

УДК 519.7

**ДИСКРЕТНАЯ ЗАМКНУТАЯ ОДНОЧАСТИЧНАЯ
ЦЕПОЧКА КОНТУРОВ**

П. А. Мышкис, А. Г. Таташев, М. В. Яшина

*Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет
(МАДИ), г. Москва, Россия*

Рассматривается дискретная динамическая система, называемая замкнутой цепочкой контуров, которая принадлежит классу контурных сетей, введённому А. П. Буслаевым. Замкнутая цепочка содержит N контуров, на каждом из которых имеется $2m$ ячеек и одна частица. Контур имеет общую точку, называемую узлом, с каждым из двух соседних контуров слева и справа. Узлы делят контур на две равные части. В каждый момент $t = 0, 1, 2, \dots$ частица перемещается на одну ячейку в заданном направлении, если нет задержек. Если две частицы стремятся пересечь один и тот же узел, то возникает задержка. В этом случае перемещается только частица контура, расположенного слева от узла. Вводится величина потенциальной задержки частицы, зависящая от времени и принимающая значения 0 или 1. При $t \geq m$ равенство этой величины 1 означает, что время до задержки частицы не превышает m . Сумма потенциальных задержек всех частиц называется потенциалом задержек. Начиная с некоторого момента времени, состояния системы периодически повторяются (предельные циклы). Отношение числа перемещений частицы к периоду цикла называется средней скоростью частицы. Доказаны следующие теоремы: 1) Потенциал задержек является невозрастающей функцией от времени, причём на предельном цикле значение потенциала задержек не изменяется и равно неотрицательному целому числу не больше $2N/3$. 2) Если средняя скорость частиц на предельном цикле меньше 1, то период цикла (возможно, не являющийся наименьшим) равен $(m + 1)N$. 3) Средняя скорость частиц равна $v = 1 - H/((m + 1)N)$, где H — потенциал задержек на предельном цикле. 4) Для любого m существует N , такое, что существует предельный цикл с потенциалом задержек $H > 0$ и, следовательно, со средней скоростью $v < 1$.

Ключевые слова: динамическая система, контурная сеть, предельный цикл, потенциал задержек.

DOI 10.17223/20710410/52/8

DISCRETE CLOSED ONE-PARTICLE CHAIN OF CONTOURS

P. A. Myshkis, A. G. Tatashev, M. V. Yashina

*Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI),
Moscow, Russia***E-mail:** p.myshkis@yandex.ru, a-tatashev@yandex.ru, mv.yashina@madi.ru

A discrete dynamical system called a closed chain of contours is considered. This system belongs to the class of the contour networks introduced by A. P. Buslaev. The closed chain contains N contours. There are $2m$ cells and a particle at each contour. There are two points on any contour called a node such that each of these points is common for this contour and one of two adjacent contours located on the left

and right. The nodes divide each contour into equal parts. At any time $t = 0, 1, 2, \dots$ any particle moves onto a cell forward in the prescribed direction. If two particles simultaneously try to cross the same node, then only the particle of the left contour moves. The time function is introduced, that is equal to 0 or 1. This function is called the potential delay of the particle. For $t \geq m$, the equality of this function to 1 implies that the time before the delay of the particle is not greater than m . The sum of all particles potential delays is called the potential of delays. From a certain moment, the states of the system are periodically repeated (limit cycles). Suppose the number of transitions of a particle on the limit cycle is equal to $S(T)$ and the period is equal to T . The ratio $S(T)$ to T is called the average velocity of the particle. The following theorem have been proved. 1) The delay potential is a non-increasing function of time, and the delay potential does not change in any limit cycle, and the value of the delay potential is equal to a non-negative integer and does not exceed $2N/3$. 2) If the average velocity of particles is less than 1 for a limit cycle, then the period of the cycle (this period may not be minimal) is equal to $(m + 1)N$. 3) The average velocity of particles is equal to $v = 1 - H/((m + 1)N)$, where H is the potential of delays on the limit cycle. 4) For any m , there exists a value N such that there exists a limit cycle with $H > 0$ and, therefore, $v < 1$.

Keywords: *dynamical system, contour network, limit cycle, potential of delays.*

Введение

В работе рассматривается дискретная динамическая система, относящаяся к классу контурных сетей, появившихся в результате моделирования автотранспортных потоков на сложных улично-дорожных сетях [1, 2] и получивших название сетей Буслаева. Такие контурные сети отражают свойства математических транспортных моделей иметь периодические траектории и конфликтные точки в пересечениях потоков. Благодаря регулярности структуры, исследование динамических систем такого типа позволяет получить содержательные аналитические результаты.

