# ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.17

## О НАИБОЛЬШЕМ ЧИСЛЕ ВЕРШИН ПРИМИТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ГРАФОВ ПОРЯДКА 2, 3, 4 С ЭКСПОНЕНТОМ, РАВНЫМ 2[1]

М. Б. Абросимов*, С. В. Костин**, И. В. Лось*

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

**МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва, Россия

В 2015 г. вышло исследование, в котором рассмотрен вопрос о максимальном числе вершин $n_k$ для регулярных графов заданного порядка $k$ с диаметром 2. Авторы получили результаты для однородных графов порядка 2, 3 и 4: $n_2 = 5$, $n_3 = 10$, $n_4 = 15$. В данной работе исследуется аналогичный вопрос о наибольшем числе вершин $np_k$ примитивного однородного графа порядка $k$ с экспонентом, равным 2. Все примитивные однородные графы с экспонентом, равным 2, кроме полного, также имеют диаметр $d = 2$. Получены аналогичные значения для примитивных однородных графов с экспонентом 2: $np_2 = 3$, $np_3 = 4$, $np_4 = 11$.

**Ключевые слова:** *примитивный граф, примитивная матрица, экспонент, однородный граф.*

DOI 10.17223/20710410/52/6

## THE MAXIMUM NUMBER OF VERTICES OF PRIMITIVE REGULAR GRAPHS OF ORDERS 2, 3, 4 WITH EXPONENT 2

M. B. Abrosimov*, S. V. Kostin**, I. V. Los*

*Saratov State University, Saratov, Russia

**MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia

**E-mail:** mic@rambler.ru, kostinsv77@mail.ru, los.ilia.ru@gmail.com

In 2015, the results were obtained for the maximum number of vertices $n_k$ in regular graphs of a given order $k$ with a diameter 2: $n_2 = 5$, $n_3 = 10$, $n_4 = 15$. In this paper, we investigate a similar question about the largest number of vertices $np_k$ in a primitive regular graph of order $k$ with exponent 2. All primitive regular graphs with exponent 2, except for the complete one, also have diameter $d = 2$. The following values were obtained for primitive regular graphs with exponent 2: $np_2 = 3$, $np_3 = 4$, $np_4 = 11$.

**Keywords:** *primitive graph, primitive matrix, exponent, regular graph.*

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения госзадания (проект № FSRR-2020-0006).

## Введение

Понятие примитивности изначально было сформулировано для квадратных матриц в работе [1]. Если рассматривать квадратную матрицу как матрицу смежности графа, то понятие примитивности естественным образом переносится на графы. Напомним необходимые определения. Неотрицательная квадратная матрица $A$ называется *примитивной*, если существует натуральное $t$, такое, что $A^t$ положительна. Минимальное такое значение $t$ называется *экспонентом* матрицы $A$ [1].

Вершина $v$ достижима из вершины $u$ за $t \geqslant 1$ шагов, если существует последовательность рёбер (маршрут) $\{u, w_1\}, \{w_1, w_2\}, \ldots, \{w_{t-1}, v\}$. Если $A$ — матрица смежности графа $G = (V, \alpha)$, то достижимость вершины $v$ из вершины $u$ за $t$ шагов означает, что на пересечении строки и столбца, соответствующих вершинам $u$ и $v$ соответственно, в матрице $A^t$ стоит 1.

Граф $G$ называется *примитивным*, если существует натуральное $t$, такое, что между любой парой вершин графа $G$ существует маршрут длины $t$ (иначе говоря, в матрице $A^t$ все элементы равны 1). Минимальное такое значение $t$ называется *экспонентом* графа $G$ и обозначается $\exp(G)$. Примитивные графы представляют большой интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения [2–5]. Ряд работ посвящён исследованию экспонентов однородных примитивных матриц [6–8]; рассматриваемые в этих работах матрицы соответствуют орграфам. В данной работе мы будем рассматривать экспоненты неориентированных однородных графов. Напомним, что *однородным* (или *регулярным*) графом порядка $k$ называется простой неориентированный граф, все вершины которого имеют степень $k$. Множество $n$-вершинных однородных графов порядка $k$ будем обозначать $R_{n,k}$.

