdot 10^{-6}$ Гн, $\delta = 3.2 \cdot 10^{-6}$ Гн, $\varepsilon = 2.6$ м⁻¹, $\rho = 8.9 \cdot 10^3$ кг·м⁻³, $\beta = 2 \cdot 10^{-3}$ град⁻¹, $C = 0.39 \cdot 10^3$ Дж·кг⁻¹·град⁻¹; сцепка якорь – дрон – $m = 7 \cdot 10^3$ кг, $F_{sp} = 590$ кН, $F_{tr} = 15$ кН, $F_f = 1$ кН; моменты завершения этапов работы катапульты – $t_1 = 0.21$ с, $t_2 = 0.64$ с, $t_3 = 0.65$ с.

Расчеты погонной индуктивности ускорителя χ и индуктивности системы «обратные провода – якорь» проведены методом прямоугольных параллелепипедов с равномерным распределением токов по сечениям проводников [9].

Основное ускорение дрона происходит при работающем МГД-генераторе на втором этапе работы катапульты. Этот этап является наиболее продолжительным, его длительность – 0.43 с. На рис. 3 приведены результаты расчета скорости дрона $u(t)$ и его положения в ускорителе $x(t)$. На длине разгона ≈ 10 м якорь разгоняет дрон до скорости 157 км/ч.

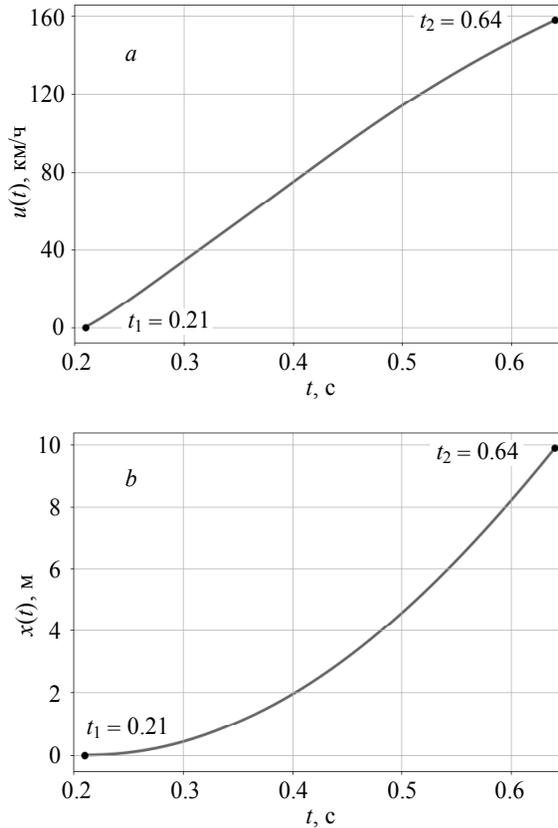


Рис. 3. Параметры разгона дрона при работающем МГД-генераторе: a – скорость; b – положение

Fig. 3. Drone acceleration parameters in the course of the operating MHD generator: (a) speed and (b) position

На рис. 4 приведена зависимость ускорения дрона от времени при работающем МГД-генераторе (2-й этап работы катапульты). Пиковая величина ускорения равна 11.5 g, что технически вполне допустимо. Половина времени этапа ≈ 0.2 с реализуется близкий к равноускоренному режим разгона с ускорением ≈ 11.2 g. Такой режим ускорения на начальном участке ≈ 0.15 м разгона дрона обусловлен эффектом «обратных» проводов ускорителя. В результате на якорь действует дополнительная электромагнитная сила, экспоненциально убывающая по мере его удаления от тыльного торца ускорителя (см. рис. 1).

На рис. 5 приведены расчетные осциллограммы токов в обмотках трансформатора на первых двух этапах работы катапульты. Ток во вторичной обмотке и ускорителе достигает своего максимального значения на 0.06 с раньше тока в первичной обмотке, а убывает значительно быстрее: на 20 % по сравнению с 4 % в первичной обмотке к моменту $t_2 = 0.64$ с. Это обусловлено увеличением индуктивно-активной нагрузки на вторичной обмотке трансформатора в процессе разгона дрона.

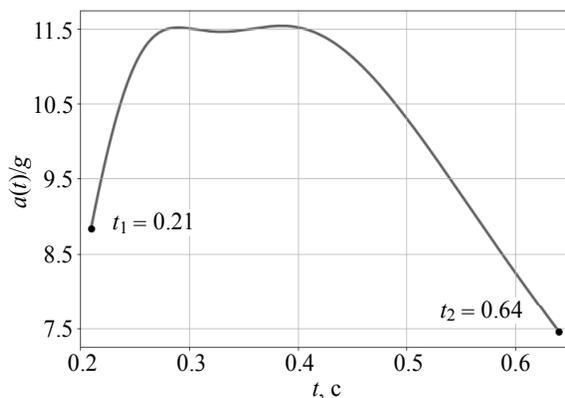


Рис. 4. Ускорение дрона на втором этапе разгона
Fig. 4. Drone acceleration in the second stage

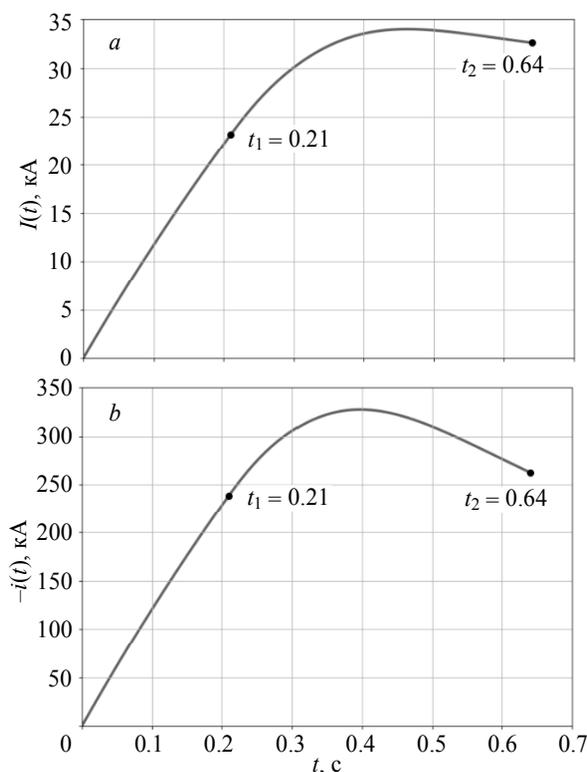


Рис. 5. Расчетные осциллограммы токов в катапульте: *a* – ток в МГД-генераторе и первичной обмотке трансформатора, *b* – ток во вторичной обмотке трансформатора и ускорителе

Fig. 5. Calculated oscillograms of currents in the catapult: (*a*) current in the MHD generator and in the primary winding of the transformer, (*b*) current in the secondary winding of the transformer and in the accelerator

Третий этап работы катапульты наиболее короткий – 10 мс. За это время приращение скорости дрона равно 1.1 км/ч на пути 0.4 м, при этом ускорение сцепки уменьшается с 7.5 g до 1.2 g. Основная функция этого этапа – обесточивание трансформатора и ускорителя путем утилизации их магнитной энергии на балластном сопротивлении R_1 , включаемом в разрыв первичной обмотки трансформатора в момент t_2 . В течение 10 мс ток в первичной обмотке трансформатора уменьшается в 2.5 раза до 13 кА, а во вторичной обмотке и ускорителе – в 2.7 раза до 99 кА. На рис. 6 показано изменение магнитной энергии в системе «трансформатор – ускоритель» на третьем этапе работы катапульты.

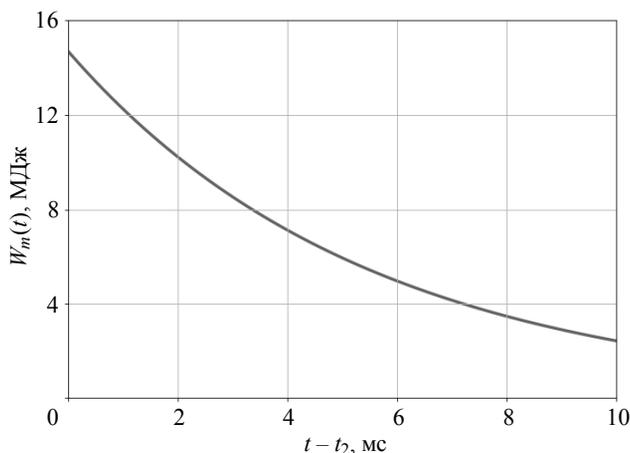


Рис. 6. Изменение величины магнитной энергии в системе «трансформатор – ускоритель» при включенном балластном сопротивлении R_1

Fig. 6. Magnetic energy variation in a "transformer – accelerator" system with the ballast resistance R_1 switched on

За счет утилизации на сопротивлении R_1 магнитная энергия системы сокращается в 6 раз до величины 2.4 МДж. Полное обесточивание катапульты происходит после подключения балластных сопротивлений к выходным сечениям каждой пары рельсов ускорителя.

Оценкой эффективности процесса электромагнитного ускорения дрона может служить отношение его кинетической энергии к энергии МГД-генератора, затраченной на питание активно-индуктивной нагрузки «трансформатор – ускоритель»:

$$\lambda = 0.5 m u^2(t_2) / \int_0^{t_2} I(\tau) U(\tau) d\tau,$$

где U – выходное напряжение МГД-генератора. В рассчитанном варианте $\lambda = 0.225$, то есть 22.5 % затраченной генератором электрической энергии преобразовано в кинетическую энергию сцепки «якорь – дрон». С учетом того, что рассчитанный вариант катапульты не является решением оптимизационной задачи, можно рассматривать предложенную схему катапульты как приемлемо эффективную по электромеханическому преобразованию энергии ее первичного источника – МГД-генератора.

Выводы

Методом математического моделирования исследованы особенности работы электромагнитной катапульти с двухступенчатым импульсным накопителем энергии и многорельсовым ускорителем с металлическим якорем. С помощью такого устройства тяжелый дрон с взлетной массой ≈ 7 т разгоняется до скорости ≈ 160 км/ч на длине ≈ 10 м с максимальным ускорением ≈ 12 g. Анализ результатов расчёта указывает на эффективную работоспособность моделируемого устройства катапульти и отдельных её элементов, включая автономный импульсный накопитель энергии. Величина разгонной части ускорителя и оценочные значения весо-габаритных параметров накопителя энергии [3] указывают на возможность размещения катапульти рассмотренного типа на малоразмерных (относительно авианосцев и авианесущих крейсеров) судах автономного плавания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *White R.* Electromagnetic Aircraft Launch System (EMALS). 2020. URL: <https://navalnews.net/electromagnetic-aircraft-launch-system-emals/>.
2. *Electromagnetic Aircraft Launch System – EMALS.* 2020. URL: <https://www.globalsecurity.org/military/systems/ship/systems/emals.htm>.
3. *Butov V.G., Afonin A.G., Sinyayev S.V., Solonenko V.A., Panchenko V.P., Yakushev A.A., Shvetsov G.A., Nosov G.V., and Nosova M.G.* Compact electric energy storage system based on a powerful pulsed MHD generator // PPC 2017 Paper Index | IEEE Pulsed Power Conference, June 18–22, Brighton, UK. P. 404–408. DOI: 10.1109/PPC.2017.8291283.
4. *Poltanov A. E., Kondratenko A. K., Glinov A. P. and Ryndin V. N.* Multi-turn railguns: concept analysis and experimental results // IEEE Transactions on Magnetics. 2001. V. 37. No. 1. P. 457–461. DOI: 10.1109/20.911876.
5. *Бреев В.В., Губарев А.В., Панченко В.П.* Сверхзвуковые МГД-генераторы / под ред. А.В. Губарева. М.: Энергоатомиздат, 1988. 240 с.
6. *Chumakov V., Stolarchuk O.* Simulation and comparative analysis of electrodynamic railguns for large masses acceleration: Railguns without biasing system // American Journal of Aerospace Engineering. 2016. V. 4. No. 2. P. 22–26. DOI: 10.11648/j.ajae.20170402.12.
7. *Кнопфель Г.* Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Мир, 1972. 392 с.
8. *Бут Д.А., Алиевский Б.Л., Мизюрин С.Р., Васюкевич П.В.* Накопители энергии. М.: Энергоатомиздат, 1991. 400 с.
9. *Синяев С.В.* Метод расчёта силовых и электромагнитных параметров сложных систем проводников в задачах электродинамики // Тезисы докладов 3-го Сибирского конгресса по прикладной и индустриальной математике, Новосибирск, 22–27 июня 1998 г. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1998. Ч. 3. С. 40–41.

Поступила в редакцию 21.12.2020

Baganov A.P., Butov V.G., Nosov G.V., Nosova M.G., Sinyayev S.V., Solonenko V.A. (2021) AN ELECTROMAGNETIC CATAPULT FOR LAUNCHING HEAVY UAVs (DRONES) FROM SMALL VESSELS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 71. pp. 25–34

DOI 10.17223/19988621/71/3

Keywords: MHD generator, volt-ampere characteristic, step-up transformer, multi-rail accelerator, take-off speed, acceleration length, mathematical modeling, parametric analysis.

The paper presents the results of mathematical modeling of the operation of a novel electromagnetic catapult design. The main elements of the latter are a single-section multi-rail accelerator with a metal armature and a pulsed energy source based on the powerful pulsed MHD generator and current-increasing transformer. The possibilities of such a scheme for accelerating

bodies weighing 7 tons to speeds of about 150 km/h at a maximum permissible acceleration of 15 g are investigated. The mathematical model describes the coordinated operation of the device, starting with connecting of the pulsed MHD generator in idle mode to the primary winding of the transformer and up to the moment when the drone accelerates to a given takeoff speed. Using the proposed model, the efficiency of the electromechanical energy conversion in the developed catapult scheme is tested. The parameters of the main elements of the device, namely the length of the acceleration section of the catapult and the maximum acceleration of the drone, are determined.

Financial support. This work was performed within the Program for improving the competitiveness of Tomsk State University (grant No. 8.2.05.2020 and grant No. 8.2.10.2020).

Anton P. BAGANOV (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mr.snowroad@mail.ru

Vladimir G. BUTOV (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bvg@niipmm.tsu.ru

Gennadiy V. NOSOV (Candidate of Technical Sciences, Energy Institute, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nosov@tpu.ru

Mariya G. NOSOVA (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nosovamgm@gmail.com

Sergey V. SINYAEV (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ssv@niipmm.tsu.ru

Viktor A. SOLODENKO (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vik@niipmm.tsu.ru

REFERENCES

1. White R. (2020) *Electromagnetic Aircraft Launch System (EMALS)*. Access mode: <https://navalnews.net/electromagnetic-aircraft-launch-system-emals/>.
2. *Electromagnetic Aircraft Launch System – EMALS*. Access mode: <https://www.globalsecurity.org/military/systems/ship/systems/emals.htm>.
3. Butov V.G., Afonin A.G., Sinyaev S.V., Solonenko V.A., Panchenko V.P., Yakushev A.A., Shvetsov G.A., Nosov G.V., Nosova M.G. (2017) Compact electric energy storage system based on a powerful pulsed MHD generator. *Proceedings of the 21st International Conference on Pulsed Power. IEEE Xplore. Brighton, UK*. pp. 404–408. DOI: 10.1109/PPC.2017.8291283.
4. Poltanov A.E., Kondratenko A.K., Glinov A.P., Ryndin V.N. (2001) Multi-turn railguns: concept analysis and experimental results. *IEEE Transactions on Magnetics*. 37(1). pp. 457–461. DOI: 10.1109/20.911876.
5. Breev V.V., Gubarev A.V., Panchenko V.P. (1988) *Sverkhzvukovye MGD-generatory* [Supersonic MHD generators]. Moscow: Energoatomizdat.
6. Chumakov V., Stolarchuk O. (2016) Simulation and comparative analysis of electrodynamic railguns for large masses acceleration: railguns without biasing system. *American Journal of Aerospace Engineering*. 4(2). pp. 22–26. DOI: 10.11648/j.ajae.20170402.12.
7. Knoepfel H. (1970) *Pulsed High Magnetic Fields: Physical Effects and Generation Methods Concerning Pulsed Fields Up to the Megaersted Level*. London: North-Holland.
8. But D.A., Alievskiy B.L., Mizyurin S.R., Vasyukevich P.V. (1991) *Nakopiteli energii* [Energy accumulators]. Moscow: Energoatomizdat.
9. Sinyaev S.V. (1998) Metod rascheta silovykh i elektromagnitnykh parametrov slozhnykh sistem provodnikov v zadachakh elektro-dinamiki [Method for calculating the power and electromagnetic parameters of complex systems of conductors in problems of electrodynamics]. *Tezisy dokladov 3-go Sibirskogo kongressa po prikladnoy i industrialnoy matematike*. Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN. 3. pp. 40–41.

Received: December 21, 2020

УДК 531.352

DOI 10.17223/19988621/71/4

М.А. Бубенчиков, А.М. Бубенчиков, Д.В. Мамонтов

**ВРАЩЕНИЯ И ВИБРАЦИИ ФУЛЛЕРЕНОВ
В МОЛЕКУЛЯРНОМ КОМПЛЕКСЕ $C_{20}@C_{80}$ ***

В рамках классической молекулярной динамики дается описание вращения фуллеренов в молекулярном комплексе $C_{20}@C_{80}$. Рассмотрено два случая состояния алмазного комплекса: закреплена внешняя оболочка и случай, когда комплекс является свободным. Во всех случаях рассчитана частота вращения фуллеренов. Из представленного описания следует, что комплекс $C_{20}@C_{80}$ можно рассматривать как молекулярный маятник, у которого роль гравитационных сил выполняют силы Ван-дер-Ваальса, действующие между узлами двух кристаллических оболочек. Первоначально C_{20} совершает угловые колебания вокруг медленно поворачивающейся оси, затем происходит переориентация фуллерена, т.е. существенное изменение в пространстве положения оси колебаний. При этом из-за потенциальности атом-атомного взаимодействия повороты и вибрации в комплексе происходят без диссипации энергии. Получены также уравнения движения центров масс фуллеренов, определяющие работу комплекса как молекулярного осциллятора.

Ключевые слова: наноматериалы, математическое моделирование, молекулярная динамика, фуллерены, угловые колебания.

Большой интерес вызывает вращение C_{60} в пластической фазе фуллерена, поскольку имеющиеся в этом случае степени свободы определяют способность материала аккумулировать энергию. Попытки создать фуллерит на основе C_{20} привели к тому, что возникают ковалентные связи между фуллеренами и в результате получается 3D-структура связанных атомов углерода. Фуллерены в такой системе не являются свободными и не вращаются. Наряду с этим представляет интерес поведение некрупных молекул, заключенных внутри поверхностного кристалла, например внутри относительно крупного фуллерена.

Авторы [1] выполнили анализ поступательного и вращательного движения молекулы метана внутри фуллерена, имеющего отверстие, через которое был введен CH_4 внутрь кристаллической оболочки. Авторы [2] представили данные о движении и вращении молекул H_2 , заключенных в C_{60} . В работе [3] демонстрируется механизм, основанный на вращении треугольного кластера Sc_3N в икосаэдрической клетке фуллерена C_{80} , а в [4] на основе экспериментальных данных о вращающихся фуллеренах в пластической фазе фуллерита изучаются низкоэнергетические электронные состояния вращающегося C_{60} . Авторы [5] продемонстрировали, что димеры фуллерена C_{70} свободно вращаются вокруг короткой оси молекулы, а в [6] с использованием электронной микроскопии высокого разрешения изучается вращение фуллеренов в стручковых структурах, в которых роль оболочки выполняет открытая нанотрубка. Работа [7] рассматривает устойчивость комплекса $C_{20}@C_{80}$ и вращение C_{20} внутри него на основе модели сильных взаимодействий электронов. Наряду с этим в [8] исследуется атомная и электронная

* Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10049).

структура фуллерена C_{28} в свободном состоянии, а также случай, когда этот фуллерен инкапсулирован в замкнутую капсулу C_{450} . Показано, что C_{28} в поле удерживающего потенциала трубки имеет квантованное вращательное движение около оси симметрии капсулы. Авторы [9] рассмотрели вращение фуллереновых ионов, а в [10] продемонстрировали, как за счет взаимодействия лазерных импульсов приводятся во вращение молекулы C_{70} , обладающие собственной поляризацией и находящиеся в растворах фуллеренов. В работе [11] проанализировано влияние размера функциональной группы на подвижность электронов в фуллереновых клетках, находящихся в пленках их производных, а в [12] проведены расчеты основного спектра колебательно-вращательных движений в ГЦК-фуллереновых решетках. В статье [13] предложена теория трансляционно-вращательной связи с позиции макроскопического гамильтониана и свободной энергии Ландау. Необходимо отметить, что C_{20} далеко не всегда свободно вращается в углеродных структурах. Целая серия современных работ посвящена воздействию излучения на фуллерены. При этом поглощённая энергия излучения приводит к образованию вакансий либо интенсификации вращательного движения фуллеренов. По данным [14] для нанотрубок размером 0.85 и 1.2 нм энергия образования вакансий соответственно составила 5.98 и 7.44 эВ, а для фуллеренов C_{20} , C_{30} , C_{60} , C_{80} , C_{180} , C_{240} и C_{450} – 2.91; 2.92; 9.2; 5.95; 8.09; 8.53 и 7.41 эВ. Авторы [15] исследовали ионизацию икосаэдрических фуллеренов C_{20} , C_{80} и C_{180} в интенсивном лазерном импульсе с использованием теории S-матрицы. При этом поглощение излучения также способствовало увеличению скорости вращения фуллеренов. Интересными являются работы по изучению гибридных структур и комплексов, содержащих фуллерены. В [16] приводятся расчеты для модельных нанотрубок, связанных с C_{84} , C_{96} и C_{80} . Ковалентные связи делают рассматриваемые гибридные структуры связанными в одно целое. В [17] показано, что нейтронное рассеяние дает прямое доказательство свободного вращения фуллеренов и либрации кубанов в высокотемпературной фазе сокристалла фуллерен – кубан (C_{60} , C_8H_8). Обнаружено [18], что инкапсулированные фуллерены могут свободно вращаться в пространстве трубки (10,10) при комнатной температуре. Кроме того, их расчеты показывают, что в отличие от металлического пипода $C_{60}@ (10,10)$ с несколькими несущими, пипод $C_{60}@ (17,0)$ является полупроводником. В результате получены так называемые фуллереновые стручки. Авторы [19] исследовали структуру вращательного низкоэнергетического спектра собственных значений и собственную функцию эндоэдральных фуллереновых комплексов C_{60} . Рассмотренные системы: $Li+C_{60}$, $Na+C_{60}$, $CoCo+C_{60}$ и $LiLi+C_{60}$. В [20] проведены исследования динамики вращения C_{60} в многослойных фуллереновых пленках, выращенных на поверхности $WO_2/W(110)$. В заключение вводной части следует отметить, что экспериментальных фактов, фиксирующих вращение эндоэдральных молекул, достаточно много. Имеются теоретические работы, опирающиеся на сильные взаимодействия электронов внутри углеродных комплексов. Необходимо отметить, что такие взаимодействия скорее являются препятствием во вращении эндоэдральных молекул, нежели причиной, вызывающей эти вращения. В то же время, если принять, что причиной возникновения вращения являются слабые вандерваальсовские взаимодействия, то повороты эндоэдральных молекул можно рассчитать, непосредственно исходя из атом-атомного взаимодействия узлов, представляющих молекулы, принадлежащие различным фуллеренам. Целью работы является применение классической механики к описанию динамического состояния алмазного комплекса $C_{20}@C_{80}$ и расчетное доказательство существования угловых колебаний эндоэдрального фуллерена с последующей переориентацией оси колебаний в пространстве.

Общие замечания по моделированию в рамках классического подхода

Из-за независимости колебаний и вращений рассматриваемая изолированная система $C_{20}@C_{80}$ может иметь две температуры: колебательную (колебания центров масс фрагментов) и вращательную, определяемую угловыми колебаниями фуллереновых оболочек относительно некоторой неподвижной системы отсчета. Естественно, что существует еще одна температура, возникающая за счет колебаний атомов углерода. Однако, как показывают расчеты, эта температура быстро выравнивается с колебательной температурой молекул. В дальнейшем будем опираться на модель атом-атомных взаимодействий, широко применяемую в молекулярной динамике.

Определение 1. *Перекрестными взаимодействиями будем называть воздействия, возникающие между атомами углерода, принадлежащими различным оболочкам рассматриваемого комплекса.*

В то же время, при определенных условиях, угловые колебания могут переходить в регулярные вращения, и тогда они не будут иметь никакого отношения к температуре, которая определяется лишь колебаниями, включая угловые. Как угловые колебания, так и вращения инициируются суммарным моментом сил взаимодействия между атомами углерода, принадлежащими различным фрагментам компонента $C_{20}@C_{80}$, т.е. моментом сил перекрестных взаимодействий.

Определение 2. *Вибрациями в фуллереновом комплексе $C_{20}@C_{80}$ назовем относительные поступательные перемещения фуллеренов, т.е. смещения их центров масс.*

Вообще поступательные движения и вращения образуют две алгебраические континуальные группы. Это означает, что в рамках замкнутого описания каждый вид движения может быть реализован независимо. В настоящей работе будут выписаны уравнения для вибраций фуллеренов, т.е. уравнения, определяющие движения фуллеренов как осцилляторов. Уравнения вращательного движения получены в работе [12]

На рис. 1 показана статическая модель $C_{20}@C_{80}$ и динамическая модель рассматриваемого комплекса в случае реализации вращений фуллеренов.

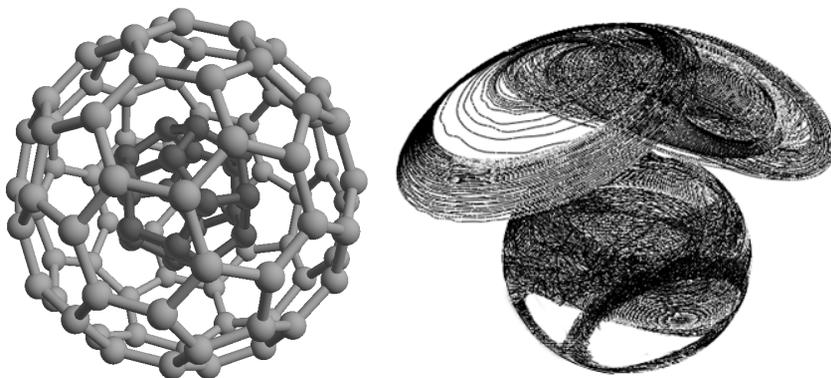


Рис. 1. Статическая конструкция вложенных фуллеренов (слева) и динамическая модель комплекса (справа)

Fig. 1. Static design of nested fullerenes (on the left) and a dynamic model of the complex (on the right)

Для описания вращательного движения фуллеренов удобно применить подход Эйлера, известный в классической механике как способ, определяющий вращение объектов вокруг их собственного центра масс.

В рамках классического подхода основной для описания вращательного движения фуллеренов выступает теорема о моменте количества движения для относительного движения около центра масс.

Математическая модель и метод её реализации

Проекции сил, действующих между фуллеренами, определяются в рамках модели атом-атомного взаимодействия. Согласно этой модели, результирующее взаимодействие между двумя молекулами есть сумма всех возможных взаимодействий между отдельными атомами. Из-за отсутствия сферической симметрии и в общем случае нецентрированного расположения фуллеренов в комплексе $C_{20}@C_{80}$ эта модель дает ненулевой момент сил, что и определяет вращения фуллеренов. Поэтапное применение используемого способа описания вращений и вибрации приводит к пониманию того, что для реализации подхода Эйлера необходимы лишь перекрестные взаимодействия, которые не требуют использования связеориентированных потенциалов типа REBO или Tersoff. Опыт уже проведенных расчетов показал, что в этом случае удобен симметричный потенциал Леннарда – Джонса [21, 22].

Динамические уравнения Эйлера изначально представлены в проекциях на оси подвижной системы отсчета, связанной с отдельно взятым фуллереном. В то же время результирующее движение удобно представлять в абсолютной, неподвижной системе координат. В связи с этим, силовые характеристики: проекции сил межатомного взаимодействия и их моменты на первом этапе расчетов мы находим в абсолютном базисе. Далее с помощью матрицы поворота, имеющей компоненты в виде комбинаций тригонометрических функций от углов Эйлера, осуществляется переход к проекциям моментов сил в подвижном базисе. После чего эти проекции включаются в динамические уравнения Эйлера. Последние уравнения есть обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка относительно угловых скоростей вращающихся фуллеренов. Система этих уравнений будет замкнута, если включить в рассмотрение кинематические соотношения Эйлера, связывающие производные от углов Эйлера с проекциями угловых скоростей и тригонометрическими функциями углов поворота. Дополняя все эти уравнения начальными данными, получим задачу Коши для определения углов Эйлера как функций времени.

Из общих положений классической механики следует, что в случае движения молекулы C_{20} при закрепленном C_{80} справедлив интеграл энергии:

$$\frac{M\mathbf{v}^2}{2} + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \sum_{j=1}^{80} \sum_{k=1}^{20} U(r_{j,k}) = 0. \quad (1)$$

Здесь A, B, C – главные центральные моменты инерции вращающегося фуллерена; \mathbf{v} – вектор линейной скорости молекулы C_{20} , которая находится по теореме движения центра масс. Точность расчетов можно контролировать, определяя величину баланса энергии по соотношению (1).

Если внешняя оболочка закреплена и в начальный момент времени центр масс C_{20} смещен относительно центра C_{80} , то наряду с вращением внутренней оболочки в комплексе будет наблюдаться и вибрация.

Теорема 1. Для случая закрепленной внешней оболочки в молекулярном комплексе $C_{20}@C_{80}$ центр масс C_{20} движется как материальная точка, имеющая массу $20m_C$ под действием силы равной сумме всех перекрестных атом-атомных воздействий в этом комплексе.

Запись этой теоремы будет выглядеть следующим образом:

$$20m_C \frac{dv}{dt} = - \sum_{j=1}^{80} \sum_{i=1}^{20} \text{grad} U(r_{ij}) \quad (2)$$

Здесь m_C – масса атома углерода; v – скорость центра масс C_{20} ; $U(r_{ij})$ – потенциал перекрестных воздействий; grad – оператор градиента.

Таким образом, для определения вибраций C_{20} необходимо решить любым стандартным методом задачу Коши для уравнения (2). Авторы решают её с использованием технологии Рунге – Кутты при закреплённом C_{80} . Для определения вращений служит система обыкновенных дифференциальных уравнений в виде динамических и кинематических соотношений Эйлера. Все уравнения интегрировались численно с использованием схемы Рунге – Кутты высокого порядка точности. Постоянный шаг интегрирования составлял величину 10^{-8} нс. Точность расчетов оценивалась по результатам решения простейших задач о вращении фуллеренов, а также по выполнению закона сохранения полной механической энергии в системе.

Результаты расчетов вращения C_{20} при закреплённом C_{80}

Расчетами, выполненными по представленной здесь математической модели, установлен зонный характер вращения оболочек рассматриваемого комплекса. В рамках каждой отдельной зоны вращения имеют вид угловых колебаний. После завершения колебаний в зоне происходит существенное изменение направление оси колебаний. На рис. 2 показаны два ракурса траекторий одного из атомов C_{20} . Как видно из рисунка, мгновенная ось вращения продолжительное время находится в определенных зонах.

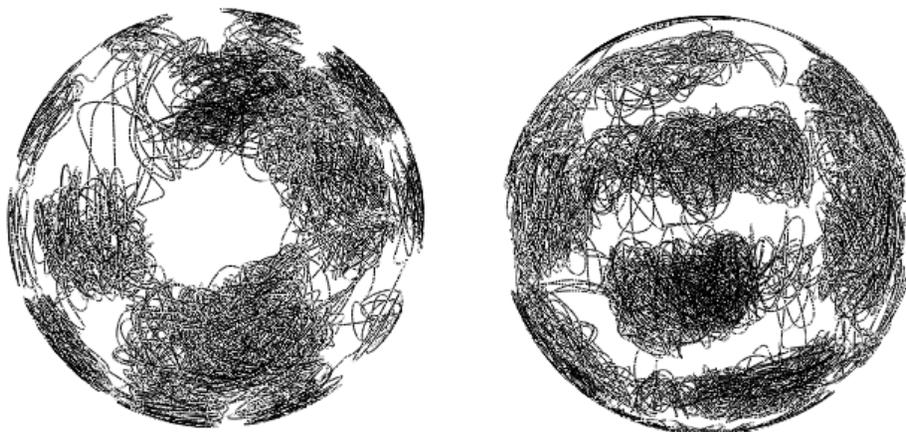


Рис. 2. Два ракурса траектории одного из атомов углерода, принадлежащего C_{20}
Fig. 2. Two views of a trajectory of one carbon atom among others belonging to C_{20}

В такой ситуации выбранный узел вращающегося фуллера закрашивает все новые и новые участки сферы. В случае отсутствия начального смещения центров масс атомы углерода всегда будут двигаться по поверхности стационарной сферы. Необходимо отметить, что у полюсов этой визуализирующей сферы явно фиксируются свободные зоны.

На рис. 3 показана частота вращения эндоэдрального фуллера в этом случае. Средняя величина частоты равна $2 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$. Необходимо отметить, что представленная частота измеряется в радианах/секунду. Круговая частота получается делением рассматриваемой величины на 2π . В любом случае она будет немного больше частоты вращения C_{60} в пластической фазе фуллерита и будет приближаться к частоте колебаний узлов кристаллической решетки в углеродной структуре. Рассматриваемый луковый комплекс является идеальным маятником, состоящим из двух вложенных друг в друга поверхностных структур. В этом маятнике вместо сил гравитации на каждый узел отдельно взятого поверхностного кристалла действует сила равная сумме всех воздействий Ван-дер-Ваальса со стороны узлов другого поверхностного кристалла и наоборот. Если нет обмена энергией с внешней средой, то энергия колебаний остается постоянной и равной начальной потенциальной энергии межмолекулярных перекрестных воздействий. На рис. 4 показана относительная погрешность расчетов, найденная из условия сохранения полной энергии рассматриваемого комплекса. При величине постоянного шага по времени равной 10^{-6} нс максимальные значения погрешности составляют 0.2 %.

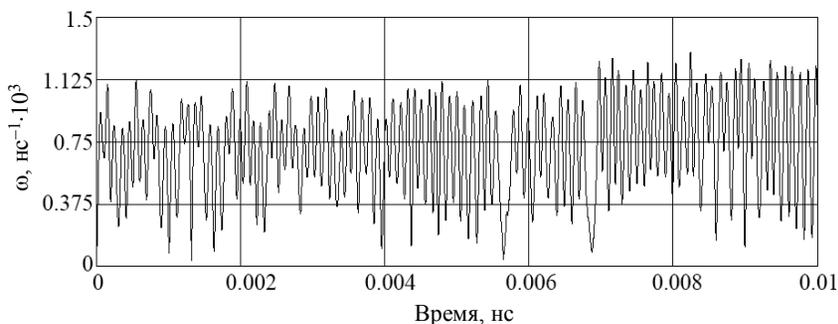


Рис. 3. Угловая частота вращения C_{20} при закреплённом C_{80}
Fig. 3. Angular frequency of rotation of C_{20} s with fixed C_{80}

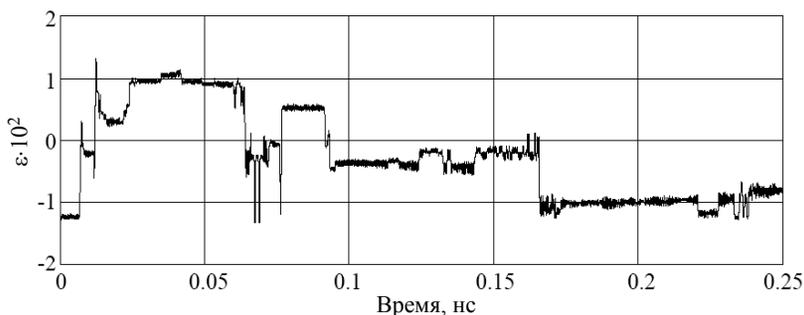


Рис. 4. Относительная погрешность расчетов в случае вращения C_{20} при закреплённом C_{80}
Fig. 4. Relative calculation error in a case of rotating C_{20} with fixed C_{80}

Свободный комплекс $C_{20}@C_{80}$

Если рассматриваемый комплекс удален от каких-либо фрагментов внешней молекулярной структуры, т.е. отсутствуют сильные электронные связи с внешней средой, тогда C_{80} можно считать молекулой, свободной относительно внешних воздействий. В каждый момент времени на C_{80} будут действовать крутящие моменты лишь со стороны C_{20} , а на внутренний фуллерен – со стороны C_{80} .

Считаем, что в начальный момент времени алмазный комплекс покоится. В этот же момент времени освобождаем один или оба фуллерена, предоставляя их действию лишь сил Ван-дер-Ваальса. Тогда по теореме о движении центра масс всей системы (комплекса) положение этого центра будет оставаться неизменным во все последующее время движения. Начало неподвижной системы отсчета возьмем в общем для молекулярного комплекса в центре масс. Поскольку внешние воздействия на комплекс отсутствуют, центр масс не будет менять своего положения во время движения. Систему координат, связанную с этим общим центром и не участвующую ни в каких вращениях, обозначим через $Oxuz$. Она будет являться неподвижной или абсолютной системой отсчета.

Из-за парности силовых воздействий крутящие моменты, действующие на каждый из этих фуллеренов, будут равны по величине, но иметь противоположный знак. Так что если мгновенное вращение, например C_{20} , реализуется в каком-либо определенном направлении, то C_{80} будет вращаться в противоположном направлении.

В задаче о вращении $C_{20}@C_{80}$ при отсутствии внешних сил мы имеем две подвижные системы отсчета $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $O_2\xi_2\eta_2\zeta_2$ (O_1, O_2 – центры масс C_{20} и C_{80} соответственно).

Для каждого из рассматриваемых фуллеренов справедлива теорема о моменте количества движения относительно движения около их центров масс:

$$\frac{d\mathbf{K}^{(1)}}{dt} = \mathbf{L}^{(1)}, \quad \frac{d\mathbf{K}^{(2)}}{dt} = \mathbf{L}^{(2)}. \quad (3)$$

Верхний индекс (1) относится к C_{20} , а (2) – к C_{80} . Складывая соотношения (3), получим

$$\frac{d\mathbf{K}^{(1)}}{dt} + \frac{d\mathbf{K}^{(2)}}{dt} = \mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)}. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{L}^{(1)}$ и $\mathbf{L}^{(2)}$ – моменты сил, обеспечивающих перекрёстное атом – атомное воздействие одного фуллерена на другой:

$$\mathbf{L}^{(1)} = \sum_{i=1}^{20} \mathbf{r}_{i1} \times \left(\sum_{j=1}^{80} \mathbf{F}_{ij} \right), \quad \mathbf{L}^{(2)} = - \sum_{j=1}^{80} \mathbf{r}_{j2} \times \left(\sum_{i=1}^{20} \mathbf{F}_{ij} \right), \quad (5)$$

где \mathbf{r}_{i1} , \mathbf{r}_{j2} – радиус-векторы i -го и j -го атомов углерода соответственно в молекулах C_{20} и C_{80} , отложенные от их центров масс. В круглых скобках соотношений (5) стоят равнодействующие межатомных сил, приложенных в i -й и j -й точках соответственно, которые определяются следующим образом:

$$\mathbf{F}_{ij} = - \text{grad} U(r_{ij}). \quad (6)$$

Здесь $U(r_{ij})$ – потенциал перекрестных атом-атомных взаимодействий, который мы для определенности выбрали в форме Леннарда – Джонса. Из-за парности локальных сил, а также вследствие того, что величина отдельно взятого момента не

зависит от точки приложения силы на линии её действия, получаем

$$\mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)} \equiv 0. \quad (7)$$

Тогда, интегрируя (4), с учетом (7), а также с учётом того, что в начальный момент времени система из двух фуллеренов покоилась, получим

$$\mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} = 0. \quad (8)$$

В результате расчетов, проведенных с использованием динамических уравнений Эйлера, мы можем получить векторы моментов количеств движения вращающихся фуллеренов:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{pmatrix} A_1 p_1 \\ B_1 q_1 \\ C_1 r_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{pmatrix} A_2 p_2 \\ B_2 q_2 \\ C_2 r_2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Причем координаты приведенных вектор-столбцов берутся в базисах, связанных с C_{20} и C_{80} соответственно, т.е. в подвижных осях $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $O_2\xi_2\eta_2\zeta_2$. Соотношение (8) связывает проекции угловых скоростей двух фуллеренов в свободном комплексе. Однако, чтобы найти угловую скорость какого-либо конкретного фуллерена, нужно обязательно решить задачу о вращении выбранного фуллерена в поле сил другого фуллерена и для этого проинтегрировать динамические уравнения Эйлера. Правые части этих уравнений рассчитываются в подвижных осях. Пусть для подсчета этих частей используется матрица A . Для обратного перехода, который нам нужно совершить дважды, потребуется обратная матрица $B = A^{-1}$. Компоненты обратной матрицы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta, \\ b_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta, \\ b_{13} &= \sin \psi \sin \theta, \\ b_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta, \\ b_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta, \\ b_{23} &= -\cos \psi \sin \theta, \\ b_{31} &= \sin \varphi \sin \theta, \\ b_{32} &= \cos \varphi \sin \theta, \\ b_{33} &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что определители матриц B и A равны единице. Для того чтобы получить компоненты векторов $\mathbf{K}^{(1)}$ и $\mathbf{K}^{(2)}$ в неподвижной системе отсчета, необходимо каждый из этих векторов умножить справа на соответствующую обратную матрицу, т.е. на матрицу $B^{(1)}$ либо $B^{(2)}$. Тогда соотношение (8) запишется следующим образом:

$$\mathbf{K}^{(1)}B^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)}B^{(2)} = 0. \quad (11)$$

Полученное векторное соотношение эквивалентно трем скалярным:

$$b_{11}^{(2)} A_2 p_2 + b_{12}^{(2)} B_2 q_2 + b_{13}^{(2)} C_2 r_2 = -(b_{11}^{(1)} A_1 p_1 + b_{12}^{(1)} B_1 q_1 + b_{13}^{(1)} C_1 r_1); \quad (12)$$

$$b_{21}^{(2)} A_2 p_2 + b_{22}^{(2)} B_2 q_2 + b_{23}^{(2)} C_2 r_2 = -(b_{21}^{(1)} A_1 p_1 + b_{22}^{(1)} B_1 q_1 + b_{23}^{(1)} C_1 r_1); \quad (13)$$

$$b_{31}^{(2)} A_2 p_2 + b_{32}^{(2)} B_2 q_2 + b_{33}^{(2)} C_2 r_2 = -(b_{31}^{(1)} A_1 p_1 + b_{32}^{(1)} B_1 q_1 + b_{33}^{(1)} C_1 r_1). \quad (14)$$

Формулы (12) – (14) можно использовать для проверки построенного численного решения, а можно, изменив процедуру расчетов из этих соотношений, найти проекции угловых скоростей на оси, например C_{80} , считая проекции угловых скоростей C_{20} найденными из динамических уравнений Эйлера.

Теорема 2. Для случая свободного молекулярного комплекса $C_{20}@C_{80}$ центры масс фуллеренов перемещаются как материальные точки, имеющие соответственно массы $20m_C$ и $80m_C$ под действием силы, имеющей величину, определяемую суммой всех перекрестных воздействий.

Два уравнения этой теоремы будут иметь вид

$$20m_C \frac{dv_1}{dt} = - \sum_{j=1}^{80} \sum_{i=1}^{20} \text{grad} U(r_{ij}); \quad (15)$$

$$80m_C \frac{dv_2}{dt} = - \sum_{j=1}^{80} \sum_{i=1}^{20} \text{grad} U(r_{ji}). \quad (16)$$

Здесь v_1, v_2 – скорости центров масс фуллеренов. Эти уравнения определяют работу комплекса как осциллятора, однако они не являются линейно независимыми, поскольку в свободном комплексе фуллерены должны двигаться так, чтобы центр масс всего комплекса оставался на месте. Положения центров масс молекул, составляющих комплекс, будут связаны условиями

$$0.2r_1 + 0.8r_2 = 0. \quad (17)$$

Аналогичное соотношение справедливо для скоростей центров фуллеренов.

$$0.2v_1 + 0.8v_2 = 0. \quad (18)$$

Результаты расчетов свободного комплекса $C_{20}@C_{80}$

На рис. 5 показаны два ракурса траекторий выбранных атомов углерода, принадлежащих C_{20} и C_{80} , в случае свободного молекулярного комплекса. Как видно из рис. 5, в рассматриваемом случае внутренний фуллерен также участвует в угловых колебаниях с последующей переориентацией оси колебаний.

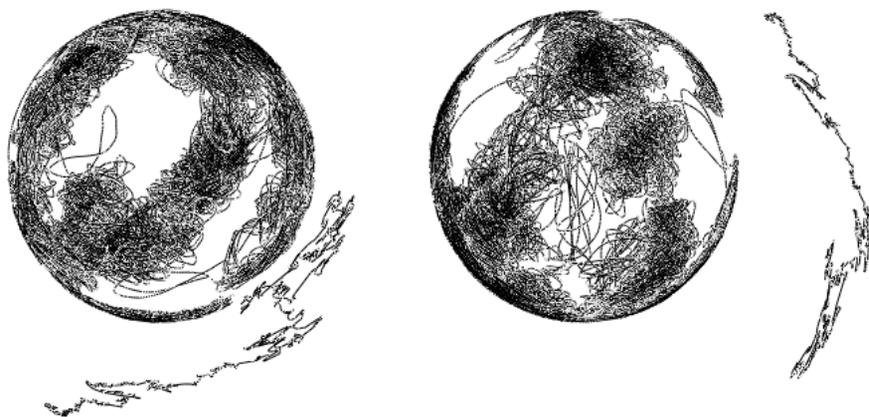


Рис. 5. Динамическое состояние свободного $C_{20}@C_{80}$ комплекса
Fig. 5. Dynamic state of the free nanocomplex $C_{20}@C_{80}$

Внешний фуллерен участвует в таких же движениях, однако происходят они в направлении, обратном движению C_{20} , и с угловой скоростью примерно в 16 раз меньшей, чем у эндодрального фуллерена. На рис. 6 приведена угловая частота вращения C_{20} .

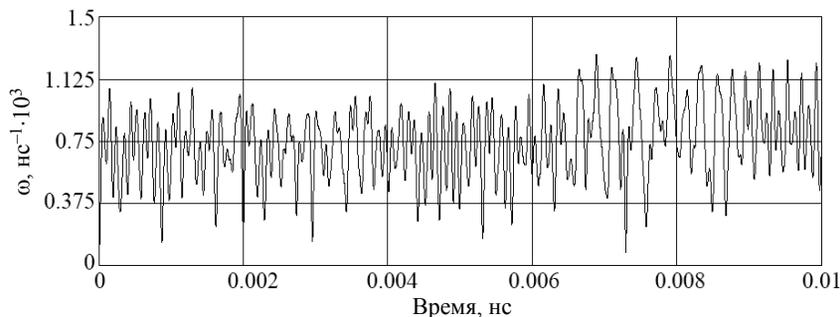


Рис. 6. Угловая частота вращения C_{20} в свободном комплексе
Fig. 6. Angular frequency of rotation of C_{20} in the free complex

Внутренний фуллерен по-прежнему вращается с частотой порядка 10^{12} с^{-1} . При этом среднее значение этой частоты немного меньше вращающегося C_{20} при закрепленном C_{80} . Как показывает рис. 7 внешняя оболочка в свободном комплексе вращается на порядок медленнее, т.е. имеет частоту около 10^{11} с^{-1} .

