

УДК 517.928

Д.А. Турсунов

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Обобщенным методом погранфункций строится равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения второго порядка.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, задача Дирихле, оператор Лапласа, эллиптическое уравнение, бисингулярное возмущение, точка поворота.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Дирихле для эллиптического уравнения

$$\varepsilon \Delta u - (x^2 + y^2)u = f(x, y), \quad (x, y) \in D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}; \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, $f(x, y) \in C^\infty(\bar{D})$,

$u = u(x, y, \varepsilon)$.

Асимптотическое разложение решение задачи (1), (2) строим обобщенным методом погранфункций [1, 2]. Задача (1), (2) в полярной системе координат ($x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$) имеет вид

$$\varepsilon \Delta_{r\phi} u - r^2 u = f(r, \phi), \quad (r, \phi) \in D_1 = \{(r, \phi) | 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq r < 1\}, \quad (1.1)$$

$$u(1, \phi, \varepsilon) = 0, \quad (1.2)$$

где $\Delta_{r\phi} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$, $f(r, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\phi) r^k$, $f_k(\phi) = \frac{\partial^k f(0, \phi)}{k! \partial r^k}$,

$$u = u(r, \phi, \varepsilon).$$

Для начала рассмотрим структуру внешнего разложения решения задачи (1.1), которое ищем в виде

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(r, \phi), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3)$$

где V – это пока формальный ряд. Подставляя (3) в (1.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим рекуррентную систему уравнений:

$$-r^2 v_0(r, \phi) = f(r, \phi),$$

$$r^2 v_k(x, y) = \Delta_{r\phi} v_{k-1}(r, \phi), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда определяются все $v_k(r, \phi) \in C^\infty(\bar{D}_1 \setminus (0, \phi))$:

$$v_0(r, \phi) = -f(r, \phi)/r^2, \quad v_k(r, \phi) = \Delta_{r\phi} v_{k-1}(r, \phi)/r^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что при $r = 0$ (в начале координат $x = 0$, $y = 0$) все эти функции $v_k(r, \phi)$ имеют особенности.

Поэтому задача (1), (2) ((1.1), (1.2)) является бисингулярной – коэффициенты ее внешнего разложения имеют нарастающие особенности в начале координат [3, 4]. В окрестности $r = 0$ ряд (3) не только не приближает решение $u(r, \phi, \varepsilon)$, но даже теряет асимптотический характер.

Построение формального асимптотического разложения решения

Решение задачи (1.1), (2.1) ищем в виде

$$u(r, \phi, \varepsilon) = V(r, \phi, \varepsilon) + W(\tau, \phi, \mu) + \Pi(\eta, \phi, \mu), \quad (4)$$

где $\eta = (1-r)/\mu^2$, $\varepsilon = \mu^4$, $\tau = r/\mu$,

$$V(r, \phi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r, \phi) \varepsilon^k, \quad W(\tau, \phi, \mu) = \sum_{k=-2}^{\infty} w_k(\tau, \phi) \mu^k, \quad \Pi(\eta, \phi, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(\eta, \phi) \mu^{2k}.$$

Подставляя (4) в (1.1) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \Delta_{r\phi} V - r^2 V + \varepsilon \Delta_{\tau\phi} W - (\tau\mu)^2 W + \varepsilon \Delta_{\eta\phi} \Pi - (1-\mu^2\eta)^2 \Pi = \\ = f(r, \phi) - H(r, \phi, \varepsilon) + H(\mu\tau, \phi, \mu), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{\tau\phi} &= \left(\frac{\partial^2}{\mu^2 \partial \tau^2} + \frac{1}{\mu^2 \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\mu^2 \tau^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right), \\ \Delta_{\eta\phi} &= \left(\frac{\partial^2}{\mu^4 \partial \eta^2} - \frac{1}{(1-\mu^2\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{(1-\mu^2\eta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right). \end{aligned}$$

Здесь мы в левую часть уравнения прибавили и убавили одну и ту же функцию

$$H(r, \phi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(r, \phi) \varepsilon^k. \quad H(r, \phi, \varepsilon) \text{ пока неизвестная функция, ее мы определим}$$

ниже.