В [8] исследуется вопрос о минимальном числе дуг (рёбер) у орграфов (графов) с экспонентом, равным 2. В частности, для неориентированных графов с экспонентом 2 минимальное число рёбер есть $(3n-3)/2$ для нечётного $n$ и $(3n-2)/2$ для чётного $n$. В [6] доказано, что однородные ориентированные графы порядка $k$ (степени исхода и захода каждой вершины равны $k$) с экспонентом, равным 2, существуют при следующих значениях $n$:

$$k + 1 \leqslant n \leqslant 2k - 1.$$

Если рассматривать каждое ребро неориентированного графа как пару встречных дуг, то однородный неориентированный граф порядка $k$ можно считать однородным ориентированным графом порядка $2k$. Тогда оценка для неориентированных графов принимает вид

$$k + 1 \leqslant n \leqslant 4k - 1.$$

Нижняя оценка достигается для полных графов $K_n$. Через $np_k$ обозначим максимальное число вершин в примитивном однородном графе порядка $k$ с экспонентом 2. В [9] рассматриваются однородные графы с диаметром 2. Напомним, что *диаметром* $d(G)$ связного графа $G$ называется максимальное из расстояний между всеми парами вершин $G$. Через $n_k$ авторы [9] обозначили максимальное число вершин в однородном графе порядка $k$ и доказали, что $5(k-1) \leqslant n_k \leqslant k^2 + 1$, а также нашли точное значение $n_k$ для $k = 2, 3, 4$: $n_2 = 5$, $n_3 = 10$, $n_4 = 15$. Очевидно, что $np_k \leqslant n_k$. С учётом оценки из [6] получаем, что

$$k + 1 \leqslant np_k \leqslant 4k - 1.$$

Таким образом, $np_2 \leqslant 7$, $np_3 \leqslant 11$, $np_4 \leqslant 15$. Так как $np_k \leqslant n_k$, то получаем лучшие оценки: $np_2 \leqslant 5$, $np_3 \leqslant 10$. Цель данной работы — получить точные значения.

## 1. Основные результаты

Очевидно, что любой примитивный граф является связным. Графы с числом вершин $n < 3$ не являются примитивными, поэтому далее рассматриваем графы с числом вершин $n \geqslant 3$. Цикл длины 3 будем называть треугольником. Через $g(G)$ обозначим обхват графа $G$, то есть наименьшую из длин циклов графа $G$. Так как в неориентированных графах нет петель, то примитивных графов с экспонентом, равным 1, не существует, то есть $\exp(G) > 1$. Нас будут интересовать однородные графы с $\exp(G) = 2$. Очевидно, что диаметр таких графов $d(G) \leqslant 2$, однако это условие не является достаточным.

**Теорема 1.** Граф $G$ с числом вершин $n \geqslant 3$ является примитивным с $\exp(G) = 2$ тогда и только тогда, когда $d(G) \leqslant 2$ и каждое ребро графа $G$ входит в треугольник.

***Доказательство.*** Необходимость. Пусть $G$ — примитивный граф с числом вершин $n \geqslant 3$ и $\exp(G) = 2$. Рассмотрим две произвольные различные вершины $u, v$. Между ними есть путь длины 2, следовательно, эксцентриситет этих вершин не превосходит 2. В силу произвольности выбора вершин получаем, что $d(G) \leqslant 2$. Заметим, что $d(G) = 1$ только для полного графа. Полный $n$-вершинный граф $K_n$ является однородным порядка $n - 1$ и примитивным с экспонентом $\exp(K_n) = 2$.

Рассмотрим две произвольные смежные вершины $u, v$. Между ними должен быть путь длины 2, который не может содержать ребро $(u, v)$. Следовательно, есть отличная от $u$ и $v$ вершина $w$, смежная с $u$ и $v$. Таким образом, ребро $(u, v)$ входит в треугольник, образованный вершинами $u$, $v$ и $w$.