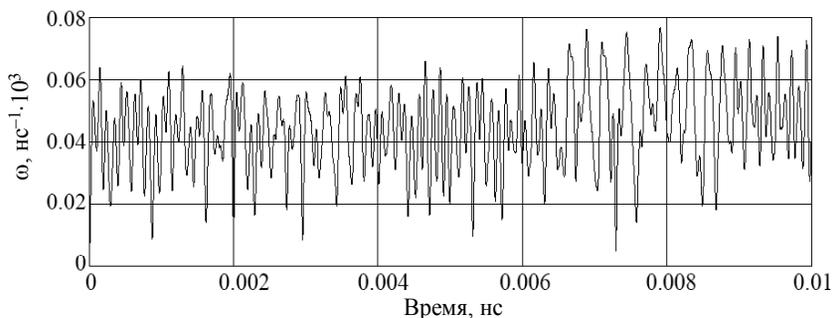


Рис. 7. Угловая частота вращения C_{80} в свободном комплексе
Fig. 7. Angular frequency of rotation of C_{80} in the free nanocomplex

Влияние электромагнитного поля на движение фуллеренов

Если один из фуллеренов в узле своей кристаллической структуры имеет положительный заряд, некомпенсированный валентными электронами, то такой фуллерен будет реагировать на внешние электромагнитные поля. С одной стороны, электрическое поле непосредственно воздействует на заряженный узел, с другой – вращающийся узел – это контур с током, т.е. элементарный магнит, который реагирует на магнитную составляющую поля. Вводя в рассмотрение заряженную точку на фуллерене, мы рассмотрели случай вращения C_{20} в закрепленном комплексе $C_{20}@C_{80}$ (рис. 8, а) при действии на него периодического электрического поля; постоянное магнитное поле с величиной вектора магнитной индукции

$B_x = 0$ Тл, $B_y = 0$, $B_z = 1$; амплитуда плоского электрического поля составляла $E_0 = 10$ кВ/м, частота поля $f = 1000$ ГГц, а проекции напряженности $E_x = E_0 \cos(f)$, $E_y = E_0 \sin(f)$, $E_z = 0$.

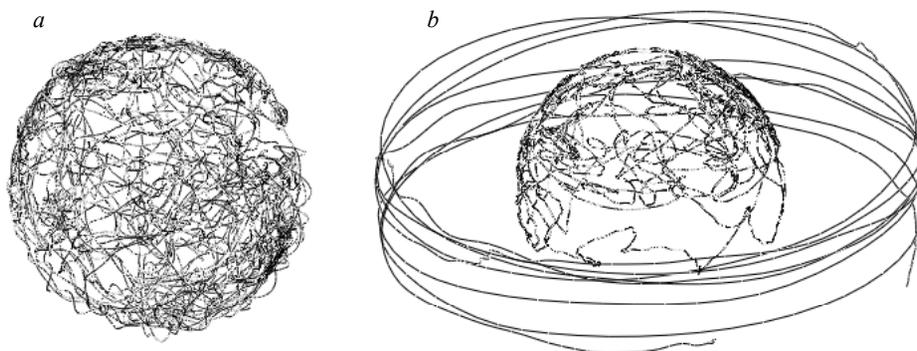


Рис. 8. Динамический портрет несвободного (a) и свободного (b) фуллеренового комплекса
Fig. 8. Dynamic image of the (a) fixed and (b) free fullerene complex

Как видно из рисунка, в этом случае изменился характер колебаний фуллере-на. Колебания получились однородными в отличие от зонного режима, характерного для незаряженных фуллеренов. В случае свободного наноконплекса, в кото-ром заряженным является экзоэдральный фуллерен, периодическое электрическое поле приводит к регулярному вращению C_{80} (рис. 8, b).

Заключение

Основные результаты работы заключаются в нахождении данного характера вращения оболочек. Показано, что в рамках каждой отдельной зоны повороты оболочек имеют характер угловых колебаний. Завершение колебаний в рамках выделенной зоны реализуется в результате поворота в пространстве оси угловых колебаний. Определены средние значения частот колебаний в случае свободного и закрепленного комплекса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Keith E., Whitener Jr. Theoretical Studies of CH₄ Inside an Open-Cage Fullerene: Translation–Rotation Coupling and Thermodynamic Effects // Journal Physical Chemistry. 2010. V. 114(45). P. 12075–12082. DOI: 10.1021/jp104601g.
2. Keith E., Whitener Jr., Cross R.J., Saunders M., Iwamatsu Sho-ichi, Murata S., Nagase S. Methane in open-cage [60] fullene // Journal of the American Chemical Society. 2009. V. 131(18). P. 6338–6339. DOI: 10.1021/ja901383r.
3. Huang T., Zhao J., Feng M., Dunsch L., et al. A multi-state single-molecule switch actuated by rotation of an encapsulated cluster within a fullerene cage // Chemical Physics Letters. 2012. V. 552(12). P. 1–12. DOI: 10.1016/j.cplett.2012.09.064.
4. Lima R.F., Brandao J., Marcio M., Moraes F. Effects of rotation in the energy spectrum of C₆₀. // The European Physics Journal D. 2014. DOI: 10.1140/epjd/e2014-40570-4.
5. Konarev D.V., Lyubovskaya R.N., Khasanov S.S. Transition from free rotation of C₇₀ molecules to static disorder in the molecular C₇₀ complex with covalently linked porphyrin dimers: {(FeIII TPP)₂O} × C₇₀ // Journal of Porphyrins and Phthalocyanines. 2010. V. 14(4). P. 293–297. DOI: 10.1142/S1088424610002112.

6. Warner J.H., Ito Y., Zaka M., Ge L., Akachi T., Okimoto H., Porfyrakis K., Watt A.A.R., Shinohara H., Briggs G.A.D. Rotating Fullerene Chains in Carbon Nanopeapods // *Nano Letters*. 2008. V. 8(8). P. 2328–2335. DOI: 10.1021/nl801149z.
7. Glukhova O.E., Zhanov A.I., Rezkov A.G. Rotation of the inner shell in a C20@C80 nanoparticle // *Physics of the Solid State*. 2005. V. 47(2). P. 390–396. DOI: 10.1134/1.1866425.
8. Glukhova O.E. Theoretical study of the structure of the C60@C450 nanoparticle and relative motion of the encapsulated C60 molecule // *Journal of Structural Chemistry*. 2007. V. 48. Suppl. 1. S. 141–146.
9. Dunn J.L., Hands I.D., Bates C.A. Pseudorotation in fullerene anions // *Journal of Molecular Structure*. 2006. V. 838(1–3). P. 60–65. DOI: 10.1016/j.molstruc.2006.12.066.
10. Yang S., Wey T., Scheurell K., Kemnitz E., Troyanov S.I. Chlorination-promoted skeletal-cage transformations of C88 fullerene by C2 losses and a C-C bond rotation // *Chemistry*. 2015. V. 21(43). P. 15138–15141. <https://doi.org/10.1002/chem.201501549>.
11. MacKenzie R.C.I., Frost J.M., Nelson J. A numerical study of mobility in thin films of fullerene derivatives // *Phys. Chem*. 2010. V. 132(6). DOI: 10.1063/1.3315872.
12. Herman R.M., Lewis J.C. Vibration–rotation–translation spectrum of molecular hydrogen in fullerite lattices around 80 K // *Physica B: Condensed Matter*. 2009. V. 404(8–11). P. 1581–1584. DOI: 10.1016/j.physb.2009.01.029.
13. Lynden-Bell R.M., Michael K.H. Translation-rotation coupling, phase transitions, and elastic phenomena in orientationally disordered crystals // *Reviews of Modern Physics*. 1994. V. 66(3). P. 721. DOI: 10.1103/RevModPhys.66.721.
14. Griadun V.I. Vacancies in nanotubes and fullerenes // *Proceeding of the 16th International Crimean Conference on Microwave and Telecommunication Technology*. 2006. DOI: 10.1109/CRMICO.2006.256150.
15. Jaron-Becker A., Becker A. and Faisal F.H.M. Saturated ionization of fullerenes in intense laser fields // *Phys. Rev. Letters*. 2006. V. 96(143006). DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.143006.
16. Stanina Z., Zhao X. Model narrow nanotubes related to C36, C32 and C20: Initial computational structural sampling // *Materials Science and Engineering B*. 2002. V. 96(2). P. 164–168. DOI: 10.1016/S0921-5107(02)00312-4.
17. Bousige C., Rols S., Cambedouzou J., Verberck B., Pekker S., Kovats E., Durko G., Jalsovsky I., Pellegrini E., Launois P. Lattice dynamics of a rotor-stator molecular crystals: Fullerene-cubane C60 C8H8 // *Phys. Rev. B*. 2010. V. 82(19). DOI: 10.1103/PhysRevB.82.195413.
18. Yang L., Chen J., Dong J. Stability of single-wall carbon nanotube tori // *Physica Status Solidi (b)*. 2004. V. 241(6). P. 1269–1273. DOI: 10.1002/pssb.200301998.
19. Ruiz A., Hernández-Rojas J., Bretón J., Llorente J.M. Low-temperature dynamics and spectroscopy in exohedral rare-gas C60 fullerene complexes // *J. Phys. Chem*. 2001. V. 114. DOI: 10.1063/1.1350918.
20. Bozhko S.I., Levchenko E.A., Semenov V.N., Bulatov M.F., Shvets I.V. Rotation dynamics of C₆₀ molecules in a monolayer fullerene film on the WO₂/W(110) surface near the rotational phase transition // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2015. V. 120(5). P. 831–837. DOI: 10.1134/S1063776115040032.
21. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Mamontov D.V. and Lun-Fu A.V. MD-simulation of fullerene rotations in molecular crystall fullerite // *Crystals*. 2019. V. 9(10).
22. Hosseini-Hashemi S., Sepahi-Boroujeni A., Sepahi-Boroujeni S. Analytical and molecular dynamics studies on the impact loading of single-layered graphene sheet by fullerene // *Applied Surface Science*. 2018. V. 437. P. 366–374.

Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Mamontov D.V. (2021) ROTATIONS AND VIBRATIONS OF FULLERENES IN THE MOLECULAR COMPLEX $C_{20}@C_{80}$. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 71. pp. 35–48

DOI 10.17223/19988621/71/4

Keywords: nanomaterials, mathematical modeling, molecular dynamics, fullerenes, angular vibrations.

The aim of this work is to apply classical mechanics to a description of the dynamic state of $C_{20}@C_{80}$ diamond complex. Endohedral rotations of fullerenes are of great interest due to the ability of the materials created on the basis of onion complexes to accumulate energy at rotational degrees of freedom. For such systems, a concept of temperature is not specified. In this paper, a closed description of the rotation of large molecules arranged in diamond shells is obtained in the framework of the classical approach. This description is used for $C_{20}@C_{80}$ diamond complex. Two different problems of molecular dynamics, distinguished by a fixing method for an outer shell of the considered bimolecular complex, are solved. In all the cases, the fullerene rotation frequency is calculated. Since a class of possible motions for a single carbon body (molecule) consists of rotations and translational displacements, the paper presents the equations determining each of these groups of motions. Dynamic equations for rotational motions of molecules are obtained employing the moment of momentum theorem for relative motions of the system near the fullerenes' centers of mass. These equations specify the operation of the complex as a molecular pendulum. The equations of motion of the fullerenes' centers of mass determine vibrations in the system, i.e. the operation of the complex as a molecular oscillator.

Financial support. The research is implemented at the expenses of the Russian Science Foundation (project No. 19-71-10049).

Mikhail A. BUBENCHIKOV (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: michael121@mail.ru

Aleksey M. BUBENCHIKOV (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bubenchikov_am@mail.ru

Dmitriy V. MAMONTOV (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: orevaore@mail.ru

REFERENCES

1. Whitener E.K. (2010) Theoretical studies of CH₄ inside an open-cage fullerene: translation–rotation coupling and thermodynamic effects. *The Journal of Physical Chemistry*. 114(45). pp. 2075–12082. DOI: 10.1021/jp104601g.
2. Whitener E.K., Cross R.J., Saunders M., Iwamatsu S-I., Murata S., Nagase S. (2009) Methane in open-cage [60] fullene. *Journal of the American Chemical Society*. 131(18). pp. 6338–6339. DOI: 10.1021/ja901383r.
3. Huang T., Zhao J., Feng M., Popov A.A., Yang S., Dunsch L., Petek H. (2012) A multi-state single-molecule switch actuated by rotation of an encapsulated cluster within a fullerene cage. *Chemical Physics Letters*. 552(12). pp. 1–12. DOI: 10.1016/j.cplett.2012.09.064.
4. Lima R.F., Brandao J., Marcio M., Moraes F. (2014) Effects of rotation in the energy spectrum of C₆₀. *The European Physics Journal D*. 68(94). DOI: 10.1140/epjd/e2014-40570-4.
5. Konarev D.V., Lyubovskaya R.N., Khasanov S.S. (2010) Transition from free rotation of C₇₀ molecules to static disorder in the molecular C₇₀ complex with covalently linked porphyrin dimers: {(FeIII TPP)₂O}×C₇₀. *Journal of Porphyrins and Phthalocyanines*. 14(4). pp. 293–297. DOI: 10.1142/S1088424610002112.
6. Warner J.H., Ito Y., Zaka M., Ge L., Akachi T., Okimoto H., Porfyakis K., Watt A.A.R., Shinohara H., Briggs G.A.D. (2008) Rotating fullerene chains in carbon nanopeapods. *Nano Letters*. 8(8). pp. 2328–2335. DOI: 10.1021/nl801149z.

7. Glukhova O.E., Zhanov A.I., Rezkov A.G. (2005) Rotation of the inner shell in a C₂₀@C₈₀ nanoparticle. *Physics of the Solid State*. 47(2). pp. 390–396. DOI: 10.1134/1.1866425.
8. Glukhova O.E. (2007) Theoretical study of the structure of the C₆₀@C₄₅₀ nanoparticle and relative motion of the encapsulated C₆₀ molecule. *Journal of Structural Chemistry*. 48(1). pp. 141–146. DOI: 10.1007/s10947-007-0157-y.
9. Dunn J.L., Hands I.D., Bates C.A. (2006) Pseudorotation in fullerene anions. *Journal of Molecular Structure*. 838(1). pp. 60–65. DOI: 10.1016/j.molstruc.2006.12.066.
10. Yang S., Wey T., Scheurell K., Kemnitz E., Troyanov S.I. (2015) Chlorination-promoted skeletal-cage transformations of C₈₈ fullerene by C₂ losses and a C-C bond rotation. *Chemistry*. 21(43). pp. 15138–15141. DOI: 10.1002/chem.201501549.
11. MacKenzie R.C.I., Frost J.M., Nelson J. (2010) A numerical study of mobility in thin films of fullerene derivatives. *Journal of Chemical Physics*. 132(6). DOI: 10.1063/1.3315872.
12. Herman R.M., Lewis J.C. (2009) Vibration–rotation–translation spectrum of molecular hydrogen in fullerite lattices around 80 K. *Physica B: Condensed Matter*. 404(8–11). pp. 1581–1584. DOI: 10.1016/j.physb.2009.01.029.
13. Lynden-Bell R.M., Michael K.H. (1994) Translation-rotation coupling, phase transitions, and elastic phenomena in orientationally disordered crystals. *Reviews of Modern Physics*. 66(3). pp. 721. DOI: 10.1103/RevModPhys.66.721.
14. Griadun V.I. (2006) Vacancies in nanotubes and fullerenes. *Proceeding of the 16th International Crimean Conference on Microwave and Telecommunication Technology*. DOI: 10.1109/CRMICO.2006.256150.
15. Jaron-Becker A., Becker A., Faisal F.H.M. (2006) Saturated ionization of fullerenes in intense laser fields. *Physical Review Letters*. 96(14). Article 143006. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.143006.
16. Slanina Z., Zhao X. (2002) Model narrow nanotubes related to C₃₆, C₃₂ and C₂₀: Initial computational structural sampling. *Materials Science and Engineering B*. 96(2). pp. 164–168. DOI: 10.1016/S0921-5107(02)00312-4.
17. Bousige C., Rols S., Cambedouzou J., Verberck B., Pekker S., Kovats E., Durko G., Jalsovsky I., Pellegrini E., Launois P. (2010) Lattice dynamics of a rotor-stator molecular crystals: Fullerene-cubane C₆₀ C₈H₈. *Physical Review B*. 82(19). DOI: 10.1103/PhysRevB.82.195413.
18. Yang L., Chen J., Dong J. (2004) Stability of single-wall carbon nanotube tori. *Physica Status Solidi (b)*. 241(6). pp. 1269–1273. DOI: 10.1002/pssb.200301998.
19. Ruiz A., Hernández-Rojas J., Bretón J., Llorente J. M. (2001) Low-temperature dynamics and spectroscopy in exohedral rare-gas C₆₀ fullerene complexes. *The Journal of Physical Chemistry*. 114(12). DOI: 10.1063/1.1350918.
20. Bozhko S.I., Levchenko E.A., Semenov V.N., Bulatov F., Shvets I.V. (2015) Rotation dynamics of C₆₀ molecules in a monolayer fullerene film on the WO₂/W(110) surface near the rotational phase transition. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 120(5). pp. 831–837. DOI: 10.1134/S1063776115040032.
21. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Mamontov D.V., Lun-Fu A.V. (2019) MD-simulation of fullerene rotations in molecular crystall fullerite. *Crystals*. 9(10). Article 496. pp. 1–17. DOI: 10.3390/cryst9100496.
22. Hosseini-Hashemi S., Sepahi-Boroujeni A., Sepahi-Boroujeni S. (2018) Analytical and molecular dynamics studies on the impact loading of single-layered graphene sheet by fullerene. *Applied Surface Science*. 437. pp. 366–374. DOI: 10.1016/j.apsusc.2017.12.141.

Received: July 23, 2020

УДК 532.5

DOI 10.17223/19988621/71/5

Ю.Н. Григорьев, А.Г. Горобчук, И.В. Ершов**СХОДИМОСТЬ ЛОКАЛЬНО АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
К ТОЧНЫМ ЧИСЛЕННЫМ РЕШЕНИЯМ
УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНЕ¹**

Проведены численные расчеты течения в плоском сверхзвуковом пограничном слое колебательно возбужденного газа в локально автомодельной и полной постановках для ряда характерных условий внешнего потока и теплообмена на границе. Показано, что во всех рассмотренных случаях для локально автомодельных решений имеет место сходимость профилей гидродинамических переменных к некоторым предельным значениям для продольной координаты $x \geq 8-15$. Для всех режимов максимальное локальное отклонение предельных локально автомодельных профилей от профилей, рассчитанных в полной постановке, не превышает 5 %. Это служит обоснованием использования легко рассчитываемых локально автомодельных решений в задачах линейной теории устойчивости.

Ключевые слова: пограничный слой, устойчивость, колебательно возбужденный газ, локально автомодельные решения, конечно-разностные расчеты.

При решении задач устойчивости пограничных слоев необходимо знание профилей гидродинамических параметров базового стационарного течения. В сложных случаях требуется одновременно учесть многие процессы реального газа, такие, как релаксация внутренних степеней свободы молекул, диссоциация – рекомбинация, химические реакции, излучение и другие. Для расчетов подобных течений универсальным подходом является использование конечно-разностных методов для соответствующих уравнений погранслоного типа или полных уравнений, включающих все необходимые эффекты реального газа [1–3].

На практике чаще используются различные упрощенные подходы, позволяющие избежать сложных расчетов. В первую очередь, можно использовать известные автомодельные решения типа Блазиуса или Дородницына – Хоуарта [4], а дополнительные факторы – возбуждение колебательных степеней свободы, диссоциацию – рекомбинацию и т.п., учитывать только в уравнениях линейной теории устойчивости [5]. Лучшим приближением являются локально автомодельные решения [6–8], зависящие от координаты вдоль потока как от параметра. Однако в зависимости от постановки конкретной задачи – вида граничных условий, наличия химических реакций с тепловыделением и т.п., здесь имеются две альтернативы. Предпочтительным является случай, когда локально автомодельные решения с возрастанием координаты-параметра сходятся к некоторому предельному решению, которое и следует использовать в расчетах устойчивости. В другом случае такой предел отсутствует. При этом продольную координату, на которой рассчитывается локально автомодельное решение, определяют по числу Рей-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 20-01-00168).

нольдса, задаваемого в задаче устойчивости, что приводит к некоторой неопределенной ошибке.

В любом случае при использовании локально автомодельных решений необходимо предварительно определить характер их зависимости от продольной координаты, а также по возможности оценить их отклонение от численных решений, полученных в полной постановке, учитывающей все необходимые эффекты. В данной работе эта задача рассматривается применительно к пограничному слою колебательно возбужденного газа на пластине для ряда распространенных граничных условий.

Основные уравнения и локально автомодельные решения

Исходная система уравнений плоского пограничного слоя колебательно возбужденного газа в приближении Прандтля была получена из полных уравнений двухтемпературной релаксационной аэродинамики колебательно возбужденного газа [9] на основе стандартной процедуры [4]. В качестве характерных величин для обезразмеривания выбраны текущее расстояние $x = L$ вдоль пластины, параметры невозмущенного потока вне пограничного слоя – скорость U_∞ , плотность ρ_∞ и температура T_∞ , коэффициент сдвиговой вязкости μ_∞ , коэффициент теплопроводности, обусловленный переносом энергии в поступательных и вращательных степенях свободы $\lambda_\infty = (5c_{Vt}/2 + 6c_{Vr}/5)\mu_\infty(T)$, коэффициент теплопроводности, описывающий диффузионный перенос энергии колебательных квантов $\lambda_{v,\infty} = 6c_{Vv}\mu_\infty(T)/5$. Здесь коэффициенты теплопроводности выражены через коэффициент сдвиговой вязкости $\mu_\infty(T)$ с помощью полуэмпирических соотношений Эйкена [5], а коэффициенты теплоемкостей c_{Vt} , c_{Vr} и c_{Vv} предполагаются постоянными. Зависимость вязкости от температуры описывается формулой Сазерленда. Для обезразмеривания давления и времени используются комбинированные величины $\rho_\infty U_\infty^2$ и L/U_∞ соответственно.

В обезразмеренных таким образом переменных система имеет вид

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (2)$$

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = (\gamma - 1) \mu M^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\gamma}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\gamma_v \rho (T_v - T)}{\tau}; \quad (3)$$

$$\gamma_v \left(\rho u \frac{\partial T_v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T_v}{\partial y} \right) = \frac{\gamma \mu_1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial T_v}{\partial y} \right] - \frac{\gamma_v \rho (T_v - T)}{\tau}; \quad (4)$$

$$\gamma M^2 p = \rho T. \quad (5)$$

Здесь

$$\mu(T) = \frac{1,5 T^{3/2}}{T + 0,5}; \quad \mu_1 = \frac{\lambda_{v,\infty}}{\lambda_\infty} = \frac{20 \gamma_v}{33}; \quad \gamma_v = \frac{c_{Vv}}{c_{Vt} + c_{Vr}}; \quad c_{Vt} = \frac{3R}{2}; \quad c_{Vr} = c_{Vv} = R;$$

R – газовая постоянная.

В (1) – (5) использованы стандартные обозначения гидродинамических переменных [4, 9]. Коэффициент $\gamma = c_p/c_V = (c_{Vl} + c_{Vr} + R)/(c_{Vl} + c_{Vr})$ – показатель адиабаты; τ – характерное время релаксации возбужденной колебательной моды. Критерии $M = U_\infty/(\gamma RT_\infty)^{1/2}$ и $Pr = c_p\mu_\infty/\lambda_\infty$ – соответственно числа Маха и Прандтля невозмущенного потока.

Локально автомодельные уравнения выводятся из системы (1) – (5) аналогично автомодельным уравнениям для совершенного газа [4]. Они имеют вид

$$\left(\frac{\mu}{T}\varphi''(\zeta)\right)' + \varphi\varphi'' = 0; \quad (6)$$

$$\gamma\left(\frac{\mu}{T}T'\right)' + \frac{(\gamma-1)\mu}{4T}PrM^2(\varphi'')^2 + Pr\varphi T' + \frac{4Pr\xi\gamma_v}{\tau}(T_v - T) = 0; \quad (7)$$

$$\frac{20\gamma}{33}\left(\frac{\mu}{T}T'_v\right)' + Pr\varphi T'_v + \frac{4Pr\xi}{\tau}(T_v - T) = 0, \quad (8)$$

где штрихи означают дифференцирование по поперечной автомодельной координате $\zeta = \eta/(2\sqrt{\xi})$, величины

$$\xi = x, \quad \eta = \int_0^y \rho dy$$

представляют собой переменные Дородницына – Хоуарта [4], а вспомогательная функция

$$\varphi(\zeta) = 2 \int_0^\zeta u(\zeta) d\zeta.$$

Видно, что уравнение импульсов (6) имеет автомодельную форму, как в совершенном газе, а уравнения для температур (7), (8) из-за наличия в них релаксационных слагаемых приводятся к локально автомодельной форме, где координата $\xi \equiv x$ входит как параметр. Из уравнений (6) – (8) следует, что на передней кромке пластины при $\xi \equiv x = 0$, а также в термодинамическом равновесии при $T_v = T$ система переходит в автомодельные уравнения для совершенного газа [4].

Для расчета локально автомодельных решений вводились вспомогательные функции

$$f_1 = \varphi, \quad f_2 = \varphi', \quad f_3 = \varphi'', \quad f_4 = T, \quad f_5 = T', \quad f_6 = T_v, \quad f_7 = T'_v$$

и система уравнений (6) – (8) приводилась к нормальной форме, для которой методом «стрельбы» с помощью процедуры Рунге – Кутты четвертого порядка на интервале $[0, \delta]$ решалась двухточечная краевая задача. Точкой «прицеливания» служила середина интервала $\zeta_c = \delta/2$, где требовалось совпадение значений вычисляемых величин с точностью до 10^{-8} . Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\gamma = 1.4$, $\gamma_v = 0.4$, $\tau = 1$; $Pr = 0.75$, $M = 2.2$ и 4.5 ; $\delta = 8$, $\xi = 0-30$; $\Delta\zeta = 0.01$.

Для продольной скорости на границах использовались условия:

$$\varphi'(0) = 2u(0) = 0, \quad \varphi'(\delta) = 2u(\delta) = 2.$$

Для температур рассматривался ряд характерных условий в набегающем потоке и на поверхности пластины, соответствующих различным аэродинамическим ситуациям. Ниже приводятся данные для следующих режимов.

Режим течения 1 – «полет в невозмущенной атмосфере», теплоизолированная (адиабатическая) стенка, колебательная температура на стенке принимается равной температуре «пластинчатого термометра» [4], на условной верхней границе пограничного слоя статическая и колебательная температура

$$T'(0) = 0, \quad T_v(0) = 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} \text{Pr} M^2, \quad T(\delta) = T_v(\delta) = 1.$$

Режим течения 2 – «полет в невозмущенной атмосфере», охлажденная до температуры внешнего потока (изотермическая) стенка, колебательная температура на стенке принимается равной статической температуре, на условной верхней границе пограничного слоя статическая и колебательная температура

$$T(0) = T_v(0) = T_W = 1, \quad T(\delta) = T_v(\delta) = 1.$$

Режим течения 3 – «эксперимент в сверхзвуковой аэродинамической трубе», охлажденная до температуры внешнего потока (изотермическая) стенка, колебательная температура на стенке принимается равной статической температуре, на условной верхней границе пограничного слоя колебательная температура равна температуре торможения (статической температуре в форкамере трубы):

$$T(0) = T_v(0) = T_W = 1, \quad T(\delta) = 1, \quad T_v(\delta) = 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2.$$

Для режима 3 также рассматривалась адиабатическая стенка.

В качестве одного из вариантов граничного условия на колебательную температуру использовалось условие теплообмена при полной аккомодации колебательных квантов:

$$\frac{dT_v(0)}{d\zeta} = a\zeta(T_v(0) - T). \quad (9)$$

Здесь

$$a = \frac{5}{3\text{M}\mu} \sqrt{\frac{2\text{Re}_\infty T}{\pi\gamma}}, \quad \mu = \frac{1,5T^{3/2}}{T + 0,5}, \quad T = 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} \text{Pr} M^2,$$

$\text{Re}_\infty = \rho_\infty U_\infty L / \mu_\infty$ – число Рейнольдса.

На рис. 1, 2 и 3 представлены профили гидродинамических величин соответственно для режимов течения 1, 2 и 3. На рис. 4 показаны примеры профилей гидродинамических параметров для режима течения 1 с условием (9) на поверхности пластины.

Как видно из рис. 1 – 4 во всех случаях имеет место сходимость локально автоматических профилей продольной скорости и температур к их предельным значениям при $\xi \equiv x = 8 - 12$. При этом профили скорости, неавтоматическая которых связана только со слабой температурной зависимостью, сходились даже на меньших значениях продольной координаты.

Для оценки сходимости локально автоматических решений к пределу в зависимости от продольной координаты рассчитывались относительные отклонения профилей $\varepsilon_u(\zeta)$ и температур $\varepsilon_T(\zeta)$, $\varepsilon_{T_v}(\zeta)$ в равномерной норме. В качестве пре-

дельных профилей выбирались профили, полученные в сечении $\xi = 15$. Зависимости $\varepsilon_{u,T,T_v}(\zeta)$ вычислялись по формуле

$$\varepsilon_{u,T,T_v}(\zeta) = \left| 1 - \frac{[u, T, T_v](\zeta, \xi)}{[u, T, T_v](\zeta, \xi = 15)} \right| \cdot 100\%, \quad \xi = 8, 10, 12.$$

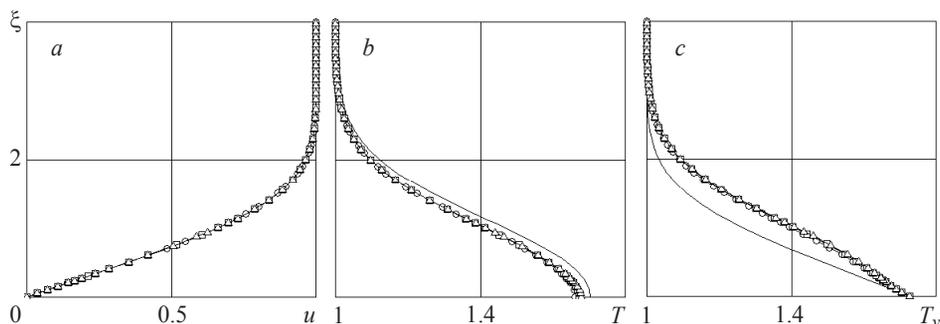


Рис. 1. Локально автомодельные профили продольной скорости u , статической T и колебательной T_v температур. Режим течения 1, $M = 2.2$. Сплошные линии – $\xi = 0$, сплошные линии с круглыми маркерами – $\xi = 5$, с квадратными маркерами – $\xi = 10$, с треугольными – $\xi = 15$

Fig. 1. Locally self-similar profiles of longitudinal velocity, u , and static and vibrational temperatures, T and T_v , respectively. Flow regime 1 is provided at $M = 2.2$. The solid lines indicate $\xi = 0$, the solid lines with circles – $\xi = 5$, the solid lines with squares – $\xi = 10$, and the solid lines with triangles – $\xi = 15$

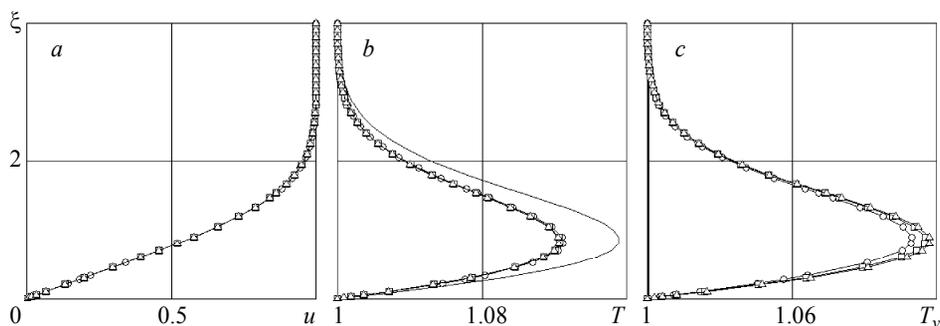


Рис. 2. Локально автомодельные профили продольной скорости u , статической T и колебательной T_v температур. Режим течения 2, $M = 2.2$. Сплошные линии – $\xi = 0$, сплошные линии с круглыми маркерами – $\xi = 5$, с квадратными маркерами – $\xi = 10$, с треугольными – $\xi = 15$

Fig. 2. Locally self-similar profiles of longitudinal velocity, u , and static and vibrational temperatures, T and T_v , respectively. Flow regime 2 is provided at $M = 2.2$. The solid lines indicate $\xi = 0$, the solid lines with circles – $\xi = 5$, the solid lines with squares – $\xi = 10$, and the solid lines with triangles – $\xi = 15$

Типичные характеристики сходимости профилей для различных режимов течения приведены на рис. 5 – 7. Из зависимостей, представленных на рис. 5, видно, что для режима течения 1 наибольшие относительные отклонения получаются на профилях скорости и статической температуры вблизи стенки и имеют соответст-

венно порядки $(0.4-1.3) \cdot 10^{-3}$ и $(2-5) \cdot 10^{-3}$. При этом наибольшие относительные отклонения на профилях колебательной температуры наблюдаются на высоте $\zeta \approx 0.7$ от поверхности пластины и имеют порядок $(1.8-4.8) \cdot 10^{-3}$.

Из графиков на рис. 6, следует, что для режима течения 2 на профилях скорости наибольшие относительные отклонения наблюдаются на высоте $\zeta \approx 1$ от поверхности пластины и имеют порядок $(1.7-5.8) \cdot 10^{-5}$. Наибольшие относительные отклонения на профилях статической и колебательной температур получаются на высоте $\zeta \approx 0.8$ от поверхности пластины и имеют соответственно порядки $(2.5-9) \cdot 10^{-4}$ и $(0.9-3.5) \cdot 10^{-3}$.

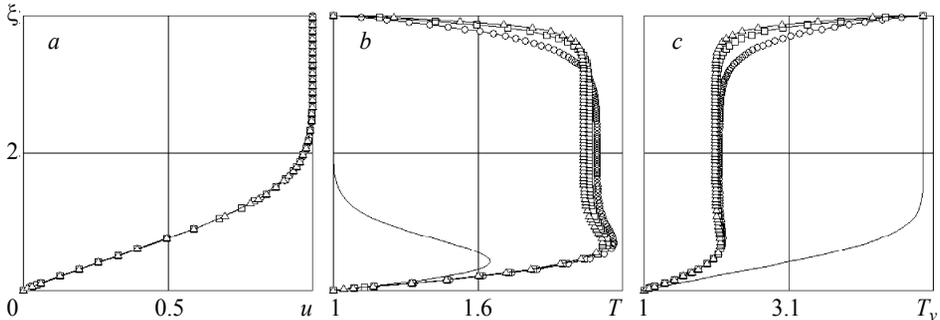


Рис. 3. Локально автомодельные профили продольной скорости u , статической T и колебательной T_v температур. Режим течения 3, $M = 4.5$. Сплошные линии – $\xi = 0$, сплошные линии с круглыми маркерами – $\xi = 5$, с квадратными маркерами – $\xi = 10$, с треугольными – $\xi = 15$

Fig. 3. Locally self-similar profiles of longitudinal velocity, u , and static and vibrational temperatures, T and T_v , respectively. Flow regime 3 is provided at $M = 4.5$. The solid lines indicate $\xi = 0$, the solid lines with circles – $\xi = 5$, the solid lines with squares – $\xi = 10$, and the solid lines with triangles – $\xi = 15$

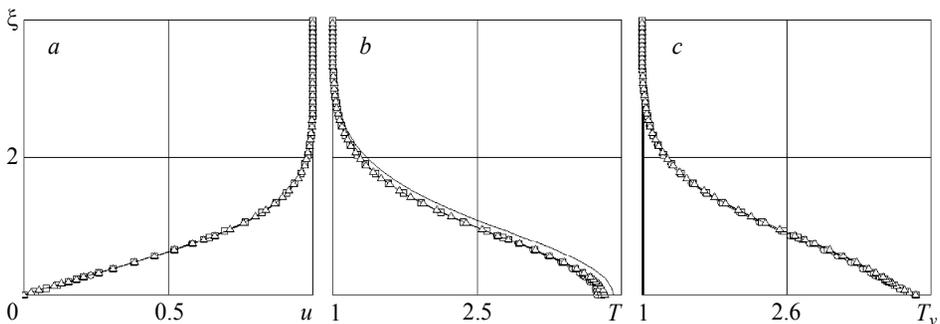


Рис. 4. Локально автомодельные профили продольной скорости u , статической T и колебательной T_v температур. Режим течения 1 с условием (9), $M = 4.5$, $Re_\infty = 10^4$. Сплошные линии – $\xi = 0$, сплошные линии с круглыми маркерами – $\xi = 5$, с квадратными маркерами – $\xi = 10$, с треугольными – $\xi = 15$

Fig. 4. Locally self-similar profiles of longitudinal velocity, u , and static and vibrational temperatures, T and T_v , respectively. Flow regime 1 with condition (9) is provided at $M = 4.5$, $Re_\infty = 10^4$. The solid lines indicate $\xi = 0$, the solid lines with circles – $\xi = 5$, the solid lines with squares – $\xi = 10$, and the solid lines with triangles – $\xi = 15$

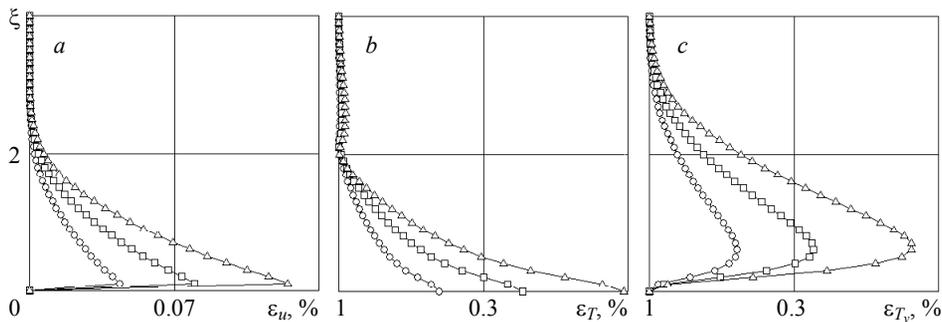


Рис. 5. Относительные отклонения локально автомодельных профилей скорости и температур. Режим течения 1, $M = 2.2$. Сплошные линии с треугольными маркерами – $\xi = 8$, с квадратными маркерами – $\xi = 10$, с круглыми – $\xi = 12$

Fig. 5. Relative deviations of the locally self-similar profiles of velocity and temperatures. Flow regime 1 is provided at $M = 2.2$. The solid lines with triangles indicate $\xi = 8$, the solid lines with squares – $\xi = 10$, and the solid lines with circles – $\xi = 12$

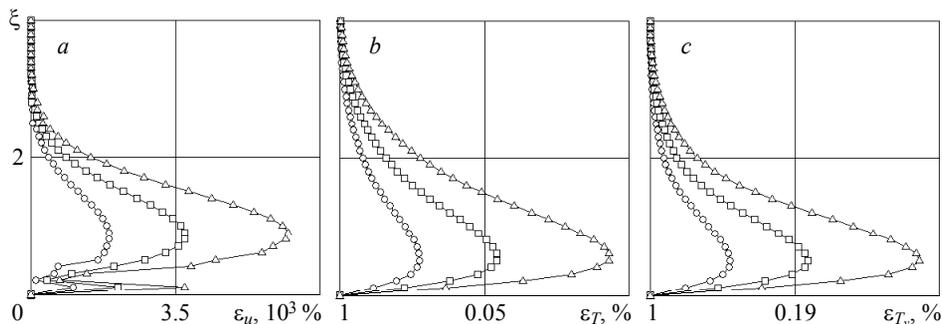


Рис. 6. Относительные отклонения локально автомодельных профилей скорости и температур. Режим течения 2, $M = 2.2$. Сплошные линии с треугольными маркерами – $\xi = 8$, с квадратными маркерами – $\xi = 10$, с круглыми – $\xi = 12$

Fig. 6. Relative deviations of the locally self-similar profiles of velocity and temperatures. Flow regime 2 is provided at $M = 2.2$. The solid lines with triangles indicate $\xi = 8$, the solid lines with squares – $\xi = 10$, and the solid lines with circles – $\xi = 12$

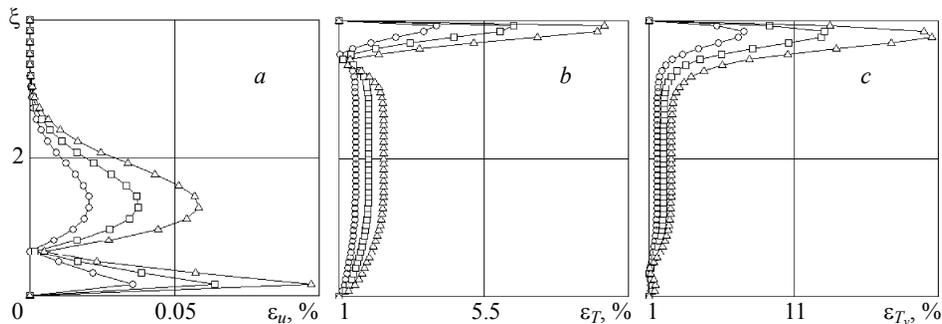


Рис. 7. Относительные отклонения локально автомодельных профилей скорости и температур. Режим течения 3, $M = 4.5$. Сплошные линии с треугольными маркерами – $\xi = 8$, с квадратными маркерами – $\xi = 10$, с круглыми – $\xi = 12$

Fig. 7. Relative deviations of the locally self-similar profiles of velocity and temperatures. Flow regime 3 is provided at $M = 4.5$. The solid lines with triangles indicate $\xi = 8$, the solid lines with squares – $\xi = 10$, and the solid lines with circles – $\xi = 12$

Зависимости, приведенные на рис. 7, показывают, что для режима течения 3 наибольшие относительные отклонения на профилях скорости наблюдаются вблизи поверхности пластины и имеют порядок $(4-9.3) \cdot 10^{-4}$. При этом наибольшие относительные отклонения на профилях статической и колебательной температур получаются вблизи условной границы пограничного слоя $\zeta = \delta \approx 8$ и имеют соответственно порядки 0.03–0.10 и 0.09–0.21.

Численные расчеты пограничного слоя в полной постановке

Для перехода к конечно-разностной схеме система уравнений (1) – (5) плоско-го пограничного слоя колебательно возбужденного газа может быть представлена в следующем обобщенном виде:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0,$$

$$a_i \frac{\partial f_i}{\partial x} + b_i \frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(c_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) + d_i + e_i f_i, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (11)$$

Здесь индекс i относится к соответствующей искомой величине, например компоненте продольной скорости u , температуре газа T и т.д. Коэффициенты a_i , b_i , c_i , d_i и e_i , входящие в уравнения (11), могут зависеть как от величин f_i , так и от их производных.

Для численного решения уравнений (11) был реализован конечно-разностный метод, изложенный в работах [10, 11]. Расчетная область покрывалась прямоугольной сеткой по пространственным координатам: $x_n = x_0 + nh_x$, $y_j = jh_y$ ($n, j = 0, 1, 2, \dots$), где h_x , h_y – шаги сетки в направлениях осей x и y . Дополнительно вводилась вспомогательная сетка с полуцелыми индексами: $x_{n+1/2} = x_0 + (n+1/2)h_x$, $y_j = jh_y$ и $x_n = x_0 + nh_x$, $y_{j+1/2} = (j+1/2)h_y$. Для аппроксимации уравнений (11) использовалась явно – неявная конечно-разностная схема Кранка – Николсон:

$$a_{ij}^{n-1/2} \frac{f_{ij}^n - f_{ij}^{n-1}}{h_x} + b_{ij}^{n-1/2} \frac{f_{ij+1}^{n-1/2} - f_{ij-1}^{n-1/2}}{2h_y} =$$

$$= \frac{1}{h_y} \left(c_{ij+1/2}^{n-1/2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{ij+1/2}^{n-1/2} - c_{ij-1/2}^{n-1/2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{ij-1/2}^{n-1/2} \right) + d_{ij}^{n-1/2} + e_{ij}^{n-1/2} f_{ij}^{n-1/2}, \quad (12)$$

где
$$f_{ij}^{n-1/2} = s_i f_{ij}^n + (1-s_i) f_{ij}^{n-1}.$$

В расчетах весовые параметры были выбраны $s_i = 0.5$. Значения коэффициентов a_i , b_i , c_i , d_i и e_i вычисляются в узлах вспомогательной сетки в полуцелых узлах ($n - 1/2, j$), $n, j = 1, 2, 3, \dots$.

Схема (12) приводится к виду

$$\alpha_{ij} f_{ij}^n + \beta_{ij} f_{ij}^{n-1} + \gamma_{ij} f_{ij+1}^n = \delta_{ij}. \quad (13)$$

Здесь

$$\alpha_{ij} = s_i (c_{ij+1}^{n-1/2} + c_{ij}^{n-1/2} + b_{ij}^{n-1/2} h_y),$$

$$\beta_{ij} = -s_i (c_{ij+1}^{n-1/2} + 2c_{ij}^{n-1/2} + c_{ij-1}^{n-1/2} - 2e_{ij}^{n-1/2} h_y^2) - 2a_{ij}^{n-1/2} \frac{h_y^2}{h_x},$$

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= s_i (c_{ij+1}^{n-1/2} + c_{ij-1}^{n-1/2} - b_{ij}^{n-1/2} h_y), \\ \delta_{ij} &= (1-s_i)(c_{ij+1}^{n-1/2} + c_{ij}^{n-1/2} + b_{ij}^{n-1/2} h_y) f_{ij-1}^{n-1} - \\ &- \left[(1-s_i)(c_{ij+1}^{n-1/2} + 2c_{ij}^{n-1/2} + c_{ij-1}^{n-1/2} - 2e_{ij}^{n-1/2} h_y^2) - 2a_{ij}^{n-1/2} \frac{h_y^2}{h_x} \right] f_{ij}^{n-1} + \\ &+ (1-s_i)(c_{ij+1}^{n-1/2} + c_{ij-1}^{n-1/2} - b_{ij}^{n-1/2} h_y) f_{ij+1}^{n-1} + 2a_{ij}^{n-1/2} h_y^2. \end{aligned}$$

Система разностных уравнений (13) с учетом конечно-разностных аппроксимаций граничных условий имеет трехдиагональную матрицу, обладающую свойством диагонального преобладания, и эффективно решается методом скалярной прогонки. На очередном шаге по маршевой переменной x вычислялись все значения f_{ij}^n по толщине пограничного слоя.

Поперечная скорость находилась из разностного уравнения

$$\frac{(\rho u)_j^n - (\rho u)_j^{n-1}}{2h_x} + \frac{(\rho u)_{j+1}^n - (\rho u)_{j+1}^{n-1}}{2h_x} + \frac{(\rho v)_{j+1}^{n-1/2} - (\rho v)_j^{n-1/2}}{h_y} = 0, \quad (14)$$

аппроксимирующего уравнение неразрывности (1). Входящая в уравнение (14) плотность ρ зависит только от температуры T и полагается известной величиной. На основе уравнения (14) строилось рекуррентное соотношение для нахождения $v_{j+1}^{n-1/2}$ через $v_j^{n-1/2}$. Таким образом, определив значение $v_0^{n-1/2}$ из граничного условия на пластине, определялась поперечная скорость в полущелых узлах $(n-1/2, j)$, где $j = 1, 2, 3, \dots$.