Контурная сеть содержит систему контуров, причём имеются точки, общие для двух или более соседних контуров. Эти общие точки называются узлами. Рассматриваются дискретный и непрерывный варианты контурных сетей. В дискретном варианте каждый контур разбит на ячейки. В любой дискретный момент времени каждая ячейка может быть свободна или в ней находится частица. Рассматриваются дискретные контурные сети с характером движения двух типов. При типе движения, названного индивидуальным, частица на каждом шаге перемещается в направлении движения на одну ячейку, если ячейка впереди свободна, и остаётся на месте, если эта ячейка занята другой частицей. Такое правило движения аналогично правилу движения в исследованных ранее математических моделях трафика, для которых в случае движения по одномерной бесконечной замкнутой решётке были получены аналитические результаты [3, 4]. Транспортная модель с аналогичным типом движения, но осуществляемым на двумерной тороидальной решётке, исследована в [5–8]. Второй тип движения частиц в дискретных кластерных моделях введён в [9] и назван кластерным. При кластерном движении находящиеся в соседних ячейках частицы образуют кластер и эти частицы перемещаются одновременно. Для непрерывных контурных сетей пространство состояний системы и время непрерывны. По контурам непрерывной сети движутся отрезки постоянной длины, которые по аналогии со случаем дискретной системы также называются кластерами. Скорость движения кластера без учёта задержек принимается за единицу. В контурных сетях при прохождении частицами

или кластерами узлов возникают задержки, обусловленные ограничением, в соответствии с которым частицы (кластеры) не могут проходить через узел одновременно. Основной исследуемой характеристикой системы является средняя скорость частиц, представляющая собой среднее расстояние, проходимое частицей в единицу времени. Помимо применения при математическом моделировании трафика, контурные сети могут иметь другие приложения, например они могут использоваться при анализе работы инфокоммуникационных систем.

Одним из типов контурных сетей, для которых получены аналитические результаты, являются замкнутые и открытые цепочки контуров одинаковой длины. В замкнутой цепочке каждый контур соединён узлами с двумя соседними контурами, расположенными слева и справа от данного, причём каждый контур делится узлами на две части равной длины. Открытая цепочка отличается от замкнутой тем, что для крайнего слева и крайнего справа контуров имеется лишь по одному соседнему. Аналитические результаты получены для замкнутых и открытых цепочек, таких, что на каждом контуре имеется лишь один кластер. Поведение открытых цепочек удалось исследовать более полно. В [2] установлено, что для непрерывной открытой цепочки, на каждом контуре которой находится по одному контуру одинаковой для всех кластеров длины, средняя скорость кластера не зависит от начального состояния системы и от того, на каком контуре находится кластер. При длине кластера, не превышающей половины длины контура, начиная с некоторого момента все кластеры движутся без задержек (система попадает в состояние свободного движения, самоорганизация) и, следовательно, скорость кластеров равна 1. При длине кластера больше половины длины контура средняя скорость меньше 1. Найдена формула для значения этой скорости и исследован характер поведения системы на реализующемся предельном цикле, представляющем собой циклическую траекторию в множестве состояний системы.

В [10] рассматривается дискретная открытая цепочка контуров, в которой кластеры различаются по длине. Для случаев, когда длина любого кластера не больше половины длины контура и когда длина любого кластера превышает половину длины контура, получены результаты, аналогичные [2]. В [10] приведены примеры, показывающие, что если имеются как кластеры, длина которых не превышает половину длины контура, так и кластеры длины, большей половины длины контура, то в общем случае средняя скорость кластера может зависеть как от начального состояния системы, так и от номера контура, на котором находится кластер.

В [11–14] исследованы дискретная и непрерывная замкнутые цепочки контуров. В [11] рассмотрена дискретная замкнутая цепочка, на каждом контуре которой имеются две ячейки и одна частица. Доказаны утверждения, подробно описывающие поведение системы, и найден спектр значений средней скорости при различных правилах разрешения конфликта, возникающего в случае, если две частицы соседних контуров пытаются одновременно пересечь общий узел. В частности, для левоприоритетного правила, при котором преимущество всегда предоставляется частице, находящейся на контуре, расположенном слева от узла, спектр скоростей содержит значение 1 и множество значений меньше 1, число которых равно $[N/3]$, где N — число контуров. В [12] исследуется поведение замкнутой цепочки с тремя или двумя контурами. Пусть l — отношение длины кластера к длине контура. Как доказано в [12], при любых значениях l и начальном состоянии системы средняя скорость всех кластеров одинакова, при этом для средней скорости v верно следующее: $v = 1$ (самоорганизация), если $l \leq 1/6$; $v = 1$ или $4/(3 + 6l)$ в зависимости от начального состояния системы, если $1/6 < l \leq 1/2$; $v = 0$ (коллапс, т. е. ни один кластер не перемещается, начиная с некоторого момента),

если $l > 1/2$. При числе контуров, равном двум, поведение системы имеет существенно более простой вид, а именно: система попадает в состояние свободного движения при $l \leq 1/2$ и в состояние коллапса при $l > 1/2$. В [13] получены результаты, аналогичные [12], для дискретного варианта замкнутой цепочки с двумя или тремя контурами. В [14] для дискретной замкнутой цепочки, на каждом контуре которой имеются одно и то же чётное число ячеек и одна частица, доказано, что для любого сколь угодно большого числа ячеек на контуре (сколь угодно малой плотности частиц) можно задать число контуров и начальное состояние системы таким образом, что средняя скорость частиц будет меньше 1. В [12] наряду с симметричными цепочками контуров рассмотрены некоторые частные случаи цепочки с несимметричным расположением узлов, т. е. замкнутые и открытые цепочки, в которых узлы делят контур на две неодинаковые по длине части.