Достаточность. Пусть $d(G) \leqslant 2$ и каждое ребро графа $G$ входит в треугольник. Тогда граф $G$ связный и, очевидно, в нём есть маршрут длины 2 из любой вершины в саму себя. Покажем, что такой маршрут есть и между любыми двумя различными вершинами $u$ и $v$. Так как $d(G) \leqslant 2$, то $d(u, v) \leqslant 2$. Если вершины $u$ и $v$ несмежны, то между ними нет маршрута длины 1, следовательно, есть маршрут длины 2.

Если вершины $u$ и $v$ смежны, то по условию ребро $(u, v)$ входит в треугольник, следовательно, есть отличная от $u$ и $v$ вершина $w$, смежная с $u$ и $v$, получаем маршрут длины 2: $uwv$. ■

**Следствие 1.** Пусть $G$ — примитивный граф с $\exp(G) = 2$. Тогда его обхват $g(G) = 3$.

В данной работе исследуем следующий вопрос: какое максимальное число вершин $np_k$ может быть у примитивного однородного графа порядка $k$ с экспонентом $\exp(G) = 2$?

Легко заметить, что любой полный граф $K_n$ при $n > 2$ является примитивным и $\exp(K_n) = 2$. Так как каждое ребро примитивного графа $G$ с $\exp(G) = 2$ входит в треугольник, степень всех вершин графа $G$ не ниже 2. Оказывается, оценку минимальной степени вершин графов с экспонентом, равным 2, можно повысить. В [8] получен следующий результат: для неориентированных графов с экспонентом 2 минимальное число рёбер есть $(3n - 3)/2$ для нечётного $n$ и $(3n - 2)/2$ для чётного $n$. Очевидно, что полный граф $K_3$ является регулярным порядка 2 и примитивным с экспонентом 2. С учётом этого получаем

**Теорема 2.** $np_2 = 3$.

**Следствие 2.** Среди регулярных графов $R_{n,2}$ только граф $K_3$ имеет экспонент, равный 2.

С другой стороны, кубические графы (то есть регулярные графы порядка 3) содержат $3n/2$ рёбер и удовлетворяют условию из работы [8]. Однако получен следующий результат:

**Теорема 3.** $np_3 = 4$.

***Доказательство.*** Очевидно, что полный граф $K_4$ является регулярным порядка 3 и примитивным с экспонентом 2.

Пусть $G$ — примитивный кубический $n$-вершинный граф с $\exp(G) = 2$ и $n > 4$. По следствию 2 обхват графа $G$ равен 3. Рассмотрим произвольный треугольник в $G$: $\{u_1, u_2, u_3\}$. Так как граф $G$ кубический, то вершина $u_1$, кроме вершин $u_2$ и $u_3$, смежна ещё с одной вершиной $w$. Рассмотрим ребро $(u_1, w)$. По теореме 1 это ребро должно входить в треугольник. Так как кроме $w$ вершина $u_1$ смежна только с вершинами $u_2$ и $u_3$, то $w$ должна быть смежна с одной из них. Если вершина $w$ смежна и с $u_2$, и с $u_3$, то получаем граф $K_4$. Не ограничивая общности, будем считать, что вершина $w$ смежна с $u_2$, но несмежна с $u_3$. Следовательно, вершина $w$ смежна ещё с некоторой вершиной $v$, отличной от $u_1$, $u_2$ и $u_3$. Снова по теореме 1 ребро $(w, v)$ должно входить в некоторый треугольник. Однако вершина $w$, кроме $v$, смежна только с $u_1$ и $u_2$, а вершина $v$ с ними смежной быть не может, так как вершины $u_1$ и $u_2$ имеют степень 3, причём смежны между собой и с вершинами $w$ и $u_3$. Получили противоречие. ■

**Следствие 3.** Среди регулярных графов $R_{n,3}$ только граф $K_4$ имеет экспонент, равный 2.

Далее перейдём к исследованию биквадратных графов, то есть однородных графов $R_{n,4}$ порядка 4.

## 2. Биквадратные графы

Согласно оценке [6], $np_4 \leqslant 15$. Следующая теорема даёт оценку, худшую для графов с большим $k$, но лучшую для нашего случая, чем оценка из [6].