Для вычисления коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i и e_i , зависящих от v и f_{ij}^n , в узлах вспомогательной сетки использовались формулы линейной интерполяции для этих величин, определяемых по значениям в узлах основной сетки

$$f_{ij}^{n-1/2} = \frac{f_{ij}^n + f_{ij}^{n-1}}{2}, \quad f_{ij+1/2}^n = \frac{f_{ij+1}^n + f_{ij}^n}{2}.$$

Для вычисления значений f_{ij}^n на n -м слое необходимо знать коэффициенты $a_{ij}^{n-1/2}, b_{ij}^{n-1/2}, c_{ij}^{n-1/2}, d_{ij}^{n-1/2}$ и $e_{ij}^{n-1/2}$, которые, согласно приведенным выше формулам, сами зависят от неизвестных величин f_{ij}^n на n -м слое. Поэтому использовался алгоритм внутренних итераций, заключающийся в следующем. Для вычисления значений $a_{ij}^{n-1/2}, b_{ij}^{n-1/2}, c_{ij}^{n-1/2}, d_{ij}^{n-1/2}$ и $e_{ij}^{n-1/2}$ в первом приближении в качестве значений функций на n -ом слое брались их значения на $(n-1)$ -м слое, например $f_{ij}^{n,1} = f_{ij}^{n-1}$, а последующие приближения учитывались в итерационном процессе

$$f_{ij}^{n-1/2,k} = \frac{f_{ij}^{n,k} + f_{ij}^{n-1}}{2},$$

где k – индекс внутренних итераций. На каждом шаге по маршевой переменной итерации выполнялись до сходимости. Сходимость к установившемуся решению

определялась по разности относительных значений сеточной функции в равномерной норме

$$\max_j \left| \frac{f_{ij}^{n,k} - f_{ij}^{n,k-1}}{f_{ij}^{n,k}} \right| < \varepsilon,$$

где ε – заданная точность, которая в численных расчетах была выбрана равной 10^{-8} .

Система уравнений (1), (11) имеет парабола-гиперболический тип и требует задания начальных условий на входной границе пограничного слоя: $u(x_0, y) = u_0(y)$, $T(x_0, y) = T_0(y)$ и т.д. При этом распределение поперечной скорости $v(x_0, y)$ находилось из численного решения уравнений (13), (14) с применением внутренних итераций. В качестве начальных данных брались решения уравнений пограничного слоя в локально автомодельных переменных при $\xi = 1$. Полученное решение $v(x_0 + h_x/2, y)$ при достаточно малом h_x полагалось равным $v(x_0, y)$.

Порядок аппроксимации численной схемы исследовался на основе сравнения численных решений на последовательности сеток с изменяемым в два раза шагом. Расчеты показали, что отношение отклонений численных решений в совпадающих узлах сеток составляет величину, близкую к четырем, а схема имеет близкий ко второму порядку аппроксимации.

Исследование точности численного алгоритма проводилось на основе сравнения с известными автомодельными решениями. Относительные отклонения профилей продольной скорости $\varepsilon_u(\zeta)$, плотности $\varepsilon_\rho(\zeta)$ и температур $\varepsilon_T(\zeta)$, $\varepsilon_{T_v}(\zeta)$ от автомодельных профилей Блазиуса и Дороднищина – Хоуарта [4] в различных сечениях $\xi = x$ в равномерной норме рассчитывались по формуле

$$\varepsilon_q(\zeta) = \left| 1 - \frac{\mathbf{q}(\zeta, \xi)}{\mathbf{q}(\zeta, \xi = 0)} \right| \cdot 100\%, \quad \xi = 5, 10, 40,$$

где вектор $\mathbf{q} = (u, \rho, T, T_v)$. Для полностью развитого пограничного слоя полученные отклонения не превышали 1%.

Достигнутое качество численной схемы дало возможность корректного сравнения локально автомодельных профилей гидродинамических параметров с профилями, рассчитанными в полной постановке, для одинаковых граничных и начальных условий. На рис. 8 представлены профили, полученные в обеих постановках, для режима течения I при $M = 4.5$.

На рис. 9 для двух значений чисел Маха M даны относительные отклонения предельных локально автомодельных профилей при $\xi = 30$ от численных расчетов на продольной координате $x = 40$, где пограничный слой можно считать полностью развитым.

Относительные отклонения профилей продольной скорости $\varepsilon_u(\zeta)$, плотности $\varepsilon_\rho(\zeta)$ и температур $\varepsilon_T(\zeta)$, $\varepsilon_{T_v}(\zeta)$ вычислялись по формуле

$$\varepsilon_q(\zeta) = \left| 1 - \frac{\mathbf{q}(\zeta, x = 40)}{\mathbf{q}(\zeta, \xi = 30)} \right| \cdot 100\%, \quad \mathbf{q} = (u, \rho, T, T_v).$$

Видно, что в данных условиях максимальное отклонение при $M = 4.5$, которое не превышает 3 %, проявляют профили температур. В тех же условиях при $M = 2.2$ максимальное отклонение имеет место для продольной скорости и составляет примерно 2 %, в то время как отклонения температур лежат в пределах 1 %.

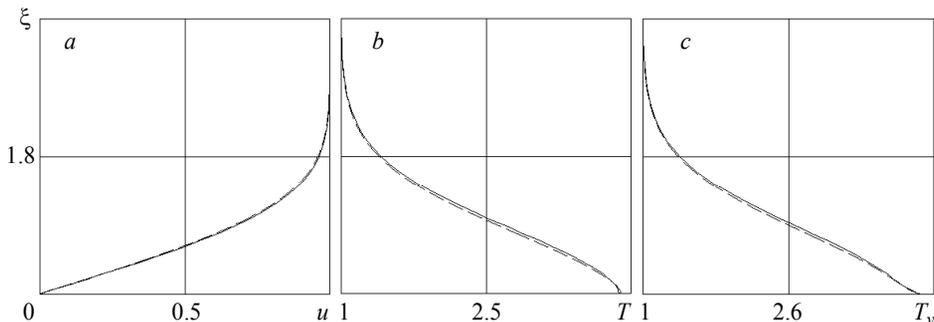


Рис. 8. Сравнение профилей гидродинамических параметров. Режим течения I , $M = 4.5$. Сплошные кривые – приближение локальной автомодельности, штриховые кривые – численной решение полной задачи

Fig. 8. Comparison of the profiles of hydrodynamic parameters. Flow regime I is provided at $M = 4.5$. The solid lines indicate a local self-similarity approximation, the dashed lines – a numerical solution to a complete problem

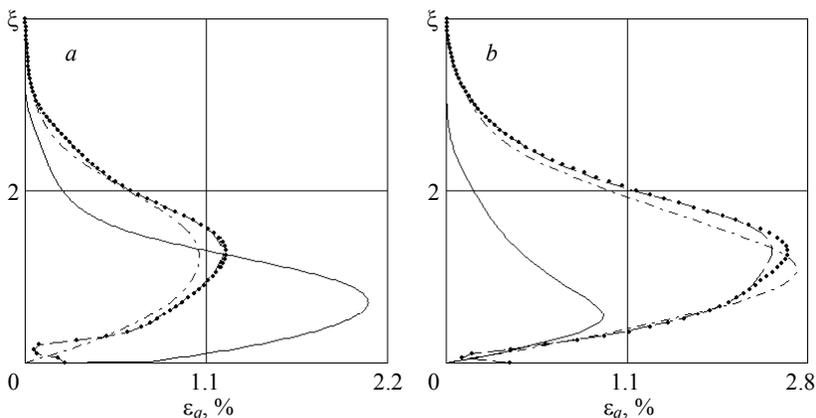


Рис. 9. Относительные отклонения гидродинамических параметров. Режим течения I , $M = 2.2$ (a) и 4.5 (b). Сплошные кривые – ϵ_u , штриховые кривые – ϵ_T , штрихпунктирные кривые – ϵ_{T_v} , точки – ϵ_p

Fig. 9. Relative deviations of hydrodynamic parameters. Flow regime I is provided at $M =$ (a) 2.2 and (b) 4.5 . The solid lines denote ϵ_u , the dashed lines – ϵ_T , the dash-dot lines – ϵ_{T_v} , and the dotted lines – ϵ_p

На рис. 10 и 11 приведены аналогичные сравнения при $M = 4.5$, но для случая охлаждаемой изотермической стенки. Все отклонения в этом случае возрастают приблизительно в полтора раза, но не превышают 4.5% . Отметим, что для аналогичных условий при $M = 2.2$ все отклонения остаются в пределах примерно 1.5% .

Полученные результаты позволяют заключить, что для рассмотренных граничных и начальных условий локально автомодельные решения настолько близки к численным решениям полной задачи, что могут обоснованно использоваться в расчетах линейной устойчивости соответствующих пограничных слоев.

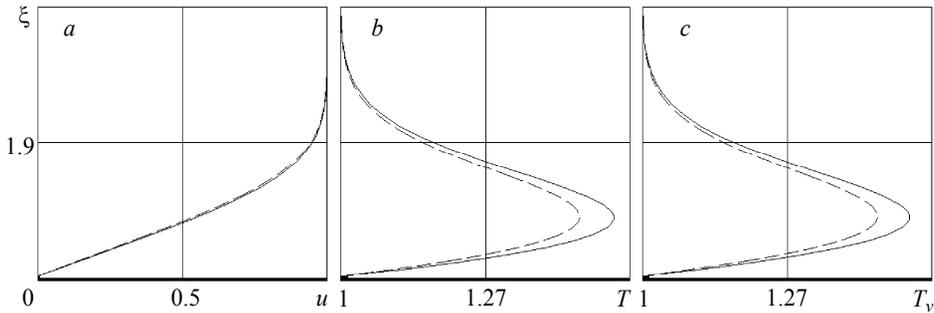


Рис. 10. Сравнение профилей гидродинамических параметров. Режим течения 2, $M = 4.5$. Сплошные кривые – приближение локальной автомодельности, штриховые линии – численной решение полной задачи

Fig. 10. Comparison of the profiles of hydrodynamic parameters. Flow regime 2 is provided at $M = 4.5$. The solid lines indicate a local self-similarity approximation, the dashed lines – a numerical solution to a complete problem

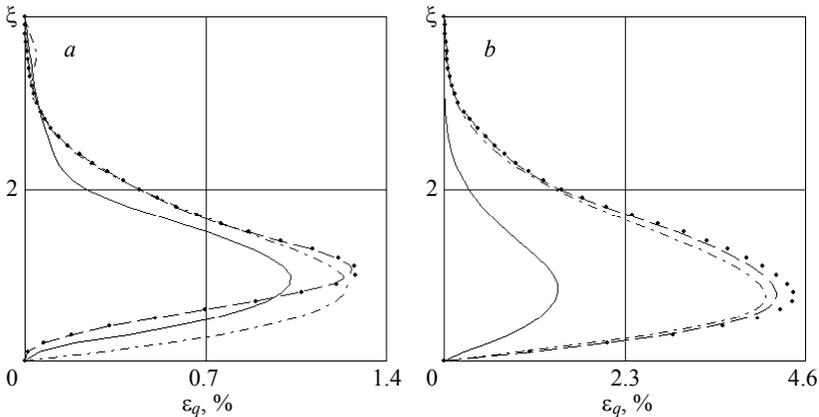


Рис. 11. Относительные отклонения гидродинамических параметров. Режим течения 2, $M = 2.2$ (a) и 4.5 (b). Сплошные кривые – ϵ_u , штриховые кривые – ϵ_T , штрихпунктирные кривые – ϵ_{T_v} , точки – ϵ_p

Fig. 11. Relative deviations of hydrodynamic parameters. Flow regime 2 is provided at $M = (a) 2.2$ and (b) 4.5. The solid lines denote ϵ_u , the dashed lines – ϵ_T , the dash-dot lines – ϵ_{T_v} , and the dotted lines – ϵ_p

Заключение

1. Рассчитаны локально автомодельные решения для сверхзвукового пограничного слоя на пластине для распространенных условий внешнего потока и теплообмена на границе. Показано, что для всех рассмотренных случаев имеет место сходимость профилей гидродинамических переменных к некоторым предельным значениям при $x = \xi \geq 8-15$.

2. На основе конечно-разностной аппроксимации системы уравнений плоского пограничного слоя, имеющей порядок $O(h^2)$, получены численные решения в полной постановке для тех же условий внешнего потока и теплообмена на границе.

3. Проведено сравнение профилей гидродинамических переменных, рассчитанных в локально автомодельной и полной постановках. Показано, что для всех

рассмотренных граничных и начальных условий предельные локально автомодельные профили приближают профили полностью развитого пограничного слоя, рассчитанные в полной постановке в пределах 3–5 %. Это позволяет обоснованно использовать легко рассчитываемые предельные локально автомодельные профили в расчетах по линейной теории устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wang X. Non-equilibrium effects on the stability of a Mach 10 flat-plate boundary layer // AIAA Paper 2017-3162. June 2017. P. 1–24. DOI: 10.2514/6.2017-3162.
2. Kunova O.V., Shojev G.V., Kudryavtsev A.N. Numerical simulation of nonequilibrium flows by using the state-to-state approach in commercial software // Thermophysics and Aeromechanics. 2017. V. 24. No. 1. P. 7–17. DOI: 10.1134/S0869864317010024.
3. Chen X., Fu S. Research of hypersonic boundary layer instability with thermal-chemical nonequilibrium effects // Proc. 8th European Conference for Aeronautics and Aerospace Sciences (EUCASS 2019), 1–4 July, Madrid. 2019. P. 1–7. DOI: 10.13009/EUCASS2019-674.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. 676 с.
5. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. Linear stability of the boundary layer of relaxing gas on a plate // Fluid Dynamics. 2019. V. 54. No. 3. P. 295–307. DOI: 10.1134/S0015462819030054.
6. Гапонов С.А., Петров Г.В. Устойчивость пограничного слоя неравновесно диссоциирующего газа. Новосибирск: Наука, 2013. 95 с.
7. Blottner F.G. Similar and nonsimilar solutions for nonequilibrium laminar boundary layer // AIAA Journal. 1963. V. 1. No. 9. P. 2156–2157.
8. Bertolotti F.B. The influence of rotational and vibrational energy relaxation on boundary-layer stability // Journal of Fluid Mechanics. 1998. V. 372. P. 93–118.
9. Grigoryev Yu.N., Ershov I.V. Stability and suppression of turbulence in relaxing molecular gas flows. Cham: Springer Intern. Publishing, 2017. 233 p. DOI: 10.1007/978-3-319-55360-3.
10. Браиловская И.Ю., Чудов Л.А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом // Вычислительные методы и программирование: сб. Вып. 1. М.: Изд-во МГУ, 1962. С. 167–182.
11. Пасконов В.М. Стандартная программа для решения задач пограничного слоя // Численные методы в газовой динамике: сборник. Часть 2. Москва: Изд-во МГУ, 1963. С. 110–116.

Статья поступила 17.01.2020

Grigoriev Yu.N., Gorobchuk A.G., Ershov I.V. (2021) CONVERGENCE OF LOCALLY SELF-SIMILAR SOLUTIONS TO EXACT NUMERICAL SOLUTIONS OF BOUNDARY LAYER EQUATIONS FOR A PLATE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 71. pp. 49–62

DOI 10.17223/19988621/71/5

Keywords: boundary layer, stability, vibrationally excited gas, locally self-similar solutions, finite-difference calculations.

This paper considers a possibility of using locally self-similar solutions for a stationary boundary layer in linear stability problems. The solutions, obtained at various boundary conditions for a vibrationally excited gas, are compared with finite-difference calculations of the corresponding flows. An initial system of equations for a plane boundary layer of the vibrationally excited gas is derived from complete equations of two-temperature relaxation aerodynamics. Relaxation of vibrational modes of gas molecules is described in the framework of the Landau – Teller equation. Transfer coefficients depend on the static flow temperature. In a complete problem statement, the flows are calculated using the Crank – Nicolson finite-difference scheme. In all the considered cases, it is shown that the locally self-similar velocity and

temperature profiles converge to the corresponding profiles for a fully developed boundary-layer flow calculated in a finite-difference formulation. The obtained results justify the use of locally self-similar solutions in problems of the linear stability theory for boundary-layer flows of a vibrationally excited gas.

Financial support: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 20-01-00168).

Yuriy N. GRIGORIEV (Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: grigor@ict.nsc.ru

Aleksey G. GOROBCHUK (Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: alg@eml.ru

Igor V. ERSHOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Novosibirsk State Agrarian University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: i_ershov@ngs.ru

REFERENCES

1. Wang X. (2017) Non-equilibrium effects on the stability of a Mach 10 flat-plate boundary layer. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 3162. pp. 1–24. DOI: 10.2514/6.2017-3162.
2. Kunova O.V., Shoev G.V., Kudryavtsev A.N. (2017) Numerical simulation of nonequilibrium flows by using the state-to-state approach in commercial software. *Thermophysics and Aeromechanics*. 24(1). pp. 7–17. DOI: 10.1134/S0869864317010024.
3. Chen X, Fu S. (2019) Research of hypersonic boundary layer instability with thermal-chemical non-equilibrium effects. *Proceedings of the 8th European Conference for Aeronautics and Aerospace Sciences*. pp. 1–7. DOI: 10.13009/EUCASS2019-674.
4. Loitsyanskiy L.G. (1966) *Mechanics of Liquids and Gases*. New York: Pergamon.
5. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. (2019) Linear stability of the boundary layer of relaxing gas on a plate. *Fluid Dynamics*. 54(3). pp. 295–307. DOI: 10.1134/S0015462819030054.
6. Gaponov S.A., Petrov G.V. (2013) *Ustoychivost' pogranchnogo sloya neravnovesno dissociiruyushchego gaza* [Boundary layer stability in a nonequilibrium dissociating gas]. Novosibirsk: Nauka.
7. Blottner F.G. (1963) Similar and nonsimilar solutions for nonequilibrium laminar boundary layer. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 1(9). pp. 2156–2157. DOI: 10.2514/3.2015.
8. Bertolotti F.B. (1998) The influence of rotational and vibrational energy relaxation on boundary-layer stability. *Journal of Fluid Mechanics*. 372. pp. 93–118. DOI: 10.1017/S0022112098002353.
9. Grigoryev Yu.N., Ershov I.V. (2017) Stability and suppression of turbulence in relaxing molecular gas flows. *Fluid Mechanics and Its Applications, Springer*. 117. DOI: 10.1007/978-3-319-55360-3.
10. Brailovskaya I.Yu., Chudov L.A. (1962) Reshenie uravneniy pogranchnogo sloya raznostnym metodom [Solving of boundary layer equations by a difference method]. *Sbornik "Vychislitel'nye metody i programirovanie"*. 1. Moscow: Izdatel'stvo MGU. pp. 167–182.
11. Paskonov V.M. (1963) Standartnaya programma dlya resheniya zadach pogranchnogo sloya [A routine program for solving boundary layer problems]. *Sbornik "Chislennye metody v gazovoy dinamike"*. 2. Moscow: Izdatel'stvo MGU. pp. 110–116.

Received: January 17, 2020

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/71/6

Д.А. Иванычев

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ С МАССОВЫМИ СИЛАМИ¹

Представлена математическая модель решения смешанной задачи теории упругости при наличии массовых сил полиномиального характера для трансверсально-изотропного тела вращения. Особенность решения состоит в том, что полученное упругое поле удовлетворяет одновременно заданным условиям на поверхности тела и условиям внутри области (массовым силам), а не представляет собой сумму упругих полей от решения частных задач.

Ключевые слова: *метод граничных состояний, трансверсально-изотропные тела, массовые силы, краевые задачи, основная смешанная задача, пространство состояний.*

При проектировании деталей из современных материалов особое внимание уделяется расчету их на прочность. С точки зрения теории упругости, эти материалы являются анизотропными в отношении упругих свойств. Усложняет задачу еще и то, что эти детали пребывают в сложных механических условиях: на них действуют массовые силы, а на поверхность наложены условия кинематического и физического характера. Расчет напряженно-деформированного состояния от совокупности таких воздействий, а также в силу сложной природы материала составляет актуальную научную задачу.

Задачи в теории упругости в смешанной постановке рассматривались реже, чем задачи с однотипными граничными условиями, однако их исследование проводилось в приложении к различным направлениям механики. В работе [1] рассмотрена смешанная плоская задача теории упругости для двухслойной кольцевой области; предложенный метод является аналитическим. В работе [2] проводился анализ смешанных задач для ограниченных и полуограниченных тел, ослабленных трещинами. Исследовались задачи контакта.

Массовые силы в задачах механики деформируемого тела рассматривались в следующих работах. В [3] использование метода взвешенных невязок в форме метода граничного решения помогло найти распределение напряжений и смещений в упругом теле, подверженном действию заданной системы объемных сил и заданных напряжений или смещений на границах. В работе [4] метод ортогональных проекций применен для решения задач теории упругости с заданными объемными и поверхностными силами, а в [5] для несжимаемого материала с помощью уравнения Лагранжа получено условие эквивалентности поверхностных и объемных сил. Автором [6] рассмотрены тяжелые трансверсально-изотропные составные сферы под действием объемных сил и давления внутри полости. Получены точные аналитические решения задач.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003 "p_a".

Ряд работ посвящен развитиям методов механики. Так, в [7] рассмотрен обратный метод определения напряженно-деформированного состояния изотропных упругих тел под действием непрерывных непотенциальных объемных сил. Развитие метода конечных элементов в рамках смешанной постановки, основанной на функционале Рейснера, посвящена работа [8]. В [9] с помощью этой технологии решена смешанная задача теории упругости для тела, имеющего односторонний контакт с упругим полупространством. Авторы [10] решают уравнения Лапласа в осесимметричной постановке с помощью непрямого метода граничных элементов.

Впервые в методе граничных состояний (ГС) объемные силы были рассмотрены в работе [11], а с участием полиномиальных объемных сил для изотропной среды он применен в [12]. Решены смешанные задачи для цилиндра и полушара под действием полиномиальных объемных сил. В [13] приводится решение задачи о линейно-упругом сплюснутом сфероиде, нагруженном самоуравновешенной системой объемных сил. Решение строилось для двух вариантов нагружения: потенциальными и непотенциальными объемными силами. Массовые силы вкупе с краевой задачей термоупругости для трансверсально-изотропных тел рассмотрены в работах [14, 15]. Решение представляло собой сумму упругих полей от краевой задачи, задачи термоупругости и задачи деформирования массовыми силами.

Решению плоских и пространственных задач методом граничных состояний, как для односвязной, так и для многосвязной области посвящены работы [16, 17]. Решение строилось на основе общих представлений плоской задачи и задачи Сен-Венана, полученных С.Г. Лехницким.

В рамках настоящей работы предполагается развитие метода граничных состояний в части решения осесимметричной основной смешанной задачи теории упругости с участием массовых сил для трансверсально-изотропных тел вращения. Спецификой решения является то, что оно одновременно удовлетворяет заданным условиям на поверхности тела и внутри области, т.е. массовым силам, а не представляет собой сумму решения смешанной задачи при отсутствии массовых сил и решения задачи о действии массовых сил на тело со свободной границей.

1. Постановка задачи

Рассматривается упругое равновесие трансверсально-изотропного конечного и

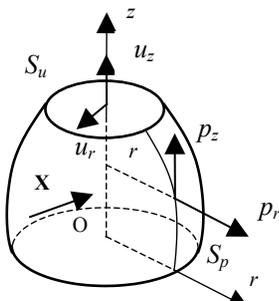


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения
Fig. 1. A transversely isotropic body of revolution

односвязного тела вращения с осью анизотропии, совпадающей с геометрической осью симметрии. Требуется восстановить упругое поле в области V по заданным массовым силам $\mathbf{X} = \{R, Z\}$ внутри области, поверхностным усилиям $\mathbf{p} = \{p_r, p_z\}$ на части границе S_p и перемещениям $\mathbf{u} = \{u_r, u_z\}$ на части границе S_u (рис. 1). Естественно, что $S = S_p + S_u$.

Решение можно провести следующим образом: сначала решить краевую задачу механики от заданных на границе кинематических и физических условий, затем отдельно решить задачу по определению упругого состояния от действия массовых сил на то же самое тело, только со свободной границей, и полученные поля упругих характеристик сложить.

Однако в этом случае результирующее поле перемещений не будет удовлетворять заданным перемещениям точек границы в условиях смешанной постановки граничных условий и решение будет некорректным.

Целью работы является создание подхода, позволяющего получить упругое поле, удовлетворяющее всем заданным условиям (поверхностным условиям и массовым силам).

2. Общее решение

В работе [18] с помощью метода интегральных наложений установлена зависимость между пространственным состоянием упругого трансформированного тела и двумерными состояниями. В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация, возникающая в цилиндрах бесконечной длины, имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости zy (деформация происходит в плоскости zy ; координата y плоского состояния соответствует координате r пространственного состояния; направление $\eta \perp$ плоскости zy):

$$u_y^{pl} = \text{Re}[iq_1\varphi_1(\zeta_1) + iq_2\varphi_2(\zeta_2)]; u_z^{pl} = \text{Re}[p_1\varphi_1(\zeta_1) + p_2\varphi_2(\zeta_2)], \quad (1)$$

где u_y^{pl} , u_z^{pl} – компоненты вектора перемещения плоского вспомогательного состояния; q_1 , p_1 – комплексные константы; $\zeta_j = z/\gamma_j + iy$, γ_j – комплексные корни характеристического уравнения; функции $\varphi_j(\zeta_j)$ – аналитические по своим переменным.

Пространственное состояние формируется по интегральным формулам перехода от плоского вспомогательного состояния [15]:

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_y^{pl}}{r\sqrt{r^2 - y^2}} dy, \quad w = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_z^{pl}}{r\sqrt{r^2 - y^2}} dy, \quad (2)$$

где u и w – компоненты вектора перемещения пространственного состояния по осям r и z соответственно.

Через соотношения Коши и закон Гука вычисляются деформации и перемещения пространственного состояния [18].

3. Метод решения

Для решения поставленной задачи используем метод граничных состояний (МГС) [19]. Метод оперирует понятиями гильбертовых пространств. Набор компонент тензоров напряжений σ_{ij}^k , деформаций ε_{ij}^k и вектора перемещения u_i^k определен как достаточных набор характеристик упругого поля, описывающих некоторое внутреннее состояние среды. Этот набор имеет вид

$$\xi_k = \{u_i^k, \varepsilon_{ij}^k, \sigma_{ij}^k\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (3)$$

где N – размерность базиса.

Счетная совокупность таких состояний образует конечный базис внутренних состояний

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}. \quad (4)$$

Набор компонент вектора перемещения на границе тела вкупе с напряжениями на границе и массовыми силами (условно в силу того, что массовые силы не относятся к поверхности тела) образует граничное состояние:

$$\gamma_k = \{u_{vi}^k, p_i^k, X_i^k\}, \quad p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j, \quad (5)$$

где n_j – компонента нормали к границе.

Аналогично образуется счетный базис пространства граничных состояний $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}$.

Рассмотрим уравнение Клапейрона [20]:

$$\int_V \mathbf{X} \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{p}_v \mathbf{u}_v dS - \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = 0, \quad (6)$$

где \mathbf{u} – вектор перемещения; \mathbf{X} – вектор массовых сил; \mathbf{p}_v , \mathbf{u}_v – поверхностные силы и перемещения точек границы; σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций.

В силу соотношения (6) пространства сопряжены изоморфизмом, что однозначно определяет взаимосвязь между их наборами. Далее базисы пространств ортонормируются с помощью рекурсивно-матричного алгоритма ортогонализации, построенного на классическом процессе Грама – Шмидта [21]. Алгоритм использует перекрестные скалярные произведения. В пространстве Ξ (в развернутом виде, например, для 1-го и 2-го состояний)

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV, \quad (7)$$

причем в силу тождества Бетти

$$(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, \xi_1) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV = \int_V \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1 dV.$$

То же в пространстве Γ :

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_S p_i^1 u_{vi}^2 dS + \int_V X_i^1 u_i^2 dV, \quad (8)$$

причем согласно свойству коммутативности

$$(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2, \gamma_1) = \int_S p_i^1 u_{vi}^2 dS + \int_V X_i^1 u_i^2 dV = \int_S p_i^2 u_{vi}^1 dS + \int_V X_i^2 u_i^1 dV.$$

Искомое упругое состояние представляет собой ряд Фурье:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k; \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k$$

или в развернутом виде

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k; \quad u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k; \quad X_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_i^k. \quad (9)$$

В случае основной смешанной задачи заданы массовые силы $\mathbf{X} = \{R, Z\}$, перемещения точек границы тела $\mathbf{u}_v = \{u_v, w_v\}$ на участке S_u и усилия $\mathbf{p}_v = \{p_r, p_z\}$ на участке S_p .

Ортонормированность базиса граничных состояний позволяет для его элементов записать

$$\int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS + \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS = 2\delta_{ij}, \quad (10)$$

где индексы i, j – номера элементов в базисах состояний; $\mathbf{u}^{i,j}$ – вектор перемещения в базисе внутренних состояний; $\mathbf{p}_v^{i,j}$, $\mathbf{u}_v^{i,j}$, $\mathbf{X}^{i,j}$ – векторы усилий, перемещений и массовых сил в базисе граничных состояний.

Представим первое слагаемое из (8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS &= \int_{Su} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_u + \int_{Sp} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p; \\ \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS &= \int_{Su} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_u + \int_{Sp} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_p, \end{aligned}$$

и подставляя последние выражения в (9), получим

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_{Su} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_u + \int_{Sp} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p + \\ + \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + \int_{Su} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_u + \int_{Sp} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_p = 2\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Группируя слагаемые и обозначая

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_{Sp} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p + \int_{Su} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_u; \\ \lambda_{ij} &= \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + \int_{Sp} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_p + \int_{Su} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_u, \end{aligned} \quad (11)$$

легко убедиться что $\beta_{ij} + \lambda_{ij} = \delta_{ij}$.

Преобразуем λ_{ij} следующим образом: базисные компоненты \mathbf{X}^j , \mathbf{u}_v^j , \mathbf{p}_v^j заменим заданными \mathbf{X} , \mathbf{u}_v , \mathbf{p}_v и перебор будем осуществлять по индексу j , образуя тем самым матрицы коэффициентов:

$$\alpha_j = 2 \int_V \mathbf{X} \mathbf{u}^j dV + 2 \int_{Sp} \mathbf{p}_v \mathbf{u}_v^j dS_p + 2 \int_{Su} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v dS_u; \quad \mathbf{B} = [\beta_{ij}]_{N \times N}; \quad \mathbf{A} = [\alpha_j]_N, \quad (12)$$

где \mathbf{u}^j – вектор перемещения в j -м элементе базиса внутренних состояний (3); \mathbf{p}_v^j , \mathbf{u}_v^j – векторы усилий и перемещений на границе тела в j -м элементе базиса граничных состояний (5).

Следует отметить, что матрица \mathbf{B} является кососимметричной ($\beta_{ij} = -\beta_{ji}$, $i \neq j$).

Коэффициенты Фурье $c = \{c_k\}_N$ рассчитываются так:

$$c = \{c_k\}_N = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}, \quad (13)$$

где N – число используемых элементов базиса.

Решение завершается соотношениями (9).

4. Формирование базиса

Особое внимание в методе граничных состояний уделяется построению базиса внутренних состояний, которое осуществляется с помощью общего или фундаментального решения для среды. Также возможно использование каких-либо частных или специальных решений.

Для построения поля перемещений от массовых сил для плоских вспомогательных состояний воспользуемся методикой, описанной в [8]. Применим фундаментальную систему многочленов $y^\alpha z^\beta$, которую можно поместить в любую позицию вектора перемещения $\mathbf{u}^{pl}(y, z)$, образуя некоторое упругое состояние плоской деформации:

$$\mathbf{u}^{pl} = \left\{ \left\{ y^\alpha z^\beta, 0 \right\}, \left\{ 0, y^\alpha z^\beta \right\} \right\}.$$

Генерирование различных вариантов в пределах $\alpha + \beta \leq n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, позволяет получить множество плоских состояний. Далее по формулам (2) определяются компоненты вектора перемещения $\mathbf{u}(r, z)$ пространственного осесимметричного состояния и по цепочке: формулы Коши – закон Гука – уравнения равновесия, определяются соответствующие тензоры деформаций, напряжений и массовые силы, образуя конечномерный базис в задаче от действия массовых сил:

$$\Xi^X = \left\{ \xi_1^X, \xi_2^X, \xi_3^X, \dots, \xi_k^X, \dots \right\}. \quad (14)$$

В задаче эластостатики используется общее решение плоской задачи (1). Для формирования множества плоских состояний аналитическим функциям $\varphi_1(\zeta_1)$ и $\varphi_2(\zeta_2)$ придаются последовательно значения

$$\left(\begin{array}{c} \varphi_1(\zeta_1) \\ \varphi_2(\zeta_2) \end{array} \right) \in \left\{ \left(\begin{array}{c} \zeta_1^n \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ \zeta_2^n \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} i\zeta_1^n \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ i\zeta_2^n \end{array} \right), \dots \right\}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Определяются все механические характеристики плоского вспомогательного состояния, и затем следует переход к трехмерному состоянию по зависимостям (2), образуя конечномерный базис в задаче эластостатики:

$$\Xi^S = \left\{ \xi_1^S, \xi_2^S, \xi_3^S, \dots, \xi_k^S, \dots \right\}. \quad (15)$$

Результирующий базис (4) представляет собой объединение

$$\Xi = \left\{ \xi_1^S, \xi_2^X, \xi_3^S, \xi_4^X, \dots, \xi_{k-1}^S, \xi_k^X, \dots \right\}. \quad (16)$$

Данное объединение необходимо для обеспечения сходимости решения. Так как условия, задаваемые на границе тела, могут вызывать одновременно как «уравновешенные» (удовлетворяющие уравнениям равновесия при отсутствии массовых сил), так и «неуравновешенные» (удовлетворяющие уравнениям равновесия с массовыми силами) напряжения, то для восстановления последних требуется наличие элементов с «уравновешенными» напряжениями, в противном случае будет наблюдаться расходимость решения.

5. Решение задачи для полушара

Рассмотрим равновесие трансформного упругого полушара из темно-серого алевролита (горная порода) [20]. После процесса обезразмеривания, аналогия которого приведена в работе [22], нормированные технические константы материала составили: $E_z = 6.21$; $E_r = 5.68$; $G_z = 2.55$; $\nu_z = 0.22$; $\nu_r = 0.24$ и геометрия области $V = \{(z, r) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{1-r^2}\}$ (рис. 2).

На область тела действуют массовые силы $\mathbf{X} = \{r, z\}$; граница S_2 защемлена, $\mathbf{u}_v = 0$; к границе S_1 приложены сжимающие усилия локального характера (рис. 2, слева). Развертка поверхности S_1 с граничными условиями показана на рис. 2, справа).

$$p_r = 0; p_z = \frac{1}{50} \left(\frac{50}{51} - \frac{1}{1/50 + r^2} \right).$$

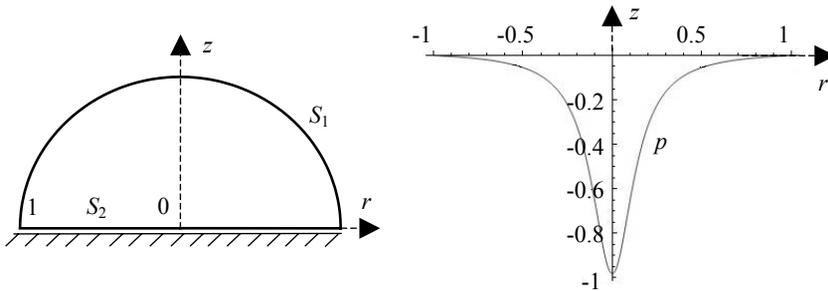


Рис. 2. Меридианное сечение полушара (слева) и граничные условия на поверхности S_1 (справа)
Fig. 2. A meridian section of a hemisphere (on the left) and boundary conditions on the surface S_1 (on the right)

После процедуры ортонормирования базиса внутренних состояний (16) и исключения линейно-зависимых элементов, базисный набор для компонент вектора перемещения представлен в табл. 1 (показано 5 элементов).

Таблица 1

Перемещения ортонормированного базиса

	u	w
ξ_1	0	$0.45707z$
ξ_2	$0.32092r$	$-0.18063z$
ξ_3	0	$-0.7034z + 0.9378z^2$
ξ_4	$-0.2159r + 0.5757rz$	$0.2574r^2 + 0.1215z - 0.162z^2$
ξ_5	$-0.4442r + 1.1845rz$	$-0.8573r^2 + 0.25z - 0.3333z^2$

Матрица коэффициентов β_{ij} (11), представлена в табл. 2 (i – определяется по строке, j – по столбцу; показано $N = 5$).

Матрица коэффициентов β_{ij}

1	0	0	-0.4224	1.4067
0	1	0	0.4462	-0.2169
0	0	1	0.6501	-2.1649
0.4224	-0.4462	-0.6501	1	0.7636
-1.4067	0.2169	2.1649	-0.7636	1

Для решения потребовался довольно большой базис в 79 элементов. Это связано с локальностью воздействия нагрузки на поверхность тела. Приведем значения пяти коэффициентов Фурье (13):

$$c_1 = 0.03395; c_2 = 0.04312; c_3 = -0.02488; c_4 = 0.01992; c_5 = 0.01036.$$

Оценка точности решения осуществляется сопоставлением заданных граничных условий (ГУ) с восстановленными в результате решения (рис. 4), а также сопоставлением полученного поля массовых сил с заданным полем. Здесь заданные (1 1 1 1) и восстановленные (—) ГУ изображены на графиках в масштабе. Например, истинное значение на левом графике рис. 3, а равно значению на графике, умноженному на коэффициент κ .

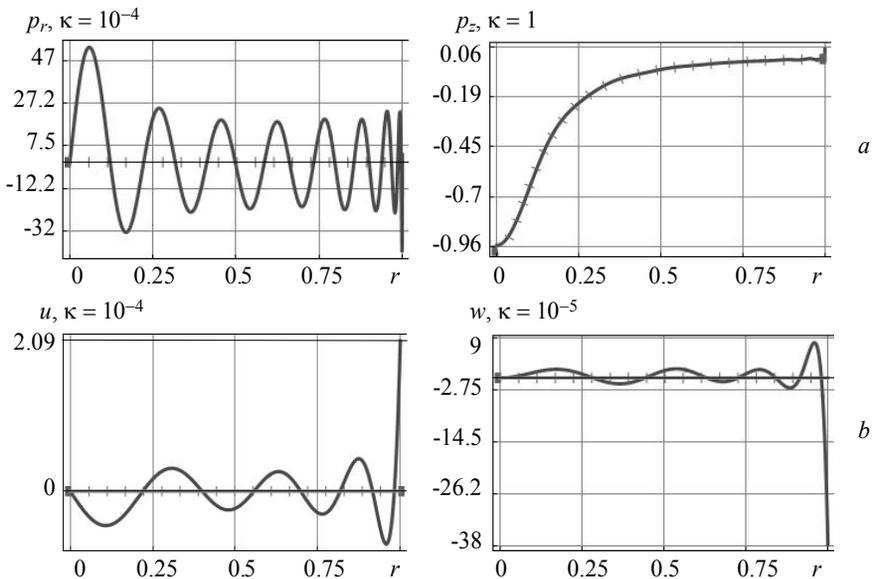


Рис. 3. Верификация граничных условий на участках поверхности тела:

a – на участке S_1 , b – на участке S_2

Fig. 3. Verification of boundary conditions on the body surfaces: on the surface (a) S_1 and (b) S_1

Как видно из графиков, максимальные отклонения восстановленных условий на поверхности тела от заданных составили (по абсолютной величине): 6 % в точке $r = 1, z = 0$ и 4 % в точке $r = 0, z = 1$.

Восстановленные массовые силы во всей области удобнее показать в виде изолиний (рис. 4). В силу осевой симметрии представлена правая половина меридионального сечения, показанного на рис. 2.

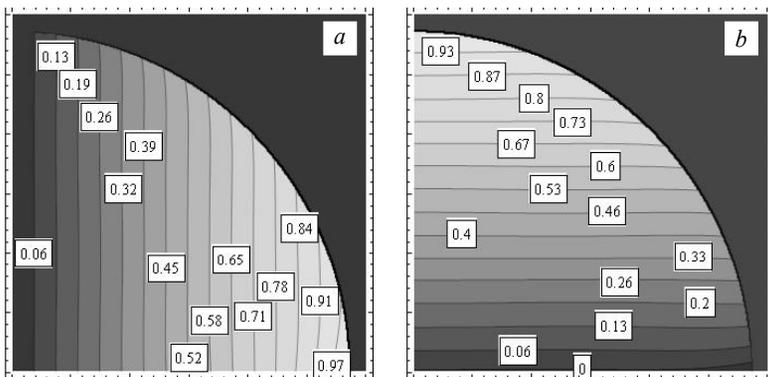


Рис. 4. Изолинии восстановленного вектора массовых сил:
a – компонента *R*, *b* – компонента *Z*
Fig. 4. Contours of the reconstructed mass force vector:
 (a) *R*-component and (b) *Z*-component

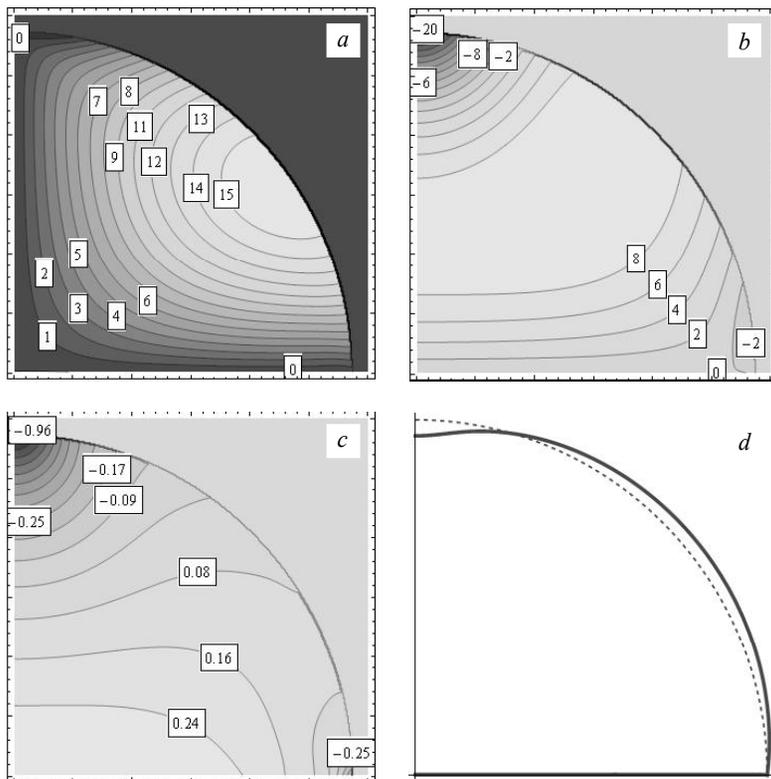


Рис. 5. Характеристики упругого поля: *a* – компонента вектора перемещения *u* ($\kappa = 10^{-3}$), *b* – компонента вектора перемещения *w* ($\kappa = 10^{-3}$), *c* – компонента тензора напряжений σ_{zz} ($\kappa = 1$), *d* – контур деформированного тела (в увеличенном виде)
Fig. 5. Elastic field characteristics: (a) a component of the displacement vector *u* ($\kappa = 10^{-3}$), (b) a component of the displacement vector *w* ($\kappa = 10^{-3}$), (c) a component of the stress tensor σ_{zz} ($\kappa = 1$), and (d) a deformed body contour (enlarged view)

В области восстановления массовых сил наибольшие отклонения находятся в ключевых точках $(r, z) = (1, 0)$, $(0, 1)$ и соответственно составляют: для $R - 5.5$ и 0% , для $Z - 5$ и 3.7% .

Остальные характеристики НДС представим в виде изолиний (в явном виде необозримы) на рис. 5.

Точность решения повышается при увеличении числа используемых элементов базиса.

При тестировании предложенного метода решения смешанных задач на различных видах функций заданных массовых сил, наблюдалась аналогичная особенность, что и во второй основной задаче [23]. Если область интегрирования V симметрична относительно плоскости $z = 0$, то задачи с несимметричной и не кососимметричной относительно этой плоскости компонентой Z , например $Z = z + 1$, сходимостью решения в области восстановления этой компоненты не обладают. В этом случае необходимо задать несимметричную относительно плоскости $z = 0$ область тела V , например с координатой $0 \leq z \leq 1$.

Описанный прием позволяет решить осесимметричную основную смешанную задачу для трансформированных тел вращения при отсутствии объемных сил. До настоящего момента задачи этого класса средствами метода граничных состояний не были реализованы. Однако здесь необходимо использовать базис вида (15) с заранее отсутствующими массовыми силами, в противном случае в решение заведомо вносится погрешность, что приводит к неудовлетворительному результату.

По идентичной теории для трансверсально-изотропных тел вращения, находящихся под действием массовых сил, решены контактные задачи без трения [24].

Заключение

Сформулирована методика решения осесимметричной смешанной задачи для трансверсально-изотропных тел вращения, находящихся одновременно под действием стационарных массовых сил. Методика представляет собой развитие метода граничных состояний, а именно, представлен новый способ формирования базиса внутренних состояний, основанный не только на общем решении, но и на приеме использования фундаментальных многочленов, а также встраивании последних в общий базис. Поэтому изложенный подход является более широким, чем подход, основанный только на общих или фундаментальных решениях. В данном случае используется процедура ортогонализации, определяемая соотношениями (7) и (8), позволяющая сразу строить решение задачи с заданными массовыми и поверхностными силами, а не строить полное решение как сумму частного решения задачи при действии только массовых сил и общего решения смешанной задачи, как сделано, например, в работе [7]. Новизна заключается и во включении массовых сил в граничное состояние. В традиционном методе граничных состояний внутреннее состояние состояло из усилий и перемещений.

Были проанализированы три способа формирования базиса внутренних состояний: в виде (14), в виде (17) и в виде (16):

$$\Xi = \left\{ \xi_1^S + \xi_1^X, \xi_2^S + \xi_2^X, \dots, \xi_k^S + \xi_k^X, \dots \right\}. \quad (17)$$

Ряды, построенные на базисе (14), сходимостью не обладают. Увеличение числа использованных элементов базиса не приводит к уменьшению погрешности, которая закладывается на первых элементах.

При построении базиса нужно стремиться к наибольшей простоте вида функций в базисных элементах, чем базис (17) не обладает, так как каждый элемент представляет собой сумму двух элементов. К тому же при решении задач он показал худшую сходимость по сравнению с базисом вида (16). Последний продемонстрировал наибольшую эффективность.

Наиболее трудоемким процессом при формировании решения является построение ортонормированного базиса и матрицы коэффициентов β_{ij} , однако эти процедуры производятся для тела один раз и могут быть использованы при решении задач с различными краевыми условиями и массовыми силами. Здесь, однако, нужно указать, что положение участков S_u и S_p на поверхности тела не может быть изменено.

В краевых задачах механики известно, что увеличение размерности ведет к ее значительному усложнению. Здесь данный эффект проявляется в интегральных выражениях для коэффициентов β_{ij} (11) и α_j (12), где требуется вычисление трех интегралов. Например, во второй основной задаче [23] таких интеграла два, а в контактной [24] уже четыре.