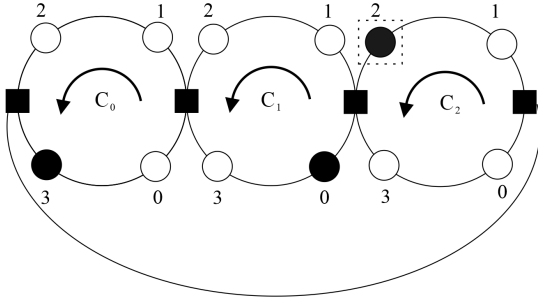
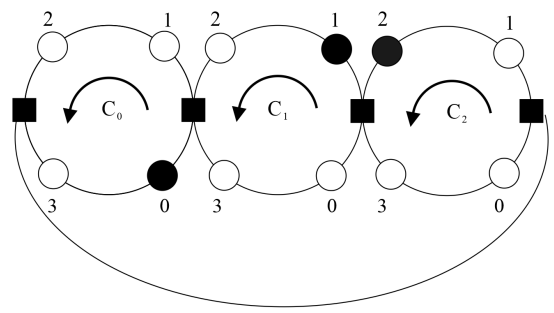
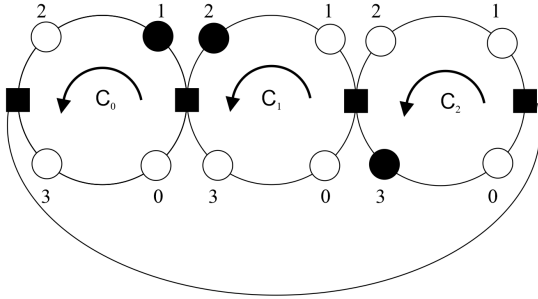
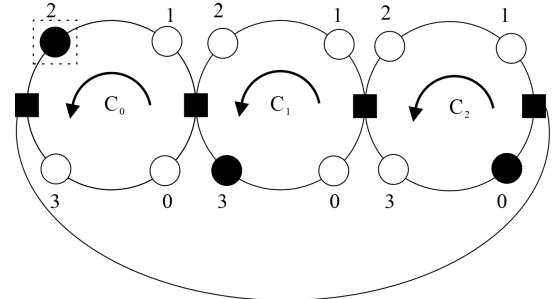
В настоящей работе рассматривается дискретная замкнутая цепочка, являющаяся обобщением бинарной замкнутой цепочки с левоприоритетным правилом. На каждом контуре системы имеются чётное число ячеек и одна частица. Располагающиеся на контуре два узла делят контур на части, содержащие одинаковое число ячеек. На каждом такте частица перемещается на ячейку вперёд в направлении движения. Если в некоторый момент времени две частицы находятся перед узлом, то на данном шаге перемещается только частица контура, расположенного слева. Получено необходимое и достаточное условие того, что заданное состояние принадлежит предельному циклу системы. Найдено правило, позволяющее вычислить среднюю скорость частиц, соответствующую этому предельному циклу. Получено правило, которое позволяет вычислить все значения, принадлежащие спектру значений средних скоростей при заданных количествах контуров и ячеек.

В [15] рассматривается динамическая система с дискретным временем и конечным числом состояний, называемая динамической системой ориентаций полного графа. Постановки задач исследования этой системы и относящиеся к ней понятия имеют аналогии с понятиями, возникающими при исследовании контурных сетей. Кроме того, в [15] приводится интерпретация динамической системы с конечным числом состояний в виде полного ориентированного графа. Дискретная контурная сеть является динамической системой с конечным числом состояний, поэтому связанные с этой интерпретацией понятия применимы и к контурным сетям.

1. Описание системы

Пусть система содержит N контуров, имеющих номера $i = 0, 1, \dots, N - 1$. На каждом контуре имеются $2m$ ячеек, $m \geq 1$, и одна частица. Частица может перемещаться в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \dots$. Ячейки контура имеют номера $0, 1, \dots, 2m - 1$, они нумеруются в направлении движения частицы (рис. 1).

Будем говорить, что контур i системы находится в состоянии j , если частица находится в ячейке с номером j , $j = 0, 1, \dots, 2m - 1$. Каждый контур имеет два соседних — слева и справа. Для контура i соседним слева является контур $i - 1$, справа — $i + 1$ (вычитание и сложение по модулю N), $i = 0, 1, \dots, N - 1$. Соседние контуры i , $i + 1$ имеют общую точку, называемую узлом $(i, i + 1)$ (сложение по модулю N), $i = 0, 1, \dots, N - 1$, причём этот узел располагается между ячейками 0 и 1 на контуре i и между ячейками m и $m + 1$ на контуре $i + 1$. Если в момент t частица находится в ячейке с номером i , то в момент $t + 1$ частица будет находиться в ячейке $i + 1$ (сложение по модулю $2m$), если нет задержки в перемещении частицы. Задержки обусловлены невозможностью одновременного прохождения двух частиц через один и тот же общий узел. Если в мо-