**Лемма 1.** Для однородных графов порядка $k$ справедливо

$$np_k \leqslant k^2 - k + 1 \text{ при чётном } k;$$
$$np_k \leqslant k^2 - k \text{ при нечётном } k.$$

***Доказательство.*** Пусть $G$ — примитивный $n$-вершинный граф порядка $k$ с $\exp(G) = 2$. Выберем произвольную вершину $v$ и расположим все остальные вершины по расстоянию от вершины $v$: на нулевом уровне — вершина $v$, на первом уровне — вершины, смежные с $v$; все остальные вершины — на втором уровне.

Так как все вершины имеют степень $k$, вершин на первом уровне будет в точности $k$. Обозначим их $v_1, \ldots, v_k$. Рассмотрим произвольную из этих вершин, например $v_1$. По теореме 1 ребро $\{v, v_1\}$ должно входить в треугольник, то есть должна быть вершина $w$, смежная с $v$ и с $v_1$. Однако все вершины, смежные с $v$, расположены на первом уровне, следовательно, $w$ — это одна из вершин $v_2, \ldots, v_k$. Таким образом, каждая из вершин $v_1, \ldots, v_k$ смежна по крайней мере с одной вершиной из этого же списка.

Если $k$ чётно, то у произвольной вершины $v_i$ первого уровня одно ребро идёт к вершине $v$, ещё одно ребро — к одной из вершин первого уровня, а остальные $k-2$ ребра могут идти к вершинам второго уровня. Тогда на последнем уровне может быть $k(k-2)$ вершин. Всего получаем $np_k \leqslant 1 + k + k(k-2) = k^2 - k + 1$.

Если $k$ нечётно, то, как и в первом случае, можем соединить рёбрами $k-1$ вершину, а оставшаяся вершина будет смежна с одной из уже использованных. Поэтому на втором уровне может быть $(k-1)(k-2)+(k-3) = k^2-2k-1$ вершин. Всего получаем $np_k \leqslant 1+k+k^2-2k-1 = k^2-k$. ■

Для малых значений $k$ лемма 1 даёт оценки $np_2 \leqslant 3$, $np_3 \leqslant 6$, $np_4 \leqslant 13$, что лучше оценок, полученных по неравенству из работы [6]. Для $np_5$ лемма 1 даёт оценку 20, а из [6] получается оценка 18. Компьютерный эксперимент показал, что $np_5 = 16$ [10].

**Теорема 4.** $np_4 = 11$.

***Доказательство.*** По лемме 1 $np_4 \leqslant 13$. Покажем, что при $n = 13$ и 12 не существует примитивного биквадратного графа $G$ с $\exp(G) = 2$. Рассмотрим каждый случай отдельно и попробуем построить граф с нужными свойствами.

Случай 1: $n = 13$. Предположим, что $G$ — примитивный биквадратный граф с $\exp(G) = 2$. Расположим вершины по уровням, как в доказательстве леммы 1. Для удобства будем делать укладку, начиная с вершины 1, а смежные с ней вершины обозначим 2, 3, 4 и 5 (рис. 1).

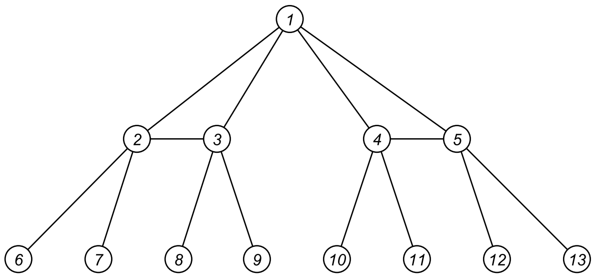



Рис. 1. Укладка вершин 13-вершинного графа

У нас остаётся свобода в добавлении рёбер между вершинами второго уровня. Рассмотрим две смежные вершины из первого и второго уровней, например 2 и 6. По теореме 1 ребро $(2,6)$ должно входить в треугольник, следовательно, вершины 6 и 7 должны быть смежны. Аналогично, смежными по необходимости будут вершины 8 и 9, 10 и 11, 12 и 13 (рис. 2).