Из (5) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\Delta_{r\phi} v_{k-1}(r, \phi) - r^2 v_k(r, \phi) + H_k(r, \phi)) \varepsilon^k - r^2 v_0(r, \phi) = f(r, \phi) - H_0(r, \phi); \quad (6)$$

$$\varepsilon \Delta_{\tau\phi} W - \mu^2 \tau^2 W = H(\mu\tau, \phi, \varepsilon), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} W(\tau, \phi) = 0; \quad (7)$$

$$\varepsilon \Delta_{\eta\phi} \Pi - (1 - \mu^2 \eta)^2 \Pi = 0, \quad \Pi(0, \phi, \mu) = -V(1, \phi, \mu). \quad (8)$$

Из (6) можно однозначно определить все $v_k(r, \phi)$:

$$\begin{aligned} v_0(r, \phi) &= -(f(r, \phi) - H_0(r, \phi))/r^2, \\ v_k(r, \phi) &= (\Delta_{r\phi} v_{k-1}(r, \phi) + H_k(r, \phi))/r^2, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

И здесь мы определим неизвестную функцию $H(r, \phi, \varepsilon)$ так, чтобы

$$v_{k-1}(r, \phi) \in C^\infty(\bar{D}_1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} H_0(r, \phi) &= f_0(\phi) + f_1(\phi)r + f_2(\phi)r^2 + f_3(\phi)r^3, \\ H_k(r, \phi) &= -(g_{0,k-1}(\phi) + g_{1,k-1}(\phi)r + g_{2,k-1}(\phi)r^2 + g_{3,k-1}(\phi)r^3), \end{aligned}$$

$$g(r, \phi) = \Delta_{r\phi} v_{k-1}(r, \phi), \quad g_{s,k-1}(\phi) = \frac{\partial^s g_{k-1}(0, \phi)}{s! \partial r^s}.$$

Следовательно,

$$H(r, \phi) = f_0(\phi) + f_1(\phi)r + f_2(\phi)r^2 + f_3(\phi)r^3 - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} (g_{0,k-1}(\phi) + g_{1,k-1}(\phi)r + g_{2,k-1}(\phi)r^2 + g_{3,k-1}(\phi)r^3) \varepsilon^k.$$

Задачу (7) запишем в следующем виде:

$$\mu^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \right) - \mu^2 \tau^2 W = \\ = \sum_{k=0}^3 f_k(\phi) \mu^k \tau^k - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^3 g_{j,k-1}(\phi) \mu^j \tau^j \right) \mu^{4k}. \quad (9)$$

При $\tau \rightarrow \infty$ вместо (9) можно рассмотреть уравнение

$$\mu^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - \mu^2 \tau^2 W = \sum_{k=0}^3 f_k(\phi) \mu^k \tau^k - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^3 g_{j,k-1}(\phi) \mu^j \tau^j \right) \mu^{4k} \quad (9.1)$$

с условием $\lim_{\tau \rightarrow \infty} W(\tau, \phi) = 0$ [5].

Отсюда, если ввести оператор $l \equiv \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \tau^2$, имеем

$$lw_{-2} = f_0(\phi), w_{-2} \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty; \quad (7.-2)$$

$$lw_{-1} = f_1(\phi)\tau, w_{-1} \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty; \quad (7.-1)$$

$$lw_0 = f_2(\phi)\tau^2, w_0 \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty; \quad (7.0)$$

$$lw_1 = f_3(\phi)\tau^3, w_1 \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty; \quad (7.-1)$$

$$lw_{4k-2} = -g_{0,k-1}(\phi), w_{4k-2} \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty, k \in \mathbb{N}; \quad (7.4k-2)$$

$$lw_{4k-1} = -g_{1,k-1}(\phi)\tau, w_{4k-1} \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty, k \in \mathbb{N}. \quad (7.4k-1)$$

$$lw_{4k} = -g_{2,k-1}(\phi)\tau^2, w_{4k} \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty, k \in \mathbb{N}; \quad (7.4k)$$

$$lw_{4k+1} = -g_{3,k-1}(\phi)\tau^3, w_{4k+1} \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty, k \in \mathbb{N}. \quad (7.4k+1)$$