$x(0)=(3, 0, 2)$  $x(1)=(0, 1, 2)$  $x(2)=(1, 2, 3)$  $x(3)=(2, 3, 0)$ Рис. 1. Замкнутая цепочка при $m = 2$, $N = 3$

мент t частица контура i (частица i) находится в ячейке 0, а частица контура $i + 1$ (сложение по модулю N) — в ячейке m , то произойдёт задержка в перемещении частицы $i + 1$, а именно: в момент $t + 1$ частица i будет находиться в 1, а частица $i + 1$ — оставаться в ячейке m , $i = 0, 1, \dots, N - 1$.

Состояние системы в момент t представляет собой вектор

$$x(t) = (x_0(t), x_1(t), \dots, x_{N-1}(t)),$$

где $x_i(t)$ — номер ячейки, в которой находится частица i в момент t , $i = 0, 1, \dots, N - 1$. Начальное состояние $x(0)$ задаётся.

Будем использовать обозначение

$$\Delta_i(t) = x_i(t) - x_{i-1}(t),$$

где вычитание понимается по модулю $2m$, а вычитание в индексе — по модулю N .

Рассматриваемая система относится к классу контурных сетей, называемых *замкнутыми цепочками* контуров. Каждый контур замкнутой цепочки имеет два соседних — слева и справа, в отличие от открытых цепочек, для которых крайний слева и крайний справа контуры имеют только по одному соседнему.

2. Предельные циклы, средняя скорость частиц, состояние свободного движения

Так как система детерминированная и её число состояний конечно, начиная с некоторого момента времени состояния системы периодически повторяются. Пусть T — длительность предельного цикла, т. е. период этого цикла.

Пусть $S_i(t)$ — число перемещений частицы i в интервале времени $(0, t)$. Предел

$$v_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_i(t)}{t}$$

называется средней скоростью частицы i , $i = 0, 1, \dots, N - 1$. Ясно, что этот предел существует и равен отношению числа перемещений частицы i в течение предельного цикла к периоду.

Как доказано в настоящей работе, средняя скорость частицы может зависеть от начального состояния системы, но средние скорости всех частиц одинаковы. Будем обозначать среднюю скорость частиц через v .

Будем говорить, что система находится в момент времени t_0 в состоянии свободного движения, если в любой момент времени $t \geq t_0$ все частицы перемещаются. Ясно, что если система попадает в состояние свободного движения, то $v = 1$.

3. Потенциал задержек частиц

Определим функции состояния системы, которые будем называть потенциальной задержкой частицы и потенциалом задержек. Пусть $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$. Назовём потенциальной задержкой частицы i функцию $h_i(x)$, такую, что $h_i(x) = 0$, если $\Delta_i \neq m$, и $h_i(x) = 1$, если $\Delta_i = m$.

Потенциалом задержек называется функция

$$H(x) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i(x).$$

Теорема 1. Для любых t_1, t_2 , таких, что $t_1 < t_2$, выполняется неравенство

$$H(x(t_2)) \leq H(x(t_1)).$$

Доказательство. Предположим, что момент t_0 — первый момент времени после t_1 , такой, что для некоторого i_0 выполняются равенства $h_{i_0}(t_0) = 0$, $h_{i_0}(t_0 + 1) = 1$, т. е. в правой части равенства

$$H(x(t)) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i(x(t)) \tag{1}$$

есть слагаемое, которое возрастает при переходе от момента t_0 к моменту $t_0 + 1$. Изменение значения потенциальной задержки частицы i_0 не могло произойти, если обе частицы i_0 и $i_0 - 1$ переместились. Если бы частица i_0 не переместилась, то значение её потенциальной задержки $h_{i_0}(t_0)$ было бы равно 1, что противоречит предположению. Следовательно, не переместилась частица $i_0 - 1$. Но тогда $h_{i_0-1}(t_0) = 1$ и $h_{i_0-1}(t_0 + 1) = 0$. Таким образом, каждому слагаемому в правой части (1), возрастающему на единицу при переходе от момента t_0 к моменту $t_0 + 1$, соответствует убывающее с индексом на 1 меньше (вычитание по модулю N). Отсюда следует доказываемое утверждение. ■

Таблица показывает соответствие состояний, разностей Δ_t , потенциалов задержек ($m = 2$, $N = 3$) при начальном состоянии $x(0)$ на рис. 1.