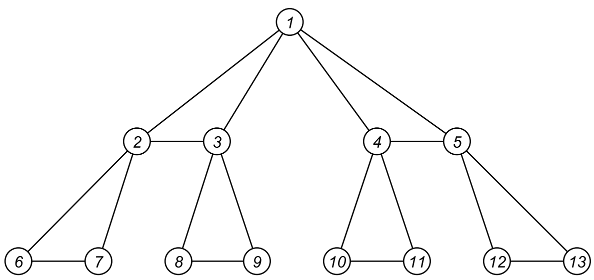



Рис. 2. Укладка вершин 13-вершинного графа (продолжение)

Рассмотрим вершины второго уровня. Так как $\exp(G) = 2$, между несмежными вершинами должны быть маршруты длины 2. Например, от вершины 6 должны существовать маршруты длины 2 до вершин 8, 9, 10, 11, 12 и 13, однако это невозможно, так как осталось только два возможных ребра, инцидентных вершине 6.

Случай 2: $n = 12$. Предположим, что $G$ — примитивный биквадратный граф с $\exp(G) = 2$. Расположим вершины по уровням, как в предыдущем случае. Мы должны добавить минимум два ребра между вершинами первого уровня (см. доказательство леммы 1). Заметим, что если добавить более двух рёбер между вершинами первого уровня, то не хватит рёбер для соединения четырёх вершин первого уровня с семью вершинами второго уровня. Поэтому восемь рёбер будут соединять вершины первого и второго уровней, т. е. одна вершина второго уровня должна быть смежна с двумя вершинами первого уровня. Не ограничивая общности, оставим свободным одно ребро у вершины 5 и рассмотрим различные варианты соединения вершины 5 с какой-либо вершиной 6–11 (рис. 3). Заметим, что вершины множеств $\{6, 7, 8, 9\}$ и $\{10, 11\}$ являются подобными, поэтому достаточно рассмотреть соединение ребром вершины 5 с одной из вершин каждого множества. Как и в предыдущем случае, по теореме 1 мы должны добавить рёбра между вершинами 6 и 7, 8 и 9, 10 и 11.

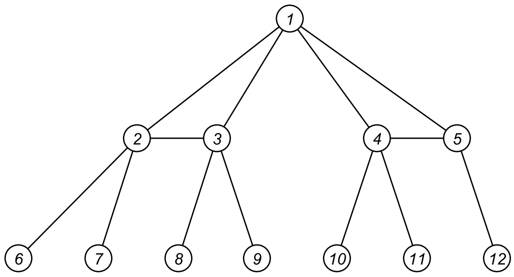



Рис. 3. Укладка вершин 12-вершинного графа

1. Добавим ребро $(5, 9)$. По теореме 1 ребро $(5, 9)$ должно входить в треугольник, следовательно, необходимо добавить и ребро $(9, 12)$. Вершина 9 теперь имеет степень 4 (рис. 4). Так как $\exp(G) = 2$, между несмежными вершинами должны быть маршруты длины 2. Например, от вершины 9 должны быть маршруты длины 2 до вершин 6, 7, 10 и 11. У нас остаётся возможность добавить только два ребра от вершины 8 и два ребра от вершины 12. С учётом теоремы 1, это можно сделать только двумя способами.

1.1. Добавляем рёбра от вершины 8 к вершинам 6 и 7, а от вершины 12 — к вершинам 10 и 11. Но тогда от вершины 5 не будет маршрута длины 2 до вершин 6 и 7.

1.2. Добавляем рёбра от вершины 8 к вершинам 10 и 11, а от вершины 12 — к вершинам 6 и 7. После этого остаётся возможность соединить двумя рёбрами вершины 6 и 7 с вершинами 10 и 11, но это сделать невозможно без нарушения теоремы 1.