Эти уравнения являются уравнениями с кратной точкой поворота. Поэтому их решения записываются с помощью специальных функций. Общее решение однородного уравнения $z''(\tau) - \tau^2 z(\tau) = 0$ имеет вид [6]

$$z(\tau) = \sqrt{\tau} \left(C_1 I_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} \tau^2 \right) + C_2 K_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} \tau^2 \right) \right),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, $I_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} \tau^2 \right), K_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} \tau^2 \right)$ – модифицированные функции Бесселя. Причем

$$I_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} \tau^2 \right) \rightarrow \infty, K_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} \tau^2 \right) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty;$$

$$I_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} \tau^2 \right) \rightarrow 0, K_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} \tau^2 \right) \rightarrow \infty \text{ при } \tau \rightarrow 0.$$

Лемма. Неоднородное уравнение $lz = \gamma(\tau)$ имеет решение

$$z(\tau) = y_2(\tau) \int_0^\tau y_1(s) \frac{(-\gamma(s))}{\sqrt{s}} ds + y_1(\tau) \int_\tau^\infty y_2(s) \frac{(-\gamma(s))}{\sqrt{s}} ds, \quad (10)$$

которое ограничено на всей оси и удовлетворяет условию $z(\tau) \rightarrow 0$, при $\tau \rightarrow \infty$, где

$$y_1(\tau) = \sqrt{\tau} I_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} \tau^2 \right), \quad y_2(\tau) = \sqrt{\tau} K_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} \tau^2 \right) \quad - \text{ решения однородного уравнения}$$

$$lz = 0.$$

Доказательство. Функция (10) удовлетворяет условиям $z(0) = 0$, $z(\infty) = 0$, так как $y_1(0) = 0$, $y_2(\infty) = 0$.

Теперь докажем, что (10) действительно удовлетворяет уравнению $lz = \gamma(\tau)$.

Вычислим производные первого и второго порядка от функции (10):

$$\begin{aligned} z'(\tau) &= y_2'(\tau) \int_0^\tau y_1(s) \frac{(-\gamma(s))}{\sqrt{s}} ds + y_1'(\tau) \int_\tau^\infty y_2(s) \frac{(-\gamma(s))}{\sqrt{s}} ds, \\ z''(\tau) &= y_2''(\tau) \int_0^\tau y_1(s) \frac{(-\gamma(s))}{\sqrt{s}} ds + y_1''(\tau) \int_\tau^\infty y_2(s) \frac{(-\gamma(s))}{\sqrt{s}} ds + \\ &\quad + \frac{(-\gamma(\tau))}{\sqrt{\tau}} (y_2'(\tau) y_1(\tau) - y_1'(\tau) y_2(\tau)) = \\ &= y_2''(\tau) \int_0^\tau y_1(s) \frac{(-\gamma(s))}{\sqrt{s}} ds + y_1''(\tau) \int_\tau^\infty y_2(s) \frac{(-\gamma(s))}{\sqrt{s}} ds + \gamma(\tau). \end{aligned}$$

Подставляя значение второй производной в неоднородное уравнение $lz = \gamma(\tau)$, получим

$$\begin{aligned} &y_2''(\tau) \int_0^\tau y_1(s) \frac{(-\gamma(s))}{\sqrt{s}} ds + y_1''(\tau) \int_\tau^\infty y_2(s) \frac{(-\gamma(s))}{\sqrt{s}} ds + \gamma(\tau) - \\ &- y_2(\tau) \int_0^\tau y_1(s) \frac{(-\gamma(s))}{\sqrt{s}} ds + y_1(\tau) \int_\tau^\infty y_2(s) \frac{(-\gamma(s))}{\sqrt{s}} ds = \gamma(\tau), \\ &\quad \left(y_2''(\tau) - \tau^2 y_2(\tau) \right) \int_0^\tau y_1(s) \frac{(-\gamma(s))}{\sqrt{s}} ds + \\ &\quad + \left(y_1''(\tau) - \tau^2 y_1(\tau) \right) \int_\tau^\infty y_2(s) \frac{(-\gamma(s))}{\sqrt{s}} ds + \gamma(\tau) = \gamma(\tau). \end{aligned}$$

Доказательство леммы завершено.