Состояния $x(t) = (x_0(t), x_1(t), x_2(t))$ первых четырёх строк таблицы совпадают с состояниями системы на рис. 1. Видно, что циклический вектор состояния $x(t)$ смещается на одну позицию вправо при увеличении t на $m + 1 = 3$ (см. далее лемму 4) и возвращается к исходному состоянию при увеличении t на $T = (m + 1)N = 9$ — период предельного цикла (см. далее теорему 5).

t	x_0	x_1	x_2	Δ_0	Δ_1	Δ_2	h_0	h_1	h_2	H
0	3	0	2	1	1	2	0	0	1	1
1	0	1	2	2	1	1	1	0	0	1
2	1	2	3	2	1	1	1	0	0	1
3	2	3	0	2	1	1	1	0	0	1
4	2	0	1	1	2	1	0	1	0	1
5	3	1	2	1	2	1	0	1	0	1
6	0	2	3	1	2	1	0	1	0	1
7	1	2	0	1	1	2	0	0	1	1
8	2	3	1	1	1	2	0	0	1	1
9 = 0	3	0	2	1	1	2	0	0	1	1

4. Необходимое и достаточное условие пребывания системы в состоянии свободного движения

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием того, что система находится в момент времени t в состоянии свободного движения, является равенство $H(x(t)) = 0$.

Доказательство. Задержка частицы i может произойти лишь в случае, если в текущий момент значение потенциальной задержки этой частицы положительно. Но если потенциал задержки в текущий момент равен нулю, то он будет равен нулю и в будущем и, следовательно, задержек не будет. Если потенциал задержек в текущий момент не равен 0, то не позднее чем через время $2m$ произойдёт задержка какой-либо частицы. Таким образом, система не находится в состоянии свободного движения. ■

Теорема 3. Необходимым и достаточным условием того, что состояние системы x принадлежит предельному циклу, которому соответствует скорость частиц, равная 1, является равенство $H(x) = 0$. Период этого предельного цикла равен $2m$.

Доказательство. Если система находится в состоянии свободного движения, то состояние повторяется через $2m$ шагов. Отсюда и из утверждения теоремы 2 получаем утверждение теоремы 3. ■

5. Необходимое и достаточное условие принадлежности состояния предельному циклу со средней скоростью частиц меньше 1

Докажем сначала некоторые леммы.

Лемма 1. Если система не попадает в состояние свободного движения, то происходит бесконечное число задержек каждой частицы.

Доказательство. Предположим, что, начиная с некоторого момента времени t_0 , задержки частицы i_0 не происходят. Пусть в некоторый момент t_1 происходит первая после t_0 задержка частицы $i_0 + 1$ (сложение по модулю N). Тогда в момент $t_1 + 1$ потенциальная задержка частицы $i_0 + 1$ будет равна 0. Для того чтобы после момента времени $t_1 + 1$ произошла новая задержка частицы $i_0 + 1$, необходимо, чтобы после этого момента потенциальная задержка частицы $i_0 + 1$ снова стала не равной 0. Это возможно лишь в случае, если после момента $t_1 + 1$ произойдёт задержка частицы i_0 , что противоречит предположению. Следовательно, после момента t_1 задержек частицы $i_0 + 1$ не происходит. Таким образом, из предположения о конечности числа задержек частицы i_0 следует конечность числа задержек частицы $i_0 + 1$. С помощью индукции получаем, что система попадает в состояние свободного движения, что противоречит условию леммы. ■

Лемма 2. Если в момент времени t_0 система находится в состоянии

$$x(t_0) = (x_0(t_0), x_1(t_0), \dots, x_{N-1}(t_0)),$$

таким, что для некоторого i_0 выполняются неравенства

$$\Delta_{i_0}(t_0) \neq m - 1; \quad (2)$$

$$\Delta_{i_0}(t_0) \neq m, \quad (3)$$

то существует момент времени $t > t_0$, такой, что в этот момент система попадает в состояние свободного движения или выполняется неравенство $H(x(t)) < H(x(t_0))$.

Доказательство. Если система попадает в состояние свободного движения при некотором $t > t_0$, то $H(x(t)) = 0$ и лемма справедлива. Предположим теперь, что система никогда не попадает в состояние свободного движения. Тогда из леммы 1 следует, что будет бесконечное количество задержек частицы i_0 . Возьмём наименьший момент времени $t_1 > t_0$, при котором произойдёт задержка частицы i_0 . Но тогда $\Delta_{i_0}(t_1) = m \neq \Delta_{i_0}(t_0)$ и, значит, величина $\Delta_{i_0}(t)$ изменилась при $t_0 \leq t < t_1$. У частицы i_0 на этом интервале времени задержек не было, поэтому изменение $\Delta_{i_0}(t)$ вызвано задержками частицы $i_0 - 1$. Возьмём наименьший момент времени $t_2 \in \{t_0, \dots, t_1\}$, при котором произойдёт задержка частицы $i_0 - 1$. Тогда $h_{i_0-1}(t_2) = 1$, $h_{i_0-1}(t_0 + 1) = 0$ и значение h_{i_0-1} уменьшается. С другой стороны, в силу неравенств (2), (3), обе разности $\Delta_{i_0}(t_2)$ и $\Delta_{i_0}(t_2 + 1) = \Delta_{i_0}(t_2) + 1$ не равны m , поэтому $h_{i_0}(t_2) = h_{i_0}(t_2 + 1) = 0$ и значение h_{i_0} не увеличивается. Из доказательства теоремы 1 следует, что каждому элементу h_i , возрастающему на единицу при переходе от момента t_2 к моменту $t_2 + 1$, соответствует убывающий элемент h_{i-1} (вычитание по модулю N). Следовательно, $H(x(t_2 + 1)) < H(x(t_2)) \leq H(x(t_0))$ и для завершения доказательства леммы достаточно взять $t = t_2 + 1$. ■