Решение имеет аналитический вид и вполне пригодно для дальнейшего анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Божкова Л.В., Рябов В.Г., Норичина Г.И. Смешанная плоская задача теории упругости для двухслойной кольцевой области // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2011. № 1 (11). С. 217–221.
2. Соболев Б.В. Об асимптотических решениях трехмерных статических задач теории упругости со смешанными граничными условиями // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (4). С. 1778–1780.
3. Голоскоков Д.П., Данилюк В.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния упругих тел с помощью полиномов // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2013. № 1. С. 8–14.
4. Стружанов В.В. О решении краевых задач теории упругости методом ортогональных проекций // Математическое моделирование систем и процессов. 2004. № 12. С. 89–100.
5. Агаханов Э.К., Магомедэминов Н.С. Условия эквивалентности воздействий для перемещений // Вестник ДГТУ. Технические науки. 2007. № 12. С. 27–28.
6. Фукалов А.А. Задачи об упругом равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления, и их приложения // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 2015. С. 3951–3953.
7. Левина Л.В., Кузьменко Н.В. Обратный метод эффективного анализа состояния упругого тела от массовых сил из класса непрерывных // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов. Казань, 2015. С. 2276–2278.
8. Станкевич И.В. Математическое моделирование задач теории упругости с использованием МКЭ на основе функционала Рейсснера // Символ науки. 2017. № 4 (2). С. 21–25.
9. Станкевич И.В. Численное решение смешанных задач теории упругости с односторонними связями // Математика и математическое моделирование. 2017. № 5. С. 40–53. DOI: 10.24108/mathm.
10. Пономарева М.А., Собоко Е.А., Якутенок В.А. Решение осесимметричных задач теории потенциала непрямым методом граничных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 5(37). С. 84–96.

11. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Применение метода граничных состояний для решения основной смешанной задачи линейного континуума // Известия Тульского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2000. Т. 6. № 2. С. 124–127.
12. Кузьменко В.И., Кузьменко Н.В., Левина Л.В., Пеньков В.Б. Способ решения задач изотропной теории упругости с объемными силами в полиномиальном представлении // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 1. С. 84–94. DOI: 10.3103/S0025654419050108.
13. Пеньков В.Б., Левина Л.В., Новикова О.С. Аналитическое решение задач эластостатики односвязного тела, нагруженного неконсервативными объемными силами. Теоретическое и алгоритмическое обеспечение // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2020. Т. 24. Вып. 1. С. 56–73. DOI: 10.14498/vsgtu1711.
14. Ivanychev D.A., Levina E.Yu. Solution of thermo elasticity problems for solids of revolution with transversal isotropic feature and a body force // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1348. No. 012058. 15 p. DOI: 10.1088/17426596/1348/1/012058.
15. Ivanychev D.A. The method of boundary states in solving problems of thermoelasticity in the presence of mass forces // Proceedings of the 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA 2019. 2019. P. 83–87. DOI: 10.1109/SUMMA48161.2019.8947505.
16. Ivanychev D.A., Levin M.Yu., Levina E.Yu. The boundary state method in solving the anisotropic elasticity theory problems for a multi-connected flat region // TEST Engineering & Management. 2019. V. 81. P. 4421–4426.
17. Ivanychev D.A., Levina E.Yu., Abdullakh L.S., Glazkova Yu.A. The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length // International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies. 2019. V. 10. No. 2. P. 183–191. DOI: 10.14456/ITJEMAST.2019.18.
18. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М.: Наука, 1978. 464 с.
19. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2. № 2. С. 115–137.
20. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 416 с.
21. Саталкина Л.В. Нарастивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоёмкости вычислений // Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. 2007. С. 130–131.
22. Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник ЛГТУ. 2016. № 2 (28). С. 16–24.
23. Иванов Д.А. Метод граничных состояний в решении второй основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 61. С. 45–60. DOI: 10.17223/19988621/61/5.
24. Иванов Д.А. Решение контактной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения с массовыми силами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 2. С. 49–62. DOI: 10.15593/pern.mech/2019.2.05.

Статья поступила 16.05.2020

Ivanychev D.A. (2021) A BOUNDARY STATE METHOD FOR SOLVING A MIXED PROBLEM OF THE THEORY OF ANISOTROPIC ELASTICITY WITH MASS FORCES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 71. pp. 63–77

DOI 10.17223/19988621/71/6

Keywords: boundary state method, transversely isotropic bodies, mass forces, boundary value problems, main mixed problem, state space.

The paper presents a methodology for determining a stress-strain state of transversely isotropic bodies of revolution under conditions of a mixed problem of the elasticity theory, i.e. displacements of the boundary points are specified on the one part of the surface, and forces are assigned on the other part. At the same time, the body is exposed to mass forces. The problem solving involves the development of the boundary state method. A theory is created to construct the bases of spaces for internal and boundary states. The basis of the internal states includes displacements, strains, and stresses. The basis of the boundary states includes forces at the boundary, displacements of the boundary points, and mass forces. Spaces are conjugated by an isomorphism. It allows one to reduce the determination of the internal state to a study of the boundary state. Characteristics of the stress-strain state are presented in terms of the Fourier series. Finally, the determination of the elastic state is reduced to the solving of an infinite system of algebraic equations.

A result of the study is presented as a solution to the main mixed problem for a hemisphere clamped on a plane surface and exposed to a concentrated compressive force and mass forces.

Financial support. The reported study was funded by RFBR and the Lipetsk Region according to the research project No. 19-41-480003 "r_a".

Dmitriy A. IVANYCHEV (Candidate of Physics and Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation). E-mail: lsivdml@mail.ru

REFERENCES

1. Bozhkova L.V., Ryabov V.G., Noritsina G.I. (2011) Smeshannaya ploskaya zadacha teorii uprugosti dlya dvukhsloynnoy kol'tsevoy oblasti [A mixed type plane problem of the elasticity theory for a two-layer annular domain]. *Izvestiya Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta MAMI*. 1(11). pp. 217–221.
2. Sobol' B.V. (2011) Ob asimptoticheskikh resheniyakh trekhmernykh staticheskikh zadach teorii uprugosti so smeshannymi granichnymi usloviyami [About asymptomatic solutions to three-dimensional static problems of the elasticity theory with mixed boundary conditions]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 4(4). pp. 1778–1780.
3. Goloskokov D.P., Danilyuk V.A. (2013) Modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya uprugikh tel s pomoshch'yu polinomov [Modeling of a stress-strain state of elastic bodies by means of polynomials]. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova*. 1. pp. 8–14.
4. Struzhanov V.V. (2004) O reshenii kraevykh zadach teorii uprugosti metodom ortogonal'nykh proektsiy [On the solving of edge problems of the elasticity theory using the orthogonal projections]. *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*. 12. pp. 89–100.
5. Agakhanov E.K., Magomedeminov N.S. (2007) Usloviya ekvivalentnosti vozdeystviy dlya peremeshcheniy [Conditions of the equivalence of impacts for displacements]. *Vestnik DGTU. Tekhnicheskije nauki – Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 12. pp. 27–28.
6. Fukalov A.A. (2015) Zadachi ob uprugom ravnesii sostavnykh tolstostennykh transversal'no-izotropnykh sfer, nakhodyashchikhsya pod deystviem massovykh sil i vnutrennego davleniya, i ikh prilozheniya [Problems on the elastic equilibrium of composite thick-walled transversally isotropic spheres under the action of mass forces and internal pressure, and their

- applications]. *XI Vserossiiskiy s"ezd po fundamental'nyim problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki. Kazan'*. pp. 3951–3953.
7. Levina L.V., Kuzmenko N.V. (2015) Obratnyy metod effektivnogo analiza sostoyaniya uprugogo tela ot massovykh sil iz klassa nepreryvnykh [An inverse method of effective analysis of an elastic body state from mass forces of a continuous type]. *XI Vserossiiskiy s"ezd po fundamental'nyim problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki. Kazan'*. pp. 2276–2278.
 8. Stankevich I.V. (2017) Matematicheskoe modelirovanie zadach teorii uprugosti s ispol'zovaniem MKE na osnove funktsionala Reyssnera [Mathematical simulation of elasticity theory problems using the ICE based on Reissner's functionality]. *Simvol nauki*. 4(2). pp. 21–25.
 9. Stankevich I.V. (2017) Chislennoe reshenie smeshannykh zadach teorii uprugosti s odnostoronnimi svyaziyami [Numerical solution of mixed problems of the theory of elasticity with one-sided constraints]. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie – Mathematics and Mathematical Modeling*. 5. pp. 40–53. DOI: 10.24108/mathm.
 10. Ponomareva M.A., Sobko E.A., Yakutenok V.A. (2015) Reshenie osesimmetrichnykh zadach teorii potentsiala nepryamym metodom granichnykh elementov [Solving axisymmetric potential problems using the indirect boundary element method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(37). pp. 84–96. DOI: 10.17223/19988621/37/8.
 11. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. (2001) Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineynoy mekhaniki [The method of boundary states for solving problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal*. 2(2). pp. 115–137.
 12. Kuz'menko V.I., Kuz'menko N.V., Levina L.V., Pen'kov V.B. (2019) A method for solving problems of the isotropic elasticity theory with bulk forces in polynomial representation. *Mechanics of Solids*. 54(5). pp. 741–749. DOI: 10.1134/S0032823519010053.
 13. Pen'kov V.B., Levina L.V., Novikova O.S. (2020) Analiticheskoe reshenie zadach elastostatiki odnosvyaznogo tela, nagruzhennogo nekonservativnymi ob'emnymi silami. Teoreticheskoe i algoriticheskoe obespechenie [Analytical solution of elastostatic problems of a simply connected body loaded with nonconservative volume forces: theoretical and algorithmic support]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki – Journal of Samara State Technical University, Series: Physical and Mathematical Sciences*. 24(1). pp. 56–73. DOI: 10.14498/vsgtu1711.
 14. Ivanychev D.A., Levina E.Yu. (2019) Solution of thermo elasticity problems for solids of revolution with transversal isotropic feature and a body force. *Journal of Physics: Conference Series*. 1348. Article 012058. pp. 1–15. DOI: 10.1088/17426596/1348/1/012058.
 15. Ivanychev D.A. (2019) The method of boundary states in solving problems of thermoelasticity in the presence of mass forces. *Proceedings of the 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA 2019*. pp. 83–87. DOI: 10.1109/SUMMA48161.2019.8947505.
 16. Ivanychev D.A., Levin M.Yu., Levina E.Yu. (2019) The boundary state method in solving the anisotropic elasticity theory problems for a multi-connected flat region. *TEST Engineering & Management*. 81. pp. 4421–4426.
 17. Ivanychev D.A., Levina E.Yu., Abdullakh L.S., Glazkova Yu.A. (2019) The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length. *International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies*. 10(2). pp. 183–191. DOI: 10.14456/ITJEMAST.2019.18.
 18. Aleksandrov A.Ya., Solov'ev Yu.I. (1978) *Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti (primenenie metodov teorii funktsii kompleksnogo peremennogo)* [Three-dimensional problems of the elasticity theory (application of methods of the theory of functions of a complex variable)]. Moscow: Nauka.
 19. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. (2001) Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineynoy mekhaniki [A method of boundary states for solving the problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal*. 2(2). pp. 115–137.

20. Lekhnitskiy S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [The elasticity theory for an anisotropic body]. Moscow: Nauka.
21. Satalkina L.V. (2007) Narashchivanie bazisa prostranstva sostoyaniy pri zhestkikh ogranicheniyakh k energoemkosti vychisleniy [Expansion of a state space basis under strong limitations for energy consumption of computations]. *Sbornik tezisov dokladov nauchnoy konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. pp. 130–131.
22. Levina L.V., Novikova O.S., Pen'kov V.B. (2016) Polnoparametricheskoe reshenie zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ogranichennogo tela [Full-parameter solution of the elasticity theory problem of a simply connected bounded body]. *Vestnik LGTU – Bulletin of LSTU*. 2(28). pp. 16–24.
23. Ivanychev D.A. (2019) Metod granichnykh sostoyaniy v reshenii vtoroy osnovnoy zadachi teorii anizotropnoy uprugosti s massovymi silami [The method of boundary states in the solution of the second fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 61. pp. 45–60. DOI: 10.17223/19988621/61/5.
24. Ivanychev D.A. (2019) Reshenie kontaktnoy zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnykh tel vrashcheniya s massovymi silami [The contact problem solution of the elasticity theory for anisotropic rotation bodies with mass forces]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 2. pp. 49–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05.

Received: March 16, 2020

УДК 531.3, 532.1

DOI 10.17223/19988621/71/7

А.Н. Ищенко, В.В. Буркин, А.С. Дьячковский, А.В. Чупашев**ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ
ИНЕРТНЫХ КОНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ВОДЕ¹**

Рассматривается высокоскоростное подводное движение осесимметричной инертной конической модели в суперкавитационном режиме обтекания. Получены экспериментальные данные изменения скорости моделей в зависимости от пути в воде, на основе этих данных апробирована расчетная методика определения скорости модели. Проведено сравнение экспериментальных контуров суперкаверн с расчетными, полученными с использованием известной методики расчета, и определены условия реализации движения в режиме суперкавитации. С использованием этих условий проведен расчет дальности суперкавитирующего движения при заданных начальной скорости, глубине залегания траектории и параметрах модели.

Ключевые слова: суперкавитация, высокоскоростное движение в воде, кавитатор, глубина, гидробаллистическая трасса

Сила сопротивления, возникающая при сплошном обтекании тела водой, является основным сдерживающим фактором при применении средств подводного метания. Однако возможно создать условия, при которых сплошность водной среды нарушается и за носовой частью модели формируется сильно разреженная газопаровая полость – каверна [1], существенно уменьшающая поверхность взаимодействия с водой, что позволяет повысить дальность движения модели. Если образовавшаяся полость превышает размеры модели, то ее называют суперкаверной, а само явление – суперкавитацией. Носовая часть модели (может иметь плоскую, круглую, коническую и пр. формы) называется кавитатором, от кромки которого происходит формирование свободных границ вокруг модели.

Как показывают экспериментальные фотографии, при устойчивом движении модели в режиме суперкавитации модель может кормовой частью кратковременно касаться внутренней поверхности суперкаверны, незначительно погружаясь в воду, т.е. наблюдается глиссирование [2]. При целенаправленном проектировании корпуса модели с учетом формы образуемой суперкаверны возможен отказ от других известных способов стабилизации (вращение, хвостовое оперение), так как помимо снижения тормозящего воздействия, внутренняя поверхность суперкаверны, по которой глиссирует корпус модели, ограничивает ее пространственный угол атаки, что является важным стабилизирующим фактором [3].

Движение высокоскоростных инертных тел в воде является важным направлением исследований научных коллективов различных стран [4–7] вследствие широкого круга возможных применений в промышленной и исследовательской деятельности.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-19-00233).

В данной работе рассматривается движение моделей в воде на высокой скорости (порядка сотен метров в секунду), которую они получают после разгона в стволе баллистической установки. Модели имеют большую собственную массу и должны обладать исключительной прочностью. Модели из стали относительно просты в изготовлении и имеют низкую себестоимость исходного материала, что делает их предпочтительными с точки зрения экономической целесообразности применения. Модели из сплава ВНЖ сложнее в изготовлении и имеют на порядок большую стоимость материала. Однако масса и кинетическая энергия такой модели аналогичной формы будет в два с лишним раза больше стальной при одинаковой начальной скорости. Следовательно, модели из ВНЖ должны проходить в воде более длинные дистанции.

Цель работы заключается в определении перспективной дальности суперкавитирующего движения инертных осесимметричных конических моделей разных масс в воде при различных глубинах залегания траектории.

Движение конической модели в суперкавитационном режиме обтекания

В зависимости от параметров среды и условий движения, форма образуемой суперкаверны может меняться, что осложняет проектирование универсальных моделей, способных двигаться под водой в режиме суперкавитации. Основным критерием подобия кавитационных течений является число кавитации

$$\sigma = \frac{2\Delta p}{\rho V^2}, \quad (1)$$

где V – скорость модели; ρ – плотность воды; Δp – разница между давлением в невозмущенной среде (p_∞) и давлением внутри каверны (p_c). Число кавитации можно рассматривать как отношение между энергией, способствующей сжатию каверны, и энергией, идущей на ее расширение. Среда внутри каверны сильно разрежена и давление в ней обычно близко к давлению насыщенного водяного пара [1, 8] (при н.у. $p_c = 2336.8$ Па). В невозмущенной толще воды давление p_∞ принимается равным гидростатическому давлению на глубине залегания траектории:

$$p_\infty = p_{\text{атм}} + \rho gh,$$

где $p_{\text{атм}}$ – давление на поверхности воды; g – ускорение свободного падения; h – высота столба жидкости. Чем меньше величина числа кавитации, тем кавитация считается более развитой.

Для того чтобы суперкавитационный режим движения модели в воде реализовался и сохранялся, требуется поддерживать условия, при которых число кавитации σ не превышает некоторой величины σ_{max} , при достижении которой контур каверны уменьшится и станет меньше размеров модели. На рис. 1 приведены примеры, соотносящие картину течения вокруг модели с различным числом кавитации: a – сплошное обтекание модели водой при $\sigma \geq 1$; b – пограничное состояние: контур каверны касается кормы модели при $\sigma = \sigma_{\text{max}}$ ($\sigma_{\text{max}} < 1$); c – суперкавитационный режим обтекания модели при $\sigma \ll 1$.

Таким образом, для определения дальности движения модели в воде в режиме суперкавитации необходимо определить длину пути, на протяжении которого условие $\sigma < \sigma_{\text{max}}$ будет сохраняться на заданной глубине залегания траектории.

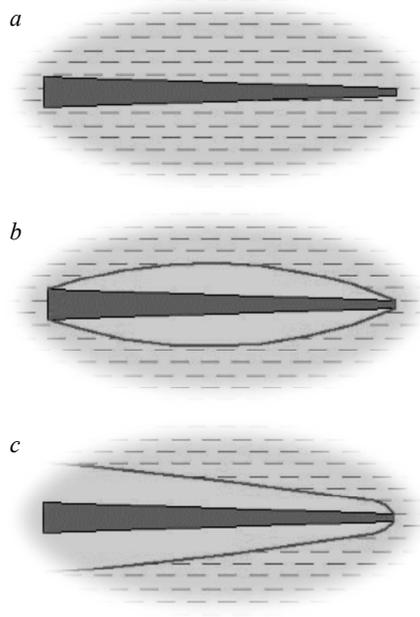


Рис. 1. Иллюстрации, поясняющие соответствие характера течения вокруг модели с числом кавитации: $a - \sigma \geq 1$; $b - \sigma = \sigma_{\max}$; $c - \sigma \ll 1$

Fig. 1. Visual representation of a correspondence between flow regime around a model and cavitation number: (a) $\sigma \geq 1$; (b) $\sigma = \sigma_{\max}$; and (c) $\sigma \ll 1$

Описание экспериментальной части работы

В ходе экспериментальных работ, проводимых на гидробаллистической трассе НИИ ПММ ТГУ [9], исследовалось движение в воде различных типов инертных суперкавитирующих моделей. Протяженность водной части траектории гидробаллистической трассы составляла 12 м. Метание модели производилось из гладкоствольной лабораторной баллистической установки в составе сборки, компоненты которой успевают отделиться на воздушном участке траектории перед входом модели в воду [10]. С применением математической модели и численной методики расчета внутрикамерных процессов [11] производился подбор состава и количества пороха метательного заряда. Расчет условий заряжания позволил провести метание моделей разных масс с начальными скоростями в диапазоне 300–1600 м/с.

В каждом опыте производилось измерение внутрибаллистических и внешне-траекторных параметров выстрела, включая дульную (начальную) скорость модели и ее пространственное положение на определенных участках траектории. Производилась высокоскоростная видеорегистрация быстропротекающих процессов и явлений, сопровождающих движение моделей в воде, по видеоматериалам определялась скорость движения моделей в воде и форма образуемых суперкаверн. Перед метанием производилось фотографирование, взвешивание модели, измерение ее геометрических размеров (длина, диаметр основания (кормы) и кавитатора) и нанесение масштабных маркеров.

На рис. 2 приведена фотография характерной модели, подготовленной к выстрелу, с частью пластикового ведущего устройства (а), а также последовательность фотографий (б), иллюстрирующая характерную картину движения этой модели в воде при суперкавитационном режиме обтекания ($\sigma = 5.38 \cdot 10^{-4}$).

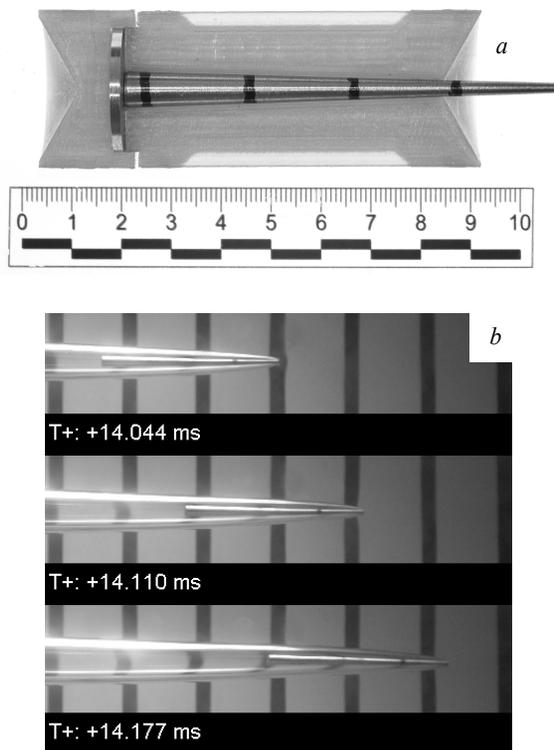


Рис. 2. Фотографии модели до выстрела в составе метаемой сборки (а) и движущейся в режиме суперкавитационного обтекания в воде при $\sigma = 5.38 \cdot 10^{-4}$ (б)

Fig. 2. Pictures of the model (а) as a part of the projectile assembly before firing and (б) when moving in a supercavitating flow regime in water at $\sigma = 5.38 \cdot 10^{-4}$

Определение условий реализации движения модели в режиме суперкавитации

При рассмотрении движения модели в режиме суперкавитационного обтекания, наибольший интерес представляет начальная часть каверны, ограниченная длиной корпуса самой модели. В общедоступной литературе существуют различные по сложности реализации и особенностям применения методики [1, 12–14], позволяющие построить профиль суперкаверны в зависимости от условий среды, параметров движения модели и радиуса ее кавитатора.

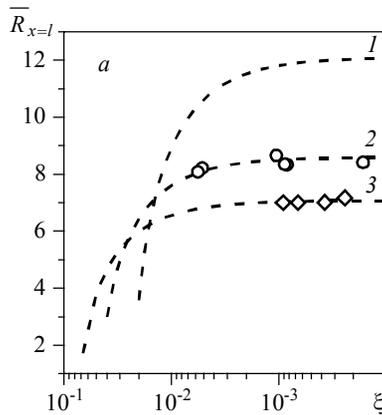
В данной работе полагается, что водная среда неподвижна, а движение модели осуществляется прямолинейно и параллельно горизонтальной оси, т.е. $\Delta p = const$.

В таком случае суперкаверну вокруг модели можно считать стационарной и осесимметричной относительно продольной оси и для построения ее приближенного контура можно воспользоваться полуэмпирической аппроксимацией [15]:

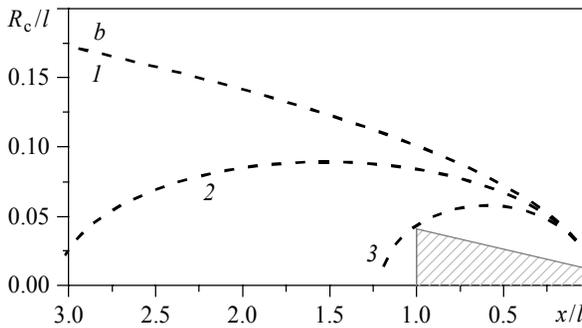
$$\bar{R}^2 = 3.659 + 0.847(\bar{x} - 2) - 0.236\sigma(\bar{x} - 2)^2, \quad \bar{x} \geq 2, \quad (2)$$

где $\bar{R} = R_c / R_n$; $\bar{x} = x / R_n$; R_c – радиус каверны в точке x ; R_n – радиус кавитатора; x – координата сечения каверны ($x = 0$ – положение кавитатора, $x = l$ – координата положения основания модели).

Так как самая широкая часть конической модели находится в ее основании, рассмотрим приведенные на рис. 3, а зависимости величины \bar{R} в точке $x = l$ от числа кавитации σ для случаев: 1 – $R_n = 0.5$ мм; 2 – $R_n = 1.0$ мм; 3 – $R_n = 1.5$ мм. Символами на рисунке обозначены экспериментальные данные.



1 – $R_n = 0.5$ мм; 2 – $R_n = 1.0$ мм; 3 – $R_n = 1.5$ мм



1 – $\sigma = 1.64 \cdot 10^{-4}$; 2 – $\sigma = 1.4 \cdot 10^{-2}$; 3 – $\sigma = 3.7 \cdot 10^{-2}$

Рис. 3. Графики, иллюстрирующие: а – зависимость размера профиля суперкаверны в хвостовой части модели от числа кавитации при различных радиусах кавитатора R_n ; б – профиль суперкаверны для $R_n = 1.0$ мм при различных числах кавитации
Fig. 3. Graphs illustrating: (a) a profile size of a supercavern in the tail part of the model as a function of the cavitation number at different cavitator radius R_n ; (b) a profile of the supercavern for $R_n = 1.0$ mm at different cavitation numbers

Характер приведенных зависимостей показывает, что при $\sigma \leq 1 \cdot 10^{-3}$ на размер профиля суперкаверны в основании модели основное воздействие оказывает радиус кавитатора R_n .

На рис. 3, б приведен профиль суперкаверны (согласно формуле (2)) для $R_n = 1.0$ мм при различных числах кавитации: $1 - \sigma = 1.64 \cdot 10^{-4}$; $2 - \sigma = 1.4 \cdot 10^{-2}$; $3 - \sigma = 3.7 \cdot 10^{-2}$.

Чтобы рассчитать дальность движения модели в режиме суперкавитации, требуется определить условия, при достижении которых движение в режиме суперкавитации прекратится. Максимальный радиус конусообразной модели достигается в ее хвостовой части. Обозначим минимально необходимый зазор между внутренней поверхностью суперкаверны и хвостовой частью модели (в точке $x = l$) как Δ , а радиус основания модели R_p . Тогда минимальный радиус суперкаверны в плоскости хвостовой части модели составит $R_p + \Delta$. Полагая в выражении (2) $R_c = R_p + \Delta$ и $x = l$, получим соотношение для σ_{\max} , при котором зазор между основанием конуса модели и внутренней поверхностью каверны будет равен Δ :

$$\sigma_{\max} = \frac{3.659 + 0.847(\bar{x} - 2) - \bar{R}^2}{0.236(\bar{x} - 2)^2}, \quad (3)$$

где $\bar{R} = (R_p + \Delta) / R_n$, $\bar{x} = l / R_n$.

Полагая в выражении (1) $\sigma = \sigma_{\max}$, а глубину $h = const$, получим выражение для минимального значения скорости модели (V_{\min}), при котором на данной глубине вокруг рассматриваемой модели реализуется суперкавитирующий режим обтекания:

$$V_{\min} = \sqrt{\frac{2(p_{\text{atm}} + \rho gh - p_c)}{\rho \sigma_{\max}}}. \quad (4)$$

Таким образом, определение горизонтальной дальности движения модели в воде в режиме суперкавитирующего обтекания сводится к определению расстояния, преодолев которое в воде скорость модели снизится от V_0 до V_{\min} .

Движение модели в условиях суперкавитационного обтекания

Предполагается, что при стабилизированном движении в режиме суперкавитации величина силы тормозящего воздействия на модель в результате трения, возникающего вследствие кратковременных касаний осесимметричным корпусом модели внутренней поверхности каверны, много меньше величины силы сопротивления, действующей на кавитатор модели. Тогда, с учетом малости пространственных углов атаки модели (они ограничены внутренней поверхностью суперкаверны), процесс ее движения в режиме суперкавитации будем рассматривать как движение плоского диска с радиусом R_n и массой m , обтекаемого с развитой кавитацией вдоль оси симметрии. В таком случае, выражение для силы сопротивления со стороны идеальной несжимаемой жидкости имеет вид

$$F_c = C_x \frac{\pi \rho R_n^2 V^2}{2},$$

где C_x – коэффициент сопротивления диска (при обтекании в нормаль к невозмущенному потоку и $\sigma \ll 1 - C_x \approx 0.82$ [1]). Подразумевается, что траектория движения модели прямолинейна и параллельна поверхности воды. В таком случае, уравнение ее движения можно привести к виду

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\pi\rho C_x R_n^2}{2m} V^2.$$

Решение данного уравнения относительно пути можно записать как

$$L = m \frac{2}{\pi\rho C_x R_n^2} \ln \frac{V_0}{V}, \quad (5)$$

где L – путь, за который скорость модели снизится от V_0 до V .

На рис. 4 приведен ряд экспериментальных (символы) и рассчитанных (линии) по формуле (5) графиков изменения скорости от перемещения в воде для моделей различных масс и конфигураций, движущихся в режиме суперкавитации.

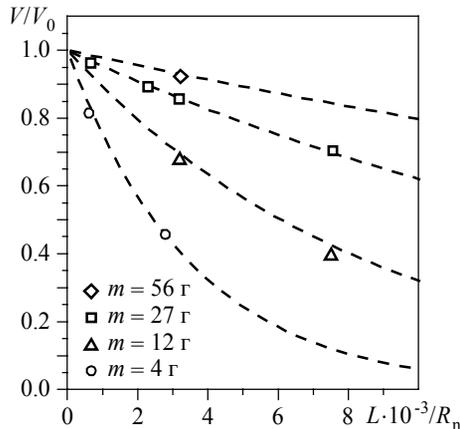


Рис. 4. Зависимость изменения скорости от пути в воде для различных моделей, движущихся в суперкавитационном режиме обтекания

Fig. 4. Velocity variation with distance in water for different models moving in a supercavitation flow regime

Сравнение, приведенное на рис. 4, демонстрирует хорошее согласование экспериментальных данных с расчетными значениями, что говорит о корректности принятых допущений и применимости методики в целом к данным типам моделей и условиям, реализованным в рамках гидробаллистической трассы. Учитывая малый размер исследуемых моделей, можно предполагать, что движение в лабораторных условиях гидробаллистического стенда не должно принципиально отличаться от движения во внешней среде. Тогда, полагая в (5) $V = V_{\min}$, можно определить время или путь, который преодолит модель в режиме суперкавитирующего обтекания.

Расчет перспективной дальности движения модели в условиях суперкавитационного обтекания

Исходя из условий применения, рассматриваемая коническая модель (рис. 1, а) имеет фиксированный максимальный радиус в основании $R_p = 3.5$ мм и длину $l = 85$ мм. Усекаемая носовая часть модели может иметь различный радиус R_n . Рассматривается горизонтальное движение данных моделей в воде в диапазоне глубин $h = 0.25\text{--}200$ м и начальных скоростей $V_0 \leq 1000$ м/с. Возможность движе-

ния таких моделей из стали ($m = 12$ г) и из сплава ВНЖ ($m = 27$ г) в рассматриваемом диапазоне скоростей ранее была показана экспериментально [16, 17].

На рис. 5 приведены графики, показывающие зависимость минимальной скорости V_{\min} , необходимой для обеспечения движения данной модели в режиме суперкавитации, от глубины залегания траектории h для случаев: 1 – $R_n = 1.0$ мм; 2 – $R_n = 0.75$ мм; 3 – $R_n = 0.5$ мм. Минимальный зазор между основанием модели и внутренней поверхностью каверны полагался $\Delta = 1$ мм.

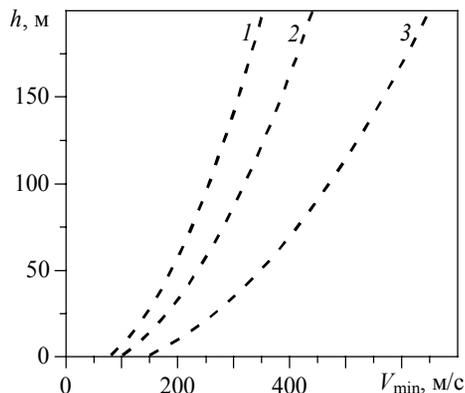


Рис. 5. Зависимость минимальной скорости, при которой сохраняется суперкавитационный режим обтекания, от глубины залегания траектории для модели с радиусом кавитатора: 1 – $R_n = 1.0$ мм; 2 – $R_n = 0.75$ мм; 3 – $R_n = 0.5$ мм

Fig. 5. Dependence of the minimum velocity, which provides a supercavitation flow regime, on the depth of a trajectory location for a model with a cavitator radius: $R_n = (1)$ 1.0; (2) 0.75; and (3) 0.5 mm

Из графика видно, что при суперкавитирующем режиме движения в воде, модель обладает значительным запасом скорости, следовательно, и кинетической энергии вплоть до самого конца движения в этом режиме. Например, для модели с радиусом кавитатора $R_n = 0.5$ мм на глубине $h = 0.25$ м минимальная скорость движения, необходимая для поддержания движения в режиме суперкавитации $V_{\min} = 150$ м/с, а на глубине $h = 200$ м – $V_{\min} = 650$ м/с.

Согласно выражению (5), путь (L), преодолеваемый моделью, пропорционален собственной массе (m). Поэтому, чтобы рассмотреть влияние глубины залегания траектории на дальность движения модели, на рис. 6 показаны расчетные зависимости дальности движения модели в режиме суперкавитации, отнесенной к массе модели (L/m) от начальной скорости (V_0) для различных глубин (h) залегания траектории: 1 – $h = 0.25$ м, 2 – $h = 10$ м, 3 – $h = 50$ м, 4 – $h = 200$ м. Расчеты производились для моделей с радиусами кавитаторов: а – $R_n = 1.0$ мм; б – $R_n = 0.75$ мм; в – $R_n = 0.5$ мм.

Из графиков следует, что при движении у поверхности воды ($h = 0.25$ м), уменьшение радиуса кавитатора в 2 раза (от $R_n = 1.0$ мм до $R_n = 0.5$ мм) приводит к приросту дальности движения модели во всем рассматриваемом диапазоне скоростей (в частности, при $V_0 = 1000$ м/с прирост дальности составит 3 раза). Однако при погружении на глубину $h = 200$ м прирост дальности движения, вызванный таким же уменьшением радиуса кавитатора, будет наблюдаться только при начальных скоростях (V_0) более 800 м/с (при $V_0 = 1000$ м/с прирост дальности составит 1.65 раза).

Расчет, приведенный на рис. 6, с показывает, что у поверхности воды ($h = 0.25$ м) при скорости старта $V_0 = 1000$ м/с модель с $R_n = 0.5$ мм из сплава ВНЖ ($m = 27$ г) в режиме суперкавитации преодолеет 162 м, из стали ($m = 12$ г) – 72 м. На глубине $h = 200$ м дальность движения моделей сократится и составит 36 и 16 м соответственно.

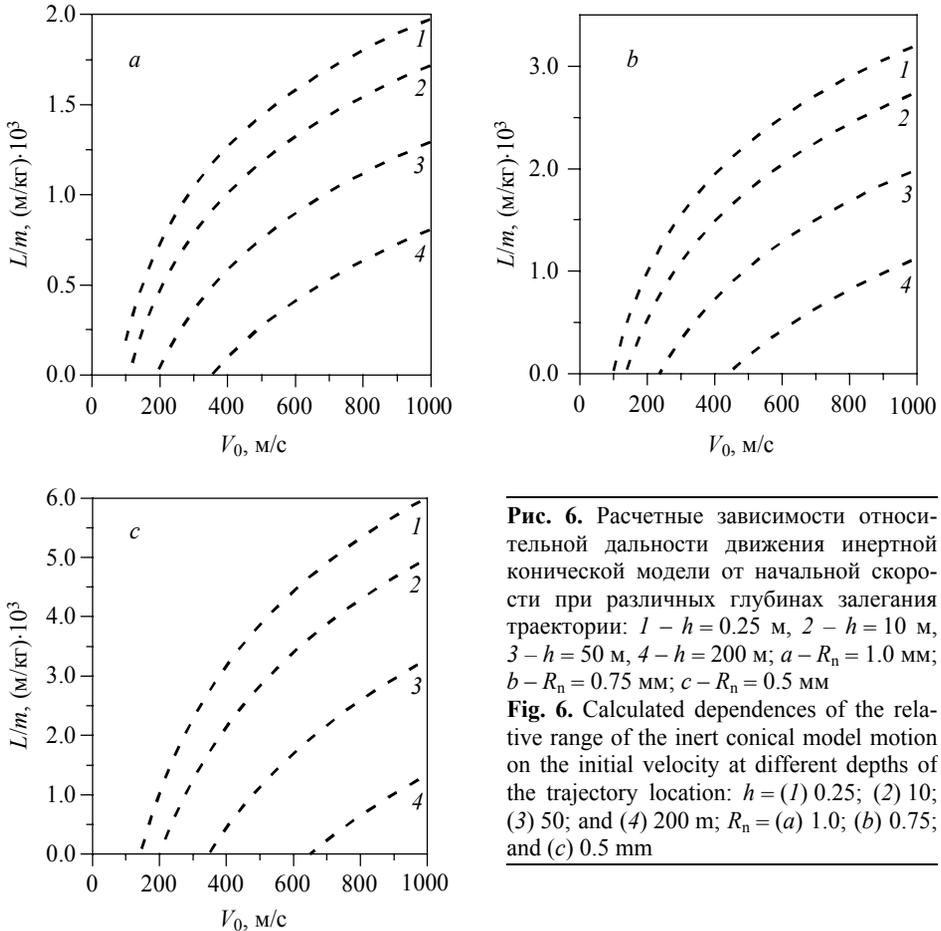


Рис. 6. Расчетные зависимости относительной дальности движения инертной конической модели от начальной скорости при различных глубинах залегания траектории: 1 – $h = 0.25$ м, 2 – $h = 10$ м, 3 – $h = 50$ м, 4 – $h = 200$ м; а – $R_n = 1.0$ мм; б – $R_n = 0.75$ мм; в – $R_n = 0.5$ мм

Fig. 6. Calculated dependences of the relative range of the inert conical model motion on the initial velocity at different depths of the trajectory location: $h = (1) 0.25$; (2) 10; (3) 50; and (4) 200 m; $R_n = (a) 1.0$; (b) 0.75; and (c) 0.5 mm

Для более точного определения параметров модели и условий старта, среди прочего следует учитывать прочность конструкции модели и механику ее глиссирования внутри суперкаверны, что выходит за рамки данной работы. Кроме того, более детальный расчет необходимо производить исходя из возможности конкретной метательной установки, потому что, как видно из расчетов (рис. 5, 6), для сохранения дальности движения модели при увеличении глубины залегания траектории требуется повышать массу и начальную скорость модели.

Заключение

Сравнение расчетных и экспериментальных результатов, полученных в условиях гидробаллистического стенда, показывает, что движение модели в режиме суперкавитационного обтекания в первом приближении можно рассматривать как движение плоского диска, обладающего массой модели, обтекаемого с развитой кавитацией в нормаль к поверхности. Получены условия реализации суперкавитирующего движения конических инертных моделей в воде. Исходя из этого, был произведен расчет перспективной дальности горизонтального движения конических инертных моделей разных масс и радиусов кавитаторов в режиме суперкави-

тации под водой на глубинах до 200 м включительно. Установлено, что уменьшение радиуса кавитатора не всегда положительно сказывается на дальности движения инертной модели. При движении у поверхности воды ($h = 0.25$ м), уменьшение радиуса кавитатора в 2 раза (от $R_n = 1.0$ мм до $R_n = 0.5$ мм) приводит к приросту дальности движения модели во всем рассматриваемом диапазоне скоростей. Однако при увеличении глубины до $h = 200$ м прирост дальности движения, вызванный таким же уменьшением радиуса кавитатора рассматриваемой модели, будет наблюдаться только при начальных скоростях от 800 м/с и выше.

Получено, что у поверхности воды ($h = 0.25$ м) при скорости старта $V_0 = 1000$ м/с рассматриваемая модель с $R_n = 0.5$ мм из сплава ВНЖ ($m = 27$ г) в режиме суперкавитации преодолет 162 м, из стали ($m = 12$ г) – 72 м, а при $h = 200$ м дальность движения моделей сократится до 36 и 16 м соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Логвинович Г.В. Некоторые вопросы глиссирования и кавитации // Труды ЦАГИ. 1980. № 2052. С. 250–270.
2. Ищенко А.Н., Акиншин Р.Н., Афанасьева С.А. и др. Исследование высокоскоростного движения суперкавитирующих тел в воде и их взаимодействия с подводными преградами // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2015. Т. 8. № 4. С. 8–14.
3. Савченко Г.Ю., Савченко Ю.Н. Глиссирование цилиндра в суперкаверне // Прикладная гидромеханика. 2013. Т. 15. № 3. С. 79–84.
4. Yang D., Xiong Y. and Guo X. Drag reduction of a rapid vehicle in supercavitating flow International // International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering. 2017. V. 9. No. 1. P. 5–44.
5. Guo Z., Zhang W., Xiao X., Wei G. and Ren P. An investigation into horizontal water entry behaviors of projectiles with different nose shapes // International Journal of Impact Engineering. 2012. V. 49. P. 43–60.
6. Ahn S.S. An integrated approach to the design of supercavitating underwater vehicles: Ph.D Thesis. Georgia Institute of Technology, 2007.
7. Vlasenko Y. Experimental investigation of supercavitation flow regimes at subsonic and transonic speeds // Proc. In Fifth Int. Symp. on Cavitation (Osaka, Japan) 2003. Cav03-GS-6-006.
8. Пирсол И. Кавитация: пер. с англ. Ю.Ф. Журавлева. М.: Мир, 1975. 95 с.
9. Буркин В.В., Акиншин Р.Н., Афанасьева С.А., Борисенков И.Л., Ищенко А.Н., Хабибуллин М.В., Чунашев А.В., Югов Н.Т. Особенности высокоскоростного проникания и движения суперкавитирующих кинетических ударников в воде // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91. № 3. С. 701–708.
10. Буркин В.В., Ищенко А.Н., Майстренко И.В. и др. Гидробаллистический стенд. Патент на изобретение № 2683148 РФ, G01M 10/00 (2006.01), F41F 3/07 (2006.01). Опубл. 26.03.2019.
11. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 1999. 255 с.
12. Савченко Ю.Н., Власенко Ю.Д., Семенов В.Н. Экспериментальные исследования высокоскоростных кавитационных течений // Гидромеханика. 1998. № 72. С. 103–111.
13. Васин А.Д. Задачи гидродинамики и гидроупругости высокоскоростного движения в воде: диссертация. Государственный научно-исследовательский центр ЦАГИ, 1999. 282 с.
14. Шахтин А.А. Численный метод расчета суперкаверн // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. Т. 2. № 22. С. 105–109.
15. Савченко Ю.Н. Моделирование суперкавитационных процессов // Прикладная гидромеханика. 2000. Т. 2. № 3. С. 75–86.

16. *Ischenko A.N., Burkin V.V., Diachkovskiy A.S., Chupashev A.V.* Researching acceleration and deceleration processes of supercavitating strikers under the conditions of hydroballistic track // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. V. 1709. P. 012014-1–012014-9. DOI: 10.1088/1742-6596/1709/1/012014.
17. *Ищенко А.Н., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Майстренко И.В., Рогаев К.С., Саммель А.Ю., Чупашев А.В.* Одиночное и совместное движение суперкавитирующих ударников в сверхзвуковом режиме в воде // *Письма в ЖТФ*. 2020. Т. 46. № 23. С. 22–24.

Статья поступила 25.03.2021

Ishchenko A.N., Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Chupashev A.V. (2021) INVESTIGATION OF UNDERWATER MOTION PARAMETERS FOR INERT CONICAL MODELS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 71. pp. 78–89

DOI 10.17223/19988621/71/7

Keywords: supercavitation, high-speed underwater motion, cavitator, depth, hydroballistic track.

This paper considers high-speed underwater motion of an axisymmetric inert conical model in a supercavitation flow regime. Experimental data on the model velocity variation with distance in water are obtained. Based on these data, a computational method, which is developed to determine the model velocity, is validated. A comparison of the calculated and experimental results obtained in a hydroballistic track shows that, in the first approximation, the motion of the model in a supercavitating flow regime can be considered as the motion of a flat disk having a mass and being streamed around at the developed cavitation directed normally to the surface. Experimental contours of supercaverns are compared with those calculated using the known computational methodology. The conditions ensuring supercavitation motion of the inert conical models in water are determined. As a result, the extended range of the horizontal motion is calculated for the inert conical models moving in a supercavitation regime under water at a depth up to 200 m at given initial velocity, depth of the trajectory location, and model parameters. It is found that reducing of a cavitator radius does not always have a positive effect on the range of the inert model motion.

Financial support. The research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-19-00233).

Aleksandr N. ISHCENKO (Doctor of Physics and Mathematics, Director, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Viktor V. BURKIN (Candidate of Physics and Mathematics, Head of 71 Department, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: v.v.burkin@mail.ru

Aleksey S. D'YACHKOVSKIY (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lex_okha@mail.ru

Andrey V. CHUPASHEV (Junior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: chupashev@gmail.com

REFERENCES

1. Logvinovich G.V. (1980) Nekotorye voprosy glissirovaniya i kavitatsii [Some issues of planing and cavitation]. *Trudy TSAGI*. 2052. pp. 250–270.
2. Ishchenko A.N., Akinshin R.N., Afanas'eva S.A., Borisenkov I.L., Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Monakhov R.Yu., Rodionov A.A., Khabibullin M.V. (2015) Issledovanie vysokoskorostnogo dvizheniya superkavitiruyushchikh tel v vode i ikh vzaimodeystviya s podvodnymi pregradami [Research on high-speed motion of supercavitating bodies in water and their interaction with underwater barriers]. *Fundamental'naya i prikladnaya gidrofizika – Fundamental and Applied Hydrophysics*. 8(4). pp. 8–14.
3. Savchenko G.Yu., Savchenko Yu.N. (2013) Glissirovanie tsilindra v superkaverne [Planing of a cylinder in a supercavern]. *Prikladna gidromekhanika – Applied Hydromechanics*. 15(3). pp. 79–84.
4. Yang D., Xiong Y., Guo X. (2017) Drag reduction of a rapid vehicle in supercavitating flow. *International Journal Naval Architecture Ocean Engineering*. 9(1). pp. 35–44. DOI: 10.1016/j.ijnaoe.2016.07.003.
5. Guo Z., Zhang W., Xiao X., Wei G., Ren P. (2012) An investigation into horizontal water entry behaviors of projectiles with different nose shapes. *International Journal Impact Engineering*. 49. pp. 43–60. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2012.04.004.
6. Ahn S.S. (2007) *An Integrated Approach to the Design of Supercavitating Underwater Vehicles*. Dissertation. Georgia: Institute of Technology.
7. Vlasenko Y. (2003) Experimental investigation of supercavitation flow regimes at subsonic and transonic speeds. *Proceedings of the 5th International Symposium on Cavitation. Osaka, Japan*.
8. Piersol I. (1975) *Kavitatsiya* [Cavitation]. Moscow: Mir.
9. Burkin V.V., Akinshin R.N., Afanas'eva S.A., Borisenkov I.L., Ishchenko A.N., Khabibullin M.V., Chupashev A.V., Yugov N.T. (2018) Features of high-velocity penetration and motion of supercavitating kinetic strikers in water. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 91(3). pp. 655–662. DOI: 10.1007/s10891-018-1787-y.
10. Burkin V.V., Ishchenko A.N., Maystrenko I.V., Fufachev V.M., D'achkovskiy A.S., Burakov V.A., Korol'kov L.V., Stepanov E.Yu., Chupashev A.V., Rogaev K.S., Sammel' A.Yu., Sidorov. A.D. (2019) *Gidroballisticheskiy stend* [A hydroballistic stand]. RF Patent № 2683148.
11. Khomenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999) *Matematicheskoe modelirovanie vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematical simulation of intraballistic processes in barrel systems]. Novosibirsk: SB RAS Publishing House.
12. Savchenko Yu.N., Vlasenko Yu.D., Semenenko V.N. (1998) Eksperimental'nye issledovaniya vysokoskorostnykh kavitatsionnykh techeniy [Experimental studies of high-speed cavitation flows]. *Gidromekhanika*. 72. pp. 103–111.
13. Vasin A.D. (1999) *Zadachi gidrodinamiki i gidrouprugosti vysokoskorostnogo dvizheniya v vode* [Problems of hydrodynamics and hydroelasticity of high-speed motion in water]. Dissertation. Gosudarstvennyy nauchno-issledovatel'skiy tsentr TSAGI.
14. Shakhtin A.A. (2013) Chislennyy metod rascheta superkavern [Numerical analysis of supercavitation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(22). pp. 105–109.
15. Savchenko Yu.N. (2000) Modelirovanie superkavitatsionnykh protsessov [Modeling of supercavitation processes]. *Prikladnaya gidromekhanika – Applied Hydromechanics*. 2(3). pp. 75–86.
16. Ischenko A.N., Burkin V.V., Diachkovskiy A.S., Chupashev A.V. (2020) Researching acceleration and deceleration processes of supercavitating strikers under the conditions of hydroballistic track. *Journal of Physics: Conference Series*. 1709. Article 012014. pp. 1–9. DOI: 10.1088/1742-6596/1709/1/012014.
17. Ishchenko A.N. Burkin, V.V. Diachkovskii A.S., Maystrenko I.V., Rogaev K.S., Sammel A.Yu., Chupashev A.V. (2020) Single and joint movement of supercavitating strikers in the supersonic mode in water. *Technical Physics Letters*. 46. pp. 1177–1179. DOI: 10.1134/S1063785020120081.