Используя эту лемму, запишем решение уравнений (7.4k-2), (7.4k-1), (7.4k), (7.4k+1):

$$\begin{aligned} w_{-2}(\tau) &= -f_0(\phi) \left(y_2(\tau) \int_0^\tau \frac{y_1(s)}{\sqrt{s}} ds + y_1(\tau) \int_\tau^\infty \frac{y_2(s)}{\sqrt{s}} ds \right), \\ w_{-1}(\tau) &= -f_1(\phi) \left(y_2(\tau) \int_0^\tau y_1(s) \sqrt{s} ds + y_1(\tau) \int_\tau^\infty y_2(s) \sqrt{s} ds \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_0(\tau) &= -f_2(\phi) \left(y_2(\tau) \int_0^\tau y_1(s) s^{3/2} ds + y_1(\tau) \int_\tau^\infty y_2(s) s^{3/2} ds \right), \\
w_1(\tau) &= -f_3(\phi) \left(y_2(\tau) \int_0^\tau y_1(s) s^{5/2} ds + y_1(\tau) \int_\tau^\infty y_2(s) s^{5/2} ds \right), \\
w_{4k-2}(\tau) &= g_{0,k-1}(\phi) \left(y_2(\tau) \int_0^\tau \frac{y_1(s)}{\sqrt{s}} ds + y_1(\tau) \int_\tau^\infty \frac{y_2(s)}{\sqrt{s}} ds \right), \\
w_{4k-1}(\tau) &= g_{1,k-1}(\phi) \left(y_2(\tau) \int_0^\tau y_1(s) \sqrt{s} ds + y_1(\tau) \int_\tau^\infty y_2(s) \sqrt{s} ds \right), \\
w_{4k}(\tau) &= g_{2,k-1}(\phi) \left(y_2(\tau) \int_0^\tau y_1(s) s^{3/2} ds + y_1(\tau) \int_\tau^\infty y_2(s) s^{3/2} ds \right), \\
w_{4k+1}(\tau) &= g_{3,k-1}(\phi) \left(y_2(\tau) \int_0^\tau y_1(s) s^{5/2} ds + y_1(\tau) \int_\tau^\infty y_2(s) s^{5/2} ds \right), \\
& k \in \mathbf{N}.
\end{aligned}$$

Для $\forall k$ $w_k(\tau, \phi) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$; $w_k(\tau, \phi) \in C^\infty(\bar{D}_1)$, $k = -2, -1, 0, \dots$

Приступим теперь к решению задачи (8):

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\mu^4 \partial \eta^2} - \frac{1}{(1-\mu^2 \eta)} \frac{\partial}{\mu^2 \partial \eta} + \frac{1}{(1-\mu^2 \eta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \Pi - (1-\mu^2 \eta)^2 \Pi &= 0, \\
\Pi(0, \phi) &= -V(1, \phi).
\end{aligned}$$

Здесь тоже можно приближенно заменить уравнение (8) более простым, т.е. вместо уравнения (8) можно рассмотреть уравнение

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta^2} - (1-\mu^2 \eta)^2 \Pi = 0, \quad (8.1)$$

с условиями $\Pi(0, \phi) = -V(1, \phi)$, $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Pi(\eta, \phi) = 0$.

Подставляя в (8.1) ряд $\Pi(\eta, \phi, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(\eta, \phi) \mu^{2k}$, получим

$$\frac{\partial^2 \pi_0}{\partial \eta^2} - \pi_0 + \left(\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \eta^2} - \pi_1 + 2\eta \pi_0 \right) \mu^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \pi_k}{\partial \eta^2} - \pi_k + 2\eta \pi_{k-1} - \eta^2 \pi_{k-2} \right) \mu^{2k} = 0,$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 \pi_0}{\partial \eta^2} - \pi_0 = 0, \quad \pi_0(0, \phi) = -v_0(1, \phi), \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \pi_0(\eta, \phi) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \eta^2} - \pi_1 = -2\eta \pi_0, \quad \pi_1(0, \phi) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \pi_1(\eta, \phi) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \pi_k}{\partial \eta^2} - \pi_k = -2\eta \pi_{k-1} + \eta^2 \pi_{k-2}, \quad k \geq 2,$$

$$\pi_{2k}(0, \phi) = -v_k(1, \phi), \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \pi_{2k}(\eta, \phi) = 0,$$

$$\pi_{2k+1}(0, \phi) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \pi_{2k+1}(\eta, \phi) = 0.$$