Лемма 3. Если в момент времени t_0 система находится в состоянии

$$x(t_0) = (x_0(t_0), x_1(t_0), \dots, x_{N-1}(t_0)),$$

таким, что при некотором i_0 выполняются условия

$$h_{i_0}(t_0) = 1, \quad h_{i_0+1}(t_0) = 1, \quad (4)$$

$$1 \leq x_{i_0}(t_0) \leq m,$$

то для некоторого момента $t > t_0$ выполняется неравенство $H(x(t)) < H(x(t_0))$.

Доказательство. Возьмём наименьший момент времени $t_1 \geq t_0$, при котором $x_{i_0}(t_1) = m$. Из (4) следует, что $x_{i_0-1}(t_1) = 0$ и при $t = t_1$ произойдёт задержка частицы i_0 . Легко видеть, что обе частицы, расположенные на соседних контурах, при $t \in \{t_0, \dots, t_1\}$ задержки не имеют, поэтому разности $\Delta_{i_0}(t)$ и $\Delta_{i_0+1}(t)$ изменят свои значения с величины m при $t \leq t_1$ до $m - 1$ и $m + 1$ при $t = t_1 + 1$ соответственно. Получаем уменьшение сразу двух соседних элементов: $h_{i_0-1}(t_1 + 1) = 0$, $h_{i_0}(t_1 + 1) = 0$. Используя рассуждения, подобные рассуждениям в лемме 2, получаем требуемое неравенство при $t = t_1 + 1$. ■

Лемма 4. Пусть состояние

$$x(t_0) = (x_0(t_0), x_1(t_0), \dots, x_{N-1}(t_0))$$

удовлетворяет следующим условиям:

- 1) значение потенциала задержки $H(x(t_0))$ не равно 0;
- 2) при любом i выполняется одно из равенств $\Delta_i = m - 1$, $\Delta_i = m$;
- 3) ни для одного i_0 не выполняются одновременно оба условия (3) и (4);
- 4) не существует значения i_0 , такого, что $h_{i_0+1}(t_0) = 1$ и $1 \leq x_{i_0}(t_0) \leq m - 1$.

Тогда за $m + 1$ шагов циклический вектор состояния смещается на одну позицию вправо.

Доказательство. Предположим, что выполняются следующие условия:

$$x_{i_0-1}(t_0) = k - m + 1, \quad x_{i_0} = k, \quad x_{i_0+1} = k + m - 1$$

(вычитание и сложение по модулю $2m$). Тогда в момент $t_0 + m + 1$ частица $i_0 + 1$, совершив $m + 1$ перемещений, оказывается в ячейке с номером k . Таким образом, $x_{i_0+1}(t_0 + m + 1) = x_{i_0}(t_0)$.

Пусть выполняются условия

$$x_{i_0-1} = k - m + 1, \quad x_{i_0} = k, \quad x_{i_0+1} = k + m, \quad m + 1 \leq x_0 \leq 2m - 1$$

(вычитание и сложение по модулю $2m$). Тогда в момент $t_0 + m + 1$, совершив m перемещений, частица i_0 оказывается в ячейке с номером k .

Пусть выполняются условия

$$x_{i_0-1} = m + 1, \quad x_{i_0} = 0, \quad x_{i_0+1} = m.$$

Тогда в момент $t_0 + m + 1$, совершив $m + 1$ перемещений, частица $i_0 + 1$ оказывается в ячейке с номером 0.

Пусть выполняются условия

$$x_{i_0-1} = m, \quad x_{i_0} = 0, \quad x_{i_0+1} = m.$$

Тогда в момент $t_0 + m + 1$, совершив m перемещений, частица $i_0 + 1$ оказывается в ячейке с номером 0.

Таким образом, учитывая леммы 1 и 2, получаем, что при выполнении условия леммы верны равенства

$$x_{i+1}(t_0 + m + 1) = x_i(t_0), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1$$

(сложение в индексе по модулю N). ■

Следствием леммы 4 является следующая

Теорема 4. Состояние системы, удовлетворяющее лемме 4, принадлежит предельному циклу с периодом, являющимся делителем числа $(m + 1)N$, и со средней скоростью, меньшей 1.

Лемма 5. Если состояние системы x удовлетворяет условиям 1–3 леммы 4, но не удовлетворяет условию 4 леммы 4, то это состояние не принадлежит предельному циклу.

Доказательство. Как можно убедиться, при выполнении условия леммы 5 система не более чем за m шагов попадает в состояние предельного цикла, удовлетворяющего условию леммы 4, откуда следует утверждение леммы 5. ■

Из теоремы 4 и лемм 2, 3 и 5 получаем следующее утверждение:

Теорема 5. Состояние системы принадлежит предельному циклу со средней скоростью, меньшей 1, в том и только в том случае, если это состояние удовлетворяет условию леммы 4. Период этого предельного цикла является делителем $(m+1)N$.