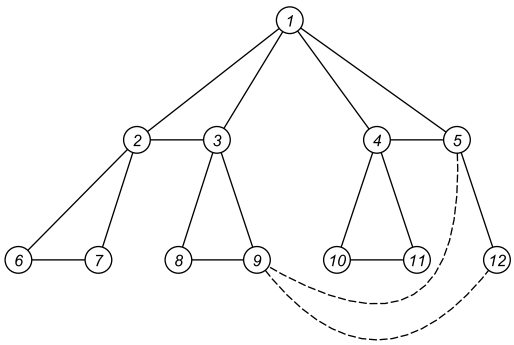



Рис. 4. Укладка 12-вершинного графа, соединяем вершины 5 и 9

2. Добавим ребро $(5, 11)$. По теореме 1 оно должно входить в треугольник, следовательно, необходимо добавить и ребро $(11, 12)$. Вершина 11 теперь имеет степень 4

(рис. 5). Так как $\exp(G) = 2$, между несмежными вершинами должны быть маршруты длины 2. Например, от вершины 5 должны быть маршруты длины 2 до вершин 6, 7, 8 и 9, но у нас остаётся возможность добавить только два ребра от вершины 12, что недостаточно.

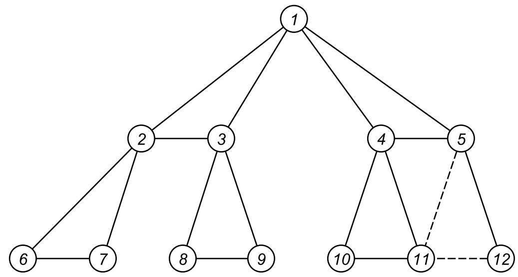
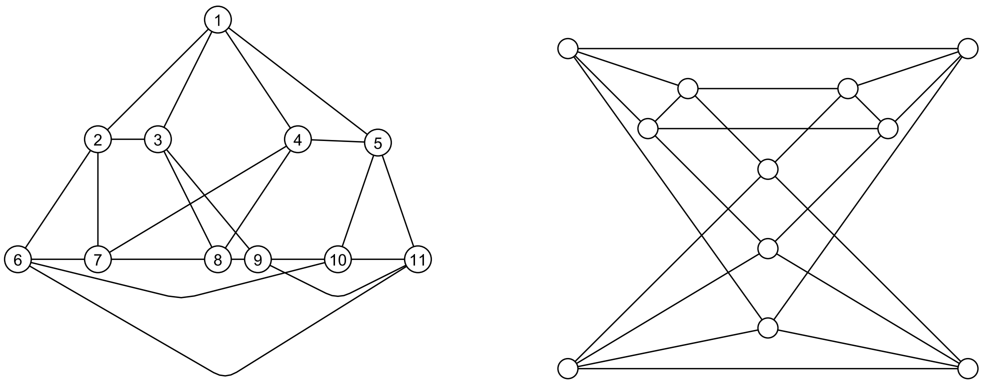



Рис. 5. Укладка 12-вершинного графа, соединяем вершины 5 и 11

Таким образом, доказано, что $np_4 < 12$. На рис. 6 приведён 11-вершинный 4-регулярный граф с экспонентом 2: *а* — изображение в стиле доказательства теоремы; *б* — по работе [11].




*а* *б*

Рис. 6. 11-Вершинный регулярный граф порядка 4 с $\exp(G) = 2$.

Теорема 4 доказана. ■

Был проведён вычислительный эксперимент, в рамках которого найдены все биквадратные графы с экспонентом 2 [10]. Всего таких графов 10: полный граф $K_5$, один 6-вершинный граф $O_2 + O_2 + O_2$, два 7-вершинных, два 8-вершинных, три 9-вершинных и один 11-вершинный граф, представленный на рис. 6.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Wielandt H.* Unzerlegbare nicht negative Matrizen // Math. Zeitschr. 1950. V. 52. P. 642–648.
2. *Сачков В. Н., Ошкин И. Б.* Экспоненты классов неотрицательных матриц // Дискретная математика. 1993. № 2. С. 150–159.
3. *Салий В. Н.* Минимальные примитивные расширения ориентированных графов // Прикладная дискретная математика. 2008. № 1(1). С. 116–119.
4. *Фомичев В. М.* Оценки экспонентов примитивных графов // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2(11). С. 101–112.