Следовательно,

$$\pi_0(\eta, \phi) = -v_0(1, \phi)e^{-\eta}, \quad \pi_1(\eta, \phi) = -\frac{1}{2}v_0(1, \phi)\eta(\eta+1)e^{-\eta},$$

$$\pi_2(\eta, \phi) = -\frac{1}{8}v_0(1, \phi)\eta(\eta^3 + 2\eta^2 + 3\eta + 3)e^{-\eta} - v_1(1, \phi)e^{-\eta},$$

$$\pi_{2k+1}(\eta, \phi) = P(\eta, \phi)e^{-\eta}, \quad P(0, \phi) \equiv 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\pi_{2k}(\eta, \phi) = P(\eta, \phi)e^{-\eta} - v_k(1, \phi)e^{-\eta}, \quad P(0, \phi) \equiv 0,$$

$P(\eta, \phi)$ – некоторый многочлен.

$$\forall k, \pi_k(\eta, \phi) \rightarrow 0, \eta \rightarrow \infty; \pi_k(\eta, \phi) \in C^\infty(\bar{D}_1), \quad k = 0, 1, \dots$$

Оценка остаточного члена $R_n(r, \phi, \varepsilon)$

Пусть
$$u_n(r, \phi, \varepsilon) = V_n(r, \phi, \varepsilon) + W_{4n+2}(\tau, \phi, \mu) + \Pi_{2n+1}(\eta, \phi, \mu),$$

$$R_n(r, \phi, \varepsilon) = u(r, \phi, \varepsilon) - u_n(r, \phi, \varepsilon),$$

где

$$V_n(r, \phi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n v_k(r, \phi) \varepsilon^k, \quad W_{4n+2}(\tau, \phi, \mu) =$$

$$= \sum_{k=-2}^{4n+2} w_k(\tau, \phi) \mu^k, \quad \Pi_{2n+1}(\eta, \phi, \mu) = \sum_{k=0}^{2n+1} \pi_k(\eta, \phi) \mu^{2k}.$$

Тогда для остаточного члена получим задачу:

$$\varepsilon \Delta R_n(r, \phi, \varepsilon) - r^2 R_n(r, \phi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}),$$

$$(r, \phi) \in D_1 = \{(r, \phi) | 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq r < 1\},$$

$$R_n(1, \phi, \varepsilon) = 0. \quad (11)$$

Задача (11) при всяком $\varepsilon > 0$ имеет единственное решение [7].

С помощью подстановки $r = \mu \rho$ ($\mu^4 = \varepsilon$) приходим к задаче

$$\Delta R_n(\rho, \phi, \varepsilon) - \rho^2 R_n(\rho, \phi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1/2}),$$

$$(\rho, \phi) \in D_1 = \{(\rho, \phi) | 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \rho < \infty\},$$

$$R_n(\infty, \phi, \varepsilon) = 0, \quad \mu \rightarrow 0.$$

Построим решение этой задачи, не зависящее от ϕ , т.е. $R_n(\rho, \phi, \varepsilon) = R_n(\rho, \varepsilon)$:

$$R''_n(\rho, \varepsilon) + R'_n(\rho, \varepsilon)/\rho - \rho^2 R_n(\rho, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1/2}).$$

Если применять замену переменной $2\xi = \rho^2$, то последнее уравнение приводится к виду

$$\xi R''_n(\xi, \varepsilon) + R'_n(\xi, \varepsilon) - \xi R_n(\xi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1/2}).$$