Таким образом, период предельного цикла не превышает $(m+1)N$ и в общем случае при некоторых начальных состояниях может быть меньше $(m+1)N$.

6. Формула для средней скорости частиц

Лемма 6. Состояниям, принадлежащим одному и тому же предельному циклу, соответствует одно и то же значение потенциала задержек.

Лемма 6 является следствием теоремы 1.

Теорема 6. Пусть H — значение потенциала задержек, соответствующее предельному циклу. Тогда этому предельному циклу соответствует средняя скорость частиц v , вычисляемая по формуле

$$v = 1 - \frac{H}{(m+1)N}. \quad (5)$$

Доказательство. Если $H = 0$, то в соответствии с теоремой 2 имеем $v = 1$. Пусть $H \geq 1$. Предположим, что в момент времени t_0 происходит задержка частицы i_0 . В этот момент частица i_0 находится в ячейке m , а частица i_0+1 , в соответствии с теоремой 5, — в ячейке $2m-1$. В момент t_0+1 (сложение по модулю N) потенциальная задержка частицы i_0 меняет значение 1 на значение 0, а потенциальная задержка частицы i_0+1 — значение 0 на значение 1. В этот момент частица i_0+1 будет находиться в ячейке 0, а частица i_0 по-прежнему в ячейке m . В момент времени t_0+m+1 частица i_0 окажется в ячейке 0, а частица i_0+1 — в ячейке m . Произойдёт задержка частицы i_0+1 и значение 1 потенциальной задержки частицы i_0+1 перейдёт частице i_0+2 . Таким образом, на каждых последовательных $m+1$ тактах задерживаются один раз H из N частиц, откуда следует утверждение теоремы 6. ■

7. Спектр скоростей частиц

Для того чтобы при заданных значениях N и m найти множество возможных значений средней скорости при различных начальных состояниях систем, нужно, в соответствии с теоремой 6, найти возможные значения H и для каждого такого значения проверить, существуют ли векторы состояния со значениями H , удовлетворяющими условию леммы 4.

Теорема 7. Необходимым условием существования предельного цикла с потенциалом задержек, равным H , является выполнение следующих соотношений:

$$\begin{aligned} 1 &\leq H \leq \frac{2N}{3}, \\ Nm - N + H &= 2m, \end{aligned} \quad (6)$$

где равенство (6) понимается по модулю $2m$.

Доказательство. Из леммы 4 следует, что для существования предельного цикла с потенциалом задержек, равным H , необходимо выполнение условия (5) и равенства

$$Hm + (N - H)(m - 1) = 2m$$

по модулю $2m$, равносильного равенству (6). ■

8. Бинарная замкнутая цепочка

Предположим, что $m = 1$. Тогда, применив изложенное в п. 3 правило нахождения значений потенциала задержек, таких, что эти значения соответствуют предельным циклам, имеем $H = 0, 2, 4, \dots, 2 \lfloor N/3 \rfloor$. Отсюда, используя формулу (5), в которой полагаем $m = 1$, получаем, что спектр скоростей содержит $\lfloor N/3 \rfloor + 1$ значений $v = 1 - k/N$, $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{N}{3} \rfloor$, что соответствует результатам работы [11].

Заключение

Проведено исследование дискретной динамической системы, принадлежащей классу контурных сетей Буслаева. Эта система представляет собой замкнутую цепочку контуров, на каждом из которых имеется чётное число ячеек и одна частица.

Найдены предельные циклы системы с соответствующими им значениями средней скорости движения частиц. Найдено правило, позволяющее найти множество возможных значений средней скорости при различных состояниях системы и заданных числе контуров и числе ячеек на контуре. Введено понятие потенциала задержки, которое используется при анализе поведения системы. Потенциал задержек представляет собой невозрастающую во времени функцию состояния системы, которая постоянна на предельном цикле и равна нулю лишь в случае, когда система находится в состоянии свободного движения, т. е. когда на предельном цикле все частицы движутся без задержек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kozlov V. V., Buslaev A. P., and Tatashev A. G. On synergy of totally connected flows on chainmails // Proc. Intern. Conf. CMMSE. 2013. V. 3. P. 861–874.
2. Buslaev A. P. and Tatashev A. G. Spectra of local cluster flows on open chain of contours // Europ. J. Pure Appl. Math. 2018. V. 11. No. 3. P. 628–641.
3. Бланк М. Л. Точный анализ динамических систем, возникающих в моделях транспортных потоков // Успехи математических наук. 2000. Т. 55. № 3(333). С. 167–168.
4. Belitsky V. and Ferrari P. A. Invariant measures and convergence properties for cellular automaton 184 and related processes // J. Stat. Phys. 2005. V. 118. No. 3/4. P. 589–623.
5. Biham O., Middleton A. A., and Levine D. Self-organization and a dynamic transition in traffic-flow models // Phys. Rev. A. 1992. V. 46. No. 10. P. R6124–R6127.
6. D'Souza R. M. Coexisting phases and lattice dependence of a cellular automaton model for traffic flow // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. No. 6:066112.
7. Angel O., Horlovd A. E., and Martin J. B. The jammed phase of the Biham — Middleton — Levine traffic model // Elec. Commun. Probability. 2005. V. 10.
8. Austin D. and Benjamini I. For what number of cars must self organization occur in the Biham — Middleton — Levine traffic model from any possible starting configuration? arXiv preprint math/0607759. 2006.
9. Bugaev A. S., Buslaev A. P., Kozlov V. V., and Yashina M. V. Distributed problems of monitoring and modern approaches to traffic modeling // 14th Intern. IEEE Conf. ITSC. 2011. P. 477–481.
10. Buslaev A. P. and Tatashev A. G. Spectra of local cluster flows on open chain of contours // 7th Intern. Conf. ICCMA. 2019. P. 283–288.
11. Kozlov V. V., Buslaev A. P., and Tatashev A. G. Monotonic walks on a necklace and a coloured dynamic vector // Int. J. Comput. Math. 2015. V. 92. No. 9. P. 1910–1920.
12. Buslaev A. P., Tatashev A. G., and Yashina M. V. Flows spectrum on closed trio of contours // Europ. J. Pure Appl. Math. 2018. V. 11. No. 1. P. 260–283.

13. *Buslaev A. P., Fomina M. Yu., Tatashev A. G., and Yashina M. V.* On discrete flow networks model spectra: statement, simulation, hypotheses // *J. Physics: Conf. Ser.* 2018. V.1053. No. 012034. P. 1–7.
14. *Tatashev A. G. and Yashina M. V.* Spectrum of elementary cellular automata and closed chains of contours // *Machines*. 2019. V. 7. No. 2. P. 28.
15. *Жаркова А. В.* О количестве недостижимых состояний в конечных динамических системах ориентаций полных графов // *Прикладная дискретная математика. Приложение*. 2020. № 13. С. 100–103.

REFERENCES

1. *Kozlov V. V., Buslaev A. P., and Tatashev A. G.* On synergy of totally connected flows on chainmails. *Proc. Intern. Conf. CMMSE*, 2013, vol. 3, pp. 861–874.
2. *Buslaev A. P. and Tatashev A. G.* Spectra of local cluster flows on open chain of contours. *European J. Pure Appl. Math.*, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 628–641.
3. *Blank M. L.* Exact analysis of dynamical systems arising in models of traffic flow. *Russian Math. Surveys*, 2000, vol. 55, no. 3, pp. 562–563.
4. *Belitsky V. and Ferrari P. A.* Invariant measures and convergence properties for cellular automation 184 and related processes. *J. Stat. Phys.*, 2005, vol. 118, no. 3/4, pp. 589–623.
5. *Biham O., Middleton A. A., and Levine D.* Self-organization and a dynamic transition in traffic-flow models. *Phys. Rev. A*, 1992, vol. 46, no. 10, R6124–R6127.
6. *D'Souza R. M.* Coexisting phases and lattice dependence of a cellular automaton model for traffic flow. *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 71, no. 6, 066112.
7. *Angel O., Horlovd A. E., and Martin J. B.* The jammed phase of the Biham — Middleton — Levine traffic model. *Elec. Commun. Probability*, 2005, vol. 10.
8. *Austin D. and Benjamini I.* For what number of cars must self organization occur in the Biham — Middleton — Levine traffic model from any possible starting configuration? *arXiv preprint math/0607759*, 2006.
9. *Bugaev A. S., Buslaev A. P., Kozlov V. V., and Yashina M. V.* Distributed problems of monitoring and modern approaches to traffic modeling. *14th Intern. IEEE Conf. ITSC*, 2011, pp. 477–481.
10. *Buslaev A. P. and Tatashev A. G.* Spectra of local cluster flows on open chain of contours. *7th Intern. Conf. ICCMA*, 2019, pp. 283–288.
11. *Kozlov V. V., Buslaev A. P., and Tatashev A. G.* Monotonic walks on a necklace and a coloured dynamic vector. *Int. J. Comput. Math.*, 2015, vol. 92, no. 9, pp. 1910–1920.
12. *Buslaev A. P., Tatashev A. G., and Yashina M. V.* Flows spectrum on closed trio of contours. *Europ. J. Pure Appl. Math.*, 2018, vol. 11, no. 1, pp. 260–283.
13. *Buslaev A. P., Fomina M. Yu., Tatashev A. G., and Yashina M. V.* On discrete flow networks model spectra: statement, simulation, hypotheses. *J. Physics: Conf. Ser.*, 2018, vol. 1053, no. 012034, pp. 1–7.
14. *Tatashev A. G. and Yashina M. V.* Spectrum of elementary cellular automata and closed chains of contours. *Machines*, 2019, vol. 7, no. 2, p. 28.
15. *Zharkova A. V.* О количестве недостижимых состояний в конечных динамических системах ориентаций полных графов [On number of inaccessible states in finite dynamic systems of complete graphs orientations]. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika. Prilozhenie*, 2020, no. 13, pp. 100–103. (in Russian)