5. *Фомичев В. М., Авезова Я. Э.* Точная формула экспонентов перемешивающих орграфов регистровых преобразований // Дискретный анализ и исследование операций. 2020. № 2(27). С. 117–135.
6. *Jin M., Lee S. G., and Seol H. G.* Exponents of $r$-regular primitive matrices // Inform. Center Math. Sci. 2003. V. 6. No. 2. P. 51–57.
7. *Bueno M. I. and Furtado S.* On the exponent of $r$-regular primitive matrices // ELA. Electronic J. Linear Algebra. 2008. V. 17. P. 28–47.
8. *Kim B., Song B., and Hwang W.* Nonnegative primitive matrices with exponent 2 // Linear Algebra Appl. 2005. No. 407. P. 162–168.
9. *Hoa V. D. and Do M. T.* $k$-Regular graph with diameter 2 // Int. J. Adv. Comput. Technol. 2015. V. 4. No. 5. P. 14–19.
10. *Лось И. В., Абросимов М. Б., Костин С. В.* К вопросу о примитивных однородных графах с экспонентом, равным 2 и 3 // Компьютерные науки и информационные технологии. Материалы Междунар. науч. конф. Саратов: Изд. центр «Наука», 2018. С. 251–253.
11. *Костин С. В.* Об использовании задач по теории графов для интеллектуального развития учащихся // Математика в образовании: сб. статей. Вып. 10 / под ред. И. С. Емельяновой. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та. 2014. С. 68–74.

## REFERENCES

1. *Wielandt H.* Unzerlegbare nicht negative Matrizen. Math. Zeitschr., 1950, vol. 52, pp. 642–648.
2. *Sachkov V. N., Oshkin I. B.* Eksponenty klassov neotritsatel’nykh matrits [Exponents of classes of non-negative matrices]. Diskretnaya Matematika, 1993, no. 2, pp. 150–159. (in Russian)
3. *Salii V. N.* Minimal’nye primitivnye rasshireniya orientirovannykh grafov [Minimal primitive extensions of oriented graphs]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2008, no. 1(1), pp. 116–119. (in Russian)
4. *Fomichev V. M.* Otsenki eksponentov primitivnykh grafov [The estimates of exponents for primitive graphs]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2011, no. 2(11), pp. 101–112. (in Russian)
5. *Fomichev V. M. and Avezova Ya. E.* The exact formula for the exponents of the mixing digraphs of register transformations. J. Appl. Ind. Math., 2020, no. 14, pp. 308–320.
6. *Jin M., Lee S. G., and Seol H. G.* Exponents of $r$-regular primitive matrices. Inform. Center Math. Sci., 2003, vol. 6, no. 2, pp. 51–57.
7. *Bueno M. I. and Furtado S.* On the exponent of $r$-regular primitive matrices. ELA. Electronic J. Linear Algebra, 2008, vol. 17, pp. 28–47.
8. *Kim B., Song B., and Hwang W.* Nonnegative primitive matrices with exponent 2. Linear Algebra Appl., 2005, no. 407, pp. 162–168.
9. *Hoa V. D. and Do M. T.* $k$-Regular graph with diameter 2. Int. J. Adv. Comput. Technol., 2015, vol. 4, no. 5, pp. 14–19.
10. *Los’ I. V., Abrosimov M. B., and Kostin S. V.* K voprosu o primitivnykh odnorodnykh grafakh s eksponentom, ravnym 2 i 3 [On the question of primitive regular graphs with exponent equals to 2 and 3]. Komp’yuternye Nauki i Informatsionnye Tekhnologii. Saratov, Nauka Publ., 2018, pp. 251–253. (in Russian)
11. *Kostin S. V.* Ob ispol’zovanii zadach po teorii grafov dlya intellektual’nogo razvitiya uchashchikhsya [On the use of graph theory problems for the intellectual development of students]. Matematika v Obrazovanii. I. S. Emel’yanova (ed.). Cheboksary, Chuvash University Publ., 2014, pp. 68–74. (in Russian)