УДК 519.63
DOI 10.17223/19988621/71/8

А.Е. Кирюшкин, Л.Л. Миньков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВНУТРИКАМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ В РАКЕТНОМ ДВИГАТЕЛЕ НА ТВЕРДОМ ТОПЛИВЕ С УЧЕТОМ ДВИЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ГОРЕНИЯ¹

Рассматривается численное решение задачи определения параметров течения продуктов сгорания с учетом изменения поверхности горения с течением времени на основном участке работы РДТТ с зарядом осесимметричной формы, имеющем особенность в виде «зонтика». Для данной конфигурации двигателя произведены расчеты параметров внутрикамерных течений продуктов сгорания на основном участке работы с использованием разработанного численного алгоритма. Исследована аппроксимационная сходимость решения задачи как для случая неподвижной поверхности горения топлива, так и для случая движущейся поверхности горения топлива в течение всего времени работы двигателя. Приводятся результаты численного моделирования для разных углов наклона «зонтика».

Ключевые слова: *ракетный двигатель на твердом топливе (РДТТ), метод уровней, обратный метод Лакса – Вендроффа, численное моделирование, внутренняя баллистика, газовая динамика.*

К настоящему времени применительно к отдельным исследуемым процессам (внутренняя баллистика, газодинамика, прочность и др.) разработан достаточно мощный математический аппарат, и на его основе созданы современные пакеты прикладных программ. Тем не менее на практике довольно часто встречаются ситуации, когда параметры РДТТ, полученные в результате натурных испытаний, заметно отличаются от прогнозируемых параметров. Попытки уточнить прогнозируемые характеристики за счет применения численных схем более высокого порядка, более мелких вычислительных сеток, уменьшения шагов интегрирования и т.д. не всегда дают желаемый результат. В этих случаях к положительному результату приводит, как правило, построение математических моделей, учитывающих взаимное влияние процессов различной физической природы, которые формулируются в виде сопряженных задач [1].

Например, для задачи определения параметров течения продуктов сгорания с учетом изменения поверхности горения с течением времени на основном участке работы РДТТ, решение которой рассматривается в данной работе, имеют место, по крайней мере, два взаимовлияющих процесса различной физической природы: горение поверхности топлива и газодинамические процессы движения образовавшихся продуктов сгорания.

Как правило, современные РДТТ имеют заряды сложной формы, характеризующиеся трехмерной либо осесимметричной геометрией. Течение газов внутри камеры сгорания может носить сложный характер: возможно наличие пульсаций давления, образование вихревых структур и пр. [2] На данный момент в открытых

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90033

источниках преобладают работы, учитывающие сложную геометрию заряда, но предполагающие либо нульмерность, либо одномерность течения продуктов сгорания [1, 3–6]. Для некоторых конфигураций РДТТ такой подход может давать приемлемый результат, однако в общем случае проблематично адекватно описать сложные двумерные или трехмерные процессы течения с помощью нульмерного или одномерного приближения.

Учет многомерности течения продуктов сгорания осложняется отслеживанием изменяющегося со временем положения поверхности топлива, которое изначально нельзя предсказать, так как оно в общем случае зависит от параметров течения внутри камеры сгорания. Движение трехмерной и осесимметричной поверхностей может сопровождаться топологическими изменениями, что значительно затрудняет алгоритмы интегрирования. Одним из возможных способов решения данной задачи является неявное представление отслеживаемой поверхности в виде нулевого уровня некоторой функции [7]. Такой способ представления позволяет определять положение любой поверхности, изменяющейся со временем, на достаточно мелкой декартовой сетке.

Если неявное задание и отслеживание поверхности расчетной области на декартовой сетке не должно вызывать проблем в реализации, то при дискретизации уравнений, описывающих течение внутри области, могут возникнуть трудности. А именно, граница области не совпадает в общем случае с вычислительной декартовой сеткой, и для точек, находящихся рядом с границей, часть шаблона численной схемы лежит вне области.

В данной статье используется численный алгоритм, разработанный авторами [8–10], который позволяет преодолеть вышеописанные трудности с дискретизацией уравнений течения и обладает, в общем случае, произвольным порядком точности, как по пространству, так и по времени. Для неявного представления поверхности используется метод уровней. Для задания значений параметров в фиктивных точках используется обратный метод Лакса – Вендроффа [11–13]. Для интегрирования по времени используется метод Рунге – Кутты [14, 15].

Физическая постановка задачи

На рис. 1 приведено схематичное изображение РДТТ, состоящего из цилиндрической камеры сгорания 1 (длиной L и радиусом R_k), прочно скрепленного заряда твердого топлива 2 с прямым центральным каналом радиуса R_0 и радиальным «зонтиком» 4, расположенным на расстоянии l от передней стенки камеры сгорания, имеющим высоту H и ширину h . Камера сгорания замыкается соплом 3 с радиусом критического сечения $r_{кр}$.

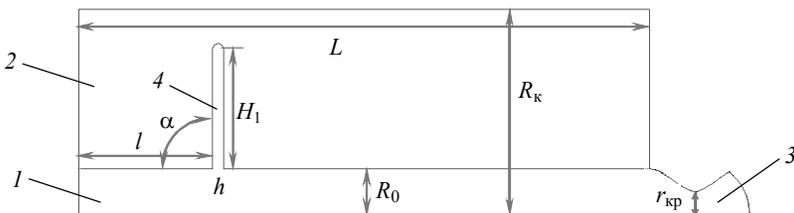


Рис. 1. Геометрические параметры расчетной области
Fig. 1. Geometric parameters of a computational domain

В начальный момент времени происходит зажигание поверхности твердого топлива, а затем последующее его горение, которое сопровождается образованием газообразных продуктов сгорания, истекающих под действием перепада давления через сопло в окружающую среду.

Для упрощения математического описания физических процессов в камере сгорания РДТТ использовались следующие допущения:

1) Зажигание всей поверхности топлива от воспламенителя происходит мгновенно и одновременно.

2) Массовая скорость горения зависит от давления по закону $\rho u_n = m_p p^\nu$.

3) Линейная скорость горения равна отношению массовой скорости горения к плотности топлива $u_b = m_p p^\nu / \rho_T$.

4) Топливо гомогенное и образующиеся продукты сгорания представляют собой однофазную среду.

5) Образовавшийся газ считается невязким и идеальным в термодинамическом смысле.

6) Поле течения продуктов сгорания обладает осевой симметрией.

7) Время релаксации камеры сгорания много меньше характерного времени горения заряда топлива.

Из допущений 2 и 3 видно, что скорость горения в общем случае для каждой точки поверхности горящего топлива различна и зависит от давления, которое может существенно меняться вдоль оси канала. Предположение 7 обеспечивает значительное ускорение времени расчетов при численной реализации, о чем подробнее будет сказано далее.

Математическая постановка задачи течения продуктов сгорания

Для описания течения внутри камеры сгорания и соплового блока используются уравнения Эйлера, которые с учетом осевой симметрии запишутся как

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (1)$$

где $\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T$; $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uH)^T$; $\mathbf{G}(\mathbf{U}) = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vH)^T$; $\mathbf{S}(\mathbf{U}) = -1/y(\rho v, \rho uv, \rho v^2, \rho vH)^T$; x и y – осевая и радиальная координаты; ρ , u , v , p – плотность, осевая и радиальная составляющие скорости и давление; $E = p/[(k-1)\rho] + 0.5(u^2 + v^2)$ – полная энергия; $H = E + p/\rho$ – энтальпия, а k – показатель адиабаты.

Начальные условия, записанные в векторной форме, имеют вид

$$(p(0, x, y), \rho(0, x, y), u(0, x, y), v(0, x, y))^T = (p_0, \rho_0, 0, 0)^T. \quad (2)$$

Для данной задачи имеется 4 типа границ, отмеченных на рис. 2: твердая стенка – 1, ось симметрии – 2, выходная граница – 3, поверхность горения – 4. Область, соответствующая топливу, заштрихована.

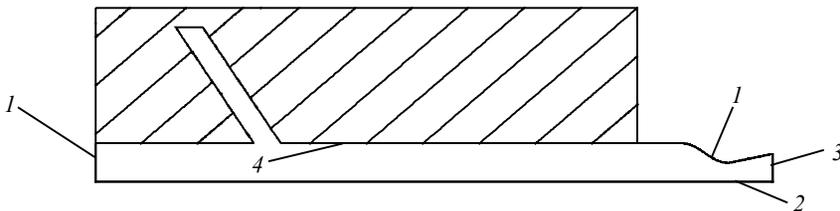


Рис. 2. Схематическое изображение расчетной области
Fig. 2. Schematic representation of the computational domain

Граничные условия для каждого типа границы записываются следующим образом:

$$u_n = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = 0; \tag{4}$$

$$p = p^*; \tag{5}$$

$$\rho u_n = m_p v; \tag{6}$$

$$u_\tau = 0; \tag{7}$$

$$H = H_0, \tag{8}$$

где под u_n и u_τ понимается нормальная и тангенциальная составляющие скорости соответственно. На твердой стенке задается условие непротекания (3); на оси симметрии предполагается равенство нулю нормальной составляющей вектора скорости газа (3) и равенство нулю производных по нормали для всех других газодинамических параметров течения (4); на выходной границе в случае дозвукового истечения задается постоянное давление (5), а в случае сверхзвукового истечения граничные условия не ставятся; на поверхности горящего топлива задается приход массы газа (6), предполагается равенство нулю тангенциальной составляющей скорости (7) и задается полная энтальпия продуктов сгорания (8).

Математическая постановка задачи изменения формы и геометрии расчетной области

Уравнения (1) решаются в области Ω , которая ограничена неподвижными границами 1 – 3 и изменяющейся со временем поверхностью горения топлива 4, рис. 2. При этом скорость горения твердого топлива (скорость движения подвижной поверхности) зависит от параметров течения в камере сгорания, которые, в свою очередь, зависят от положения границы твердого топлива. Таким образом, имеется взаимозависимость положения границы области и распределения параметров течения продуктов сгорания внутри области, разделить решение геометрической и газодинамической задач не представляется возможным, и эти задачи следует решать совместно.

Рассмотрим уравнение, описывающее положение подвижной поверхности в момент времени t :

$$\varphi(x, y, t) = 0. \tag{9}$$

Пусть все точки, удовлетворяющие уравнению (9) в некоторый момент времени t , лежат на поверхности рассматриваемой области $\Omega(t)$. Тогда из условия $\frac{d\varphi(x, y, t)}{dt} = 0$, получаемого при условии, что $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где под $\frac{d}{dt}$ понимается субстанциальная производная, следует дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию подвижной границы:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = 0. \tag{10}$$

В уравнении (10) производные координат по времени есть не что иное, как скорость движения границы:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u_x, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = u_y.$$

Учитывая, что для задач внутренней баллистики при рассмотрении границ горящего топлива тангенциальная составляющая скорости газа u_τ равна нулю, то уравнение (10) можно переписать в более удобном виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u_n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right| = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) является разновидностью уравнений Гамильтона – Якоби, которые имеют сходные особенности с гиперболическими уравнениями, и должно быть дополнено начальным условием

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y). \quad (12)$$

Скорость перемещения поверхности горения задается в виде

$$u_n |_{\varphi(x,y,t)=0} = \begin{cases} u_b, \varphi(x, y, t) \in \Sigma, \\ 0, \varphi(x, y, t) \notin \Sigma, \end{cases} \quad (13)$$

где Σ – поверхность горения топлива в момент времени t , а u_b – скорость горения топлива в данной точке.

На функцию $\varphi(x, y, t)$ накладываются определенные ограничения: она должна быть непрерывна и хотя бы один раз дифференцируема. Из этих условий следует, что внутри области решения системы уравнений (1) функция $\varphi(x, y, t)$ не меняет знак. Можно положить, что она в этой области строго отрицательна.

Тогда полная математическая постановка задачи будет состоять из уравнений (1), (9) с начальными условиями для них (2), (12), причем система уравнения (1) решается в области, где $\varphi(x, y, t) < 0$. Для системы уравнений (1) граничные условия для различных типов границ имеют вид (3) – (8) при $\varphi(x, y, t) = 0$. Скорость перемещения горячей поверхности определяется выражением (13).

Численная реализация

Поскольку численная реализация полученных уравнений газовой динамики и метода уровней подробно описана в работах [8–10], то далее будут приведены лишь основные этапы алгоритма расчета.

Вычислительная область покрывается однородной декартовой сеткой с постоянными шагами $\Delta x = h_x$ и $\Delta y = h_y$, а граница области в общем случае не совпадает ни с одной из координатных линий. Тогда полудискретная аппроксимация уравнений газовой динамики (1) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{U}_{i,j}) = -\frac{1}{h_x}(\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}) - \frac{1}{h_y}(\mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}) + \mathbf{S}_{i,j}, \quad (14)$$

где (x_i, y_j) – точка, лежащая внутри области; $\mathbf{F}_{i+1/2,j}$, $\mathbf{G}_{i,j+1/2}$ – численные значения газодинамических потоков. Схематичное изображение области и шаблонов для нахождения потоков изображены на рис. 3.

На рис. 3 показано, что часть точек шаблона может выходить за расчетную область. Такие точки будем называть фиктивными. Для корректной работы схемы (14) следует задать определенные значения параметров течения в фиктивных точках. Алгоритм задания значений параметров в фиктивных точках, разработанный С.-В. Шу, называется обратной процедурой Лакса – Вендроффа и подробно описан в работах [11–13]. Он заключается в построении полинома требуемого порядка и модификации получившихся коэффициентов с использованием граничных

условий. Данная процедура является основополагающей в разработанном численном алгоритме, и особенности ее применения к задачам внутренней баллистики детально описаны в [8–10].

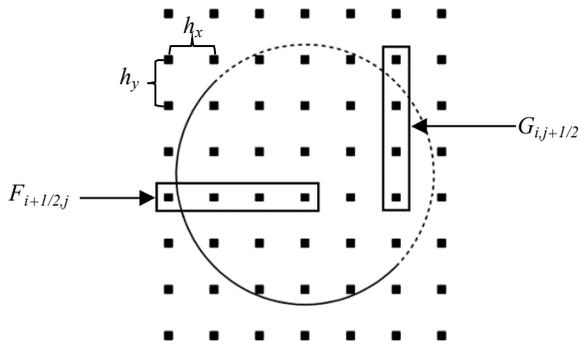


Рис. 3. Схематичное изображение границ области, расчетной сетки и шаблонов для нахождения численных значений потоков

Fig. 3. Schematic representation of the domain boundaries, computational grid, and templates for numerical calculations of flux values

В данной работе потоки газодинамических параметров вычислялись с использованием ENO-схемы третьего порядка точности [16, 17], а в качестве дискретизации уравнений по времени была выбрана схема Рунге – Кутты второго порядка точности, обладающая свойством TVD [14, 15]. Уравнение (11), описывающее изменение положения горячей поверхности, аппроксимировалось с пятым порядком точности по пространству и третьим порядком точности по времени [7].

Для численных расчетов используется следующая последовательность действий:

- 1) Численно решается система уравнений газовой динамики (1) до установления среднего внутрикамерного давления;
- 2) Вычисляются значения параметров в «фиктивных» ячейках с помощью обратной процедуры Лакса – Вендроффа;
- 3) Интегрируется уравнение изменения положения горячей поверхности (11).

Время интегрирования уравнений газовой динамики в пункте 1 задавалось пропорционально разности теоретических давлений, вычисленных по формуле Бори для конфигураций на предыдущем и текущем шагах. Такой подход дает значительное ускорение расчетов на основном участке работы РДГТ, так как с течением времени давление внутри камеры сгорания изменяется плавно, что ведет к необходимости использовать малые времена интегрирования уравнений газовой динамики.

Стоит заметить, что описанный численный алгоритм позволяет решать задачу и без использования допущения 7 (см. с. 92), интегрируя уравнение (11) каждый раз совместно с уравнениями газовой динамики. Однако такой подход требует намного больше вычислительных ресурсов. В общем случае можно варьировать количество итераций для решения системы уравнений газовой динамики на одну итерацию решения уравнения (11). Иными словами, можно сначала интегрировать уравнения газовой динамики на некоторый шаг по времени Δt , а затем на тот же шаг интегрировать уравнение поверхности горящего топлива. Такой способ решения мы назовем динамическим. В данной работе будет проведено сравнение результатов динамического подхода с квазистационарным.

Анализ численных результатов для случая неподвижной поверхности горения

Расчеты проводились при следующих значениях параметров:

- $L = 2.4$ м, $R_0 = 0.2$ м, $r_{кр} = 0.1$ м, а R_k, H_1, l, h, α – варьируемые параметры.
- $\nu = 0.5$, $m_t = 5.34 \cdot 10^{-3}$ кг/(м²·с·Па ^{ν}), $H_0 = 10251150$ Дж/кг,
- $\rho_T = 1700$ кг/м³, $k = 1.18$, $c_p = 2628$ Дж/(кг·К), $p_0 = p^* = 101325$ Па, $\rho_0 = 1.3$ кг/м³.

Уравнения (1) обезразмеривались с использованием в качестве характерных следующих масштабных величин:

- $u_m = \sqrt{\frac{k-1}{k}} H_0$ – масштаб скорости;

- $p_m = \left(\frac{S_\Gamma m_t u_m}{\Gamma(k) F_{кр}} \right)^{\frac{1}{1-\nu}}$ – масштаб давления, где S_Γ – площадь горящей поверхности в начальный момент времени, $F_{кр}$ – площадь критического сечения сопла, а

$$\Gamma(k) = \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \text{ – газодинамический комплекс;}$$

- $\rho_m = \frac{p_m}{u_m^2}$ – масштаб плотности;

- $x_m = 1$ м – масштаб длины;

- $t_m = \frac{x_m}{u_m}$ – масштаб времени.

Дальнейшие результаты приведены для безразмерных параметров течения. Вычислительная сетка для всех приведенных результатов расчетов имеет одинаковые безразмерные пространственные шаги по пространству вдоль двух координатных осей $h^* = h_x = h_y$.

Для проверки сходимости численного решения получим стационарные решения системы уравнений (1) с разными шагами по пространству, соответствующие трем промежуточным формам поверхности заряда с параметрами $R_k = 0.7$ м, $H_1 = 0.4$ м, $l = 0.7$ м, $h = 0.1$ м, $\alpha = \pi/3$, возникающим в процессе его прогорания и показанным на рис. 4.

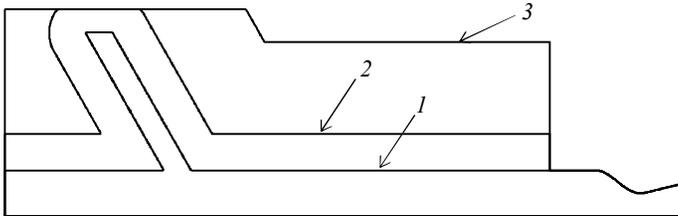


Рис. 4. Границы расчетной области:
1 – начальный момент времени, 2 – промежуточный момент времени,
3 – заключительный момент времени

Fig. 4. Computational domain boundaries: 1, initial time instant;
2, intermediate time instant; and 3, final time instant

На рис. 5 представлены зависимости осредненного по объему внутрикамерного давления в зависимости от обратного значения шага вычислительной сетки для трех геометрических конфигураций, изображенных на рис. 4. Из полученных результатов видно, что значение осредненного внутрикамерного давления перестает зависеть от обратного значения шага вычислительной сетки с точностью до 1% для значения $1/h^* = 375$, или для шага сетки $h^* = 0.0027$, для всех трех геометрических конфигураций. Полученное с помощью численной схемы среднее давление достаточно близко к давлению, рассчитанному по формуле Бори (горизонтальные линии на рис. 5). Расхождение в значениях давления можно объяснить тем, что в формуле Бори коэффициент расхода сопла задавался равным единице.

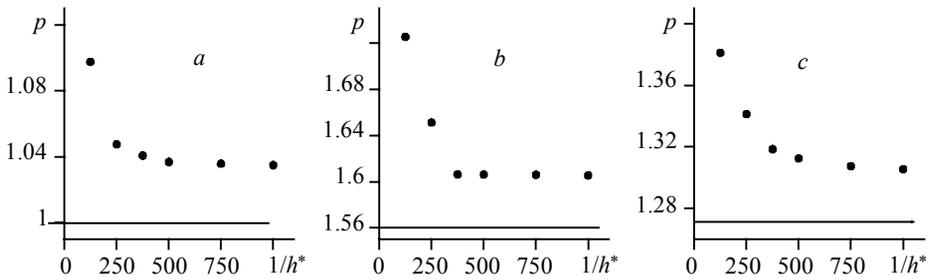


Рис. 5. Влияние обратной величины шага сетки $1/h^*$ на среднее внутрикамерное давление для: *a* – положения 1 на рис. 4, *b* – положения 2 на рис. 4, *c* – положения 3 на рис. 4

Fig. 5. Impact of a grid step reciprocal value $1/h^*$ on the average intra-chamber pressure for (a) location 1 (fig. 4), (b) location 2 (fig. 4), and (c) location 3 (fig. 4)

На рис. 6 показаны распределения давления и числа Маха внутри камеры сгорания РДТТ для различных значений шага вычислительной сетки, соответствующие начальной форме заряда. Из рис. 6 можно заключить, что, начиная с шага по пространству $h^* = 0.002$, происходит образование вихревых структур и зон сжатия –

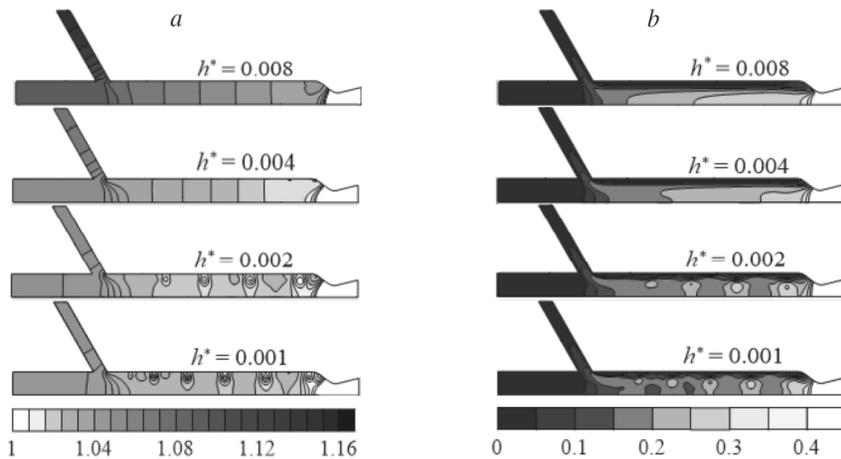


Рис. 6. Влияние шага расчетной сетки h^* на распределение давления (*a*) и числа Маха (*b*) внутри камеры сгорания

Fig. 6. Impact of the computational grid step h^* on the (a) pressure and (b) Mach number distribution inside a combustion chamber

разрежения, о чем свидетельствуют замкнутые изолинии поля чисел Маха и давления. Образованные вихревые структуры для начальной конфигурации имеют нестационарный характер, не исчезают с течением времени, а периодически появляются у изголовья «зонтика» и исчезают при истечении продуктов сгорания через сопло. Формирование вихревых структур можно объяснить тем, что при истечении струи газа из «зонтика» в основной канал происходит ее поджатие основным потоком к поверхности топлива, что приводит к формированию условий обтекания угла с острой кромкой, вызывающих, вследствие схемной вязкости, хоть и незначительной, возникновение вихрей. Подобное явление в условиях турбулентного течения описано в работе [2]. Стоит, однако, отметить, что нестационарный характер течения не влияет на среднее внутрикамерное давление.

Таким образом, из вышеприведенных результатов видно, что численное решение для рассмотренных конфигураций, во-первых, сходится при измельчении сетки и, во-вторых, полученные значения давления хорошо согласуются с давлением, полученным по формуле Бори.

Анализ численных результатов моделирования внутрикамерных процессов РДТТ на основном участке работы с подвижной поверхностью горения

Рассмотрим следующую задачу: по заданным геометрическим характеристикам заряда топлива определить зависимость среднего давления внутри камеры сгорания от времени. Для того чтобы убедиться в достоверности численных результатов, определим шаг по пространству, при котором решение перестает от него зависеть, и в дальнейшем все результаты численного моделирования будут приведены при соответствующем шаге по пространству.

Рассмотрим область со следующими геометрическими параметрами: $R_k = 0.7$ м, $H_1 = 0.4$ м, $l = 0.7$ м, $h = 0.1$ м, $\alpha = \pi/3$. На рис. 7 показано изменение осредненного давления в камере сгорания от времени. Решение, полученное для шага $h^* = 0.0027$, отличается от решения, полученного для шага $h^* = 0.001$, в метрике L^2 на 1.8%.

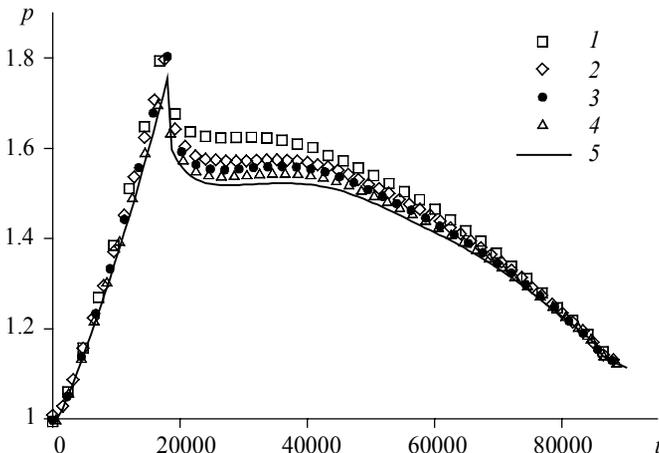


Рис. 7. Зависимость давления от времени:
 $1 - h^* = 0.004$, $2 - h^* = 0.0027$, $3 - h^* = 0.002$, $4 - h^* = 0.0013$, $5 - h^* = 0.001$

Fig. 7. Pressure as a function of time:
 $h^* = (1) 0.004$, $(2) 0.0027$, $(3) 0.002$, $(4) 0.0013$, and $(5) 0.001$

В силу незначительного различия в численных решениях, полученных на разных шагах по пространству, и в силу того, что уменьшение шага разностной сетки по пространству в 2.7 раза ведет к увеличению времени расчета почти в 20 раз, можно заключить, что такой шаг по пространству $h^* = 0.0027$ является оптимальным для расчетов зависимости среднего давления внутри камеры сгорания от времени, и дальнейшие расчеты выполнялись при таком шаге.

Время расчета задачи внутренней баллистики РДТТ на всем участке его работы с использованием технологии CUDA занимает приблизительно 1 час при расчете на видеокарте NVIDIA GeForce GTX 1080.

Сравним зависимости среднего давления в камере сгорания, полученные с помощью квазистационарного и динамического подходов, которые представлены на рис. 8. Время расчета для динамического подхода составляет приблизительно 10 часов, что в 10 раз медленнее квазистационарного подхода. Относительная ошибка в метрике L^2 для квазистационарного подхода составляет 1.3% по сравнению с динамическим. Из полученных результатов можно сделать вывод, что промежутки времени, которые берутся для квазистационарного подхода, в случае падения давления иногда оказываются недостаточно большими, однако разница в зависимости среднего давления от времени незначительная, поэтому в дальнейшем для расчетов использовался квазистационарный подход.

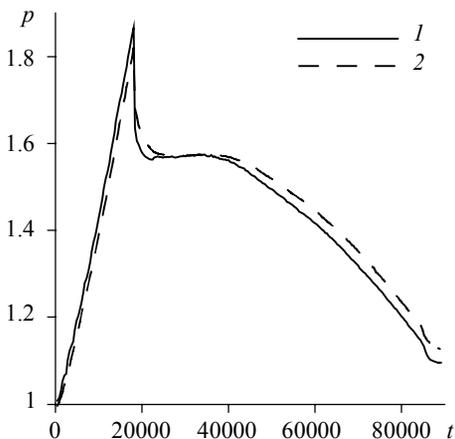


Рис. 8. Зависимость давления от времени:
 1 – динамический подход, 2 – квазистационарный подход
Fig. 8. Pressure as a function of time:
 1, dynamic approach and 2, quasi-stationary approach

Результаты численного моделирования для различных геометрических форм топливных зарядов РДТТ

Рассмотрим первую конфигурацию заряда, которая определяется следующими геометрическими параметрами: $R_k = 0.9$ м, $H_1 = 0.55$ м, $l = 0.5$ м, $h = 0.08$ м, $\alpha = \pi/2$. Для данной конфигурации «зонтик» расположен под прямым углом к оси симметрии.

Как видно из представленных результатов на рис. 9, давление в начальный момент времени имеет достаточно сложное распределение внутри камеры сгорания с большими градиентами и вихревыми структурами. С течением времени

вихревые структуры исчезают и градиент давления уменьшается. Когда все топливо на левой стенке выгорело, можно считать, что давление всюду в камере сгорания имеет постоянное значение.

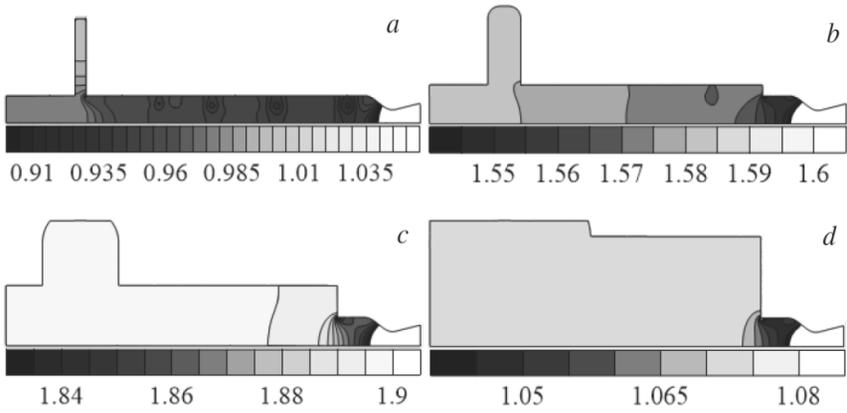


Рис. 9. Распределение давления в камере сгорания: *a* – в начальный момент времени, *b* – в момент времени, когда топливо еще «не дошло» до верхней стенки, *c* – в момент времени, когда часть топлива на верхней стенке выгорела, *d* – момент времени, когда все топливо на левой стенке выгорело

Fig. 9. Pressure distribution inside a combustion chamber: (*a*) at the initial time instant, (*b*) at a time instant when the propellant has not reached the top wall yet, (*c*) at a time instant when the propellant on the top wall has partly burned out, and (*d*) at a time instant when all the propellant on the left wall has burned out

На рис. 10, *a* изображены линии поверхности твердого топлива через равные промежутки времени $\Delta t = 8336$. Из рис. 10, *a* можно увидеть, что топливо горит практически параллельными слоями с изменяющейся со временем скоростью горения, так как расстояния между линиями поверхности различно для одного и того же Δt . Горение почти параллельными слоями объясняется тем, что давление вдоль канала меняется не более чем на 20 %, и зависимость скорости от давления носит степенной характер со степенью $\nu < 1$. На рис. 10, *b* представлены зависимости давления и площади горячей поверхности от времени. На данном графике

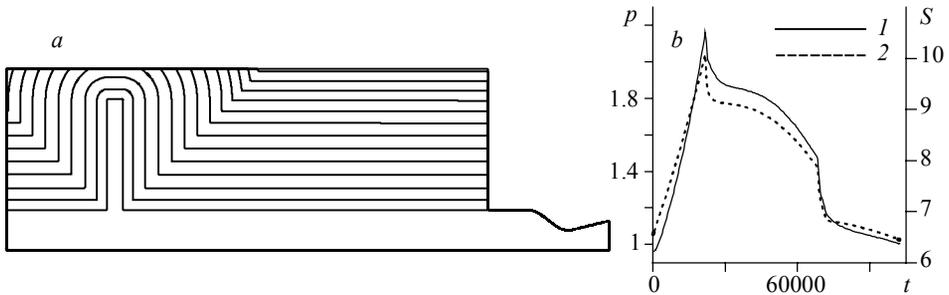


Рис. 10. Эволюция горячей поверхности (*a*) и зависимости давления (*1*) и площади горячей поверхности (*2*) от времени (*b*) для заряда РДТТ с зонтиком, расположенным под прямым углом

Fig. 10. (*a*) Evolution of a burning surface and (*b*) time dependences of (*1*) pressure and (*2*) burning surface area for SRM at a right inclination angle

значительным уменьшениям площади горячей поверхности, а следовательно, и резким спадам давления, соответствует выгорание топлива у верхней стенки для $t \approx 22000$ и на левой стенке для $t \approx 67000$.

В общем случае для всех зарядов твердого топлива можно наблюдать следующие особенности: по мере выгорания топлива и увеличения объема камеры распределение давления носит все более равномерный характер; несмотря на достаточно сильные градиенты давления в камере сгорания в начальный период работы РДТГ прогар топлива происходит параллельными слоями; резкие спады среднего по камере давления с течением времени соответствуют выгоранию топлива либо на верхней, либо на левой стенке. В остальные моменты времени изменение давления носит плавный характер.

На рис. 11 представлены результаты расчетов эволюция поверхности (рис. 11, *a*) через равные промежутки времени $\Delta t = 10000$ и зависимости среднего внутрикамерного давления и площади горячей поверхности от времени (рис. 11, *b*). Для данной конфигурации топливо на левой границе выгорает одновременно с топливом на правой границе, поэтому в графике зависимости давления от времени имеется только один резкий спад давления при выгорании топлива на верхней стенке. Изолинии поверхности горения имеют схожие черты с формой канала заряда РДТГ, изображенной на рис. 10, *a*: горение происходит параллельными слоями, но расстояние между уровнями также различается для разных промежутков времени.

Рассмотрим вторую конфигурацию заряда со следующими параметрами: $R_k = 0.7$ м, $H_1 = 0.4$ м, $l = 0.5$ м, $h = 0.1$ м, $\alpha = 2\pi/3$, в которой угол наклона «зонтика» острый.

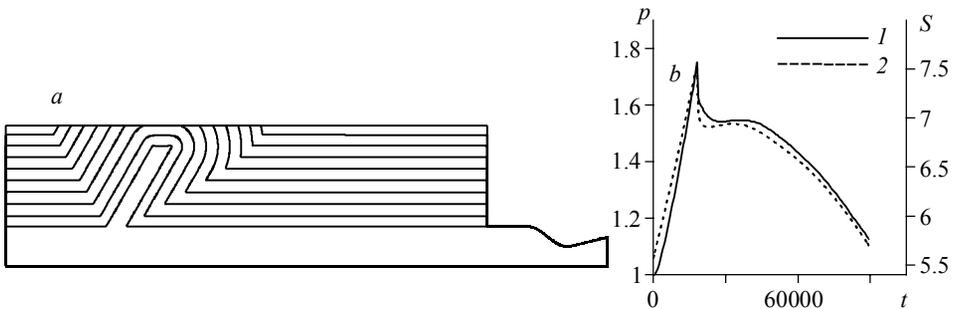


Рис. 11. Эволюция горячей поверхности (*a*) и зависимость давления (1) и площади горячей поверхности (2) от времени (*b*) для заряда РДТГ с «зонтиком», ориентированным под острым углом к оси абсцисс

Fig. 11. (*a*) Evolution of a burning surface and (*b*) time dependences of (1) pressure and (2) burning surface area for SRM at an acute inclination angle to the axis of abscissas

Наконец, рассмотрим третью конфигурацию, когда «зонтик» составляет острый угол с отрицательным направлением оси x . Форма шашки определяется следующими параметрами: $R_k = 0.7$ м, $H_1 = 0.35$ м, $l = 0.7$ м, $h = 0.2$ м, $\alpha = \pi/6$.

На рис. 12 представлены результаты расчетов эволюции поверхности (рис. 12, *a*) через равные промежутки времени $\Delta t = 10000$ и зависимости среднего внутрикамерного давления и площади горячей поверхности от времени (рис. 12, *b*). Особенность данной конфигурации заключается в том, что топливо на верхней и левой стенках корпуса сгорает практически одновременно, что способствует

сильному падению давления для $t \approx 22000$. Горение поверхности так же, как и для двух предыдущих конфигураций, происходит параллельными слоями с изменяющейся со временем скоростью горения.

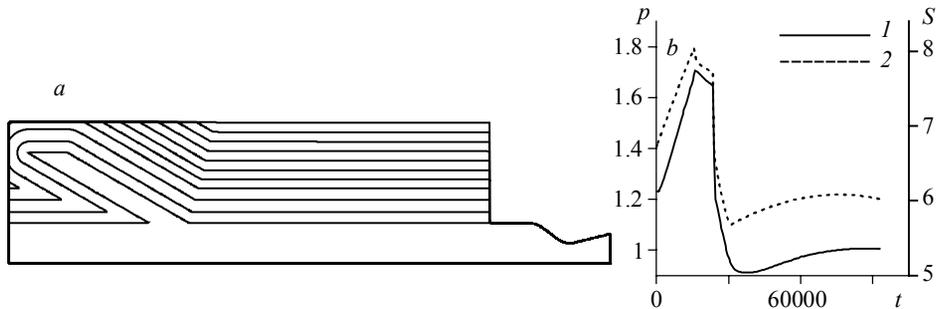


Рис. 12. Эволюция горящей поверхности (a) и зависимость давления (1) и площади горящей поверхности (2) от времени (b) для заряда РДТТ с «зонтиком», ориентированным под тупым углом к оси абсцисс

Fig. 12. (a) Evolution of a burning surface and (b) time dependences of (1) pressure and (2) burning surface area for SRM at an obtuse inclination angle to the axis of abscissas

Заключение

В данной работе решена сопряженная задача определения параметров течения продуктов сгорания в проточном тракте РДТТ совместно с определением положения изменяющейся во времени горящей поверхности твердого топлива в осесимметричной постановке с помощью предложенного численного алгоритма.

Численное решение было исследовано на аппроксимационную сходимость для случая неподвижной поверхности горящего топлива и для случая эволюционирующей поверхности горения во время работы двигателя РДТТ на основном участке его работы. Проведенные сравнения осредненного давления в камере сгорания РДТТ с оценками по формуле Бори показали, что результаты численного моделирования достоверно описывают изменение давления газа в камере сгорания РДТТ во времени совместно с эволюционирующей поверхностью горения заряда твердого топлива.

В качестве примера разработанный численный алгоритм был применен для моделирования работы РДТТ на его основном участке для зарядов с «зонтиком», ориентированным под различными углами наклона к оси симметрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Милехин Ю.М., Ключников А.Н., Попов В.С. Сопряженная задача моделирования внутриваллистических характеристик бесспорных РДТТ // Физика горения и взрыва. 2013. Т. 49. № 5. С. 77–85.
2. Глазунов А.А., Еремин И.В., Жильцов К.Н., Костюшин К.В., Тырышкин И.М., Шуварилов В.А. Численное исследование определения величин пульсаций давления и собственных акустических частот в камерах сгорания с наполнителем сложной формы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 53. С. 59–72. DOI: 10.17223/19988621/53/7.
3. Cavallini E. Modeling and Numerical Simulation of Solid Rocket Motors Internal Ballistics: PhD thesis. 2010. URL: <https://core.ac.uk/download/pdf/74323997.pdf>

4. *Sullwald W.* Grain regression analysis: Master's thesis. 2014. URL: https://scholar.sun.ac.za/bitstream/handle/10019.1/86526/sullwald_grain_2014.pdf
5. *Tshokotsha M.H.* Internal Ballistic Modelling of Solid Rocket Motors Using Level Set Methods for Simulating Grain Burnback: Master's thesis. 2016. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/d0c7/5902ebacf32fc3c60e57158a9e040b9154f8.pdf>
6. *Lorente A.P.* Study of Grain Burnback and Performance of Solid Rocket Motors: PhD Thesis. 2013. URL: https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/17700/Memoria_Arnau_Pons_Lorente.pdf
7. *Osher S., Fedkiw R.* Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces. New York: Springer, 2003. DOI: 10.1007/b98879.
8. *Кирюшкин А.Е., Миньков Л.Л.* Численное решение двумерных уравнений газовой динамики с подвижными границами на неподвижной вычислительной сетке на примере задач внутренней баллистики РДТТ // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»: сб. статей. Томск: Издательский Дом ТГУ, 2017. С. 168–176.
9. *Кирюшкин А.Е., Миньков Л.Л.* Численное решение задачи внутренней баллистики РДТТ на всем участке работы для зарядов сложной формы // V Всероссийская научно-техническая конференция с международным участием «Актуальные проблемы ракетно-космической техники» («V Козловские чтения»): сб. материалов, 2017. Т. 2. С. 55–64.
10. *Kiryushkin A.E., Minkov L.L.* Solution of internal ballistic problem for SRM with grain of complex shape during main firing phase // Journal of Physics: Conference series. 2017. V. 894(1). P. 012041-1–012041-7. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012041.
11. *Tan S., Shu C.-W.* Inverse Lax-Wendroff procedure for numerical boundary conditions of conservation laws // Journal of Computational Physics. 2010. V. 229(26). P. 8144–8166. DOI: 10.1016/j.jcp.2010.07.014.
12. *Tan S., Shu C.-W., Ning J.* Efficient Implementation of high order inverse Lax-Wendroff boundary treatment for conservation laws // Journal of Computational Physics. 2012. V. 231(72). P. 2510–2527. DOI: 10.1016/j.jcp.2011.11.037.
13. *Tan S., Shu C.-W.* Inverse Lax-Wendroff Procedure for numerical boundary conditions of hyperbolic equations: Survey and new developments // Advances in Applied Mathematics, Modeling, and Computational Science. 2013. V. 66. P. 41–63. DOI: 10.1007/978-1-4614-5389-5_3.
14. *Gottlieb S., Shu C.-W.* Total variation diminishing Runge-Kutta schemes // Mathematics of Computation. 1998. V. 67. P. 73–85. DOI:10.1090/S0025-5718-98-00913-2.
15. *Shu C.-W.* Total-variation-diminishing time discretizations // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. 1988. V. 9. P. 1073–1084. DOI: 10.1137/0909073.
16. *Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S.R.* Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes // Journal of Computational Physics. 1987. V. 71(2). P. 231–303. DOI: 10.1137/0724022.
17. *Shu C.-W., Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes // Journal of Computational Physics. 1989. V. 83(1). P. 32–78. DOI: 10.1016/0021-9991(89)90222-2.

Статья поступила 08.07.2020

Kiryushkin A.E., Minkov L.L. (2021) NUMERICAL SIMULATION OF INTRA-CHAMBER PROCESSES IN A SOLID ROCKET MOTOR WITH ACCOUNT FOR BURNING SURFACE MOTION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 71. pp. 90–105

DOI 10.17223/19988621/71/8

Keywords: solid rocket motor, level-set method, inverse Lax-Wendroff procedure, numerical simulation, internal ballistics, gas dynamics.

The axisymmetric solid rocket motor (SRM) with an “umbrella” shape is considered in this paper. The numerical algorithm based on the inverse Lax-Wendroff procedure for a gas dynamic equation and on the level-set method for tracking the burning surface is overviewed for internal ballistics problems. Assuming that the propellant combustion proceeds in a quasi-stationary regime and a mass flow from the burning surface depends on the pressure raised to the power of parameter v , the numerical computations of intra-chamber combustion product flows during the main-firing phase are carried out using the numerical algorithm developed for “umbrella”-shaped SRM at different parameter values. The approximation convergence of flow parameters in a case of the stationary propellant surface and average intra-chamber pressure for all the time of motor operation is examined. The numerical simulation results are obtained and analyzed for different “umbrella” inclination angles.

Though the developed algorithm has been applied to the motors with a specific shape, it can also be used for propellant grains of different shapes and is easily extended to 3D models.

Financial support. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 20-31-90033).

Leonid L. MINKOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Aleksandr E. KIRYUSHKIN (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: sashakir94@mail.ru

REFERENCES

1. Milekhin Yu.M., Kluchnikov A.N., Popov V.S. (2013) Coupled problem of modeling the internal ballistics of nozzleless solid rocket motors. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 49(5). pp. 575–582. DOI: 10.1134/S0010508213050092.
2. Glazunov A.A., Eremin I.V., Zhiltsov K.N., Kostyushin K.V., Tyryshkin I.M., Shuvarikov V.A. (2018) Chislennoe issledovanie opredeleniya velichin pul'satsiy davleniya i sobstvennykh akusticheskikh chastot v kamerakh sgoraniya s napolnitelem slozhnoy formy [Numerical investigation of the pressure pulsation magnitude and natural aeroacoustic frequencies in the combustion chambers with a charge of a complex shape]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 53. pp. 59–72. DOI: 10.17223/19988621/53/7.
3. Cavallini E. (2010) *Modeling and Numerical Simulation of Solid Rocket Motors Internal*. PhD thesis. Access mode: <https://core.ac.uk/download/pdf/74323997.pdf>.
4. Sullwald W. (2014) *Grain Regression Analysis*. Master's thesis. Access mode: https://scholar.sun.ac.za/bitstream/handle/10019.1/86526/sullwald_grain_2014.pdf.
5. Tshokotsha M.H. (2016) *Internal Ballistic Modelling of Solid Rocket Motors Using Level Set Methods for Simulating Grain Burnback*. Master's thesis. Access mode: <https://pdfs.semanticscholar.org/d0c7/5902ebacf32fc3c60e57158a9e040b9154f8.pdf>.
6. Lorente A.P. (2013) *Study of Grain Burnback and Performance of Solid Rocket Motors*. PhD thesis. Access mode: https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/17700/Memoria_Arnau_Pons_Lorente.pdf.
7. Osher S., Fedkiw R. (2003) *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. New York: Springer. DOI: 10.1007/b98879.