Соответствующее однородное уравнение $\xi R''_n(\xi, \varepsilon) + R'_n(\xi, \varepsilon) - \xi R_n(\xi, \varepsilon) = 0$ – модифицированное уравнение Бесселя нулевого порядка, которое, имеет два независимых решения $I_0(\xi)$ и $K_0(\xi)$ [6]. Следовательно, решение неоднородного уравнения имеет вид

$$R_n(\xi, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1/2}) \int_0^\infty G(\xi, s) ds,$$

где
$$G(\xi, s) = \begin{cases} -I_0(\xi) K_0(s), & 0 \leq \xi \leq s, \\ -I_0(s) K_0(\xi), & s \leq \xi < \infty. \end{cases}$$

Отсюда получим оценку для остаточного члена $|R_n(\xi, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1/2})$.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема. Пусть $f(r, \phi) \in C^\infty(\bar{D}_1)$, $f(0, 0) \neq 0$, тогда задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение и для него справедливо разложение

$$\begin{aligned} u(r, \phi, \varepsilon) = & -\frac{1}{r^2} \left(f(r, \phi) - \sum_{k=0}^3 f_k(\phi) r^k \right) + \left(f(1, \phi) - \sum_{k=0}^3 f_k(\phi) \right) e^{\frac{1-r}{\sqrt{\varepsilon}}} - \\ & - \frac{f_0(\phi)}{\sqrt{\varepsilon}} \Phi_0(r, \varepsilon) - \frac{f_1(\phi)}{4\sqrt{\varepsilon}} \Phi_1(r, \varepsilon) - f_2(\phi) \Phi_2(r, \varepsilon) - \\ & - 4\sqrt{\varepsilon} f_3(\phi) \Phi_3(r, \varepsilon) + \frac{(1-r)(1-r+\sqrt{\varepsilon})}{2\sqrt{\varepsilon}} \left(f(1, \phi) - \sum_{k=0}^3 f_k(\phi) \right) e^{\frac{1-r}{4\sqrt{\varepsilon}}} + \\ & + \sqrt{\varepsilon} g_{0,0}(\phi) \Phi_1(r, \varepsilon) + 4\sqrt{\varepsilon}^3 g_{1,0}(\phi) \Phi_2(r, \varepsilon) + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, где

$$\Phi_k(r, \varepsilon) = y_2 \left(\frac{r}{4\sqrt{\varepsilon}} \right) \int_0^{r/4\sqrt{\varepsilon}} y_1(s) s^{k-1/2} ds + y_1 \left(\frac{r}{4\sqrt{\varepsilon}} \right) \int_{r/4\sqrt{\varepsilon}}^\infty y_2(s) s^{k-1/2} ds, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

$$\Phi_k(1, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \Phi_k(0, \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Замечание. Аналогично можно построить асимптотическое разложение решения задачи

$$\varepsilon \Delta u - (x^2 + y^2) q(x, y) u = f(x, y), \quad (x, y) \in D = \{x, y \mid x^2 + y^2 < 1\},$$

$$u|_\Gamma = \varphi(x, y), \quad \Gamma = \{x, y \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

где $q(0, 0) > 0$, $q(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $f(x, y) \in C^\infty(\bar{D})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алымкулов К. Аналог метода погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс любого порядка в регулярной особой точке // Дифференциальные уравнения и оптимальное управление: сб. тезисов конф., посвящ. 90-летию со дня рождения академика Е.Ф. Мищенко. М., 2012. С. 12–14.
2. Alymkulov K. Extension of boundary layer function method for singularly perturbed differential equation of Prandtl – Tichonov and Lighthill types // Reports of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries, Almaty, June July, 2009. P. 256–259.
3. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 248 с.

4. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.
5. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12. № 5(77). С. 3–122.
6. Зайцев В., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1995. 560 с.
7. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.

Статья поступила 20.02.2013 г.

Tursunov D. A. ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE SOLUTION OF THE BISINGULARLY PERTURBED ELLIPTIC EQUATION. Using a generalized method of boundary functions, a uniform asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for the bisingularly perturbed second order elliptic equation is constructed.

Keywords: asymptotic expansion, Dirichlet problem, Laplace operator, elliptic equation, bisingular perturbation, turning point.

TURSUNOV Dilmurat Abdillajanovich (Osh State University)

E-mail: dosh2012@mail.ru