8. Kiryushkin A.E., Minkov L.L. (2017) Chislennoe reshenie dvumernykh uravneniy gazovoy dinamiki s podvizhnymi granitsami na nepodvizhnoy vychislitel'noy setke na primere zadach vnutrenney ballistiki RDTT [Numerical solution of 2D gas dynamic equations with moving boundaries on a stationary grid through the example of SRM internal ballistics problems]. *Proceedings of the All-Russian Youth Scientific Conference «All Aspects of Mathematics and Mechanics»*. pp. 168–176.
9. Kiryushkin A.E., Minkov L.L. (2017) Chislennoe reshenie zadachi vnutrenney ballistiki RDTT na vsem uchastke raboty dlya zaryadov slozhnoy formy [A numerical solution to a SRM internal ballistics problem during the entire worktime for grains of a complex shape]. *Proceedings of the 5th All-Russian Scientific and Technical Conference with International Participation. «Advanced Problems of Rocket and Space Technologies»*. 2. pp. 55–64.
10. Kiryushkin A.E., Minkov L.L. (2017) Solution of internal ballistic problem for SRM with grain of complex shape during main firing phase. *Journal of Physics: Conference Series*. 894(1). Article 012041. pp. 1–7. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012041.
11. Tan S., Shu C.-W. (2010) Inverse Lax-Wendroff procedure for numerical boundary conditions of conservation laws. *Journal of Computational Physics*. 229(26). pp. 8144–8166. DOI: 10.1016/j.jcp.2010.07.014.
12. Tan S., Shu C.-W., Ning J. (2012) Efficient implementation of high order inverse Lax-Wendroff boundary treatment for conservation laws. *Journal of Computational Physics*. 231(72). pp. 2510–2527. DOI: 10.1016/j.jcp.2011.11.037.
13. Tan S., Shu C.-W. (2013) Inverse Lax-Wendroff procedure for numerical boundary conditions of hyperbolic equations: survey and new developments. *Advances in Applied Mathematics, Modeling, and Computational Science*. 66. pp. 41–63. DOI: 10.1007/978-1-4614-5389-5_3.
14. Gottlieb S., Shu C.-W. (1998) Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. *Mathematics of Computation*. 67. pp. 73–85. DOI: 10.1090/S0025-5718-98-00913-2.
15. Shu C.-W. (1988) Total-variation-diminishing time discretizations. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 9. pp. 1073–1084. DOI: 10.1137/0909073.
16. Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S.R. (1987) Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes. *Journal of Computational Physics*. 71(2). pp. 231–303. DOI: 10.1137/0724022.
17. Shu C.-W., Osher S. (1989) Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes. *Journal of Computational Physics*. 83(1). pp. 32–78. DOI: 10.1016/0021-9991(89)90222-2.

Received: July 8, 2020

УДК 539.3
DOI 10.17223/19988621/71/9

В.В. Козлов, А.А. Маркин

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ¹

Рассматривается нелинейно-упругая осесимметричная модель тороидальной оболочки под действием внутреннего давления. Используются определяющие соотношения в виде квазилинейной связи тензора истинных напряжений с коротационным тензором Генки. Данный подход позволил естественным образом удовлетворить условию несжимаемости. Получена замкнутая система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно шести неизвестных функций. С помощью метода последовательных приближений дана оценка напряженно-деформированного состояния оболочки.

Ключевые слова: *тороидальная оболочка, нелинейная упругость, определяющие соотношения, метод последовательных приближений.*

Исследование характеристик упругих оболочек при возникновении в них конечных деформаций является перспективным направлением развития механики, что подтверждается большим количеством современных публикаций на эту тему [1–5].

В настоящей работе рассмотрена нелинейно-упругая осесимметричная модель тороидальной оболочки под действием внутреннего давления. Выбор схемы следует из распространения деталей подобного рода и внимания исследователей к соответствующей проблематике [6–9]. При этом в работе [10] рассматривается половина тороидальной оболочки, в [11] изучается оболочка с эллиптическим сечением. В публикациях [12, 13] рассматривается тороидальная оболочка при воздействии внешнего и внутреннего давлений, изучается эффект устойчивости, возникающий при превышении внешним давлением внутреннего.

Постановка задачи в настоящей работе строится на определяющем соотношении в виде квазилинейной связи тензора истинных напряжений с коротационным тензором Генки, в то время как в работах [7, 9, 14, 15] используется закон Гука, не позволяющий естественным образом удовлетворить условию несжимаемости при конечных деформациях.

В отличие от исследований [14, 16], в которых для решения задач с тороидальными оболочками предлагается использовать метод конечных элементов, в настоящей работе используется метод последовательных приближений [17].

¹ Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МД-1803.2019.1, формулировка постановки задачи) и РФФ (проект № 19-71-10008, оценка напряженно-деформированного состояния оболочки).

1. Кинематика процесса

Рассматривается напряженно-деформированное состояние оболочки, опорная поверхность которой имеет в начальном (недеформированном) состоянии форму тора и нагружается внутренним давлением P . Схема расчета представлена на рис. 1.

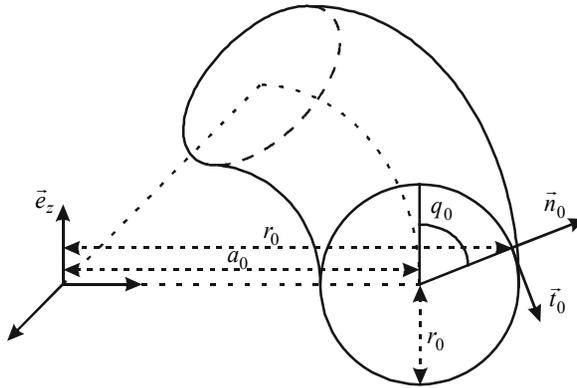


Рис. 1. Схема модели
Fig. 1. Design of a model

Оболочка отнесена к цилиндрической системе координат r_0, φ, z_0 . Радиус-векторы, соединяющие центр данной системы с материальными точками опорной поверхности, распределены по закону

$$\vec{x}_0 = (a_0 + \rho_0 \sin \theta_0) \vec{e}_r + \rho_0 \cos \theta_0 \vec{e}_z, \quad (1.1)$$

где a_0, ρ_0 – начальные размеры тора, θ_0 – угол, определяющий положение точек поперечного сечения опорной поверхности.

Положение точек опорной поверхности в начальный момент определяется координатами r_0, φ_0, z_0 , а в деформированном состоянии – координатами r, φ, z . В силу осевой симметрии $\varphi = \varphi_0$.

В результате положения точек деформированной поверхности будут определяться радиус-векторами

$$\vec{x} = r(\theta_0) \vec{e}_r + z(\theta_0) \vec{e}_z. \quad (1.2)$$

Закон (1.2) учитывает изменение в процессе деформации поперечного сечения оболочки. Из закона движения (1.1), (1.2) следует, что движение поперечного сечения определяется двумя функциями от начальной координаты θ_0 :

$$r = r(\theta_0), \quad z = z(\theta_0). \quad (1.3)$$

Положение точек оболочки, отстающих на расстояние ξ , отсчитываемое вдоль нормали к опорной поверхности (ОП), в начальном состоянии определяется в виде

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \xi_0 \vec{n}_0 = \vec{x}_0 + \xi_0 (\sin \theta_0 \vec{e}_r + \cos \theta_0 \vec{e}_z). \quad (1.4)$$

Положение тех же материальных точек в деформированном состоянии имеет вид

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda_3(\theta_0) \xi_0 \vec{n}. \quad (1.5)$$

Закон (1.5) предполагает выполнение обобщенной гипотезы Киргоффа – точки, лежащие на прямой вдоль начальной нормали \vec{n}_0 , остаются на прямой вдоль текущей нормали \vec{n} . При этом $\lambda_3(\theta_0)$ – относительное удлинение (укорочение) нормальных волокон.

Построение аффинора деформации
для закона движения (1.3) – (1.5)

Как известно [18], аффинор деформации связывает материальные элементарные векторы в начальном и деформированном состоянии.

Элементарный (бесконечно малый) вектор начального состояния имеет вид

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta_0} d\theta_0 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_0} d\xi_0 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Векторы-касательные к координатным линиям, обозначим как

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta_0}; \vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}; \vec{e}_3 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_0}. \quad (1.6)$$

Из выражений (1.1), (1.4), (1.6) получим

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{x}_0}{\partial \theta_0} + \xi_0 \vec{\tau}_0 = (\rho_0 + \xi_0) \vec{\tau}_0, \quad (1.7)$$

где $\vec{\tau}_0 = \cos \theta_0 \vec{e}_r - \sin \theta_0 \vec{e}_z$ – единичный вектор касательной к линии θ_0 ; $\vec{n}_0 = \sin \theta_0 \vec{e}_r + \cos \theta_0 \vec{e}_z$ – единичный вектор вдоль ξ ;

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 &= \frac{\partial \vec{x}_0}{\partial \varphi} + \xi_0 \sin \theta_0 \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = (a_0 + \rho_0 \sin \theta_0) \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} + \xi_0 \sin \theta_0 \vec{e}_\varphi = \\ &= (a_0 + \rho_0 \sin \theta_0 + \xi_0 \sin \theta_0) \vec{e}_\varphi; \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\partial \vec{x}_0}{\partial \xi_0} = \sin \theta_0 \vec{e}_r + \cos \theta_0 \vec{e}_z = \vec{n}_0.$$

Пусть h_0 – толщина оболочки, тогда $-\frac{h_0}{2} \leq \xi_0 \leq \frac{h_0}{2}$.

Так как $a_0 \gg h_0$, пренебрегаем слагаемым, содержащим ξ в формулах (1.7) и (1.8), тогда

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &\approx \rho_0 (\cos \theta_0 \vec{e}_r - \sin \theta_0 \vec{e}_z) = \rho_0 \vec{\tau}_0; \\ \vec{e}_2 &\approx (a_0 + \rho_0 \sin \theta_0) \vec{e}_\varphi; \\ \vec{e}_3 &= \sin \theta_0 \vec{e}_r + \cos \theta_0 \vec{e}_z = \vec{n}_0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Используя представление отсчетного базиса в виде (1.9), найдем его контравариантные компоненты из условия

$$\vec{e}^i = g^{ik} \vec{e}_k, \quad (1.10)$$

где g^{ik} – компоненты обратной метрической матрицы.

Для определения g^{ik} найдем ковариантные компоненты метрической матрицы. Используя (1.9), получим

$$g_{11} = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = \rho_0^2; \quad g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0;$$

$$g_{22} = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = (a_0 + \rho_0 \sin \theta_0)^2; \quad g_{33} = \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3 = 1.$$

Из условия

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$$

находим компоненты обратной метрической матрицы

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}} = \frac{1}{\rho_0^2}; \quad g^{22} = \frac{1}{(a_0 + \rho_0 \sin \theta_0)^2}; \quad g^{33} = 1. \quad (1.11)$$

Из выражений (1.9), (1.10) и (1.11) получим векторы контравариантного базиса

$$\bar{e}^1 = g^{11} \bar{e}_1 = \frac{1}{\rho_0} (\cos \theta_0 \bar{e}_r - \sin \theta_0 \bar{e}_z) = \frac{1}{\rho_0} \bar{e}_0;$$

$$\bar{e}^2 = g^{22} \bar{e}_2 = \frac{1}{a_0 + \rho_0 \sin \theta_0} \bar{e}_\varphi = \frac{1}{r_0} \bar{e}_\varphi; \quad (1.12)$$

$$\bar{e}^3 = g^{33} \bar{e}_3 = \bar{e}_3 = n_0 = \sin \theta_0 \bar{e}_r + \cos \theta_0 \bar{e}_z,$$

Элементарный материальный вектор деформированного состояния представим в виде

$$d\bar{x} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta_0} d\theta_0 + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi_0} d\xi_0.$$

Используя выражения (1.2) и (1.5), получим следующие представления векторов материального базиса:

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta_0} = \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta_0} = r' \bar{e}_r + z' \bar{e}_z;$$

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \varphi} = r \frac{\partial \bar{e}_r}{\partial \varphi} = r \bar{e}_\varphi; \quad (1.13)$$

$$\bar{\alpha}_3 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi_0} = \lambda_3 \bar{n},$$

где $r' = \frac{dr}{d\theta_0}$, $z' = \frac{dz}{d\theta_0}$.

Единичный вектор, касательный к меридиану, с учетом (1.13) принимает вид

$$\bar{\tau} = \bar{\alpha}_1 / \sqrt{G_{11}} = (r' \bar{e}_r + z' \bar{e}_z) / \sqrt{G_{11}}, \quad (1.14)$$

где $G_{11} = \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_1 = (r')^2 + (z')^2 = \lambda_1^2 \rho_0^2$; $\lambda_1 = \frac{|\bar{\alpha}_1|}{\rho_0}$ – относительное удлинение меридионального волокна.

Единичный вектор нормали к деформированной поверхности определяем, используя (1.15):

$$\bar{n} = \frac{\bar{\alpha}_1 \times \bar{\alpha}_2}{|\bar{\alpha}_1| |\bar{\alpha}_2|} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 r_0 \rho_0} (r' \bar{e}_r + z' \bar{e}_z) \times r \bar{e}_\varphi = \frac{1}{\lambda_1 \rho_0} (r' \bar{e}_z - z' \bar{e}_r), \quad (1.15)$$

где $\lambda_2 = \frac{r}{r_0}$ – относительное удлинение окружного волокна.

С учётом данных выражений векторы материального базиса (1.13) запишем в виде

$$\bar{\Xi}_1 = \lambda_1 \rho_0 \bar{\tau}; \quad \bar{\Xi}_2 = r \bar{e}_\varphi = r_0 \lambda_2 \bar{e}_\varphi; \quad \bar{\Xi}_3 = \lambda_3 \bar{n}. \quad (1.16)$$

Представим тензор-аффино́р Φ в следующем виде [18]:

$$\Phi = \overset{\circ}{\nabla} \bar{x} = \bar{e}^i \frac{\partial \bar{x}}{\partial x^i} = \bar{e}^i \bar{\Xi}_i.$$

В нашем случае, используя формулы (1.12), (1.16), находим разложение аффино́ра по векторам локальных базисов

$$\Phi = \lambda_1 \bar{\tau}_0 \bar{\tau} + \lambda_2 \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi + \lambda_3 \bar{n}_0 \bar{n}. \quad (1.17)$$

Построение мер деформаций и тензора поворота

Из определения меры деформаций Коши – Грина через тензор-аффино́р находим ее диадное разложение по начальному локальному базису

$$\underline{G} = \Phi \cdot \Phi^T = \lambda_1^2 \bar{\tau}_0 \bar{\tau}_0 + \lambda_2^2 \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi + \lambda_3^2 \bar{n}_0 \bar{n}_0,$$

где $\Phi^T = \lambda_1 \bar{\tau} \bar{\tau}_0 + \lambda_2 \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi + \lambda_3 \bar{n} \bar{n}_0$ – транспонированный тензор.

Тензор деформаций Коши – Грина по определению принимает вид

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\underline{G} - \underline{E}) = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1) \bar{\tau}_0 \bar{\tau}_0 + \frac{1}{2}(\lambda_2^2 - 1) \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi + \frac{1}{2}(\lambda_3^2 - 1) \bar{n}_0 \bar{n}_0.$$

Тензор деформаций Фингера

$$\underline{F} = \frac{1}{2}(1 - \lambda_1^2) \bar{\tau} \bar{\tau} + \frac{1}{2}(1 - \lambda_2^2) \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi + \frac{1}{2}(1 - \lambda_3^2) \bar{n} \bar{n}. \quad (1.18)$$

«Левая» (инвариантная относительно вращения) мера искажения принимает вид

$$\underline{U} = \underline{G}^{\frac{1}{2}} = \lambda_1 \bar{\tau}_0 \bar{\tau}_0 + \lambda_2 \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi + \lambda_3 \bar{n}_0 \bar{n}_0. \quad (1.19)$$

Из (1.19) получаем «левый» тензор Генки

$$\underline{\Gamma} = \ln \underline{U} = \ln \lambda_1 \bar{\tau}_0 \bar{\tau}_0 + \ln \lambda_2 \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi + \ln \lambda_3 \bar{n}_0 \bar{n}_0.$$

Найдем тензор поворота \underline{R} , используя его определение [18]:

$$\underline{R} = \underline{U}^{-1} \cdot \Phi.$$

Из (1.17) и (1.19) получим

$$\underline{R} = (\lambda_1^{-1} \bar{\tau}_0 \bar{\tau}_0 + \lambda_2^{-1} \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi + \lambda_3^{-1} \bar{n}_0 \bar{n}_0) \cdot (\lambda_1 \bar{\tau}_0 \bar{\tau} + \lambda_2 \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi + \lambda_3 \bar{n}_0 \bar{n}) = \bar{\tau}_0 \bar{\tau} + \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi + \bar{n}_0 \bar{n}.$$

Найдем компоненты \underline{R} в локальной системе $\bar{\tau}_0, \bar{e}_\varphi, \bar{n}_0$:

$$R_{\tau_0 \tau_0} = \bar{\tau}_0 \cdot \underline{R} \cdot \bar{\tau}_0 = \bar{\tau} \cdot \bar{\tau}_0 = \cos(\theta_0 - \theta); \quad R_{\tau_0 n_0} = \bar{\tau}_0 \cdot \underline{R} \cdot \bar{n}_0 = \bar{\tau} \cdot \bar{n}_0 = -\sin(\theta - \theta_0);$$

$$R_{n_0 \tau_0} = \bar{n}_0 \cdot \underline{R} \cdot \bar{\tau}_0 = \bar{n} \cdot \bar{\tau}_0 = \sin(\theta - \theta_0); \quad R_{n_0 n_0} = \bar{n}_0 \cdot \underline{R} \cdot \bar{n}_0 = \bar{n} \cdot \bar{n}_0 = \cos(\theta - \theta_0).$$

Таким образом, матрица тензора \underline{R} в локальном базисе определяется углом поворота $\gamma = \theta - \theta_0$. Здесь θ – угол между \bar{n} и \bar{e}_z .

Угол θ определяется с учетом (1.14) и (1.15) по формулам

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \bar{n} \cdot \bar{e}_z = \frac{r'}{\lambda_1 \rho_0} = \frac{r_0 \lambda_2'}{\rho_0 \lambda_1}; \\ \sin \theta &= \bar{n} \cdot \bar{e}_r = -\frac{z'}{\lambda_1 \rho_0}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

2. Напряженное состояние и условия равновесия тороидальной оболочки

В теории нелинейной упругости используются различные тензорные меры напряженного состояния и соответствующие уравнения равновесия. В частности, рассмотрим представление напряженного состояния в тороидальной оболочке тензором истинных напряжений – $\underline{\mathcal{S}}$. Пренебрегая сдвиговыми напряжениями, получим данное разложение $\underline{\mathcal{S}}$ по материальному базису

$$\underline{\mathcal{S}} = s^{11} \bar{\mathfrak{e}}_1 \bar{\mathfrak{e}}_1 + s^{22} \bar{\mathfrak{e}}_2 \bar{\mathfrak{e}}_2 + s^{33} \bar{\mathfrak{e}}_3 \bar{\mathfrak{e}}_3.$$

Заменяя векторы $\bar{\mathfrak{e}}_i$ по формулам (1.16), представим тензор напряжений разложением по текущему локальному базису:

$$\underline{\mathcal{S}} = \sigma_{11} \bar{\tau} \bar{\tau} + \sigma_{22} \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi + \sigma_{33} \bar{n} \bar{n}, \quad (2.1)$$

где $\sigma_{11} = \lambda_1^2 \rho_0^2 s^{11}$, $\sigma_{22} = (\lambda_2 r_0)^2 s^{22}$, $\sigma_{33} = \lambda_3^2 s^{33}$.

Распределение компонент тензора напряжений по начальным координатам $x^1 = \theta_0$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = \xi_0$ должно удовлетворять уравнениям равновесия. Используем смешанную (Лангранжево-Эйлерову) форму условий равновесия, которая имеет следующий вид в отсутствие массовых сил [19]:

$$\bar{\mathfrak{e}}^i \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{S}}}{\partial x^i} = \bar{0}. \quad (2.2)$$

Векторы контравариантного материального базиса – $\bar{\mathfrak{e}}^i$ определяем из (1.10), используя условие

$$\bar{\mathfrak{e}}^i \cdot \bar{\mathfrak{e}}_j = \delta^i_j.$$

В результате получим

$$\bar{\mathfrak{e}}^1 = \frac{1}{\lambda_1 \rho_0} \bar{\tau}; \quad \bar{\mathfrak{e}}^2 = \frac{1}{\lambda_2 r_0} \bar{e}_\varphi; \quad \bar{\mathfrak{e}}^3 = \frac{1}{\lambda_3} \bar{n}. \quad (2.3)$$

Полагаем оболочку тонкой: $\frac{h_0}{\rho_0} \ll 1$, а напряженное состояние однородным по толщине. При этом напряжением σ_{33} по сравнению с σ_{11} и σ_{22} пренебрегаем. В условиях равновесия производную от σ_{33} по ξ_0 учитываем. В результате условие равновесия (2.2) для тензора напряжений (2.1) примет следующий вид:

$$\bar{\mathfrak{e}}^1 \cdot \frac{\partial (\sigma_{11} \bar{\tau} \bar{\tau} + \sigma_{22} \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi)}{\partial \theta_0} + \bar{\mathfrak{e}}^2 \cdot \frac{\partial (\sigma_{11} \bar{\tau} \bar{\tau} + \sigma_{22} \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi)}{\partial \varphi} + \bar{\mathfrak{e}}^3 \cdot \frac{\partial \sigma_{33} \bar{n} \bar{n}}{\partial \xi_0} = \bar{0}. \quad (2.4)$$

Найдем производные по координате θ_0 .

Из рис. 1 следует, что

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \sin \theta \bar{e}_r + \cos \theta \bar{e}_z; \\ \bar{\tau} &= \cos \theta \bar{e}_r - \sin \theta \bar{e}_z.\end{aligned}\quad (2.5)$$

В результате получим

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \theta_0} = -(\sin \theta \bar{e}_r + \cos \theta \bar{e}_z) \theta' \equiv -\theta' \bar{n}, \quad (2.6)$$

где $\theta' = \frac{d\theta}{d\theta_0}$.

Найдем θ' . Дифференцируя $\cos \theta$, запишем

$$(\cos \theta)' = -\sin \theta \frac{d\theta}{d\theta_0}.$$

Выражая $\cos \theta$ и $\sin \theta$ по формулам (1.20), имеем

$$\theta' = \frac{d\theta}{d\theta_0} = -\frac{\lambda_1}{z'} \left(\frac{r'}{\lambda_1} \right)' = -\frac{\lambda_1 r_0'}{z'} \left(\frac{\lambda_2'}{\lambda_1} \right)'. \quad (2.7)$$

Из определения цилиндрической системы следует, что

$$\frac{\partial \bar{e}_\varphi}{\partial \theta_0} = \bar{0}. \quad (2.8)$$

Используя (1.14), найдем производные по φ :

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} = \frac{r'}{\lambda_1 \rho_0} \frac{\partial \bar{e}_r}{\partial \varphi} = \cos \theta \bar{e}_\varphi; \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \bar{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\bar{e}_r = -\cos \theta \bar{\tau} - \sin \theta \bar{n}. \quad (2.10)$$

Преобразуем слагаемые в уравнении (2.4), используя (2.3), (2.5) – (2.10):

$$\bar{\Xi}^1 \cdot \frac{\partial \sigma_{11} \bar{\tau} \bar{\tau}}{\partial \theta_0} = \frac{1}{\lambda_1 \rho_0} \bar{\tau} \cdot \left(\bar{\tau} \bar{\tau} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta_0} + \sigma_{11} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \theta_0} \bar{\tau} + \sigma_{11} \bar{\tau} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \theta_0} \right) = \frac{1}{\lambda_1 \rho_0} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta_0} \bar{\tau} - \sigma_{11} \bar{n} \theta' \right);$$

$$\bar{\Xi}^1 \cdot \frac{\partial \sigma_{22} \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi}{\partial \theta_0} = \bar{0}, \text{ так как } \frac{\partial \bar{e}_\varphi}{\partial \theta_0} = \bar{0}, \bar{\Xi}^1 \cdot \bar{e}_\varphi = 0;$$

$$\bar{\Xi}^2 \cdot \frac{\partial \sigma_{11} \bar{\tau} \bar{\tau}}{\partial \varphi} = \frac{1}{\lambda_2 r_0} \bar{e}_\varphi \cdot \sigma_{11} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \varphi} \bar{\tau} = \frac{1}{\lambda_2 r_0} \bar{e}_\varphi \cdot \sigma_{11} \bar{e}_\varphi \cos \theta = \frac{\cos \theta}{\lambda_2 r_0} \sigma_{11} \bar{\tau};$$

$$\bar{\Xi}^2 \cdot \frac{\partial \sigma_{22} \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{\lambda_2 r_0} \bar{e}_\varphi \cdot \sigma_{22} \left(\frac{\partial \bar{e}_\varphi}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi + \bar{e}_\varphi \frac{\partial \bar{e}_\varphi}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{\lambda_2 r_0} \sigma_{22} \frac{\partial \bar{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\lambda_2 r_0} \sigma_{22} (\cos \theta \bar{\tau} + \sin \theta \bar{n}).$$

Складывая полученные слагаемые, получим

$$\left(\frac{1}{\lambda_1 \rho_0} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta_0} + \frac{\cos \theta}{\lambda_2 r_0} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \right) \bar{\tau} + \left(-\frac{\theta'}{\lambda_1 \rho_0} \sigma_{11} - \frac{\sin \theta}{\lambda_2 r_0} \sigma_{22} + \frac{1}{\lambda_3} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \xi_0} \right) \bar{n} = \bar{0}.$$

Приравнявая к нулю компоненты вектора в левой части данного выражения, с учетом (1.20) имеем следующую систему условий равновесия:

$$r \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta_0} + \frac{\partial r}{\partial \theta_0} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) = 0; \quad (2.11)$$

$$\lambda_3 (\theta' r \sigma_{11} + \lambda_1 \rho_0 \sin \theta \sigma_{22}) - \lambda_1 \rho_0 r \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \xi_0} = 0. \quad (2.12)$$

Входящие в условия равновесия удлинения выразим через функции $r(\theta_0)$ и $\theta(\theta_0)$. Из (1.17) и (1.20) получим

$$\lambda_1 = \frac{1}{\rho_0} \frac{r'}{\cos \theta}; \quad \lambda_2 = \frac{r}{r_0}. \quad (2.13)$$

Полагая материал несжимаемым, из условия несжимаемости [19] $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ находим удлинение λ_3 в виде

$$\lambda_3 = \rho_0 r_0 \cos \theta / r' r. \quad (2.14)$$

Таким образом, условия равновесия и кинематические характеристики выражаются через две функции $r(\theta_0)$ и $\theta(\theta_0)$.

3. Определяющие соотношения, замкнутая система уравнений

Для замыкания системы уравнений (2.11) – (2.14) необходимо определить связь между тензором истинных напряжений и соответствующей мерой деформации. В работе [20] показано, что для изотропных упругих материалов сопряженной с тензором истинных напряжений является «правая» мера искажения \underline{V} , связанная с мерой Фингера \underline{F} и тензором аффинором соотношением [19]

$$\underline{F} = \underline{V}^2 = \underline{\Phi}^T \cdot \underline{\Phi}.$$

Используя представление аффинора (1.17), получим

$$\underline{V}^2 = \lambda_1^2 \bar{\tau} \bar{\tau} + \lambda_2^2 \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi + \lambda_3^2 \bar{n} \bar{n}.$$

Отсюда находим правую меру

$$\underline{V} = \lambda_1 \bar{\tau} \bar{\tau} + \lambda_2 \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi + \lambda_3 \bar{n} \bar{n}.$$

Энергетически сопряженным с тензором $\underline{\sigma}$ является «правый» тензор Генки

$$\underline{H} = \ln \underline{V} = \ln \lambda_1 \bar{\tau} \bar{\tau} + \ln \lambda_2 \bar{e}_\varphi \bar{e}_\varphi + \ln \lambda_3 \bar{n} \bar{n}.$$

По аналогии с законом Гука запишем определяющее соотношение для несжимаемого материала в следующем виде [19]:

$$\underline{\sigma} = 2G \ln \underline{V} + \sigma_0 \underline{E}, \quad (3.1)$$

где G – упругий модуль; \underline{E} – единичный тензор; $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$.

В координатной форме (3.1) при условии плоского напряженного состояния, когда $\sigma_{33} = 0$, принимает вид

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2G \ln \lambda_1 + \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ \sigma_{22} &= 2G \ln \lambda_2 + \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}).\end{aligned}$$

Разрешая данную систему относительно σ_{11} и σ_{22} , получим

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 4G \ln \lambda_1 - 2G \ln \lambda_2 = 2G(2 \ln \lambda_1 - \ln \lambda_2); \\ \sigma_{22} &= 2G(2 \ln \lambda_2 - \ln \lambda_1).\end{aligned}\quad (3.2)$$

С целью явного введения внутреннего давления P запишем граничные условия. На внутренней поверхности тора, где $\vec{n}_0^- = -\vec{n}_0$, вектор напряжения имеет вид

$$\vec{P}(\vec{n}_0^-) = P \vec{n}_0 = \sigma|_{\xi=-\frac{h_0}{2}} \cdot \vec{n}_0^- = -\sigma_{33}|_{\xi=-\frac{h_0}{2}} \vec{n}_0.$$

На внешней поверхности тора

$$\vec{P}(\vec{n}_0^+) = \vec{0} = \sigma_{33}|_{\xi=\frac{h_0}{2}} \vec{n}_0.$$

Проинтегрируем уравнение (2.12) по координате ξ_0 от $-\frac{h_0}{2}$ до $\frac{h_0}{2}$. В результате данное уравнение примет следующий вид:

$$\lambda_3 h_0(\theta_0)(\theta' r \sigma_{11} + \lambda_1 \rho_0 \sin \theta \sigma_{22}) = \lambda_1 \rho_0 r P. \quad (3.3)$$

Уравнения (3.3), (2.11), условия (2.13), (2.14) с определяющими соотношениями (3.2) образуют замкнутую систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $\sigma_{11}(\theta_0)$, $\sigma_{22}(\theta_0)$, $\theta(\theta_0)$, $r(\theta_0)$, $\lambda_1(\theta_0)$, $\lambda_3(\theta_0)$. Полагая $r = r_0 \lambda_2$, приведем данную систему:

$$r_0 \lambda_2 \frac{\partial \hat{\sigma}_{11}}{\partial \theta_0} + \frac{\partial r_0 \lambda_2}{\partial \theta_0} (\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22}) = 0; \quad (3.4)$$

$$\lambda_3 h_0(\theta_0)(r_0 \lambda_2 \theta' \hat{\sigma}_{11} + \lambda_1 \rho_0 \sin \theta \hat{\sigma}_{22}) = \rho_0 r_0 \lambda_1 \lambda_2 \hat{P}; \quad (3.5)$$

$$\hat{\sigma}_{11} = 2 \ln \lambda_1 - \ln \lambda_2; \quad \hat{\sigma}_{22} = 2 \ln \lambda_2 - \ln \lambda_1; \quad (3.6)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\rho_0 \cos \theta} \frac{\partial r_0 \lambda_2}{\partial \theta_0}; \quad \lambda_3 = \rho_0 \cos \theta / \lambda_2 \frac{\partial r_0 \lambda_2}{\partial \theta_0}. \quad (3.7)$$

Здесь $\hat{\sigma}_{11} = \sigma_{11}/2G$, $\hat{\sigma}_{22} = \sigma_{22}/2G$, $\hat{P} = P/2G$ – безразмерные напряжения и внутреннее давление.

4. Оценка напряженно деформированного состояния оболочки.

Система уравнений (3.4) – (3.7) представляет сложную нелинейную систему из 6-ти уравнений. Точное аналитическое решение не может быть найдено. Для оценки напряженного и деформированного состояния используем метод последовательных приближений [17]. В начальном приближении линеаризуем систему

уравнений равновесия (3.4),(3.5). Без учета геометрической нелинейности полагаем, что в (3.4), (3.5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\theta = \theta_0$, $\theta' = 1$. В результате приходим к следующим уравнениям равновесия:

$$\frac{d}{d\theta_0}(r_0 \hat{\sigma}_{11}) - \rho_0 \cos \theta_0 \hat{\sigma}_{22} = 0; \quad (4.1)$$

$$r_0 \hat{\sigma}_{11} + \rho_0 \sin \theta_0 \hat{\sigma}_{22} = \frac{\rho_0 r_0}{h_0} \hat{P}. \quad (4.2)$$

Домножим уравнение (4.1) на $\sin \theta_0$, а (4.2) на $\cos \theta_0$ и сложим. В результате получим

$$\sin \theta_0 \frac{d}{d\theta_0}(r_0 \hat{\sigma}_{11}) + \cos \theta_0 \rho_0 \hat{\sigma}_{11} = \frac{\rho_0 r_0}{h_0} \cos \theta_0 \hat{P}.$$

Преобразуя левую часть данного уравнения, приходим к выражению

$$\frac{d}{d\theta_0}[\sin \theta_0 (r_0 \hat{\sigma}_{11})] = \frac{\rho_0 r_0}{h_0} \cos \theta_0 \hat{P}. \quad (4.3)$$

Подставляя значение $r_0 = a_0 + \rho_0 \sin \theta_0$ и интегрируя (4.3) по θ_0 от 0 до θ_0 , находим закон изменения $\hat{\sigma}_{11}(\theta_0)$ в квадратурах:

$$\hat{\sigma}_{11} = \frac{\hat{P} \int_0^{\theta_0} \frac{\rho_0}{h_0} \cos \theta_0 (a_0 + \rho_0 \sin \theta_0) d\theta_0}{\sin \theta_0 (a_0 + \rho_0 \sin \theta_0)}. \quad (4.4)$$

В случае постоянной толщины из (4.4) приходим к известному закону распределения мембранных усилий [21]. Подставляя (4.4) в (4.2), находим закон распределения окружных напряжений:

$$\hat{\sigma}_{22} = \left(\frac{\rho_0 \hat{P}}{h_0} - \hat{\sigma}_{11} \right) \frac{r_0}{\rho_0 \sin \theta_0}. \quad (4.5)$$

Рассмотрим распределение напряжений при постоянной начальной толщине оболочки ($h_0 = const$). Интегрируя (4.4), получим закон изменения меридиональных напряжений

$$\hat{\sigma}_{11} = \frac{\rho_0}{h_0} \hat{P} \frac{a_0 + \frac{\rho_0}{2} \sin \theta_0}{a_0 + \rho_0 \sin \theta_0}. \quad (4.6)$$

Из (4.5) и (4.6) находим закон изменения окружных напряжений

$$\hat{\sigma}_{22} = \frac{\rho_0}{h_0} \hat{P} \left(1 - \frac{a_0 + \frac{\rho_0}{2} \sin \theta_0}{a_0 + \rho_0 \sin \theta_0} \right) \frac{a_0 + \rho_0 \sin \theta_0}{\rho_0 \sin \theta_0} = \frac{\rho_0}{2h_0} \hat{P}. \quad (4.7)$$

Таким образом, окружные напряжения постоянны.

Определение кинематических характеристик
в первом приближении

Используя определяющие соотношения (3.2), найдем выражения компонент тензора Генки через безразмерные компоненты тензора напряжений:

$$\ln \lambda_1 = \frac{1}{3}(\hat{\sigma}_{11} + 2\hat{\sigma}_{22}); \quad (4.8)$$

$$\ln \lambda_2 = \frac{1}{3}(\hat{\sigma}_{22} + 2\hat{\sigma}_{11}). \quad (4.9)$$

Из условия несжимаемости $\ln \lambda_1 + \ln \lambda_2 + \ln \lambda_3 = 0$ находим

$$\ln \lambda_3 = -(\hat{\sigma}_{11} + \hat{\sigma}_{22}).$$

Отметим, что использование известных форм нелинейных определяющих соотношений [20] не позволяет в простом виде получить обратные связи мер деформаций через компоненты напряжений.

Например, замена в определяющих соотношениях (3.2) тензора Генки на тензор Фингера (1.18), (3.2) приводит к законам

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{11} &= (1 - \lambda_1^2) - \frac{1}{2}(1 - \lambda_2^2) = \frac{1}{2} - \lambda_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_2^2; \\ \hat{\sigma}_{22} &= \frac{1}{2} - \lambda_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_1^2. \end{aligned}$$

Из данных законов можно определить квадраты удлинений λ_1^2 , λ_2^2 через компоненты напряжений. Однако использование условия несжимаемости $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ для нахождения λ_3 приводит к неоднозначности выбора корней из компонент напряжений.

Результаты расчета напряженного состояния
в начальном приближении

Введем безразмерный параметр $\hat{\rho}_0 = \frac{\rho_0}{a_0}$. Тогда выражения (4.6), (4.7) преобразуются к виду

$$\hat{\sigma}_{11} = \hat{P} \frac{\rho_0 \left(1 + \frac{\hat{\rho}_0}{2} \sin \theta_0\right)}{h_0 (1 + \hat{\rho}_0 \sin \theta_0)}; \quad \hat{\sigma}_{22} = \frac{\rho_0}{2h_0} \hat{P}. \quad (4.10)$$

На рис. 2 приведены законы распределения напряжений $\hat{\sigma}_{11}(\theta_0)$, $\hat{\sigma}_{22}(\theta_0)$, соответствующие верхней половине тора, когда

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Данные графики соответствуют различным размерам тора: $\hat{\rho}_0$, ρ_0 , h_0 .

Распределения логарифмических удлинений (4.8), (4.9), соответствующие законам распределения напряжений (4.10), приведены на рис. 3.

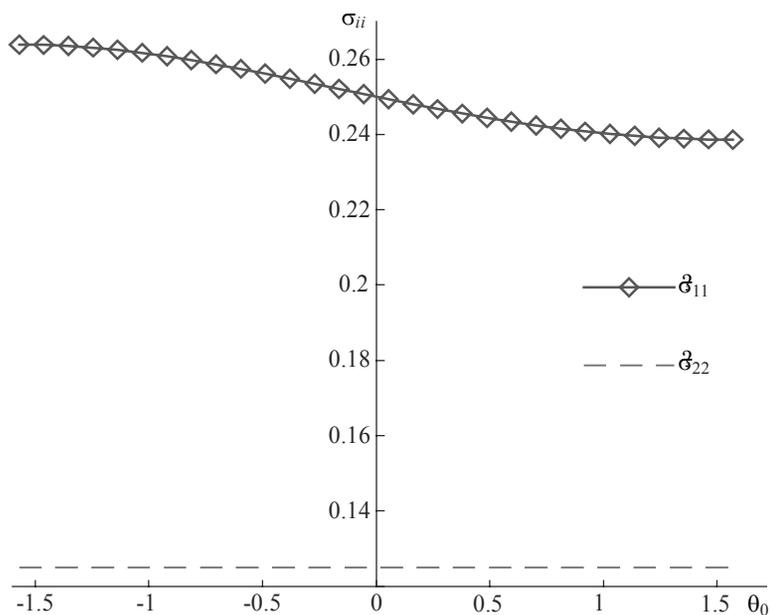


Рис. 2. Компоненты тензора напряжений $\hat{\sigma}_{11}(\theta_0)$, $\hat{\sigma}_{22}(\theta_0)$

Fig. 2. Stress tensor components $\hat{\sigma}_{11}(\theta_0)$, $\hat{\sigma}_{22}(\theta_0)$

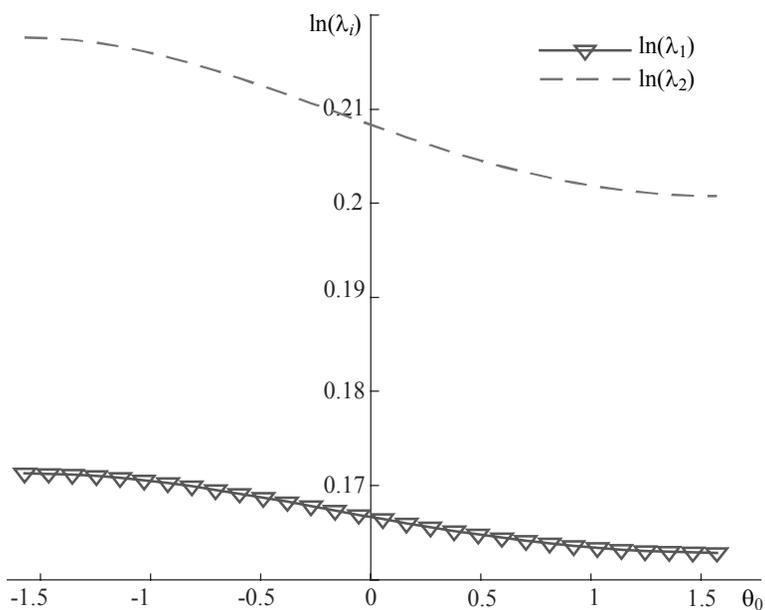


Рис. 3. Логарифмы удлинений материальных волокон $\ln \lambda_1$, $\ln \lambda_2$

Fig. 3. Logarithms of the extensions of material fibers $\ln \lambda_1$, $\ln \lambda_2$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Marchuk M.V., Tuchapskii R.I.* Dynamics of geometrically nonlinear elastic nonthin anisotropic shells of variable thickness // *International Applied Mechanics*. 2017. V. 53. P. 655–667. DOI: 10.1007/s10778-018-0848-4.
2. *Cowley J., Mulholland A., Gachagan A.A.* Nonlinear elasticity approach to modelling the collapse of a shelled microbubble // *IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications)*. 2017. V. 82. P. 781–801. DOI: 10.1093/imamat/hxx013.
3. *Долгих Д.В., Киселев В.В.* Управление деформированием круговой цилиндрической оболочки // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2019. № 6. С. 54–67. DOI: 10.1134/S0572329919060072.
4. *Киселев В.В., Долгих Д.В.* Влияние жестких связей на изменение формы гидростатически сжатой оболочки // *Прикладная механика и техническая физика*. 2017. № 3. С. 178–189. DOI: 10.15372/PMTF20170318.
5. *Жгутов В.М.* Нелинейные уравнения равновесия ребристых оболочек с учетом различных свойств материала // *Инженерно-строительный журнал*. 2010. № 2 (12). С. 36–44. DOI: 10.18720/MCE.12.8.
6. *Махутов Н.А., Щеглов Б.А., Евдокимов А.П.* Нелинейная упругость торообразных резинокордных оболочек в режиме статического нагружения // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2006. № 2. С. 27–36.
7. *Вережака С.М., Жигилий Д.А., Караиш И.Т., Дейнека А.В.* Конструкционная прочность торообразных баллонов высокого давления // *Вестник СевНТУ: сборник научных трудов*. Серия: «Механика, энергетика, экология». 2012. Вып. 133. С. 329–334.
8. *Фурсаев С.А.* Деформирование торообразных оболочек с учетом режима сверхпластичности // *Известия Тульского государственного университета. Естественные науки*. 2009. Вып. 1. С. 71–82.
9. *Бакусов П.А., Семенов А.А.* Устойчивость сегментов тороидальных оболочек при изменении угла отклонения от вертикальной оси // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2017. № 3. С. 17–36. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.02.
10. *Jiammeepreecha W., Chucheepsakul S.* Nonlinear static analysis of an underwater elastic semi-toroidal shell // *Thin-Walled Structures*. 2017. V. 116. P. 12–18. DOI: 10.1016/j.tws.2017.03.001.
11. *Chernyshenko I.S., Maksimuk V.A.* On the stress-strain state of toroidal shells of elliptical cross section formed from nonlinear elastic orthotropic materials // *International Applied Mechanics*. 2000. V. 36. No.1. P. 90–97. DOI: 10.1007/BF02681963.
12. *Бужков И.А., Лысенко А.В.* Особенности осесимметричного деформирования надувной торообразной оболочки при воздействии внешнего давления // *Космонавтика и ракетостроение*. 2014. № 6 (79). С. 56–58.
13. *Zhu Y., Chen B., Zhao B., Zhao X., Tang W., Wang X.* Buckling characteristics of externally pressurised toroidal shell // *Ships and Offshore Structures*. 2019. DOI: 10.1080/17445302.2019.1682920.
14. *Евдокимов А.П.* Нелинейная упругость торообразных резинокордных оболочек соединительных муфт бурового оборудования // *Оборудование и технологии для нефтегазового комплекса*. 2012. № 1. С. 31–36.
15. *Сабиров Р.А.* К расчету деформирования мягкой тороидальной оболочки // *Решетневские чтения: материалы XXI Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева (8–11 нояб. 2017, г. Красноярск): в 2 ч. / под общ. ред. Ю.Ю. Логинова*. 2017. Т. 2. С. 25–27.
16. *Jiammeepreecha W., Suebsuk J., Chucheepsakul S.* Nonlinear static analysis of liquid-containment toroidal shell under hydrostatic pressure // *Journal of Structural Engineering*. 2020. V. 146. No. 1. DOI: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0002460.
17. *Виленин Н.Я.* Метод последовательных приближений. М.: Наука, 1968. 108 с.
18. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

19. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
20. Маркин А.А., Христич Д.В. Нелинейная теория упругости: учеб. пособие: 2-е изд., доп. Тула: Изд-во ТулГУ. 2007. 92 с.
21. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник: в 3 т. Т. 1. М.: Машиностроение, 1968. 831 с.

Статья поступила 08.07.2020

Kozlov V.V., Markin A.A. (2021) FINITE DEFORMATIONS OF A TOROIDAL SHELL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 71. pp. 106–120

DOI 10.17223/19988621/71/9

Keywords: toroidal shell, nonlinear elasticity, constitutive relations, method of successive approximations.

The stress-strain state of a nonlinear elastic shell exposed to the internal pressure is considered. A surface of the shell is toroidal in shape in the initial state. The Lagrangian coordinates of the shell are assigned to a cylindrical system. The kinematic characteristics of the process are shown: a law of the motion of points, vectors of a material basis, a strain affinor and its polar decomposition, the Cauchy-Green strain measure and tensor, the Finger measure, and the “left” and the “right” Hencky strain tensors. Neglecting the shear components of the stress tensor, a constitutive relation is obtained as a quasilinear relation between true stress tensor and the Hencky corotation tensor. A system of equilibrium equations is presented in terms of physical components of the true stress tensor in the Lagrangian coordinates. Using the equilibrium equations and the incompressibility condition, a closed system of nonlinear ordinary differential equations is obtained to determine six unknown functions, depending on the angle indicating a position of the points along the cross-section in the initial state. The method of successive approximations is applied to estimate stress tensor components and to derive logarithms of the elongations of material fibers.

Financial support. The reported study was partially funded by the grant from the President of the Russian Federation according to the research project MD-1803.2019.1 (formulation of the problem statement) and by the grant of Russian Science Foundation according to the research project No. 19-71-10008 (evaluation of the shell stress-strain state).

Viktor V. KOZLOV (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: vvkozlovtsu@mail.ru

Aleksey A. MARKIN (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: markin-nikram@yandex.ru

REFERENCES

1. Marchuk M.V., Tuchapskii R.I. (2017) Dynamics of geometrically nonlinear elastic nonthin anisotropic shells of variable thickness. *International Applied Mechanics*. 53. pp. 655–667. DOI: 10.1007/s10778-018-0848-4.
2. Cowley J., Mulholland A., Gachagan A.A. (2017) Nonlinear elasticity approach to modelling the collapse of a shelled microbubble. *IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications)*. 82. pp. 781–801. DOI: 10.1093/imamat/hxx013.
3. Dolgikh D.V., Kiselev V.V. (2019) Control of the deformation of a circular cylindrical shell. *Mechanics of Solids*. 54. pp. 1171–1181. DOI: 10.3103/S0025654419080077.
4. Kiselev V.V., Dolgikh D.V. (2017) Influence of rigid constraints on the deformation of a hydrostatically compressed shell. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 58. pp. 529–538. DOI: 10.1134/S002189441703018X.

5. Zhgutov V.M. (2010) Nelineynye uravneniya ravnovesiya rebristykh obolochek s uchetom razlichnykh svoystv materiala [Nonlinear equilibrium equations for ribbed shells with consideration of various material properties]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal – Magazine of Civil Engineering*. 2(12). pp. 36–44. DOI: 10.18720/MCE.12.8.
6. Makhutov N.A., Shcheglov B.A., Evdokimov A.P. (2006) Nelineynaya uprugost' toroobraznykh rezinokordnykh obolochek v rezhime staticheskogo nagruzheniya [Nonlinear elasticity of toroidal rubber-cord casings under static loading mode]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin – Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2. pp. 27–36.
7. Vereshchaka S.M., Zhigilyi D.A., Karash I.T., Deyneka A.V. (2012) Konstruktsionnaya prochnost' toroobraznykh ballonov vysokogo davleniya [Structural strength of toroidal high-pressure cylinders]. *Vestnik SevNTU: sbornik nauchnykh trudov. Seriya: «Mekhanika, energetika, ekologiya»*. 133. pp. 329–334.
8. Fursaev S.A. (2009) Deformirovanie toroobraznykh obolochek s uchetom rezhima sverkhplastichnosti [Deformation of similar to a ring shells in view of a mode of superplasticity]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki – Izvestiya Tula State University. Natural sciences*. 1. pp. 71–82.
9. Bakusov P.A., Semenov A.A. (2017) Ustoychivost' segmentov toroidal'nykh obolochek pri izmenenii ugla otkloneniya ot vertikal'noy osi [Stability of toroidal shell segments at variation of a deflection angle]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 3. pp. 17–36. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.02.
10. Jiammeepreecha W., Chucheeesakul S. (2017) Nonlinear static analysis of an underwater elastic semi-toroidal shell. *Thin-Walled Structures*. 116. pp. 12–18. DOI: 10.1016/j.tws.2017.03.001.
11. Chernyshenko I.S., Maksimyyuk V.A. (2000) On the stress-strain state of toroidal shells of elliptical cross section formed from nonlinear elastic orthotropic materials. *International Applied Mechanics*. 36(1). pp. 90–97. DOI: 10.1007/BF02681963.
12. Buyakov I.A., Lysenko A.V. (2014) Osobennost' osesimmetrichnogo deformirovaniya naduvnoy toroobraznoy obolochki pri vozdeystvii vneshnego davleniya [Feature of an axisymmetric straining inflatable toroidal shell when exposed to an external pressure]. *Kosmonavtika i raketostroenie*. 6(79). pp. 56–58.
13. Zhu Y., Chen B., Zhao B., Zhao X., Tang W., Wang X. (2019) Buckling characteristics of externally pressurised toroidal shell. *Ships and Offshore Structures*. DOI: 10.1080/17445302.2019.1682920.
14. Evdokimov A.P. (2012) Nelineynaya uprugost' toroobraznykh rezinokordnykh obolochek soedinitel'nykh muft burovogo oborudovaniya [Nonlinear elasticity of toroidal rubber-cord shells of drilling equipment couplings]. *Oborudovanie i tekhnologii dlya neftegazovogo kompleksa*. 1. pp. 31–36.
15. Sabirov R.A. (2017) K raschetu deformirovaniya myagkoy toroidal'noy obolochki [To the calculations of flexible toroidal shell deformation]. *Reshetnevskie chteniya: materialy XXI Mezhdunarodnoy naucho-prakticheskoy konferentsii, posvyashchennoy pamyati general'nogo konstruktora raketno-kosmicheskikh sistem akademika M.F. Reshetneva*. 2. pp. 25–27.
16. Jiammeepreecha W., Suebsuk J., Chucheeesakul S. (2020) Nonlinear static analysis of liquid-containment toroidal shell under hydrostatic pressure. *Journal of Structural Engineering*. 146(1). DOI: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0002460.
17. Vilenkin N.Ya. (1968) *Metod posledovatel'nykh priblizheniy* [Method of successive approximations]. Moscow: Nauka.
18. Lurie A.I. (1990) *Nonlinear Theory of Elasticity*. Amsterdam: North-Holland.
19. Markin A.A., Sokolova M.Yu. (2013) *Termomekhanika uprugoplasticheskogo deformirovaniya* [Thermal mechanics of elastoplastic deformation]. Moscow: Fizmatlit.
20. Markin A.A., Khristich D.V. (2007) *Nelineynaya teoriya uprugosti: uchebnoe posobie* [Nonlinear theory of elasticity: tutorial]. Tula: TulGU.
21. Birger I.A., Panovko Ya.G. (1968) *Prochnost', ustoychivost', kolebaniya. T. 1.* [Strength, buckling, vibrations. Vol. 1.]. Moscow: Mashinostroenie.

УДК 532.5

DOI 10.17223/19988621/71/10

З.М. Маликов, М.Э. Мадалиев

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ
В ЦЕНТРОБЕЖНОМ СЕПАРАТОРЕ**

Представлены численные результаты математического моделирования двухфазного, осесимметричного закрученного турбулентного течения в сепарационной зоне центробежного сепаратора. Движение несущего потока газа моделировалось с помощью осредненных уравнений Навье – Стокса, для замыкания которых использовалась модель турбулентности Спаларта – Аллмараса на основе полученного поля осредненных скоростей несущей среды с учетом турбулентной диффузии. Для численного решения задачи был использован полунейвный метод для связывающих давление SIMPLE. Сравняются результаты с учётом влияния твёрдой фазы на динамику воздушной среды и без ее учета. Приведены результаты сравнения численных расчетов с экспериментальными данными с учётом влияния твёрдой фазы на динамику воздушной среды и без ее учета.

Ключевые слова: *осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье – Стокса, модель SA, центробежный воздушный сепаратор, завихренность, итерация, вихревая вязкость, прогонка, прилипания, гидростатическое давление, SIMPLE.*

В современных технологических процессах нередко встречаются закрученные потоки газов и жидкостей [1]. Закрученные течения формируются за колесами гидротурбин ГЭС [2], в следе самолетных и гребных винтов, а также ветрогенераторов [3]. Циклоны, сепараторы, вихревые расходомеры — во всех этих устройствах используется закрутка потока рабочей среды. Однако закрученные течения имеют не только положительные особенности. В сильно закрученных потоках часто происходит формирование нестационарных структур, таких, как прецессирующее вихревое ядро (ПВЯ). Низкие частоты прецессии вихревого ядра, образующегося, к примеру, за колесом гидротурбины ГЭС, могут привести к резонансу с собственными частотами гидроагрегата, что, в свою очередь, повлечет за собой сильные вибрации, представляющие серьезную опасность для всей конструкции ГЭС. Образование ПВЯ в вихревых камерах сгорания может быть причиной термоакустического резонанса [4], следствием чего также являются сильные вибрации и шум. Кроме того, было установлено, что ПВЯ может влиять на эффективность работы вихревых аппаратов [5]. Крупномасштабные пульсации, вызванные прецессией вихря, могут привести к повреждению конструкций и снижению надежности оборудования. Несмотря на многолетние исследования данного явления, на настоящий момент нет достаточной информации для построения теории ПВЯ и соответственно для разработки эффективных методов управления данным явлением [19]. Таким образом, для инженерных расчетов требуются модели турбулентности, достаточно точно описывающие усредненные поля и крупномасштабные пульсации закрученных течений. Получившие широкое распростране-

ние в инженерных расчетах $k-\varepsilon$ - и $k-\omega$ -модели турбулентности плохо описывают такие течения. Чтобы улучшить адекватность моделирования турбулентных закрученных течений пытаются модифицировать существующие RANS-модели турбулентности (Reynolds-Averaged Navier–Stokes Equations – усредненные по Рейнольдсу уравнения Навье – Стокса). В работе [6] авторами была предложена новая модель Спаларта – Аллмараса, получившая название SA.

Физическая и математическая постановка задачи

Известно, что закрученные потоки характеризуются сильной искривленностью линий тока, возникновением рециркуляционных зон, расположение и размеры которых в значительной мере зависят от интенсивности крутки и конфигурации границ. Кроме этого, такие потоки являются турбулентными. Поэтому для их исследования требуется привлечение эффективных моделей турбулентности, которые появились в последнее время.

В настоящей работе рассматривается двухмерное осесимметричное турбулентное течение в воздушном центробежном сепараторе, который представляет собой важное звено в процессах сепарации и классификации частиц, в получении порошков требуемого качества. От того, как организована структура потока внутри рабочей области, будет зависеть эффективность происходящих процессов по разделению порошков на крупные и мелкие фракции. Целью предпринимаемого численного исследования является выяснение характера гидродинамики закрученного потока при разных геометриях. Схема рассчитываемой области показана на рис. 1.

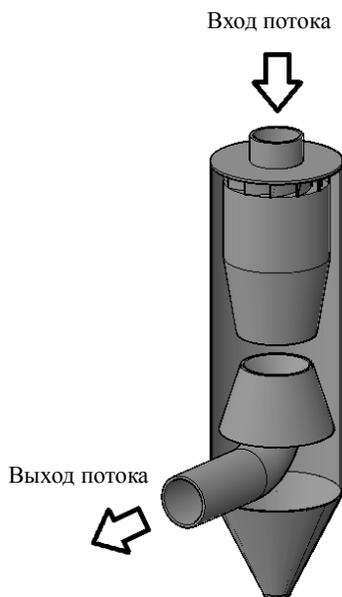


Рис. 1. Схема рассчитываемого
воздушно-центробежного сепаратора

Fig. 1. Scheme of the studied air-centrifugal separator

Центробежный воздушный сепаратор работает следующим образом. Исходный материал вместе с первичным воздухом подается через патрубок в верхнюю часть сепаратора. С помощью управляемых лопаток потоку воздуха придается вращательное движение. Под действием центробежной силы инерции частицы движутся к внешней цилиндрической стенке корпуса сепаратора и попадают в зону классификации, расположенную между конусами и стенкой (см. рис. 1). Крупные частицы вследствие своей большей массы под действием центробежной силы накапливаются около внутренней стенки корпуса сепаратора и по инерции попадают в бункер сепаратора. А мелкие частицы увлекаются воздухом и выносятся из сепаратора через выходной патрубок. Таким образом, исходный материал разделяется на две фракции [12].

Несложно понять, что эффективность такого сепаратора сильно зависит от его геометрии. Поэтому для поиска оптимальных геометрических параметров возникает задача моделирования кинематики частиц внутри установки. Ясно, что кинематика частиц зависит от динамики потока воздуха. Поэтому здесь возникают две задачи: 1) исследовать динамику воздушного потока; 2) на основе полученных гидродинамических параметров воздушного потока исследовать траектории сепарируемых частиц.

На практике объемная плотность пыли в сепараторах может достигать 50 г/м^3 . Данное значение существенно меньше, чем плотность несжимаемого воздуха (1.2 кг/м^3). Поэтому во многих работах влиянием твердой фазы на динамику воздуха пренебрегается. Однако около стенки, где скапливаются частицы пыли под действием центробежной силы, плотность твердой фазы может достигать значительных значений. В таком случае влиянием твердой фазы на динамику газовой фазы пренебрегать нельзя. Поэтому в настоящей работе проводится численное исследование турбулентного потока с учетом влияния твердой фазы на динамику воздушного потока внутри центробежной установки и без учёта ее.

Моделирование трехмерных течений газа связано с известными практически трудностями: использованием разнесенных сеток в сплошной области расчета, медленной сходимостью численного алгоритма решения, достаточно сложной реализацией расчетного алгоритма. Решение турбулентной задачи требует также сгущения расчетной сетки в областях с большими градиентами искомых переменных, в частности вблизи твердых стенок. Все эти проблемы значительно осложняют решение задачи в рассматриваемой области.

Для численного исследования поставленной задачи используется система осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса в цилиндрической системе координат [7]: В системе уравнений не учитываются силы, обусловленные эффектами турбулентной миграции, Сепмена, Магнуса (подъемная сила) и силами Кориолиса, которые по сравнению с главной силой в сепараторе – центробежной, пренебрежимо малы. Следовательно, для математического моделирования процессов переноса пылевых частиц и аэрозолей в сепараторе будет достаточным учет центробежной силы и взаимодействия между фазами силой Стокса:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial rV}{r \partial r} = 0 \\
& \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial z} + V \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial U}{\partial w} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \\
& = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(v + v_t) \frac{\partial U}{\partial r} \right) + v \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} k_i (U - U_p); \\
& \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial z} + V \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial V}{\partial w} - \frac{W^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = \\
& = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(v + v_t) \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{(v + v_t)}{r^2} V + v \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} k_i (V - V_p); \\
& \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial z} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial W}{\partial w} - \frac{WV}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial w} = \\
& = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(v + v_t) \frac{\partial W}{\partial r} \right) - \frac{(v + v_t)}{r^2} W + v \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} k_i (W - W_p); \quad (1) \\
& \frac{\partial U_p}{\partial t} + U_p \frac{\partial U_p}{\partial z} + V_p \frac{\partial U_p}{\partial r} = k_i (U - U_p); \\
& \frac{\partial V_p}{\partial t} + U_p \frac{\partial V_p}{\partial z} + V_p \frac{\partial V_p}{\partial r} - \frac{W_p^2}{r} = k_i (V - V_p); \\
& \frac{\partial W_p}{\partial t} + U_p \frac{\partial W_p}{\partial z} + V_p \frac{\partial W_p}{\partial r} + \frac{W_p V_p}{r} = k_i (W - W_p); \\
& \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial (U_p \rho_i)}{\partial z} + \frac{\partial (V_p \rho_i)}{\partial r} = D \left(\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial z^2} \right); \\
& D = \frac{\rho}{\rho + \rho_p} \frac{v + v_t}{S_c}.
\end{aligned}$$

Здесь U, V, W – соответственно аксиальная, радиальная и тангенциальная составляющие вектора скорости воздушного потока; U_p, V_p, W_p – аналогичные составляющие вектора скорости для i -й фракции пыли; P – гидростатическое давление; ρ – плотность газа; v – молекулярная его вязкость; v_t – турбулентная вязкость воздушного потока; ρ_i – массовая плотность пыли; k_i – коэффициент взаимодействия между воздухом и i -й фракцией пыли; N – число фракции пыли, в нашей работе $N = 5$; D – коэффициент диффузии для твердой фазы, $S_c = 0.8$ – коэффициент Шмидта.

Коэффициент взаимодействия между фазами определяется через параметр Стокса:

$$k_i = \frac{18\rho v}{\rho_p \delta_i^2}.$$

В данном выражении ρ_p – плотность материала частиц пыли, δ_i – «эффективный» диаметр частиц. Начальные и граничные условия для системы уравнений (1) стандартные [8].

В качестве начальных условий задавались параметры невозмущенного потока во всей расчетной области.

На начальном участке ($z = 0$):

$$U = U_0, V = 0, W = W_0, U_p = U, V_p = V, W_p = W.$$

Для давления — $\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial r}$.

На стенках условия прилипания:

$$U = V = W = U_p = V_p = W_p = 0.$$

На оси ($r = 0$):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \text{ для } \Phi = U, U_p \text{ и } W, V, W_p, V_p = 0.$$

На выходе ставились мягкие граничные условия [21].

Основной участок был разобран на 4 участка (рис. 2).

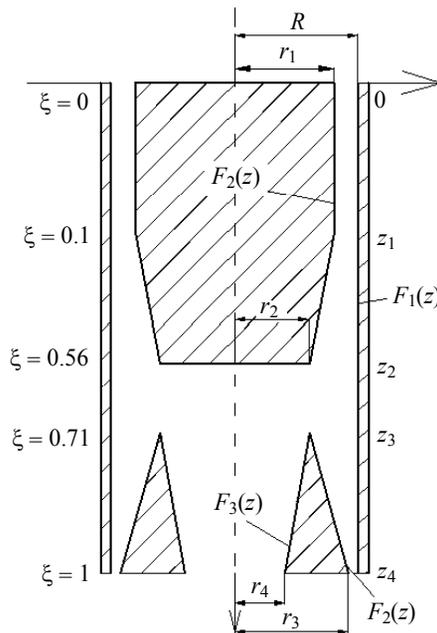


Рис. 2. Область течения в сепараторе в безразмерных координатах

Fig. 2. A flow region in the separator in dimensionless coordinates

Здесь R — большой радиус кольцевого канала, следовательно, поверхность конуса соответствует $\eta = 1$; r_1 — радиус внутреннего цилиндра первого участка, r_3, r_4 — радиус внутреннего цилиндра третьего и четвертого участков.

Для расчёта уравнения (1) для сложных фигур изменим систему координат. Запишем систему (1) в переменных Мизеса [9] (z, r) на $-(\xi, \eta)$, где $\xi = z/L$. В новых переменных производные определяются по известной формуле:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta' \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \eta} = F(z) \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Первый участок ($0 < z < z_2$):

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\eta_0 F_1(z) - F_2(z)}{F_1(z) - F_2(z)} + \frac{(1 - \eta_0)r}{F_1(z) - F_2(z)}, \\ \eta' &= \frac{(\eta_0 F_1'(z) - F_2'(z))}{(F_1(z) - F_2(z))} \frac{(\eta_0 F_1(z) - F_2(z))(F_1'(z) - F_2'(z))}{(F_1(z) - F_2(z))^2} - \frac{r(1 - \eta_0)(F_1'(z) - F_2'(z))}{(F_1(z) - F_2(z))^2}, \\ \eta'' &= -\frac{(F_1'(z) - F_2'(z))(\eta_0 F_1'(z) - F_2'(z))}{(F_1(z) - F_2(z))^2} - \\ &= \frac{(\eta_0 F_1'(z) - F_2'(z))(F_1'(z) - F_2'(z))(F_1(z) - F_2(z)) - 2(\eta_0 F_1(z) - F_2(z))(F_1'(z) - F_2'(z))^2}{(F_1(z) - F_2(z))^3} + \\ &+ \frac{2r(1 - \eta_0)(F_1'(z) - F_2'(z))^2}{(F_1(z) - F_2(z))^3} \text{ при } F_1(z) = R, \quad F_2(z) = r_2. \end{aligned}$$

Второй участок ($z_2 < z < z_3$):

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{r - F_2(z)}{(F_1(z) - F_2(z))}, \quad \eta' = -\frac{F_2'(z)}{f_1 - f_2} - \frac{(r - F_2(z))(F_1'(z) - F_2'(z))}{(F_1(z) - F_2(z))^2}, \\ \eta'' &= \frac{F_2'(z)(F_1'(z) - F_2'(z))}{(F_1(z) - F_2(z))^2} - \\ &- \left(\frac{F_2'(z)(F_1'(z) - F_2'(z))(F_1(z) - F_2(z)) - 2(F_1'(z) - F_2'(z))^2(r - F_2(z))}{(F_1(z) - F_2(z))^3} \right), \\ &\text{при } F_1(z) = R, \quad F_2(z) = 0. \end{aligned}$$

Третий участок ($z_3 < z < z_4, \eta < \eta_0$):

$$\eta = \eta_0 \frac{r}{F_3(z)}, \quad \eta' = -\eta_0 \frac{r}{F_3^2(z)}, \quad \eta'' = \eta_0 \frac{2r * F_3'(z)}{F_3^3(z)} \text{ при } F_3(z) = r_2, \quad F_2(z) = 0.$$

Четвёртый участок ($z_3 < z < z_4, \eta > \eta_0$):

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\eta_0 F_1(z) - F_2(z)}{F_1(z) - F_2(z)} + \frac{(1 - \eta_0)r}{F_1(z) - F_2(z)}, \quad \eta' = -\frac{F_2'(z)}{f_1 - f_2} - \frac{(r - F_2(z))(F_1'(z) - F_2'(z))}{(F_1(z) - F_2(z))^2}, \\ \eta'' &= \frac{F_2'(z)(F_1'(z) - F_2'(z))}{(F_1(z) - F_2(z))^2} - \\ &- \left(\frac{F_2'(z)(F_1'(z) - F_2'(z))(F_1(z) - F_2(z)) - 2(F_1'(z) - F_2'(z))^2(r - F_2(z))}{(F_1(z) - F_2(z))^3} \right) \\ &\text{при } F_1(z) = R, \quad F_2(z) = r_4. \end{aligned}$$

Здесь $F_1(z)$ – функция внешнего цилиндра, $F_2(z)$, $F_3(z)$ – функции внутреннего цилиндра и конуса; $\eta_0 = 0.6\eta$. В новых переменных система уравнений (1) приобретает вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial U}{\partial \xi} + \eta' \frac{\partial U}{\partial \eta} + F(z) \frac{\partial rV}{r \partial \eta} = 0, \\
 & \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} + U \eta' \frac{\partial U}{\partial \eta} + V \times F(z) \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial P}{\partial \xi} + \eta' \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{F(z)}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[r v_{\text{eff}} F(z) \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] + \\
 & + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\eta' \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + (\eta')^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \eta'' \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) - \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} k_i (U - U_p), \\
 & \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial \xi} + U \eta' \frac{\partial V}{\partial \eta} + V \times F(z) \frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{W^2}{r} + F(z) \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{F(z)}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[r v_{\text{eff}} F(z) \frac{\partial V}{\partial \eta} \right] - \\
 & - \frac{v_{\text{eff}}}{r^2} V + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + 2\eta' \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} + (\eta')^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \eta'' \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) - \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} k_i (V - V_p), \\
 & \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial \xi} + U \eta' \frac{\partial W}{\partial \eta} + V \times F(z) \frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{WV}{r} = \frac{F(z)}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v_{\text{eff}} F(z) \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) - \frac{v_{\text{eff}}}{r^2} W + \\
 & + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2\eta' \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + (\eta')^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \eta'' \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) - \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} k_i (W - W_p), \\
 & \frac{\partial U_p}{\partial t} + U_p \frac{\partial U_p}{\partial \xi} + U_p \eta' \frac{\partial U_p}{\partial \eta} + V_p \times F(z) \frac{\partial U_p}{\partial \eta} = k_i (U - U_p), \\
 & \frac{\partial V_p}{\partial t} + U_p \frac{\partial V_p}{\partial \xi} + U_p \eta' \frac{\partial V_p}{\partial \eta} + V_p \times F(z) \frac{\partial V_p}{\partial \eta} - \frac{W_p^2}{r} = k_i (V - V_p), \\
 & \frac{\partial W_p}{\partial t} + U_p \frac{\partial W_p}{\partial \xi} + U_p \eta' \frac{\partial W_p}{\partial \eta} + V_p \times F(z) \frac{\partial W_p}{\partial \eta} + \frac{V_p \times W_p}{r} = k_i (W - W_p), \\
 & \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \frac{\partial (U_p \rho_p)}{\partial \xi} + \eta' \frac{\partial (U_p \rho_p)}{\partial \eta} + F(z) \frac{\partial (V_p \rho_p)}{\partial \eta} = \\
 & = D \left(F(z)^2 \frac{\partial^2 \rho_p}{\partial \eta^2} + \frac{F(z) \partial \rho_p}{r \partial \eta} + \frac{\partial^2 \rho_p}{\partial \xi^2} + 2\eta' \frac{\partial^2 \rho_p}{\partial \xi \partial \eta} + (\eta')^2 \frac{\partial^2 \rho_p}{\partial \eta^2} + \eta'' \frac{\partial \rho_p}{\partial \eta} \right), \\
 & v_{\text{eff}} = \frac{1}{\text{Re}} + v_t.
 \end{aligned} \tag{2}$$

В системе уравнения (2) $F(z)$ – функция, которая зависит от расчётного участка $\eta_0 = 0.6\eta$

$$F(z) = \begin{cases} \frac{(1-\eta_0)}{F_1(z) - F_2(z)} \text{ при } (0 < z < z_2), \\ \frac{1}{F_1(z) - F_2(z)} \text{ при } (z_2 < z < z_3), \\ \eta_0 \frac{1}{F_3} \text{ при } (z_3 < z < z_4, \eta < \eta_0), \\ \frac{(1-\eta_0)}{F_1(z) - F_2(z)} \text{ при } (z_3 < z < z_4, \eta > \eta_0). \end{cases}$$

Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье – Стокса замыкались с помощью модели турбулентности Спаларта – Аллмараса.

Модель Спаларта – Аллмараса [6]. Эта модель относится к классу однопараметрических моделей турбулентности. Здесь появляется только одно дополнительное уравнение для расчета кинематического коэффициента вихревой вязкости

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + U \eta' \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + V \times F(z) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} = \\ & = (Pv - Dv) + \frac{F(z)}{r \sigma_v} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[r(v_{\text{eff}}) F(z) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} \right] + \frac{C_{b2}}{\sigma_v} \left(F(z) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} \right)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Турбулентная вихревая вязкость вычисляется как $\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}$

В качестве начальных условий задавались параметры невозмущенного потока во всей расчетной области. На внешней границе применялись неотражающие граничные условия. На поверхности твердого тела ставилось условие прилипания. В модели турбулентности SA значение рабочей переменной на теле задавалось равным нулю $\tilde{v} = 0$, на входной границе $\tilde{v} = 3\nu$, на выходной – ставилось условие Неймана, что число Рейнольдса зависит от входной скорости потока.

По моделированию кинематики движения частиц в турбулентном двухфазном потоке отсутствует единое представление, которое позволило бы правильно описать объект [14]. Модель, основанная на концепции «траекторных частиц», считается некорректной из-за отсутствия учета фактора взаимодействия рейнольдсовых напряжений и частиц. С другой стороны, неоспоримы преимущества лагранжева подхода, более близкого к реальным процессам и позволяющего получить необходимую информацию о траекториях частиц, времени нахождения частиц в аппарате, минимальном размере улавливаемых частиц [15–18]. В связи с этим в настоящей работе для моделирования эффективности центробежного пылеуловителя использован лагранжев подход.

Методы решения

Полунявный метод для связывающих давление SIMPLE

Численное решение представленной системы уравнений проводилось в физических переменных, таких, как скорость – давление, путем физического расщепления полей скорости и давления [10]. Численное решение уравнения переноса проводится на гибридной, шахматной, разностной сетке методом контрольного объема [22]. Согласно этому методу, решение уравнений Рейнольдса, записанных в цилиндрических координатах новых переменных, включает два этапа:

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{U} - U^n}{\Delta t} + U^n \frac{\partial U^n}{\partial \xi} + U^n \eta' \frac{\partial U^n}{\partial \eta} + V^n \times F(z) \frac{\partial U^n}{\partial \eta} + \frac{\partial P}{\partial \xi} + \eta' \frac{\partial P}{\partial \eta} = \\ & = \frac{F(z)}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[r v_{\text{eff}} F(z) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U^n}{\partial \xi^2} + 2\eta' \frac{\partial^2 U^n}{\partial \xi \partial \eta} + (\eta')^2 \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \eta^2} + \eta'' \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} \right) - \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} k_i (U^n - U_p), \\ & \frac{\tilde{V} - V^n}{\Delta t} + U^n \frac{\partial V^n}{\partial \xi} + U^n \eta' \frac{\partial V^n}{\partial \eta} + V^n \times F(z) \frac{\partial V^n}{\partial \eta} - \frac{W^2}{r} + F(z) \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{F(z)}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[r v_{\text{eff}} F(z) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \eta} \right] + \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V^n}{\partial \xi^2} + 2\eta' \frac{\partial^2 V^n}{\partial \xi \partial \eta} + (\eta')^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \eta^2} + \eta'' \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \eta} \right) - \frac{v_{\text{eff}}}{r^2} \tilde{V} - \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} k_i (V^n - V_p), \end{aligned}$$

$$\frac{\tilde{W}-W^n}{\Delta t}+U^n \frac{\partial W^n}{\partial \xi}+U^n \eta' \frac{\partial W^n}{\partial \eta}+V^n \times F(z) \frac{\partial W^n}{\partial \eta}=\frac{F(z)}{r} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(v_{\text{eff}} F(z) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \eta}\right)-\frac{v_{\text{eff}}}{r^2} \tilde{W}+\frac{\tilde{W} V}{r}+ \\ +\frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{\partial^2 W^n}{\partial \xi^2}+2 \eta' \frac{\partial^2 W^n}{\partial \xi \partial \eta}+(\eta')^2 \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \eta^2}+\eta'' \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \eta}\right)-\sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} k_i\left(W^n-W_p\right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}+U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}+U \eta' \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}+F(z) V \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}=(P v-D v)+\frac{F(z)}{r \sigma_v} \frac{\partial}{\partial \eta}\left[r\left(v_{\text{eff}}\right) F(z) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\right]+\frac{C_{b 2}}{\sigma_v}\left(F(z) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\right)^2,$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial t}+U_p \frac{\partial U_p}{\partial \xi}+U_p \eta' \frac{\partial U_p}{\partial \eta}+V_p \times F(z) \frac{\partial U_p}{\partial \eta}=k_i\left(U-U_p\right),$$

$$\frac{\partial V_p}{\partial t}+U_p \frac{\partial V_p}{\partial \xi}+U_p \eta' \frac{\partial V_p}{\partial \eta}+V_p \times F(z) \frac{\partial V_p}{\partial \eta}-\frac{W_p^2}{r}=k_i\left(V-V_p\right),$$

$$\frac{\partial W_p}{\partial t}+U_p \frac{\partial W_p}{\partial \xi}+U_p \eta' \frac{\partial W_p}{\partial \eta}+V_p \times F(z) \frac{\partial W_p}{\partial \eta}+\frac{W_p V_p}{r}=k_i\left(W-W_p\right),$$

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t}+\frac{\partial\left(U_p \rho_p\right)}{\partial \xi}+\eta' \frac{\partial\left(U_p \rho_p\right)}{\partial \eta}+F(z) \frac{\partial\left(V_p \rho_p\right)}{\partial \eta}=\$$

$$=D\left(F(z)^2 \frac{\partial^2 \rho_p}{\partial \eta^2}+\frac{F(z) \partial \rho_p}{r \partial \eta}+\frac{\partial^2 \rho_p}{\partial \xi^2}+2 \eta' \frac{\partial^2 \rho_p}{\partial \xi \partial \eta}+(\eta')^2 \frac{\partial^2 \rho_p}{\partial \eta^2}+\eta'' \frac{\partial \rho_p}{\partial \eta}\right);$$

$$\left\{\begin{array}{l} U^{n+1}=\tilde{U}-\Delta t\left(\frac{\partial \delta p}{\partial \xi}+\eta' \frac{\partial \delta p}{\partial \eta}\right), \\ V^{n+1}=\tilde{V}-\Delta t \times F(z) \frac{\partial \delta p}{\partial \eta} . \end{array}\right. \quad (5)$$

Уравнение (4) представляет собой систему уравнений RANS, записанную в цилиндрических координатах новых переменных. Верхний индекс “ \tilde{U} ” обозначает промежуточную сеточную функцию для вектора скорости; $\delta p=p^{n+1}-p^n$ – поправка к давлению. Умножая уравнение (5) на градиент и учитывая соленоидальность вектора скорости на $(n+1)$ -м временном слое, получаем уравнение Пуассона для определения поправки к давлению:

$$\Delta t\left(\frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \delta p}{\partial r^2}+\frac{\partial \delta p}{r \partial r}\right)=\frac{\partial U^n}{\partial z}+\frac{\partial r V^n}{r \partial r} . \quad (6)$$

Уравнения (6) в новых переменных имеет вид

$$\Delta t\left(\frac{\partial^2 \delta p}{\partial \xi^2}+2 \eta' \frac{\partial^2 \delta p}{\partial \xi \partial \eta}+(\eta')^2 \frac{\partial^2 \delta p}{\partial \eta^2}+\eta'' \frac{\partial \delta p}{\partial \eta}+F(z)^2 \frac{\partial^2 \delta p}{\partial \eta^2}+F(z) \frac{\partial \delta p}{r \partial \eta}\right)= \\ =\frac{\partial U^n}{\partial \xi}+\eta' \frac{\partial U^n}{\partial \eta}+F(z) \frac{\partial r V^n}{r \partial \eta} . \quad (7)$$

Решение стационарной задачи проводится методом установления по времени, поэтому зависимость (7) записывается в виде нестационарного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta p}{\partial t_0} - \Delta t \left(\frac{\partial^2 \delta p}{\partial \xi^2} + 2\eta' \frac{\partial^2 \delta p}{\partial \xi \partial \eta} + (\eta')^2 \frac{\partial^2 \delta p}{\partial \eta^2} + \eta'' \frac{\partial \delta p}{\partial \eta} + F(z)^2 \frac{\partial^2 \delta p}{\partial \eta^2} + F(z) \frac{\partial \delta p}{r \partial \eta} \right) = \\ = \frac{\partial U^n}{\partial \xi} + \eta' \frac{\partial U^n}{\partial \eta} + F(z) \frac{\partial r V^n}{r \partial \eta}, \end{aligned} \quad (8)$$

где фиктивное время t_0 является итерационным параметром. При решении уравнения (8) для шага по времени можно записать $\Delta t_0 = a_1 \Delta t$, при этом значение постоянной a_1 , как правило, меньше единицы и выбирается из условия быстрой сходимости численного процесса. В качестве граничного условия для поправки к давлению используется условие Неймана, которое выполняется в случае, если для \tilde{U} на границе используется точное значение U^{n+1} [11]. Для численного решения уравнения переноса системы (4) использована конечно-разностная схема против потока, которая имеет точность второго порядка, т.е. $O(\Delta t, \Delta \xi^2, \Delta \eta^2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{U} - U^n}{\Delta t} + U^n \frac{\partial U^n}{\partial \xi} + U^n \eta' \frac{\partial U^n}{\partial \eta} + V^n \times F(z) \frac{\partial U^n}{\partial \eta} + \frac{\partial P}{\partial \xi} + \eta' \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{F(z)}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[r v_{\text{eff}} F(z) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} \right] + \\ + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U^n}{\partial \xi^2} + 2\eta' \frac{\partial^2 U^n}{\partial \xi \partial \eta} + (\eta')^2 \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \eta^2} + \eta'' \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} \right) - \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} k_i (U^n - U_p), \\ \frac{\tilde{V} - V^n}{\Delta t} + U^n \frac{\partial V^n}{\partial \xi} + U^n \eta' \frac{\partial V^n}{\partial \eta} + V^n \times F(z) \frac{\partial V^n}{\partial \eta} - \frac{W^2}{r} + F(z) \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{F(z)}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[r v_{\text{eff}} F(z) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \eta} \right] + \\ + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V^n}{\partial \xi^2} + 2\eta' \frac{\partial^2 V^n}{\partial \xi \partial \eta} + (\eta')^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \eta^2} + \eta'' \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \eta} \right) - \frac{v_{\text{eff}}}{r^2} \tilde{V} - \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} k_i (V^n - V_p), \\ \frac{\tilde{W} - W^n}{\Delta t} + U^n \frac{\partial W^n}{\partial \xi} + U^n \eta' \frac{\partial W^n}{\partial \eta} + V^n \times F(z) \frac{\partial W^n}{\partial \eta} = \frac{F(z)}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v_{\text{eff}} F(z) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \eta} \right) - \frac{v_{\text{eff}}}{r^2} \tilde{W} + \frac{\tilde{W} V}{r} + \\ + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 W^n}{\partial \xi^2} + 2\eta' \frac{\partial^2 W^n}{\partial \xi \partial \eta} + (\eta')^2 \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \eta^2} + \eta'' \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \eta} \right) - \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} k_i (W^n - W_p), \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + U \eta' \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + F(z) V \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} = (P_V - D_V) + \frac{F(z)}{r \sigma_v} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[r (v_{\text{eff}}) F(z) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} \right] + \frac{C_{b2}}{\sigma_v} \left(F(z) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} \right)^2, \\ \frac{\partial U_p}{\partial t} + U_p \frac{\partial U_p}{\partial \xi} + U_p \eta' \frac{\partial U_p}{\partial \eta} + V_p \times F(z) \frac{\partial U_p}{\partial \eta} = k_i (U - U_p), \\ \frac{\partial V_p}{\partial t} + U_p \frac{\partial V_p}{\partial \xi} + U_p \eta' \frac{\partial V_p}{\partial \eta} + V_p \times F(z) \frac{\partial V_p}{\partial \eta} - \frac{W_p^2}{r} = k_i (V - V_p), \\ \frac{\partial W_p}{\partial t} + U_p \frac{\partial W_p}{\partial \xi} + U_p \eta' \frac{\partial W_p}{\partial \eta} + V_p \times F(z) \frac{\partial W_p}{\partial \eta} + \frac{W_p V_p}{r} = k_i (W - W_p), \\ \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \frac{\partial (U_p \rho_p)}{\partial \xi} + \eta' \frac{\partial (U_p \rho_p)}{\partial \eta} + F(z) \frac{\partial (V_p \rho_p)}{\partial \eta} = \\ = D \left(F(z)^2 \frac{\partial^2 \rho_p}{\partial \eta^2} + \frac{F(z)}{r} \frac{\partial \rho_p}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \rho_p}{\partial \xi^2} + 2\eta' \frac{\partial^2 \rho_p}{\partial \xi \partial \eta} + (\eta')^2 \frac{\partial^2 \rho_p}{\partial \eta^2} + \eta'' \frac{\partial \rho_p}{\partial \eta} \right); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} U \\ V \\ G \\ \tilde{v} \end{bmatrix}; \quad \Pi^{(\Phi)} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial P}{\partial \xi} + \eta' \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U^n}{\partial \xi^2} + 2\eta' \frac{\partial^2 U^n}{\partial \xi \partial \eta} \right) - \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} k_i (U^n - U_p) \\ \frac{W^2}{r} - F(z) \frac{\partial P}{\partial \eta} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V^n}{\partial \xi^2} + 2\eta' \frac{\partial^2 V^n}{\partial \xi \partial \eta} \right) - \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} k_i (V^n - V_p) \\ \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 W^n}{\partial \xi^2} + 2\eta' \frac{\partial^2 W^n}{\partial \xi \partial \eta} \right) - \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{\rho} k_i (W^n - W_p) \\ (Pv - Dv) + \frac{C_{b2}}{\sigma_v} \left(F(z) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} \right)^2 \end{bmatrix};$$

$$a^{(\Phi)} = \begin{bmatrix} rv_{\text{eff}} F(z) \\ rv_{\text{eff}} F(z) \\ rv_{\text{eff}} F(z) \\ r(v + \tilde{v}) F(z) \end{bmatrix}.$$

Схема против потока имеет вид

$$U_{i,j} = U_{i,j}^n, \quad V_{i,j} = (U_{i,j}^n \eta' + V_{i,j}^n F(z)),$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n}{\Delta t} + 0.5(U_{i,j} + |U_{i,j}|) \frac{\Phi_{i,j}^n - \Phi_{i-1,j}^n}{\Delta \xi} + 0.5(U_{i,j} - |U_{i,j}|) \frac{\Phi_{i+1,j}^n - \Phi_{i,j}^n}{\Delta \xi} + \\ & + 0.5\eta'(U_{i,j} + |U_{i,j}|) \frac{\Phi_{i,j}^n - \Phi_{i,j-1}^n}{\Delta \eta} + 0.5\eta'(U_{i,j} - |U_{i,j}|) \frac{\Phi_{i,j+1}^n - \Phi_{i,j}^n}{\Delta \eta} + \\ & + 0.5(V_{i,j} + |V_{i,j}|) \frac{\Phi_{i,j}^n - \Phi_{i,j-1}^n}{\Delta \eta} + 0.5(V_{i,j} - |V_{i,j}|) \frac{\Phi_{i,j+1}^n - \Phi_{i,j}^n}{\Delta \eta} = \\ & = F(z) \frac{\Phi_{i,j+1}^{n+1} (a_{i,j+1}^{(\Phi)} + a_{i,j}^{(\Phi)}) - \Phi_{i,j}^{n+1} (a_{i,j+1}^{(\Phi)} + 2a_{i,j}^{(\Phi)} + a_{i,j-1}^{(\Phi)}) + \Phi_{i,j-1}^{n+1} (a_{i,j}^{(\Phi)} + a_{i,j-1}^{(\Phi)})}{2r_j \Delta \eta^2} + \\ & + \eta'' \frac{\Phi_{i,j+1}^{n+1} - \Phi_{i,j-1}^{n+1}}{\text{Re} \Delta \eta} + (\eta')^2 \frac{\Phi_{i,j+1}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i,j-1}^{n+1}}{\text{Re} \Delta \eta^2} + \Pi^{(\Phi)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение поправки давления в системе (8) имеет эллиптический вид. Для численного решения таких уравнений эффективным и довольно простым является метод релаксации по направлению η и прогонка по ξ :

$$\begin{aligned} & \frac{\delta p_{i,j}^{n+1} - \delta p_{i,j}^n}{\Delta t_0} - \left(\frac{\delta p_{i+1,j}^n - 2\delta p_{i,j}^{n+1} + \delta p_{i-1,j}^n}{\Delta \xi^2} + \eta' \frac{\delta p_{i+1,j+1}^n - \delta p_{i+1,j-1}^n - \delta p_{i-1,j+1}^n + \delta p_{i-1,j-1}^n}{2\Delta \xi \Delta \eta} \right) - \\ & - \left(((\eta')^2 + F(z)^2) \frac{\delta p_{i,j+1}^{n+1} - 2\delta p_{i,j}^{n+1} + \delta p_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta^2} + \left(\eta'' + \frac{F(z)}{r_j} \right) \frac{\delta p_{i,j+1}^{n+1} - \delta p_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta \eta} \right) = \\ & = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{U_{i,j}^n - U_{i-1,j}^n}{\Delta \xi} + \eta' \frac{U_{i,j}^n - U_{i,j-1}^n}{\Delta \eta} + F(z) \frac{V_{i,j}^n r_j - V_{i,j-1}^n r_{j-1}}{r_j \Delta \eta} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, сначала методом установления решается система уравнений (5), затем уравнение (7) и в соответствии с (6) определяются вектор скорости на $(n+1)$ -м временном слое и давление $p^{n+1} = p^n + \delta p$ [20].

Как было сказано выше, для расчета траекторий частиц удобным является подход Лагранжа. Для этой цели 5-е и 6-е уравнения в системе (9) запишем в виде

$$\begin{cases} \frac{dU_p}{dt} = k_i(U - U_p), \\ \frac{dV_p}{dt} = k_i(V - V_p), \\ \frac{dW_p}{dt} = k_i(W - W_p). \end{cases} \quad (13)$$

В данной системе производная в правых частях уравнений является субстанциональной производной

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_p \frac{\partial}{\partial \xi} + U_p \eta' \frac{\partial}{\partial \eta} + V_p \times F(z) \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (14)$$

Для численной реализации U_p , V_p , W_p в уравнениях (9) была использована неявная схема.

$$\Phi = \begin{bmatrix} U_p \\ V_p \\ W_p \end{bmatrix}; \quad \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n}{\Delta t} + 0.5(U_p + |U_p|) \frac{\Phi_{i,j}^n - \Phi_{i-1,j}^n}{\Delta \xi} + 0.5(U_p - |U_p|) \frac{\Phi_{i,j+1}^n - \Phi_{i,j}^n}{\Delta \xi} + \\ + 0.5(U_p + V_p \times F(z) + |U_p + V_p \times F(z)|) \frac{\Phi_{i,j}^n - \Phi_{i,j-1}^n}{\Delta \eta} + \\ + 0.5(U_p + V_p \times F(z) - |U_p + V_p \times F(z)|) \frac{\Phi_{i,j+1}^n - \Phi_{i,j}^n}{\Delta \eta} = k_i(U - \Phi_{i,j}^{n+1}). \quad (15)$$

Эти абсолютно устойчивые и неизвестные на новом слое величины находились методом прогонки.

После формирования квазипериодического режима проводилось усреднение нестационарных полей.

Параметры лабораторной установки сепаратора имели значения: $R = 125$ мм, $r_1 = 100$ мм, $r_2 = 75$ мм, $r_3 = 120$ мм, $r_4 = 50$ мм. Опыты проводились при следующих значениях параметров потока на входе в коаксиальный канал: $1 - U_0 = 5.5$ м/с, $V = 0$, $W_0 = 4.7$ м/с, $\rho^0 = 7000$ кг/м³. Суммарная плотность твердой фазы на входе была равна $\rho_i = 18$ г/м³ и распределена по сечению однородно.

Для расчёта задачи было использована программа Pascal ABC.

Обсуждение результатов

На рис. 3 иллюстрируются профили скоростей воздуха и давления в сечении $\xi = 0.65$. Здесь U/U_{ref} , V/U_{ref} , W/U_{ref} – безразмерные скорости, P – давление. Здесь $U_{ref} = U_0$, $W_{ref} = W_0$, $W_{ref}/U_{ref} = 0.9$. На рис. 4 проставлено векторное поле скорости в центральном сечении.

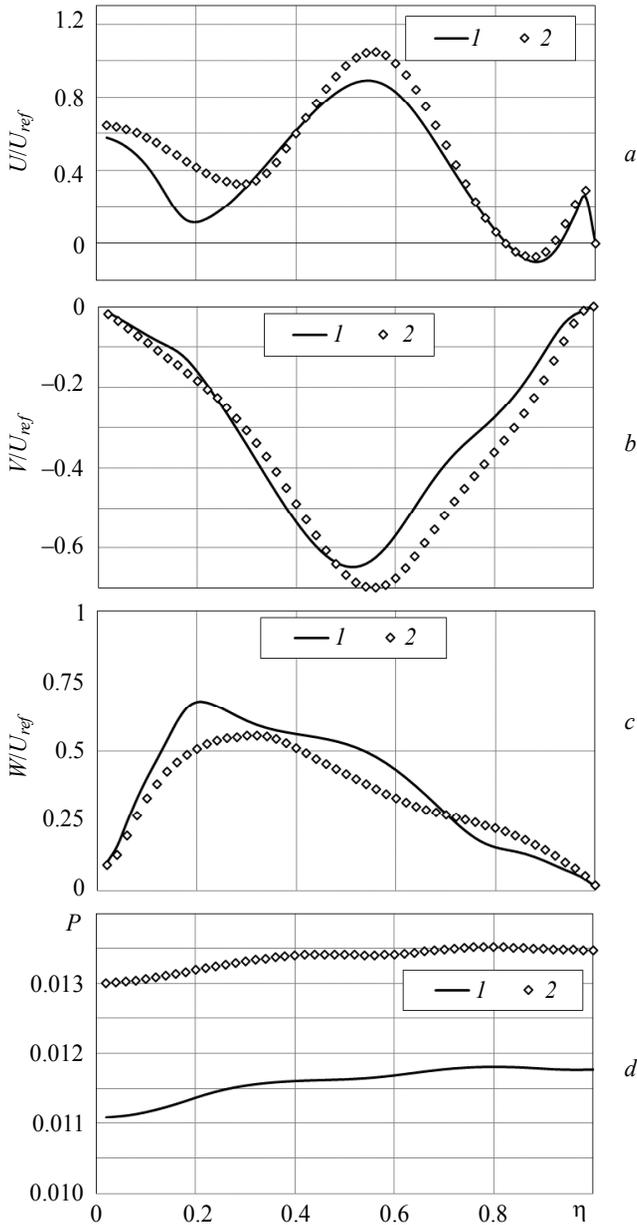


Рис. 3. Профили аксиальной (a), радиальной (b) и тангенциальной (c) скоростей потока, давления воздуха (d) в сечении при $\xi = 0.65$: 1 – без учета влияния твердой фазы на динамику воздушного потока, 2 – с учетом влияния твердой фазы на динамику воздушного потока

Fig. 3. Profiles of (a) axial, (b) radial, and (c) tangential flow velocities; (d) an air pressure profile in a section at $\xi = 0.65$. The effect of the solid phase on the air flow dynamics is: 1, left out of account; 2, taken into account

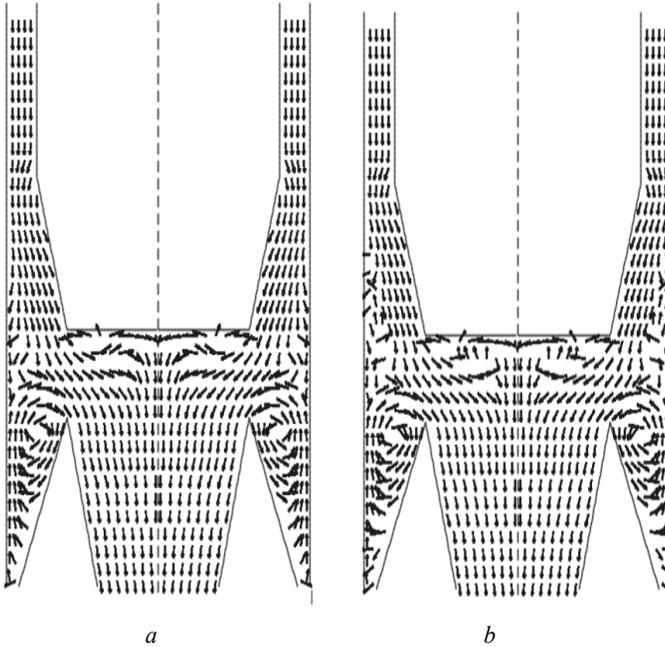


Рис. 4. Векторное поле скорости в центральном сечении при использовании модели турбулентности SA при $W/U_{ref} = 0.851$, (a) с учетом влияния твердой фазы на динамику воздушного потока, (b) без учета влияния твердой фазы на динамику воздушного потока

Fig. 4. A velocity vector field in a central section when using a SA turbulence model at $W/U_{ref} = 0.851$. The effect of the solid phase on the air flow dynamics is: (a) taken into account; (b) left out of account

Дисперсный анализ порошка проведен лазерным анализатором фирмы “MALVERN”. Для сопоставления результатов численного расчета с опытными данными проведен дисперсный анализ пыли из бункера сепаратора, т.е. уловленной пыли центробежным сепаратором. На рис. 5 представлен дисперсный состав пыли из бункера сепаратора по анализатору (2) при $U_0 = 5.5 \text{ м/с}$ и по численному расчету по вышеописанной модели с учетом (1) и без учета (3) влияния твердой фазы на динамику воздушного потока при $W_{ref}/U_{ref} = 0,851$.

Эффективность нового сепаратора – пропускать пыль меньше 10 мкм при численном расчете составляет 88 % при скорости $U_0 = 5.5 \text{ м/с}$, 12 % пыли меньше 10 мкм остаётся в бункере сепаратора, а это весьма удовлетворяет нашим задачам. Численные результаты из (рис. 5) модели турбулентности SA при $W_{ref}/U_{ref} = 0.851$ показывают точность 89 % с учетом влияния твердой фазы на динамику воздушного потока, 75 % – без учета ее влияния на динамику воздушного потока.

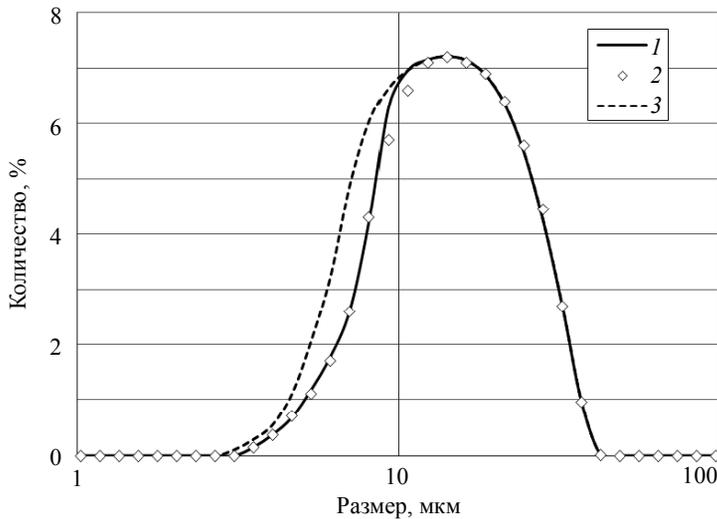


Рис. 5. Дисперсный анализ состава пыли из бункера сепаратора: 1 – с учетом влияния твердой фазы на динамику воздушного потока, 2 – эксперимент, 3 – без учета влияния твердой фазы на динамику воздушного потока

Fig. 5. Analysis of variance for a dust composition taken from a separator hopper. 1, taking into account the solid phase effect on the air flow dynamics; 2, experimental results; and 3, leaving out of account the solid phase effect on the air flow dynamics

Выводы

Разработана математическая модель расчета гидродинамики закрученного турбулентного течения, возникающего в воздушно-центробежном сепараторе. Выявлены основные закономерности такого течения. Представленная математическая модель позволяет не только изучить сложную картину закрученного турбулентного течения, что способствует разработке новых перспективных способов классификации порошков, но и оптимизировать режимные и геометрические параметры существующих установок. В исследовании были сравнены численные результаты с экспериментальными данными, дисперсный анализ порошка проведен лазерным анализатором фирмы “MALVERN”. В работе показано, что модель турбулентности Спаларта – Аллмараса адекватно с более 88 % точностью описывает закрученный поток внутри центробежного сепаратора. Поэтому данную модель с успехом можно использовать для нахождения оптимальных параметров центробежных сепараторов и других устройств с закрученными потоками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гунта А., Лиуи Д., Сайред Н. Закрученные потоки. М.: Мир, 1987. 590 с.
2. Muntean S., Susan-Resiga R.F., Bosioc A.I. Numerical investigation of the jet control method for swirling flow with precessing vortex rope // Proc. 3th IAHR International Meeting of the Workgroup on Cavitation and Dynamic Problems in Hydraulic Machinery and Systems, October 14–16, 2009, Brno, Czech Republic.
3. Okulov V.L., Sorensen J.N. Maximum efficiency of wind turbine rotors using Joukowski and Betz approaches // Journal of Fluid Mechanics. 2010. V. 649. P. 497–508.

4. Syred N. A review of oscillation mechanisms and the role of the precessing vortex core (PVC) in swirl combustion systems // *Prog. Energy Combust. Sc.* 2006. V. 32 (2). P. 93–161.
5. Derksen J.J. Separation performance predictions of a Stairmand high-efficiency cyclone // *AIChEJ.* 2003. V. 49. No. 6. P. 1359–1371.
6. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flow // *AIAA Paper.* 1992. V. 12. No. 1. P. 439–478.
7. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа.* М.: Наука, 1987. 840с.
8. Bradshaw P., Ferriss D.H., Atwell N.P. Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 28. P. 593–616
9. von Mises R. Bemerkungen zur Hydrodinamik. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* 1927. V. 7. P. 425.
10. Patankar S.V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.* Taylor&Francis, 1980.
11. Launder B.E., Spalding D.B. *Lectures in Mathematical Models of Turbulence.* London: Academic Press, 1972. 169 p.
12. Маликов З.М., Йүлдашев А.Т., Мадалиев М.Э. Экспериментальное исследование эффективности центробежного воздушно-проходного сепаратора // *Проблемы механики.* 2019. № 3. С. 27–30.
13. Madaliev M.E. Numerical solution of the problem on a centrifugal separator based on SA and SARC turbulence models // *International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology.* 2019. V. 6. Iss. 7. P. 10118–10124.
14. Василевский М.В., Зыков Е.Г. Расчет эффективности очистки газа в инерционных аппаратах. Томск: Изд-во ТПУ, 2005. 86 с.
15. Шляев М.И., Шляев А.М. Моделирование процесса пылеулавливания в прямоточном циклоне. 1. Аэродинамика и коэффициент диффузии частиц в циклонной камере // *Теплофизика и аэромеханика.* 2003. Т. 10. № 2. С. 157–170.
16. Шляев М.И., Шляев А.М. Моделирование процесса пылеулавливания в прямоточном циклоне. 2. Расчет фракционного коэффициента проскока // *Теплофизика и аэромеханика.* 2003. Т. 10. № 3. С. 427–437.
17. Баранов Д.А., Кутепов А.М., Лагуткин М.Г. Расчет сепарационных процессов в гидроциклонах // *Теоретические основы химической технологии.* 1996. Т. 30. № 2. С. 117–122.
18. Ахметов Т.Г., Порфильева Р.Т., Гайсин Л.Г. *Химическая технология неорганических веществ.* Кн. 1. М.: Высшая школа, 2002. 688 с.
19. Платонов Д.В., Минаков А.В., Дектерев А.А., Сентябрьев А.В. Численное моделирование пространственных течений с закруткой потока // *Компьютерные исследования и моделирование.* 2013. Т. 5. № 4. С. 635–648.
20. Турубаев Р.Р., Шваб А.В. Численное исследование аэродинамики закрученного потока в вихревой камере комбинированного пневматического аппарата // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2017. № 47. С. 87–98.
21. Хмелева М.Г., Даммер В.Х., Тохметова А.Б., Миньков Л.Л. Численное исследование вихреобразования в жидком металле под действием дискового завихрителя // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2017. № 46. С. 76–85.
22. Борзенко Е.И., Рьльцева К.Е., Шрагер Г.Р. Численное исследование характеристик течения неньютоновской жидкости в трубе с внезапным сужением // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2019. № 58. С. 56–78.

Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2021) MATHEMATICAL MODELING OF A TURBULENT FLOW IN A CENTRIFUGAL SEPARATOR. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 71. pp. 121–138

DOI 10.17223/19988621/71/10

Keywords: Reynolds-averaged Navier-Stokes equations, SA model, centrifugal air separator, vorticity, iteration, eddy viscosity, tridiagonal matrix algorithm, no-slip condition, hydrostatic pressure, SIMPLE.

The numerical results of mathematical modeling of a two-phase axisymmetric swirling turbulent flow in a separation zone of a centrifugal separator are presented. The motion of the carrier gas flow is described by the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations. A system of equations is enclosed by the Spalart-Allmaras turbulence model. The study is based on the obtained fields of averaged velocities of the carrier medium, with account for turbulent diffusion. Numerical solution to the problem is implemented using the semi-implicit method for pressure linked equations (SIMPLE). The results obtained when the solid phase effect on the air flow dynamics is taken into account are compared with those obtained when the effect is left out of account. The numerical calculations are validated using the experimental data.

Zafar M. MALIKOV (Doctor of Technical Sciences, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbayev, Tashkent, Republic of Uzbekistan). E-mail: malikov.z62@mail.ru

Murodil E. MADALIYEV (PhD, Fergana Polytechnic Institute, Fergana, Republic of Uzbekistan). E-mail: Madaliev.ME2019@mail.ru

REFERENCES

1. Gupta A., Lily D., Syred N. (1987) *Zakruchennyye potoky* [Swirling flows]. Moscow: Mir.
2. Muntean S., Susan-Resiga R.F., Bosioc A.I. (2009) Numerical investigation of the jet control method for swirling flow with precessing vortex rope. *Proceedings of the 3d IAHR International Meeting of the Workgroup on Cavitation and Dynamic Problems in Hydraulic Machinery and Systems. Brno, Czech Republic.*
3. Okulov V.L., Sorensen J.N. (2010) Maximum efficiency of wind turbine rotors using Joukowsky and Betz approaches. *Journal of Fluid Mechanics.* 649. pp. 497–508. DOI: 10.1017/S0022112010000509.
4. Syred N. (2006) A review of oscillation mechanisms and the role of the precessing vortex core (PVC) in swirl combustion systems. *Progress in Energy and Combustion Science.* 32(2). pp. 93–161. DOI: 10.1016/j.peccs.2005.10.002.
5. Derksen J.J. (2003) Separation performance predictions of a Stairmand high-efficiency cyclone. *American Institute of Chemical Engineers.* 49(6). pp. 1359–1371. DOI: 10.1002/aic.690490603.
6. Spalart P.R., Allmaras S.R. (1992) A one-equation turbulence model for aerodynamic flow. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper.* 12(1). pp. 439–478.
7. Loytsyansky L.G. (1987) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow: Nauka.
8. Bradshaw P., Ferriss D.H., Atwell N.P. (1967) Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation. *Journal of Fluid Mechanics.* 28. pp. 593–616. DOI: 10.1017/S0022112067002319.
9. von Mises R. (1927) Bemerkungen zur Hydrodynamik. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* 7. pp. 425–431.
10. Patankar S.V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.* Washington-New York-London: Hemisphere Publishing Corporation.

11. Launder B.E., Spalding D.B. (1972) *Lectures in Mathematical Models of Turbulence*. London: Academic Press.
12. Malikov Z.M., Yuldashev A.T., Madaliev M.E. (2019) Eksperimental'noe issledovanie effektivnosti tsentrobezhnogo vozdušno-prokhodnogo separatora [An experimental study on the efficiency of a centrifugal air-passage separator]. *Problemy mekhaniki*. 3. pp. 27–30.
13. Madaliev M.E. (2019) Numerical solution of the problem on a centrifugal separator based on SA and SARC turbulence models. *International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology*. 6(7). pp. 10118–10124.
14. Vasilevsky M.V., Zykov E.G. (2005) *Raschet effektivnosti ochistki gaza v inertsiionnykh apparatakh* [Calculation of the efficiency of gas purification in an inertial apparatus]. Tomsk: TPU Publishing House.
15. Shilyaev M.I., Shilyaev A.M. (2003) Modelirovanie protsessa pyleulavlivaniya v pryamotochnom tsiklone. 1. Aerodinamika i koeffitsient diffuzii chastits v tsiklonnoy kamere [Modeling of dust collection process in a uniflow cyclone. 1. Aerodynamics and a diffusion coefficient of particles in a cyclone chamber]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 10(2). pp. 157–170.
16. Shilyaev M.I., Shilyaev A.M. (2003) Modelirovanie protsessa pyleulavlivaniya v pryamotochnom tsiklone. 2. Raschet fraktsionnogo koeffitsienta proskoka [Modeling of dust collection process in a uniflow cyclone. 2. Calculation of a fractional slip coefficient]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 10(3). pp. 427–437.
17. Baranov D.A., Kutepov A.M., Lagutkin M.G. (1996) Raschet separatsionnykh protsessov v gidrotsiklonakh [Calculation of separation processes in hydrocyclones]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii – Theoretical Foundations of Chemical Technology*. 30(2). pp. 117–122. DOI: 10.17122/ngdelo-2020-4-118-124.
18. Akhmetov T.G., Porfil'eva R.T., Gaysin L.G. (2002) *Khimicheskaya tekhnologiya neorganicheskikh veshchestv* [Chemical technology of inorganic substances]. Moscow: Vysshaya shkola.
19. Platonov D.V., Minakov A.V., Dekterev A.A., Sentyabov A.V. (2013) Chislennoe modelirovanie prostranstvennykh techeniy s zakrutkoy potoka [Numerical modeling of three-dimensional swirling flows]. *Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie – Computer Research and Modeling*. 5(4). pp. 635–648.
20. Turubaev R.R., Shvab A.V. (2017) Chislennoe issledovanie aerodinamiki zakruchennogo potoka v vikhrevoy kamere kombinirovannogo pnevmaticheskogo apparata [Numerical study of swirled flow aerodynamics in the vortex chamber of the combined pneumatic machine]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 87–98. DOI: 10.17223/19988621/47/9.
21. Khmeleva M.G., Dammer V.Kh., Tokhmetova A.B., Min'kov L.L. (2017) Chislennoe issledovanie vikhreobrazovaniya v zhidkom metalle pod deystviem diskovogo zavikhritelya [Numerical investigation of the vortex formation in a liquid metal under the action of disk agitator]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 76–85. DOI: 10.17223/19988621/46/10.
22. Borzenko E.I., Ryltseva K.E., Shrager G.R. (2019) Chislennoe issledovanie kharakteristik techeniya nen'yutonovskoy zhidkosti v trube s vnezapnym suzheniem [Numerical investigation of non-Newtonian fluid flow through a pipe sudden contraction]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 58. pp. 56–70. DOI: 10.17223/19988621/58/5.

УДК 536.46+662.61
DOI 10.17223/19988621/71/11

К.М. Моисеева, А.Ю. Крайнов, Е.И. Рожкова

ГОРЕНИЕ АЭРОВЗВЕСИ УГОЛЬНОЙ ПЫЛИ В ЗАКРУЧЕННОМ ПОТОКЕ¹

Представлены результаты численного моделирования горения аэровзвеси угольной пыли в закрученном потоке в канале с внезапным расширением. Исследуется влияние состава смеси и характеристик закрученного течения на форму фронта горения и степень догорания аэровзвеси угольной пыли. Математическая постановка задачи записана в двухмерном осесимметричном приближении. Представлены результаты исследования влияния интенсивности закрутки потока и дисперсности частиц угольной пыли на распределения полей температуры в канале. Показано, что при сильной закрутке потока имеет место неполное сгорание угольной пыли в канале.

Ключевые слова: *угольная пыль, аэровзвесь, горение, закрученное течение.*

Настоящая работа посвящена теме горения реакционноспособной аэровзвеси угольной пыли в канале с расширением при закрутке потока на входе в канал. В работах некоторых авторов полагается, что закрутка потока создает зоны завихрения и повышенной концентрации газовзвеси. Это приводит к интенсификации процессов теплообмена внутри канала. Расширение канала также может являться причиной возникновения зон с повышенной концентрацией пыли. Совокупное влияние закрутки потока и расширения канала на режим горения аэровзвеси угольной пыли может оказаться весьма существенным.

В работе [1] исследовано горение газовой смеси в камере сгорания с вихревым воспламенителем-стабилизатором. Показано, что высокотемпературный закрученный поток может оказывать достаточно существенное влияние на стабилизацию горения. В работе [2] приведены экспериментальные исследования горения пылевидного торфяного топлива в прямоточном вихревом горелочном устройстве. Исследованы характеристики горения пыли в закрученном потоке, определены эффективные условия организации процесса горения. Авторами [3] проведено исследование процессов теплообмена в закрученном реагирующем потоке газа. Показано, что течение закрученного потока с преобладанием центробежных сил позволяет интенсифицировать теплообмен в канале. В работе [4] выполнено исследование режимов горения пылеугольного топлива в закрученном потоке. Таким образом, задача горения реакционноспособных смесей в закрученном потоке представляет интерес для проблем малой энергетики в контексте разработки новых типов устройств по сжиганию газов.

В работах [1, 3–5] для моделирования закрученных течений использованы модели, учитывающие турбулентность потока через стандартные модели турбулентности. В частности, в работе [5] предложена физико-математическая модель и способ решения задачи о закрученном течении газа. В настоящей работе учет за-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке госзадания Министерства науки и высшего образования, номер проекта 0721-2020-0036.

крутки течения осуществляется опосредовано через коэффициенты взаимодействия частиц с газом. В коэффициенте теплообмена и в коэффициентах силы трения присутствуют слагаемые, учитывающие изменение числа Рейнольдса и появление турбулентности в потоке.

Целью работы является исследование режимов горения аэровзвеси угольной пыли в условиях закрученного потока в канале с расширением.

Построение математической модели

Схема канала с расширением представлена на рис. 1. На рисунке R_{out} – радиус выходного канала, r_{in} – радиус входного канала, l – протяженность входного канала, L – общая протяженность цилиндрического канала. До начала процесса канал заполнен холодным газом. В работе не решается задача о критических условиях воспламенения аэровзвеси. Выбран постоянный источник зажигания Q_v объемом, достаточным для воспламенения аэровзвеси. С левой границы канала подается аэровзвесь с заданной массовой долей частиц ρ_{pb} , радиусом частиц r_p , скоростью вдоль осевого направления u_b , нулевой скоростью вдоль радиального направления и скоростью u_ϕ вдоль тангенциального направления. Закрутка на входе в канал задается в виде угловой скорости, u_ϕ , линейно возрастающей от радиальной координаты канала (закрученный по закону твердого тела поток аэровзвеси). Правый торец канала открыт, выходит в окружающую среду.

Уравнения математической модели записаны в двухмерном осесимметричном приближении с учетом закрутки потока. Постановка задачи основана на подходах механики двухфазных реагирующих сред [6]. Система уравнений, описывающих движение аэровзвеси, учитывает изменение скорости потока по осевой и радиальной составляющей, производные по координате ϕ равны нулю.

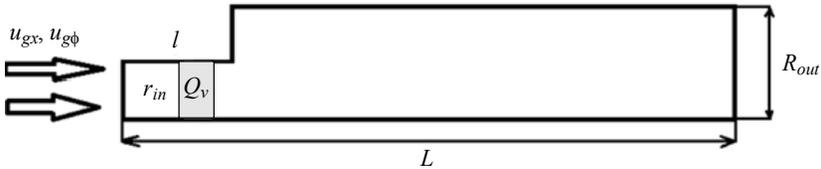


Рис. 1. Схема цилиндрической камеры сгорания с внезапным расширением

Fig. 1. Diagram of a cylindrical combustion chamber with a sudden expansion

Подробности, касающиеся механизма воспламенения и горения частиц, изложены в [7]. Постановка задачи определяется уравнениями

$$\frac{\partial r \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial r \rho_g u_g}{\partial x} + \frac{\partial r \rho_g v_g}{\partial r} = rG; \quad (1)$$

$$\frac{\partial r \rho_g u_g}{\partial t} + \frac{\partial r (p_g + \rho_g u_g^2)}{\partial x} + \frac{\partial r \rho_g u_g v_g}{\partial r} = -r\tau_x + rGu_p; \quad (2)$$

$$\frac{\partial r \rho_g v_g}{\partial t} + \frac{\partial r \rho_g u_g v_g}{\partial x} + \frac{\partial r (p_g + \rho_g v_g^2)}{\partial r} = -r\tau_r + p_g + \rho_g w_g^2 + rGv_p; \quad (3)$$

$$\frac{\partial r \rho_g w_g}{\partial t} + \frac{\partial r \rho_g w_g u_g}{\partial x} + \frac{\partial r \rho_g w_g v_g}{\partial r} = -r\tau_\phi - \rho_g w_g v_g + rGw_p; \quad (4)$$

$$\frac{\partial r \varepsilon_g}{\partial t} + \frac{\partial r u_g (\varepsilon_g + p_g)}{\partial x} + \frac{\partial r v_g (\varepsilon_g + p_g)}{\partial r} = -r \left[u_g \tau_x + v_g \tau_r + w_g \tau_\phi + n_p \alpha_p S_p (T_g - T_p) + 0.5G(u_p^2 + v_p^2 + w_p^2) + Gc_p T_p \right]; \quad (5)$$

$$\frac{\partial r \rho_p}{\partial t} + \frac{\partial r \rho_p u_p}{\partial x} + \frac{\partial r \rho_p v_p}{\partial r} = -rG; \quad (6)$$

$$\frac{\partial r \rho_p u_p}{\partial t} + \frac{\partial r \rho_p u_p^2}{\partial x} + \frac{\partial r \rho_p u_p v_p}{\partial r} = r\tau_x; \quad (7)$$

$$\frac{\partial r \rho_p v_p}{\partial t} + \frac{\partial r \rho_p u_p v_p}{\partial x} + \frac{\partial r \rho_p v_p^2}{\partial r} = r\tau_r + \rho_p w_p^2 - rGv_p; \quad (8)$$

$$\frac{\partial r \rho_p w_p}{\partial t} + \frac{\partial r \rho_p w_p u_p}{\partial x} + \frac{\partial r \rho_p w_p v_p}{\partial r} = r\tau_\phi - \rho_p w_p v_p - rGw_p; \quad (9)$$

$$\frac{\partial r \varepsilon_p}{\partial t} + \frac{\partial r u_p \varepsilon_p}{\partial x} + \frac{\partial r v_p \varepsilon_p}{\partial r} = r \left[u_p \tau_x + v_p \tau_r + w_p \tau_\phi + n_p \alpha_p S_p (T_g - T_p) + Q_{ch} G - Gc_p T_p - 0.5G(u_p^2 + v_p^2 + w_p^2) \right]; \quad (10)$$

$$\frac{\partial r \rho_{O_2}}{\partial t} + \frac{\partial r \rho_{O_2} u_g}{\partial x} + \frac{\partial r \rho_{O_2} v_g}{\partial r} = -r\alpha_{ch} G; \quad (11)$$

$$\frac{\partial r n_p}{\partial t} + \frac{\partial r n_p u_p}{\partial x} + \frac{\partial r n_p v_p}{\partial r} = 0; \quad (12)$$

$$p_g = \rho_g R_g T_g. \quad (13)$$

Начальные условия для уравнений (1) – (13) имеют вид

$$\begin{aligned} u_g(x, r, 0) = v_g(x, r, 0) = w_g(x, r, 0) = u_p(x, r, 0) = v_p(x, r, 0) = w_p(x, r, 0) = 0, \\ n_p(x, r, 0) = \rho_p(x, r, 0) = 0, \quad T_p(x, r, 0) = T_g(x, r, 0) = T_b, \\ \rho_g(x, r, 0) = \rho_{gb}, \quad \rho_{O_2}(x, r, 0) = \rho_{O_2,b}. \end{aligned} \quad (14)$$

Граничные условия на входе в канал, $x = 0$:

$$\begin{aligned} u_g(0, r, t) = u_p(0, r, t) = u_b, \quad v_g(0, r, t) = v_p(0, r, t) = 0, \\ w_g(0, r, t) = w_p(0, r, t) = \omega r = A_z r u_b, \\ n_p(0, r, t) = n_{pb}, \quad \rho_p(0, r, t) = \Delta_p \rho_{gb}, \\ T_p(0, r, t) = T_g(0, r, t) = T_{st}, \quad \rho_g(0, r, t) = \rho_{gb}, \quad \rho_{O_2}(0, r, t) = \rho_{O_2,b}. \end{aligned} \quad (15)$$

Граничные условия вдоль оси симметрии, $r = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_g(x, 0, t)}{\partial r} = \frac{\partial u_p(x, 0, t)}{\partial r} = \frac{\partial v_g(x, 0, t)}{\partial r} = \frac{\partial v_p(x, 0, t)}{\partial r} = \frac{\partial w_g(x, 0, t)}{\partial r} = \frac{\partial w_p(x, 0, t)}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial n_p(x, 0, t)}{\partial r} = \frac{\partial \rho_p(x, 0, t)}{\partial r} = \frac{\partial T_p(x, 0, t)}{\partial r} = \frac{\partial T_g(x, 0, t)}{\partial r} = \frac{\partial \rho_g(x, 0, t)}{\partial r} = \frac{\partial \rho_{O_2}(x, 0, t)}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

На выходе из канала при $x = L$ задается атмосферное давление. На стенке канала при $y = r_{in}$ (для входной части канала) и $y = R_{out}$ (для расширенной части канала) задаются условия непротекания.

В уравнениях (1) – (16) $\varepsilon_g = p_g / (\gamma - 1) + 0.5 \rho_g (u_g^2 + v_g^2 + w_g^2)$ – полная энергия газа, $\varepsilon_p = c_p T_p \rho_p + 0.5 \rho_p (u_p^2 + v_p^2 + w_p^2)$ – полная энергия частиц; $\alpha_p = Nu_p \lambda_g / (2r_p)$ – коэффициент теплообмена газа с частицами; $\gamma = c_p / c_v$ – показатель адиабаты; $\tau_{x,r,\phi}$ – сила трения вдоль осевого, радиального и тангенциального направлений соответственно; ρ – плотность; u, v, w – скорость; t – время; r – координата по радиусу; p – давление; T – температура; A_z – коэффициент закрутки потока вдоль радиуса; Δ_p – доля массовой концентрации частиц; Q_{ch} – тепловой эффект реакции; k_0 – константа скорости химической реакции; $\alpha_{ch} = \mu_{O_2} \nu_{O_2} / \mu_C \nu_C$ – коэффициент расхода кислорода в реакции с частицами угольной пыли; μ_{O_2}, μ_C – молярные массы кислорода и углерода; ν_{O_2}, ν_C – стехиометрические коэффициенты реакции. Индексом b отмечены начальные значения параметров состояния; p – параметры частиц; g – параметры газа; st – параметры на входе в цилиндрический канал.

Источник G из уравнений (1) – (16) определяется аналогично [7]:

$$G = \frac{n_p S_p \rho_{O_2} \beta_m k_0 \exp(-E_a / R_u T_p)}{\beta_m + k_0 \exp(-E_a / R_u T_p)},$$

где $\beta_m = \lambda_g (T_g) Nu_D / (c_g \rho_g r_g)$ – коэффициент массоотдачи частиц; E_a – энергия активации химической реакции.

Сила трения вдоль осевого направления определяется из выражения [8]

$$\tau_{tr,x} = n_p F_{tr,x},$$

где $F_{tr,x} = C_{rx} S_m \rho_g (u_g - u_p) |u_g - u_p| / 2$ – сила взаимодействия одиночной частицы с газом относительно осевой составляющей скорости потока; $C_{rx} = 24 (1 + 0.15 Re_x^{0.682}) / Re_x$ – коэффициент трения; $Re_x = 2 \rho_g r_p |u_g - u_p| / \eta$ – число Рейнольдса относительно осевой составляющей скорости потока; S_m – площадь миделевого сечения; η – коэффициент динамической вязкости газа. Компоненты силы трения вдоль радиального и тангенциального направлений определялись аналогичным образом:

$$\tau_{tr,r} = n_p F_{tr,r}, \quad \tau_{tr,\phi} = n_p F_{tr,\phi},$$

где $F_{tr,r} = C_{rr} S_m \rho_g (v_g - v_p) |v_g - v_p| / 2$, $C_{rr} = 24 (1 + 0.15 Re_r^{0.682}) / Re_r$,

$$Re_r = 2 \rho_g r_p |v_g - v_p| / \eta; \quad F_{tr,\phi} = C_{r\phi} S_m \rho_g (w_g - w_p) |w_g - w_p| / 2,$$

$$C_{r\phi} = 24 (1 + 0.15 Re_\phi^{0.682}) / Re_\phi, \quad Re_\phi = 2 \rho_g r_p |w_g - w_p| / \eta.$$

Метод решения задачи

Подробности, касающиеся метода решения поставленной задачи приведены в работе [7]. Численный алгоритм основан на методе распада произвольного разрыва [8 и 9]. Шаг по времени определялся из условия устойчивости Куранта [9],

$$\frac{1}{\Delta t} < \frac{1}{\Delta t_x} + \frac{1}{\Delta t_r},$$

где

$$\Delta t_x = \frac{h_x}{\max[u_g] + c_g}, \quad \Delta t_r = \frac{h_r}{\max[v_g] + c_g},$$

c_g – скорость звука в газе.

Проверка методики решения системы уравнений и программы, реализующей методику решения, на достоверность численного решения осуществлялась путем расчета адиабатической температуры горения и проверки законов сохранения массы и полной энергии газа. Выполнимость законов сохранения массы и полной энергии в численном решении соблюдается с точностью 99.93 %. Выбор шага по пространству был обоснован предварительным расчетом задачи на сетках с шагом $2 \cdot 10^{-3}$ м, 10^{-3} м, $5 \cdot 10^{-4}$ м. Расчет на разных сетках показал удовлетворительную сходимость результатов при шаге 10^{-3} м.

Результаты

Основные теплофизические и кинетические параметры, используемые в расчетах, были взяты из [7]. Геометрические параметры канала задавались равными $r_{in} = 0.02$ м, $R = 0.05$ м, $L = 0.4$ м, $l = 0.04$ м. В расчетах варьировался состав смеси (массовая концентрация частиц угольной пыли и радиус частиц), а также величина осевой и угловой скорости подачи частиц в канал. Результаты расчетов представлены на рис. 2 – 6.

На рис. 2 представлено установившееся распределение температуры газа при $\rho_{pb} = 0.04$ кг/м³, $r_p = 10^{-5}$ м, $u_b = 1$ м/с, $A_z = 10$. Согласно рис. 2, высокая температура устанавливается вдоль направления подачи аэрозвеси. В области за внезапным расширением канала, в расширяющейся его части температура остается равной начальной температуре. Это связано с тем, что частицы угля практически не попадают в эту область. Масса частиц в аэрозвеси мала, проходя через источник зажигания, частицы практически полностью сгорают. Нагретый поток продолжает двигаться в осевом направлении с шириной нагретой зоны, равной ширине входного канала.

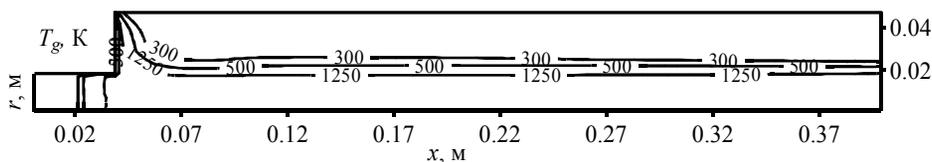


Рис. 2. Изолинии температуры газа: $\rho_{pb} = 0.04$ кг/м³, $r_p = 10^{-5}$ м, $u_b = 1$ м/с, $A_z = 10$

Fig. 2. Isolines of gas temperature: $\rho_{pb} = 0.04$ кг/м³, $r_p = 10^{-5}$ м, $u_b = 1$ м/с, $A_z = 10$

Увеличение радиуса частиц приводит к появлению достаточно существенного отставания частиц от газа, а также к догоранию частиц за источником зажигания. Частицы, проходя через источник, нагреваются и воспламеняются. Нагретые частицы закрученным потоком затягиваются в расширяющуюся часть канала, где они догорают. На рис. 3 представлен вариант расчета горения аэровзвеси угольной пыли при значениях параметров $\rho_{pb} = 0.04 \text{ кг/м}^3$, $r_p = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, $u_b = 1 \text{ м/с}$, $A_z = 10$. Видно, что фронт пламени формируется выше радиуса входного канала. В области верхней стенки канала газ остается холодным, так как масса частиц мала и сгорание аэровзвеси происходит до возможного выбрасывания частиц на стенки.

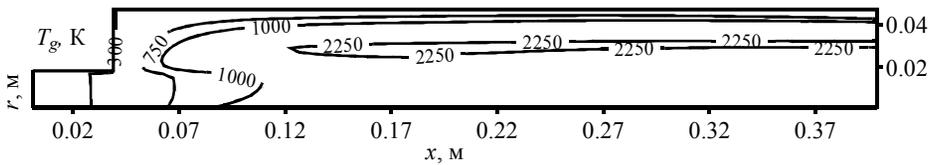


Рис. 3. Изолинии температуры газа: $\rho_{pb} = 0.04 \text{ кг/м}^3$, $r_p = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, $u_b = 1 \text{ м/с}$, $A_z = 10$

Fig. 3. Isolines of gas temperature: $\rho_{pb} = 0.04 \text{ kg/m}^3$, $r_p = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, $u_b = 1 \text{ m/s}$, $A_z = 10$

Увеличение скорости подачи аэровзвеси в осевом направлении приводит к увеличению температуры газа в окрестностях стенки канала за счет частичного выброса частиц на стенку. Указанный вариант показан на рис. 4.

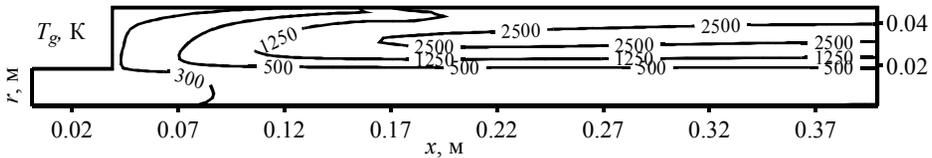


Рис. 4. Изолинии температуры газа: $\rho_{pb} = 0.04 \text{ кг/м}^3$, $r_p = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, $u_b = 5 \text{ м/с}$, $A_z = 10$

Fig. 4. Isolines of gas temperature: $\rho_{pb} = 0.04 \text{ kg/m}^3$, $r_p = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, $u_b = 5 \text{ m/s}$, $A_z = 10$

Увеличение массовой концентрации частиц приводит к появлению высокотемпературной зоны практически сразу после расширения канала. Фронт горения меньше растянут по каналу. Указанный вариант показан на рис. 5.

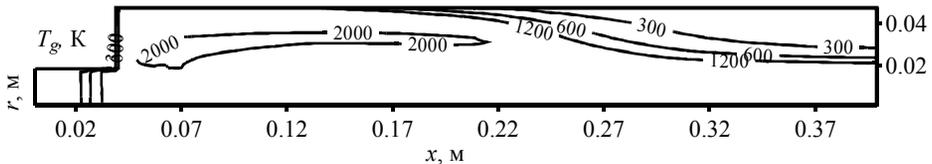


Рис. 5. Изолинии температуры газа: $\rho_{pb} = 0.08 \text{ кг/м}^3$, $r_p = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, $u_b = 1 \text{ м/с}$, $A_z = 10$

Fig. 5. Isolines of gas temperature: $\rho_{pb} = 0.08 \text{ kg/m}^3$, $r_p = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, $u_b = 1 \text{ m/s}$, $A_z = 10$

Увеличение коэффициента закрутки приводит к выбросу частиц на стенки канала и формированию высокотемпературной области вдоль стенок. На рис. 6 представлен вариант расчета задачи при параметрах $\rho_{pb} = 0.08 \text{ кг/м}^3$, $r_p = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$,

$u_b = 1$ м/с, $A_z = 50$. Видно, что фронт пламени достаточно близко расположен к стенкам канала.

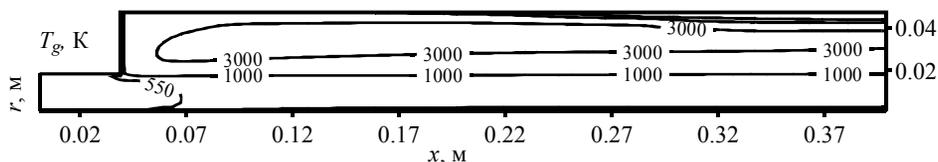


Рис. 6. Изолинии температуры газа. $\rho_{pb} = 0.08$ кг/м³, $r_p = 5 \cdot 10^{-5}$ м, $u_b = 1$ м/с, $A_z = 50$
Fig. 6. Isolines of gas temperature. $\rho_{pb} = 0.08$ kg/m³, $r_p = 5 \cdot 10^{-5}$ m, $u_b = 1$ m/s, $A_z = 50$

Из решения задачи о горении аэровзвеси угольной пыли в закрученном потоке получено, что скорость закрутки существенным образом сказывается на форме пламени. Показано, что при высоких скоростях закрутки фронт горения растягивается до границы со стенками канала. В отличие от случая горения аэровзвеси порошка алюминия не формируются зоны с избыточным содержанием сгоревших частиц (механизм горения частиц угольной пыли таков, что продуктом реакции являются газы), но возможно возникновение перегретых зон вдоль стенки канала в силу выноса горящих частиц на нее. Указанный процесс может достаточно сильно повлиять на режим работы энергетического устройства.

Выводы

Разработана физико-математические модели горения аэровзвеси угольной пыли в канале с внезапным расширением при закрутке потока. Показано, что в зависимости от угловой составляющей скорости подачи смеси на входе в канал фронт горения может быть вытянутым вдоль оси канала или расширяться по поперечному сечению канала. Показано, что при высоких скоростях закрутки горящие частицы забрасывает в расширенную часть канала, к стенкам канала, что приводит к формированию нагретых зон в газе и изменению формы пламени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пиралишвили Ш.А., Маркович Д.М., Лобасов А.С., Верещагин И.М. Моделирование рабочего процесса сверхзвуковой камеры сгорания с вихревым воспламенителем-стабилизатором // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 5. С. 1339–1346.
2. Михайлов А.С., Пиралишвили Ш.А., Степанов Е.Г., Евдокимов О.А., Спесивцева Н.С. Особенности сжигания пылевидного торфяного топлива в вихревом горелочном устройстве // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91. № 4. С. 984–991.
3. Матвиенко О.В., Бубенчиков А.М. Математическое моделирование теплообмена и химического реагирования закрученного потока диссоциирующего газа // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 1. С. 118–126.
4. Кузнецов В.А., Дектерев А.А., Сентябов А.В., Чернецкий М.Ю. Расчетное исследование влияния моделей выхода летучих веществ на процессы горения пылеугольного топлива при закрутке потока // Журнал Сибирского федерального университета. Техника и технологии. 2016. Т. 9. № 1. С. 15–23.
5. Гаврилов А.А., Дектерёв А.А., Сентябов А.В. Моделирование закрученных течений с когерентными структурами с помощью нестационарной модели переноса Рейнольдсовых напряжений // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 4. С. 11–24.
6. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
7. Моисеева К.М., Крайнов А.Ю. Численное моделирование искрового зажигания аэровзвеси угольной пыли // Физика горения и взрыва. 2018. Т. 54. № 2. С. 61–70.

8. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
9. Крайко А.Н. О поверхностях разрыва в среде, лишенной 'собственного' давления // Прикладная математика и механика. 1979. Т. 43. № 3. С. 500–510.

Статья поступила 13.01.2021

Moiseeva K.M., Krainov A.Yu., Rozhkova E.I. (2021) COMBUSTION OF A GAS SUSPENSION OF COAL DUST IN A SWIRLING FLOW. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 71. pp. 139–147

DOI 10.17223/19988621/71/11

Swirling combustion is currently one of the most important engineering problems in physics of combustion. There is a hypothesis on the increase in the combustion efficiency of reacting gas mixtures in combustion chambers with swirling flows, as well as on the increase in the efficiency of fuel combustion devices. In this paper, it is proposed to simulate a swirling flow by taking into account the angular component of the flow velocity. The aim of the study is to determine the effect of the angular component of the flow velocity on the characteristics of the flow and combustion of an air suspension of coal dust in a pipe. The problem is solved in a two-dimensional axisymmetric approximation with allowance for a swirling flow. A physical and mathematical model is based on the approaches of the mechanics of multiphase reacting media. A solution method involves the arbitrary discontinuity decay algorithm. The impact of the flow swirl and the size of coal dust particles on the gas temperature distribution along the pipe is determined.

Keywords: coal dust, air suspension, combustion, swirling flow.

Financial support. This work was carried out with a financial support from the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of State Assignment No. 0721-2020-0036.

Aleksey Yu. KRAINOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

Kseniya M. MOISEEVA (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

Ekaterina I. ROZHKOVA (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: katushar2801@mail.ru

REFERENCES

1. Piralishvili S.A., Markovich D.M., Lobasov A.S., Vereshchagin I.M. (2016) Simulation of the working process of a supersonic combustor with a vortex igniter-stabilizer. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 89(5). pp. 1325–1332. DOI: 10.1007/s10891-016-1495-4.
2. Mikhailov A.S., Piralishvili S.A., Stepanov E.G., Evdokimov O.A., Spesivtseva N.S. (2018) Features of burning of pulverized peat fuel in a vortex burner device. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 91(4). pp. 925–932. DOI: 10.1007/s10891-018-1818-8.
3. Matvienko O.V., Bubenchikov A.M. (2016) Mathematical modeling of the heat transfer and chemical reaction of a swirling flow of a dissociative gas. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 89(1). pp. 127–134. DOI: 10.1007/s10891-016-1359-y.
4. Kuznetsov V.A., Dekterev A.A., Sentyabov A.V. (2016) Numerical study of devolatilization models on the combustion process of pulverized fuel flow swirling. *Journal of Siberian Federal University. Engineering and Technologies*. 9(1). pp. 15–23. DOI: 10.17516/1999-494X-2016-9-1-15-23.

5. Gavrillov A.A., Dekterev A.A., Sentyabov A.V. (2015) Modeling of swirling flows with coherent structures using the unsteady reynolds stress transport model. *Fluid Dynamics*. 50(4). pp. 471–482. DOI: 10.1134/S001546281504002X.
6. Nigmatulin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Moscow: Nauka.
7. Moiseeva K.M., Krainov A.Y., Dement'ev A.A. (2019) Critical conditions of spark ignition of a bidisperse aluminum powder in air. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 55(4). pp. 395–401. DOI: 10.1134/S001050821904004X.
8. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.I., Krayko A.N., Prokopov G.P. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka.
9. Kraiko A.N. (1979) On discontinuity surfaces in a medium devoid of "proper" pressure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 43(3). pp. 539–549. DOI: 10.1016/0021-8928(79)90102-3.

Received: January 13, 2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

DANCHEV Peter Vassilev – Prof., Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria. E-mail: pvdanchev@yahoo.com, danchev@math.bas.bg

АРХИПОВ Владимир Афанасьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом газовой динамики и физики взрыва Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

БАГАНОВ Антон Павлович – бакалавр физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: mr.snowroad@mail.ru

БАСАЛАЕВ Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

БУБЕНЧИКОВ Алексей Михайлович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник кафедры теоретической механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: bubenchikov_am@mail.ru

БУБЕНЧИКОВ Михаил Алексеевич – доктор физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: michael121@mail.ru

БУРКИН Виктор Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий сектором 71 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: v.v.burkin@mail.ru

БУТОВ Владимир Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: bvg@niipmm.tsu.ru

ГОРОБЧУК Алексей Геннадьевич – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории анализа и оптимизации нелинейных систем Института вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск, Россия. E-mail: alg@eml.ru

ГРИГОРЬЕВ Юрий Николаевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории анализа и оптимизации нелинейных систем Института вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск, Россия. E-mail: grigor@ict.nsc.ru

ДЬЯЧКОВСКИЙ Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: lex_okha@mail.ru

ЕРШОВ Игорь Валерьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Новосибирского государственного аграрного университета, г. Новосибирск, Россия. E-mail: i_ershov@ngs.ru

ИВАНЫЧЕВ Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей механики Липецкого государственного технического университета, г. Липецк, Россия. E-mail: Lsivdml@mail.ru

ИЩЕНКО Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

КИРЮШКИН Александр Евгеньевич – аспирант кафедры математической физики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: sashakir94@mail.ru

КОЗЛОВ Виктор Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной механики и математики Тульского государственного университета, г. Тула, Россия. E-mail: vvkozlovtsu@mail.ru

КРАЙНОВ Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической физики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

МАДАЛИЕВ Муродил Эркинжанович – PhD, младший научный сотрудник лаборатории жидкости и газа Института механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз, Ферганский политехнический институт, г. Ташкент, г. Фергана, Узбекистан. E-mail: madaliev.me2019@mail.ru

МАЛИКОВ Зафар Маматкулович – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории жидкости и газа Института механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: malikov.z62@mail.ru

МАМОНТОВ Дмитрий Владимирович – младший научный сотрудник регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ogevaore@mail.ru

МАРКИН Алексей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной механики и математики Тульского государственного университета, г. Тула, Россия. E-mail: markin-nikram@yandex.ru

МИНЬКОВ Леонид Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической физики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

МОИСЕЕВА Ксения Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

НОСОВ Геннадий Васильевич – кандидат технических наук, доцент отделения электроэнергетики и электротехники инженерной школы энергетики Национального исследовательского Томского политехнического университета. E-mail: nosov@tpu.ru

НОСОВА Мария Геннадьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экономической математики, информатики и статистики факультета вычислительных систем Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. E-mail: nosovamgm@gmail.com

ПЕРФИЛЬЕВА Ксения Григорьевна – инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: k.g.perfiljeva@yandex.ru

РОЖКОВА Екатерина Игоревна – студентка физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: katushar2801@mail.ru

СИНЯЕВ Сергей Витальевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ssv@niipmm.tsu.ru

СОЛОНЕНКО Виктор Александрович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией оптимизации Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: vik@niipmm.tsu.ru

УСАНИНА Анна Сергеевна – кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: usaninaanna@mail.ru

ЧУПАШЕВ Андрей Владимирович – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: chupashevav@gmail.com

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634034, г. Томск, ул. Студенческая, 4

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 17.06.2021. Выпуск в свет 29.06.2021.
Формат 70 × 100¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 12.09. Уч.-изд. л. 13.55. Тираж 250 экз. Заказ № 11. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 4702.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru