

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2021

№ 72

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Рогаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaev (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Зайцев М.Л., Аккерман В.Б. Преобразование уравнения Риккати и других полиномиальных ОДУ к системам линейных ОДУ в явном виде.....	5
Иванов Д.Ю. О совместном применении коллокационного метода граничных элементов и метода Фурье для решения задач теплопроводности в конечных цилиндрах с гладкими направляющими.....	15

МЕХАНИКА

Албагачиев А.Ю., Моисеенко А.М., Зернов Е.В., Лутьянов А.В. Приближенное определение геометрических параметров наплыва при внедрении параболоидного индентора в полупространство.....	39
Воропаева И.Г., Козулин А.А., Миньков Л.Л., Шрагер Э.Р. Нестационарное поведение заряда ТТ бессоплового РДТТ под действием газодинамической нагрузки.....	48
Гамзаев Х.М. Моделирование нестационарного течения несжимаемой жидкости в перфорированном трубопроводе	60
Евсеев Н.С., Жуков И.А. Влияние турбулентных пульсаций на процесс фракционного разделения мелкодисперсных порошков нитридов металлов.....	70
Липанов А.М. Неявный метод характеристик на регулярной сетке (газодинамические задачи).....	80
Маликов З.М., Мадалиев М.Э. Численное исследование закрученного турбулентного течения в канале с внезапным расширением	93
Матвиенко О.В., Данейко О.И., Ковалевская Т.А. Исследование формирования остаточных напряжений после упругопластической деформации стенок трубы из дисперсно-упрочненного алюминиевого сплава в результате воздействия внешнего давления	102
Попов И.П. Символическое представление вынужденных колебаний разветвленных механических систем.....	118
Порязов В.А., Моисеева К.М., Крайнов А.Ю. Численное моделирование горения смесового твердого топлива, содержащего бидисперсный порошок бора.....	131
Прوماхов В.В., Коробенков М.В., Шульц Н.А., Жуков А.С., Олисов А.В., Бахмат В.Р., Дронов Ф.Ю., Мялковский И.С. Моделирование накопления повреждений и разрушения керамических композитов $Al_2O_3 - ZrO_2$, полученных по аддитивным технологиям, при высокоскоростном нагружении	140
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	158

CONTENTS

MATHEMATICS

Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Explicit transformation of the Riccati equation and other polynomial ODEs to systems of linear ODEs	5
Ivanov D.Y. On the joint application of the collocation boundary element method and the fourier method for solving problems of heat conduction in finite cylinders with smooth directrices	15

MECHANICS

Albagachiev A.Yu., Moiseenko A.M., Zernov E.V., Lut'yanov A.V. Approximate determination of geometric parameters of the sag following the embedding of a paraboloid indenter into a half-space	39
Voropaeva I.G., Kozulin A.A., Min'kov L.L., Shrager E.R. Non-stationary behavior of a solid propellant charge for nozzleless solid rocket motors under gas-dynamic load	48
Gamzaev Kh.M. Simulation of an unsteady incompressible fluid flow through a perforated pipeline.....	60
Evseev N.S., Zhukov I.A. Effect of turbulent pulsations on the fractional separation of fine powders of metal nitrides.....	70
Liparov A.M. Application of the implicit method of characteristics on a regular grid for solving the gas-dynamic problems	80
Malikov Z.M., Madaliev M.E. Numerical study of a swirling turbulent flow through a channel with an abrupt expansion	93
Matvienko O.V., Daneyko O.I., Kovalevskaya T.A. A Study of residual stress formation after elastoplastic deformation of pipe walls, made from disperse-hardened aluminum alloy, as a result of external pressure	102
Popov I.P. Symbolic representation of forced oscillations of branched mechanical systems	118
Poryazov V.A., Moiseeva K.M., Krainov A.Yu. Numerical simulation of combustion of the composite solid propellant containing bidispersed boron powder.....	131
Promakhov V.V., Korobnikov M.V., Schultz N.A., Zhukov A.S., Olisov A.V., Bakhmat V.R., Dronov F.Yu., Myalkovskiy I.S. Modeling the accumulation of damages and the failure of ceramic composites $\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{ZrO}_2$, obtained by additive technologies, under high-speed loading	140
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	158

МАТЕМАТИКА

УДК 519.622, 517.912
DOI 10.17223/19988621/72/1

MSC 34A34

М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ
И ДРУГИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОДУ
К СИСТЕМАМ ЛИНЕЙНЫХ ОДУ В ЯВНОМ ВИДЕ

Предложен и продемонстрирован на примере уравнения Риккати способ преобразования полиномиальных систем ОДУ к линейным системам ОДУ. С помощью дополнительного первого интеграла одномерное уравнение Риккати преобразовано к линейной системе из трех ОДУ с переменными коэффициентами, решая которую можно найти решение исходного уравнения Риккати в общем виде или только задачи Коши. Предлагается первый интеграл, с помощью которого можно свести решение полиномиальных систем ОДУ к нахождению решений линейных систем ОДУ. Данная процедура выгодна с точки зрения численных методов решения дифференциальных уравнений

Ключевые слова: *переопределенные системы дифференциальных уравнений, редукция, полиномиальные системы ОДУ, задача Коши, уравнение Риккати, линейные системы ОДУ, символьные вычисления.*

1. Уравнение Риккати является одним из наиболее интересных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка [1]. Одномерные и многомерные уравнения Риккати встречаются в различных областях математики (например, в алгебраической геометрии, в теории конформных отображений, в вариационном исчислении) и физики (например, в квантовой теории поля) [1, 2]. Они также нередко возникают в прикладных математических задачах. Доказано, что общего решения уравнения Риккати в виде квадратур не существует, но, если известно хотя бы одно частное решение, то находится и его общее решение. Уравнение Риккати является простейшим полиномиальным уравнением.

Идея сведения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) к полиномиальной форме восходит к А. Пуанкаре [3, гл. XVI, XVII]. В этой работе он утверждал, что всякое дифференциальное уравнение (при известных условиях) может быть представлено в форме $dx_1/dt = X_1, \dots, dx_n/dt = X_n$, где все X_i – «целые многочлены», и предложил метод получения такого представления исходного уравнения при помощи введения дополнительных переменных. В дальнейшем введение дополнительных переменных применялось различными авторами для сведения конкретных систем ОДУ к полиномиальной форме (см., например, [4, 5]), а в работе [6] были предложены условия, обеспечивающие возможность сведения к полиномиальной форме методом дополнительных переменных (МДП) нелинейных систем ОДУ общего вида. Наконец, в [7] получены алгоритм и про-

грамма (в рамках пакета Mathematica) сведения к полиномиальной форме полных систем и, в частности, систем ОДУ, если они удовлетворяют определенным условиям.

Существуют и развиваются различные методы решения полиномиальных систем дифференциальных уравнений. Например, в теориях управления и моделирования часто используются нормальные, т.е. разрешенные относительно производной, матричные дифференциальные уравнения первого порядка, правая часть которых является либо линейной, либо квадратичной относительно искомой матрицы. Для их решения можно использовать введенные в работе [8] косые ряды. Они позволяют сводить матричные уравнения к аналогичным уравнениям над матрицами более низкого порядка. Изучаются также полиномиальные решения у систем уравнений в частных производных (УрЧП) [9]. Они позволяют находить многие важные частные решения у дифференциальных уравнений.

Цель данной работы заключается в том, чтобы предложить способ преобразования полиномиальных систем ОДУ к линейным системам ОДУ в явном виде. С помощью дополнительного первого интеграла одномерное уравнение Риккати мы преобразовываем к линейной системе из трех ОДУ с переменными коэффициентами, решая которую можно найти решение исходного уравнения Риккати в общем виде или только задачи Коши. Полученную линейную систему ОДУ решать гораздо легче, чем исходное уравнение Риккати. Применяемый метод преобразования является частным случаем метода, который изложен в работе авторов [10]. Для многомерных уравнений Риккати соответствующей линейной системы ОДУ мы не приводим из-за большого числа получаемых линейных уравнений (больше 100). Однако мы приводим первый интеграл, с помощью которого это можно сделать.

В работах [11, 12] предложено сведение систем УрЧП к системам УрЧП меньшей размерности, в частности к системам ОДУ путем их переопределения дополнительными уравнениями связи. Были предложены различные способы переопределения как отдельных систем УрЧП, так и УрЧП общего вида. При редукции некоторых систем УрЧП, в частности унифицированных УрЧП или уравнений Навье – Стокса, на основе метода переопределения, изложенного в работе [13], возникают переопределенные параметрические системы полиномиальных ОДУ. В данной работе мы предлагаем первый интеграл, с помощью которого можно свести решение полиномиальных систем ОДУ к нахождению решений линейных систем ОДУ. В частности, если коэффициенты в этих уравнениях будут постоянные, то решение находится в явном виде.

2. Рассмотрим уравнение Риккати:

$$\frac{dx}{dt} = ax^2 + bx + c, \quad (1)$$

где $a = a(t) \neq 0$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции от $t \in [0, T]$, $T > 0$. Пусть поставлена задача Коши $x|_{t=0} = x_0$. Преобразуем уравнение (1) к автономной системе из двух уравнений:

$$\frac{dx}{d\tau} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t); \quad (2)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad (3)$$

где поставлена задача Коши $x|_{\tau=0} = x_0$, $t|_{\tau=0} = 0$. Рассмотрим функцию от переменных x , t , p_x , p_t :

$$H(x, t, p_x, p_t) = (a(t)x^2 + b(t)x + c(t))p_x + p_t. \quad (4)$$

Уравнения (2) и (3) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x}; \quad (5)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_t}. \quad (6)$$

Определим функции $p_x = p_x(\tau)$, $p_t = p_t(\tau)$ из следующих уравнений:

$$\frac{dp_x}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(2a(t)x + b(t))p_x; \quad (7)$$

$$\frac{dp_t}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial t} = -\left(\frac{da(t)}{dt}x^2 + \frac{db(t)}{dt}x + \frac{dc(t)}{dt}\right)p_x, \quad (8)$$

где поставим задачу Коши $p_x|_{\tau=0} = 1$, $p_t|_{\tau=0} = 0$. Как известно, система уравнений (5) – (8) является гамильтоновой [14]. Функция (4) является ее первым интегралом [14]. Следовательно, с учетом начальных данных имеем

$$(a(t)x^2 + b(t)x + c(t))p_x + p_t = (a^0x_0^2 + b^0x_0 + c^0), \quad (9)$$

где $a(t)|_{\tau=0} = a^0$, $b(t)|_{\tau=0} = b^0$, $c(t)|_{\tau=0} = c^0$. Из уравнения (3) с учетом начальных данных следует $t = \tau$. Тогда систему уравнений (5) – (8) можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dt} = ax^2 + bx + c; \quad (10)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -(2ax + b)p_x; \quad (11)$$

$$\frac{dp_t}{dt} = -\left(\frac{da}{dt}x^2 + \frac{db}{dt}x + \frac{dc}{dt}\right)p_x; \quad (12)$$

$$(ax^2 + bx + c)p_x + p_t = (a^0x_0^2 + b^0x_0 + c^0). \quad (13)$$

К системе (10) – (13) ставится следующая задача Коши: $x|_{t=0} = x_0$, $p_x|_{t=0} = 1$, $p_t|_{t=0} = 0$. Имеем

$$\frac{d(xp_x)}{dt} = \frac{dx}{dt}p_x + x\frac{dp_x}{dt} = -ax^2p_x + cp_x. \quad (14)$$

Обозначим $B = xp_x$, $C = x^2p_x$. Тогда уравнения (11) – (14) можно переписать в виде

$$\frac{dp_x}{dt} = -2aB - bp_x; \quad (15)$$

$$\frac{dp_t}{dt} = -\frac{da}{dt}C - \frac{db}{dt}B - \frac{dc}{dt}p_x; \quad (16)$$

$$aC + bB + cp_x + p_t = (a^0 x_0^2 + b^0 x_0 + c^0); \quad (17)$$

$$\frac{dB}{dt} = -aC + cp_x. \quad (18)$$

Продифференцируем уравнение (17) по t и подставим (15), (16), (18). После преобразований получим, что

$$\frac{dC}{dt} = bC + 2cB. \quad (19)$$

Таким образом, мы имеем систему из трех линейных дифференциальных уравнений (15), (18) и (19) от трех неизвестных p_x , B , C , где старшие их производные выражены через остальные неизвестные. Начальные данные следующие: $p_x|_{t=0} = 1$, $B|_{t=0} = x_0$, $C|_{t=0} = (x_0)^2$. Зная решение (15), (18) и (19) с этими начальными данными, по формуле $x = B/p_x$ находим решение уравнения (1).

Покажем обратное. Пусть нам известно решение (15), (18) и (19) с начальными данными $p_x|_{t=0} = 1$, $B|_{t=0} = x_0$, $C|_{t=0} = (x_0)^2$. Тогда должно выполняться соотношение

$$B^2 = p_x C. \quad (20)$$

При $t = 0$ это равенство выполняется. Продифференцируем (20) по t . Имеем

$$2B \frac{dB}{dt} = \frac{dp_x}{dt} C + p_x \frac{dC}{dt}$$

$$\text{или} \quad 2B(-aC + cp_x) = (-2aB - bp_x)C + p_x(bC + 2cB). \quad (21)$$

Равенство (21) очевидно является тождеством. Таким образом соотношение (20) доказано. Пусть $h = B/p_x$. Тогда из (20) следует, что $C = h^2 p_x$. Имеем также $h|_{t=0} = x_0$. Докажем, что тогда h является решением (1). Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{d(B/p_x)}{dt} = \frac{\frac{dB}{dt} p_x - \frac{dp_x}{dt} B}{(p_x)^2} = \frac{(-aC + cp_x) p_x - (-2aB - bp_x) B}{(p_x)^2} = \\ &= \frac{(-ah^2 p_x + cp_x) p_x - (-2ahp_x - bp_x) hp_x}{(p_x)^2} = ah^2 + bh + c. \end{aligned}$$

Как известно, если $a = a(t) \neq 0$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции от $t \in [0, T]$, $T > 0$, то решение задачи Коши $p_x|_{t=0} = 1$, $B|_{t=0} = x_0$, $C|_{t=0} = (x_0)^2$ для системы (15), (18) и (19) существует глобально на отрезке $[0, T]$ [15]. Если при этом $p_x \neq 0$ для любого $t \in [0, T]$, то $x = B/p_x$ будет являться решением задачи Коши $x|_{t=0} = x_0$ для уравнения (1) также глобально на отрезке $[0, T]$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (22)$$

где $a_n = a_n(t) \neq 0$, $a_i = a_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$, – непрерывно дифференцируемые функции от $t \in [0, T]$, $T > 0$. Уравнение (22) называется обобщенным уравнением Риккати. Пусть поставлена задача Коши $x|_{t=0} = x_0$. Аналогично можно получить, что из уравнения (22) следует, что

$$\frac{dp_x}{dt} = -(na_n x^{n-1} + \dots + a_1) p_x; \quad (23)$$

$$\frac{dp_t}{dt} = -\left(\frac{da_n}{dt} x^n + \dots + \frac{da_1}{dt} x + \frac{da_0}{dt}\right) p_x; \quad (24)$$

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) p_x + p_t = a_n^0 (x_0)^n + a_{n-1}^0 (x_0)^{n-1} + \dots + a_1^0 x_0 + a_0^0, \quad (25)$$

где $a_i(t)|_{t=0} = a_i^0$, $i = 0, 1, \dots, n$, $p_x|_{t=0} = 1$, $p_t|_{t=0} = 0$. Систему уравнений (22) – (25) можно рассматривать как переопределенную. К этой системе можно применить подход, изложенный в работе [10], и также преобразовать ее системе линейных ОДУ. Однако количество полученных уравнений слишком много, чтобы представить в данной работе. Оценка количества этих уравнений из работы [10] следующая: $N_H \geq 54n$. Аналогичным образом можно переопределить систему ОДУ, где в правых частях стоят дробно-рациональные выражения от неизвестных. Переопределенная система ОДУ будет также состоять из дробно-рациональных выражений от неизвестных и к ней можно применить метод из работы [10]. К таким системам можно преобразовать многие системы ОДУ.

Пример 1. Рассмотрим систему из двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} + x \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + t + x + y^2 = 0; \quad (26)$$

$$\frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + tx + y + 1 = 0. \quad (27)$$

Обозначим

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v. \quad (28)$$

Подставим (28) в (26), (27) и продифференцируем полученные выражения по t . Находим, что

$$\frac{du}{dt} + 2xv \frac{dv}{dt} + uv^2 + u + 2yv + 1 = 0; \quad (29)$$

$$v \frac{du}{dt} + u \frac{dv}{dt} + x + tv + v = 0. \quad (30)$$

Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2xv \\ v & u \end{vmatrix} = u - 2xv^2 \neq 0, \quad (31)$$

то уравнения (29), (30) можно записать в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{\Delta_u}{\Delta}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta_v}{\Delta}, \quad (32)$$

где
$$\Delta_u = \begin{vmatrix} -uv^2 - 1 - u - 2yv & 2xv \\ -x - tu - v & u \end{vmatrix}, \quad \Delta_v = \begin{vmatrix} 1 & -uv^2 - 1 - u - 2yv \\ v & -x - tu - v \end{vmatrix}. \quad (33)$$

Введем новую переменную τ по формуле

$$\frac{dt}{d\tau} = 1. \quad (34)$$

Пусть $t|_{\tau=0} = 0$. Тогда систему уравнений (28), (32) можно представить в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = u, \quad \frac{dy}{d\tau} = v, \quad \frac{du}{d\tau} = \frac{\Delta_u}{\Delta}, \quad \frac{dv}{d\tau} = \frac{\Delta_v}{\Delta}. \quad (35)$$

Таким образом, вместо сложной системы уравнений (26), (27) мы имеем систему уравнений (34), (35), где в правых частях стоят дробно-рациональные выражения с постоянными коэффициентами и которую можно еще переопределить. Методом из работы [10] ее можно свести к решению систем линейных ОДУ с постоянными коэффициентами.

Пример 2. Рассмотрим произвольную систему из n уравнений от n неизвестных функций $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ вида

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = 0, \quad (36)$$

где $\mathbf{G}(\mathbf{u}) = (G_1(\mathbf{u}), \dots, G_n(\mathbf{u}))$ – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов. Будем искать функцию $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{u}_0, t)$, удовлетворяющую системе уравнений

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{G}(\mathbf{u}_0)(1-t). \quad (37)$$

Пусть
$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0. \quad (38)$$

При $t=1$ числа $\mathbf{u}|_{t=1}$ будут решениями системы (36). Продифференцируем уравнения (37) по переменной t :

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{G}(\mathbf{u}_0). \quad (39)$$

Положим, что определитель матрицы в (39) отличен от нуля. Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right)^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{u}_0). \quad (40)$$

Таким образом, при фиксированном $\mathbf{u}_0$ мы имеем систему ОДУ (40) по переменной t с задачей Коши (38). Если система уравнений (36) полиномиальная, то система ОДУ (40) будет состоять из дробно-рациональных выражений от неизвестных.

Пример 3. Рассмотрим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a(t) + \cos(b(t)x)}{x^3 + c(t)}, \quad (41)$$

где $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функ-

ции от $t \in [0, T]$, $T > 0$. Обозначим

$$x^3 + c(t) = \frac{1}{y}, \quad u = \cos(b(t)x), \quad (42)$$

тогда
$$\frac{dx}{dt} = a(t)y + uy. \quad (43)$$

Продифференцируем по t уравнения (42). Имеем

$$3x^2 \frac{dx}{dt} + \frac{dc(t)}{dt} = -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dt} = -y^2 \left(3x^2 \frac{dx}{dt} + \frac{dc(t)}{dt} \right).$$

Учитывая (43), получаем

$$\frac{dy}{dt} = -3a(t)y^3x^2 - 3uy^3x^2 - \frac{dc(t)}{dt}y^2. \quad (44)$$

Имеем
$$\frac{du}{dt} = -\sin(b(t)x) \left(\frac{db(t)}{dt}x + b(t)\frac{dx}{dt} \right)$$

или
$$\frac{du}{dt} = -\sin(b(t)x) \left(\frac{db(t)}{dt}x + b(t)a(t)y + b(t)uy \right). \quad (45)$$

Возведем обе части последнего уравнения в (45) в квадрат. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 &= \sin^2(b(t)x) \left(\frac{db(t)}{dt}x + b(t)a(t)y + b(t)uy \right)^2 = \\ &= (1-u^2) \left(\frac{db(t)}{dt}x + b(t)a(t)y + b(t)uy \right)^2. \end{aligned} \quad (46)$$

Обозначим
$$\frac{du}{dt} = w, \quad w = \frac{1}{v}. \quad (47)$$

С учетом обозначений (47) продифференцируем уравнение (46) по t . Имеем после преобразований,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= -u \left(\frac{db(t)}{dt}x + b(t)a(t)y + b(t)uy \right)^2 + \\ &+ v(1-u^2) \left(\frac{db(t)}{dt}x + b(t)a(t)y + b(t)uy \right) G, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$G = \left(\frac{d^2b(t)}{dt^2}x + \frac{db(t)dx}{dt} + \frac{d(b(t)a(t))}{dt}y + (b(t)a(t) + b(t)u)\frac{dy}{dt} + \frac{db(t)}{dt}uy + b(t)wy \right). \quad (49)$$

Имеем также из (47)

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dt} \\ \text{или} \quad \frac{dv}{dt} &= -v^2 \frac{dw}{dt}. \end{aligned} \quad (50)$$

Таким образом, если подставить (43), (44) в (49), (50), то вместо сложного уравнения (41) мы имеем систему из 5-ти уравнений (43), (44), (47), (48) и (50) и 5-ти неизвестных x , y , u , w и v , которая является полиномиальной. Методом из работы [10] ее можно свести к решению систем линейных ОДУ с переменными коэффициентами.

3. В данной статье мы предложили и продемонстрировали на примере уравнения Риккати способ преобразования полиномиальных систем ОДУ к линейным системам ОДУ. Этот результат может быть интересен с теоретической точки зрения. Рассмотрим полиномиальные системы ОДУ с постоянными коэффициентами. Решение таких нелинейных систем с помощью нашего метода может быть представлено в виде нелинейной функции от суммы очень большого, но конечно-го количества нарастающих и затухающих колебаний во времени с разными частотами, которые теоретически можно вычислить [15]. Например, для уравнения Риккати это выражение $h = B/p_x$, где B и p_x – колебательные решения из системы уравнений (15), (18) и (19), так как эта система является системой линейных ОДУ с постоянными коэффициентами. Амплитуды этих колебаний зависят от начальных данных нелинейно. Мы можем также вычислить, в какой момент решения будет обращаться в бесконечность, т.е. область существования решения, например, задачи Коши.

С точки зрения численных методов сведение к линейным системам ОДУ также выгодно. Для линейных систем ОДУ созданы мощные методы решения и программные пакеты. Количество линейных уравнений, которых необходимо решить, быстро растет с увеличением количества уравнений в исходной системе полиномиальных уравнений [10]. Однако решать численно напрямую нелинейные ОДУ гораздо труднее из-за вычислительных особенностей, например неустойчивостей, точек бифуркации и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. Уравнения Риккати. М.: Физматлит, 2001. 319 с.
2. Зеликин М.И. Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении. М.: Факториал Пресс, 1998. 352 с.
3. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями: пер. с франц. М.: ОГИЗ, 1947. 392 с.
4. Мерман Г.А. О представлении общего решения задачи трех тел сходящимися рядами // Бюлл. ИТА АН СССР. Наука. 1958. Т. 6. № 10. С. 713–720.
5. Кривов А.В., Чернышева Н.А. Интегрирование уравнений движения низкого ИСЗ методом рядов Тейлора // Кинематика и физика небесных тел. 1990. Т.6. № 2. С. 13–16.
6. Бабаджанянц Л.К. Продолжаемость и представление решений в задачах небесной механики // Труды ИТА АН СССР. Наука. 1978. Вып. XII. С. 3–45.
7. Бабаджанянц Л.К., Брэгман К.М. Алгоритм метода дополнительных переменных // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер.10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2012. Вып. 2. С. 3–12.
8. Деревенский В.П. Квадратное уравнение над матричными косыми рядами // Известия вузов. Математика. 2014. № 1. С. 17–30.
9. Карачик В.В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2011. Вып. 4. № 10 (227). С. 4–17.
10. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. On the identification of solutions to Riccati equation and the other polynomial systems of ODEs // preprint, Research Gate, 2020. DOI: 10.13140/RG.2.2.26980.60807.

11. Зайцев М.Л., Аккерман В.Б. Еще один способ нахождения частных решений уравнений математической физики // Вестник ВолГУ. Серия 1, Математика. Физика. 2016. № 6(37). С. 119–127. DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.6.11.
12. Зайцев М.Л., Аккерман В.Б. Редукция переопределенных систем дифференциальных уравнений математической физики // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2017. Т. 20. № 4. С. 43–67. DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2017.4.5.
13. Зайцев М.Л., Аккерман В.Б. Алгоритм нахождения решений переопределенных систем дифференциальных уравнений в явном виде // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2020. Т. 12. № 4. С. 5–18. DOI: 10.14529/mmph200401.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: учеб. пособие в 10 т. Т. I. Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.
15. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб.: Лань, 2003. 448 с.

Статья поступила 11.02.2021

M.L. Zaytsev, V.B. Akkerman (2021) EXPLICIT TRANSFORMATION OF THE RICCATI EQUATION AND OTHER POLYNOMIAL ODES TO SYSTEMS OF LINEAR ODES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 5–14

DOI 10.17223/19988621/72/1

Keywords: overdetermined systems of differential equations; reduction; polynomial systems of ODE; Cauchy problem; Riccati equation; linear ODE systems; symbolic calculations.

The purpose of this work is to propose and demonstrate a way to explicitly transform polynomial ODE systems to linear ODE systems. With the help of an additional first integral, the one-dimensional Riccati equation is transformed to a linear system of three ODEs with variable coefficients. Solving the system, we can find a solution to the original Riccati equation in the general form or only to the Cauchy problem. The Riccati equation is one of the most interesting nonlinear first order differential equations. It is proved that there is no general solution of the Riccati equation in the form of quadratures; however, if at least one particular solution is known, then its general solution is also found. Thus, it is enough only to find a particular solution of the linear system of ODEs. The applied transformation method is a special case of the method described in our work [Zaytsev M. L., Akkerman V. B. (2020) On the identification of solutions to Riccati equation and the other polynomial systems of ODEs // preprint, Research Gate. DOI: 10.13140 / RG.2.2.26980.60807]. This method uses algebraic transformations and transition to new unknowns consisting of products of the original unknowns. The number of new unknowns becomes less than the number of equations. For the multidimensional Riccati equations, we do not present the corresponding linear system of ODEs because of the large number of linear equations obtained (more than 100). However, we present the first integral with which this can be done.

In this paper, we also propose a method for finding the first integral, which can be used to reduce a search for the solution of any polynomial systems of ODEs to a search of solutions to linear systems of ODEs. In particular, if the coefficients in these equations are constant, then the solution is found explicitly.

AMS Mathematical Subject Classification: 34A34

Maxim L. Zaytsev (Assistant to an individual entrepreneur, Moscow, Russia). E-mail: mlzaytsev@mail.ru

Vyacheslav B. Akkerman (Prof., Department of Mechanical and Aerospace Engineering, West Virginia University, Morgantown, USA). E-mail: Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu

REFERENCES

1. Egorov A. I. (2001) *Uravneniya Rikkati* [Riccati equations]. Moscow: Fizmatlit.
2. Zelikin M. I. (1998) *Odnorodnyye prostranstva i uravneniye Rikkati v variatsionnom ischislenii* [Homogeneous spaces and the Riccati equation in the calculus of variations]. Moscow: Fartorial Press.
3. Poincaré A. (1947) O krivyykh, opredelyayemykh differentsial'nymi uravneniyami [On curves determined by differential equations]. Moscow: OGIZ.
4. Merman G.A. (1958) O predstavlenii obshchego resheniya zadachi trekh tel skhodyashchimisya ryadami [On the representation of the general solution of the three-body problem by converging series]. *Byulleten' ITA AN SSSR – Bulletin of the Institute of Theoretical Astronomy, Academy of Sciences of the USSR*. 6(10). pp. 713–720.
5. Krivov A.V., Chernysheva N.A. (1990) Integrirovaniye uravneniy dvizheniya nizkogo ISZ metodom ryadov Teylora [Integration of the equations of motion of a low satellite by the Taylor series method]. *Kinematika i fizika nebesnykh tel – Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 6(2). pp. 13–16.
6. Babadzhanyants L.K. (1978) Prodolzhaemost' i predstavleniye resheniy v zadachakh nebesnoy mekhaniki [Continuity and representation of solutions in problems of celestial mechanics]. *Trudy ITA AN SSSR. Nauka*. XII. pp. 3–45.
7. Babadzhanyants L.K., Bregman K.M. (2012) Algoritm metoda dopolnitel'nykh peremennykh [Algorithm of the method of additional variables]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10. Prikladnaya matematika. Informatika. Protssesy upravleniya – Vestnik of St. Petersburg University. Serie 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2. pp. 3–12.
8. Derevenskii V.P. (2014) Quadratic equations over matrix skew series. *Russian Mathematics*. 58(1). pp. 14–26.
9. Karachik V.V. (2011) Polinomial'nye resheniya differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh s postoyannymi koeffitsientami [Polynomial solutions of partial differential equations with constant coefficients]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Fizika – Bulletin of the South Ural State University. Mathematics. Mechanics. Physics*. 4(10). pp. 4–17.
10. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. (2020) On the identification of solutions to Riccati equation and the other polynomial systems of ODEs // preprint, Research Gate. DOI: 10.13140/RG.2.2.26980.60807.
11. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. (2016) Eshche odin sposob nakhozheniya chastnykh resheniy uravneniy matematicheskoy fiziki [Another method for finding particular solutions of equations of mathematical physics]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Fizika – Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics*. 37(6). pp. 119–127. DOI: <https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.11>.
12. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. (2017) Reduktsiya pereopredelennykh sistem differentsial'nykh uravneniy matematicheskoy fiziki [Reduction of overdetermined differential equations of mathematical physics]. *Matematicheskaya fizika i komp'yuternoye modelirovaniye – Mathematical Physics and Computer Simulation*. 20(4). pp. 43–67. DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2017.4.5.
13. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. (2020) Algoritm nakhozheniya resheniy pereopredelennykh sistem differentsial'nykh uravneniy v yavnom vide [Algorithm for finding explicit solutions of overdetermined systems of differential equations]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Fizika – Bulletin of the South Ural State University. Mathematics. Mechanics. Physics*. 12(4). pp. 5–18. DOI: 10.14529/mmph200401.
14. Landau L.D., Lifshits. Ye.M. (1988) *Teoreticheskaya fizika. I. Mekhanika* [Course of theoretical Physics, Vol. 1: Mechanics]. Moscow: Nauka.
15. Fedoryuk M. V. (2003) *Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya* [Ordinary Differential Equations]. St. Petersburg: Lan' Publ.

Received: February 11, 2021

УДК 519.642.4
DOI 10.17223/19988621/72/2

MSC: 65J10, 65N38, 80M15

Д.Ю. Иванов

О СОВМЕСТНОМ ПРИМЕНЕНИИ КОЛЛОКАЦИОННОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И МЕТОДА ФУРЬЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КОНЕЧНЫХ ЦИЛИНДРАХ С ГЛАДКИМИ НАПРАВЛЯЮЩИМИ

Исследуется решение задач теплопроводности в прямом цилиндре с нулевыми граничными условиями на основаниях и нулевым начальным условием с помощью совместного использования коллокационного метода граничных элементов и метода Фурье. Благодаря умеренному сгущению сетки, компенсирующему падение точности при больших собственных значениях дифференциального оператора ∂_{yy}^2 с соответствующими нулевыми граничными условиями, получены приближенные решения, устойчиво сходящиеся к точным с кубической скоростью равномерно относительно длины образующей и равномерно относительно множеств граничных функций, ограниченных по норме функций с низкой гладкостью по переменной y . Теоретические выводы подтверждены результатами численного решения задачи в круглом цилиндре.

Ключевые слова: нестационарная теплопроводность, граничные интегральные уравнения, граничный элемент, коллокация, равномерная сходимость, устойчивость, некруглый цилиндр, метод Фурье, диссипация.

В настоящей работе рассматриваются начально-краевые задачи теплопроводности (НКЗТ) в конечных (по высоте) однородных прямых цилиндрах (КОПЦ) $\Omega_{\pm} \times I_Y$ ($\Omega_{\pm}$ – открытая двумерная ограниченная односвязная область с границей $\partial\Omega \in C^5$, $\Omega_{-} \equiv \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega_{+}}$ ($\mathbf{R} \equiv (-\infty, +\infty)$); $I_Y \equiv [0, Y]$ – высота цилиндра) на временном промежутке $I_T \equiv [0, T]$. Начальные и граничные условия на основаниях цилиндра нулевые, а на боковой поверхности граничные условия задаются функцией $w(x_1, x_2, y, t)$ ($(x_1, x_2) \in \partial\Omega$, $y \in I_Y$, $t \in I_T$). Исследуется приближенное решение НКЗТ в КОПЦ, основанное на совместном применении коллокационного метода граничных элементов (КМГЭ) [1, с. 21] и метода Фурье. Соответствующие точные решения $u(x_1, x_2, y, t)$ имеют вид потенциала с неизвестной функцией плотности, которая находится из граничного интегрального уравнения (ГИУ) второго рода, причем интегральные операторы потенциала и ГИУ выражаются через C_0 -полугруппы операторов $U_T(\tau_t)$ и $U_Y(\tau_y)$, действующих по переменным t и y соответственно.

Вопросы аппроксимации, сходимости и устойчивости приближенных решений задач теплопроводности, полученных на основе КМГЭ и ГИУ второго рода, исследуются в работах [2–5]. Рассматриваются двумерные задачи, соответствующие НКЗТ в бесконечно длинных однородных цилиндрах с однородными вдоль образующих цилиндра граничными условиями [2, 4], общие трехмерные задачи [3], а

также n -мерные задачи [5], причем в работе [3] исследуются задачи с кусочно-гладкими по Ляпунову граничными поверхностями, имеющими края и углы. Различные модели на основе двумерных задач теплопроводности и их решение с помощью КМГЭ рассмотрены в работах [6–11], причем в работе [10] решается задача для уравнения теплопроводности с диссипативным членом, определяющая частные решения НКЗТ в КОПЦ. В работе [12] на основе КМГЭ решается внешняя по отношению к бесконечно длинному цилиндру НКЗТ с неоднородными вдоль образующих цилиндра граничными условиями. В работе [13] рассматривается решение на основе КМГЭ задачи теплопроводности в конечном круглом цилиндре, где наряду с преобразованием Лапласа по временной переменной используется разложение в ряд Фурье граничных функций. Для решения задач теплопроводности в конечных круглых цилиндрах использовались и другие приближенные методы: метод конечных элементов [14, 15] и метод конечных разностей [16]. Разностные методы используются и для решения задач теплопроводности в конечных некруглых цилиндрах [17]. Однако автору не удалось найти примеры совместного использования КМГЭ и метода Фурье для решения задач теплопроводности в конечных некруглых цилиндрах.

В работах [18–20] на основе КМГЭ получены решения НКЗТ для уравнения с диссипативным членом:

$$\partial_{x_1 x_1}^2 u + \partial_{x_2 x_2}^2 u = \partial_t u + k^2 u \quad (u = u(x_1, x_2, t), (x_1, x_2) \in \Omega_{\pm}, t \in I_T, k > 0). \quad (1)$$

Решения НКЗТ в КОПЦ разлагаются в ряд Фурье по собственным функциям генератора C_0 -полугруппы $U_Y(\tau_y)$, и коэффициентами такого ряда являются решения НКЗТ для уравнения (1). С уменьшением гладкости граничных функций w по переменной y возрастает вес решений НКЗТ для уравнений (1), соответствующих большим значениям k , и точность решения НКЗТ в КОПЦ снижается. Для сохранения точности на равномерной сетке требуется увеличение числа шагов дискретизации функций $\exp(-k^2 \tau_y)$ – компонент C_0 -полугруппы $U_Y(\tau_y)$ – по параметру τ_y и граничной функции w по переменной y пропорционально k^2 и j соответственно (j – некоторое усредненное значение величины Yk , зависящее от w). Функции $\exp(-k^2 \tau_y)$ при больших k являются быстро меняющимися вблизи $\tau_y = 0$. Поэтому измельчать сетку при их интерполяции можно только вблизи $\tau_y = 0$ на отрезке, длина которого убывает пропорционально $1/k$, а в остальной области значений τ_y сетку оставлять прежней. Тогда количество шагов по τ_y при не очень больших значениях k возрастает лишь пропорционально k , и точность сохраняется, если число шагов по y также возрастает пропорционально j . При этом шаги дискретизации по остальным переменным остаются неизменными.

Благодаря такому подходу, полученные здесь на основе кусочно-квадратичной интерполяции (ККИ) аппроксимации решений НКЗТ в КОПЦ устойчиво сходятся в норме $L_2(I_Y \times I_T)$ к точным решениям с кубической скоростью равномерно относительно множеств функций w , ограниченных по норме функций с низкой гладкостью по переменной y , равномерно по длине образующей Y и равномерно в области $\Omega_{\pm}$. Последнее также связано с использованием здесь ККИ вдоль кри-

вой $\partial\Omega$ по переменной $\rho \equiv \sqrt{r^2 - d^2}$, описанной в работах [19, 20] применительно к задачам для уравнения (1) и осуществляемой при достаточно малых значениях r (r и d – расстояния от наблюдаемой точки области $\Omega_{\pm}$ до текущей точки интегрирования вдоль $\partial\Omega$ и до границы $\partial\Omega$ соответственно). Доказано также, что если число шагов дискретизации по переменной τ_y ограничено относительно роста k , то равномерная кубическая сходимость в норме $L_2(I_Y \times I_T)$ во всей области $\Omega_{\pm}$ существует на множествах функций w , ограниченных по норме функций с достаточно высокой гладкостью по y , а в любой замкнутой подобласти области $\Omega_{\pm}$ имеет место такая же равномерная сходимость на множествах функций w , ограниченных по норме функций с низкой гладкостью по y , к тому же равномерная по длине образующей Y . Приведен пример, показывающий, что если число шагов по τ_y ограничено относительно k , то скорость сходимости некоторых приближенных операторов, возникающих при вычислении потенциала, уменьшается вблизи границы области $\Omega_{\pm}$ на функциях с низкой гладкостью по y .

Приведены результаты численного решения такой задачи в круглом цилиндре, подтверждающие теоретические выводы. Зависимость от y граничных функций w здесь задается собственными функциями генератора C_0 -полугруппы $U_Y(\tau)$, варьируемыми в достаточно большом диапазоне значений k .

Ранее в работах автора [21, 22] рассматривались решения НКЗТ в КОПЦ, где осуществлялось вычисление приближенных операторов в алгебре полиномов, образованных степенями оператора $U(h_{\tau}) \equiv U_T(h_{\tau})\tilde{U}_Y(h_{\tau})$ (h_{τ} – шаг дискретизации параметра τ_t , $\tilde{U}_Y(h_{\tau})$ – аппроксимация оператора $U_Y(h_{\tau})$). В настоящей работе приближенные операторы вычисляются в алгебре полиномов, образованных степенями оператора $U_T(h_{\tau})$.

Предварительные замечания

Далее считаем, что граница $\partial\Omega$ является кривой класса гладкости C^2 , если не оговорено особо. НКЗТ в КОПЦ с неоднородными граничными условиями второго и третьего рода на боковой поверхности цилиндра, с нулевыми граничными условиями первого, второго и третьего рода на основаниях цилиндра и нулевым начальным условием могут рассматриваться как двумерные векторные краевые задачи:

$$\Delta_2 \mathbf{u}_{\pm} = \mathbf{B} \mathbf{u}_{\pm} \quad (\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2) \in \Omega_{\pm}), \quad \partial_{n(\mathbf{x})} \mathbf{u}_{\pm} - \eta \mathbf{u}_{\pm} = \mathbf{w} \quad (\mathbf{x} \in \partial\Omega). \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{u}_{\pm}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ – векторные функции со значениями в гильбертовом пространстве $L_2 \equiv L_2(I_T \times I_Y)$, заданные на множествах $\Omega_{\pm}$ и $\partial\Omega$ соответственно (все пространства функций здесь комплексные); $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ – нормаль к кривой $\partial\Omega$, проходящая через точку $\mathbf{x}$ и направленная внутрь области Ω_{+} ; $\Delta_2 \equiv \partial_{x_1 x_1}^2 + \partial_{x_2 x_2}^2$ (непрерывность и дифференцируемость векторных функций предполагается здесь в норме пространства их значений, в данном случае – L_2); $\eta \geq 0$ (коэффициент теплообмена) – постоянная; $\mathbf{B}$ – оператор в пространстве L_2 , заданный при по-

мощи дифференциального выражения $(Bf)(t, y) \equiv (\partial_t - \partial_{yy}^2 + p)f(t, y)$ ($p \in \mathbf{R}$) на множестве $D(B)$ классов функций $f \in L_2$, эквивалентных функциям $f(t, y)$, абсолютно непрерывным по $t \in I_T$ при $y \in I_Y$, абсолютно непрерывно дифференцируемым по $y \in I_Y$ при $t \in I_T$ и удовлетворяющим условиям: $f|_{t=0} = 0$ при $y \in I_Y$, $(\partial_y f - h_0 f)|_{y=0} = (\partial_y f + h_Y f)|_{y=Y} = 0$ при $t \in I_T$ ($0 \leq h_0, h_Y \leq \infty$) и $\partial_{yy}^2 f \in L_2$.

Зададим операторы B'_Y и B_Y в пространстве $L_2(I_Y)$: $(B'_Y f)(y) \equiv -f^{(2)}(y)$, $(B_Y f)(y) \equiv -f^{(2)}(y) + pf(y)$, определенные на множестве $D(B_Y) = D(B'_Y)$ абсолютно непрерывно дифференцируемых при (почти всех, далее опускаем) $y \in I_Y$ функций $f(y) \in L_2(I_Y)$, $f^{(1)}(0) - h_0 f(0) = f^{(1)}(Y) + h_Y f(Y) = 0$. Операторы B'_Y и B_Y самосопряжены и имеют чисто точечные спектры $\{\sigma'_j\}$ и $\{\sigma_j\}$, состоящие из изолированных собственных значений кратности 1: $0 \leq \sigma'_0 < \sigma'_1 < \dots$, $\sigma_j = \sigma'_j + p$. Полагаем, что постоянная $p > -\sigma'_0$, тогда $\sigma_0 > 0$, и с помощью рядов Фурье, сходящихся в норме пространства $L_2(I_Y)$, могут быть определены ограниченные отрицательные и неограниченные положительные степени оператора B_Y :

$$B_Y^{-\alpha} f = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{-\alpha} P_j f \quad (f \in L_2(I_Y)), \quad B_Y^{\alpha} f = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{\alpha} P_j f \quad (f \in L_2(I_Y));$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{\alpha} \|P_j f\|_{L_2(I_Y)}^2 < \infty, \quad \alpha > 0. \quad (3)$$

Здесь P_j – проекторы: $P_j f \equiv (f, \Psi_j)_{L_2(I_Y)} \Psi_j$; Ψ_j ($j \in \mathbf{Z}_+ \equiv \{0, 1, \dots\}$) – нормированные собственные функции оператора B_Y . Заметим, что $\Psi_j(y) = \alpha_j \sin(\mu_j y + \beta_j)$, где $0 < \alpha_j \leq \sqrt{2/Y}$, $0 \leq \beta_j \leq \pi/2$; $\mu_j \equiv \sqrt{\sigma'_j} \sim \pi j/Y$ при $j \rightarrow \infty$ [23, с. 227]. Оператор B_Y является генератором C_0 -полугруппы $U_Y(\tau)$ ($\|U_Y(\tau)\| \leq \exp(-\sigma_0 \tau)$; $B_Y f \equiv \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau^{-1}(f - U_Y(\tau)f)$, $f \in D(B_Y)$, допускающей представление с помощью рядов Фурье:

$$U_Y(\tau)f = \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-\sigma_j \tau) P_j f \quad (f \in L_2(I_Y)). \quad (4)$$

Оператор B_T в пространстве $L_2(I_T)$: $(B_T f)(t) \equiv f^{(1)}(t)$, определенный на множестве $D(B_T)$ абсолютно непрерывных при $t \in I_T$ функций $f(t) \in L_2(I_T)$, $f(0) = 0$, является генератором C_0 -полугруппы $U_T(\tau)$: $(U_T(\tau)f)(t) = f(t - \tau)$ при $\tau \leq t$, $(U_T(\tau)f)(t) = 0$ при $\tau > t$ ($\|U_T(\tau)\| = 1$ при $\tau \in [0, T]$; $U_T(\tau) = \mathbf{O}$ при $\tau \geq T$, где $\mathbf{O}$ – нулевой оператор). Оператор B_T ограниченно обратим: $(B_T^{-1} f)(t) = \int_0^t f(t') dt'$ ($t \in I_T$, $f \in L_2(I_T)$).

Любые замкнутые операторы A_T и A_Y , всюду плотно определенные в пространствах $L_2(I_T)$ и $L_2(I_Y)$ соответственно, могут быть определены в пространстве L_2 с помощью поточечных равенств

$$(A_T f_1)(y) = A_T f_1(y) \quad (y \in I_Y), \quad (A_Y f_2)(t) = A_Y f_2(t) \quad (t \in I_T)$$

на всех функциях $f_1 \in L_2$ и $f_2 \in L_2$, таких, что $f_1(y) \in D(A_T)$, $f_2(t) \in D(A_Y)$ при фиксированных $y \in I_Y$, $t \in I_T$, и $A_T f_1 \in L_2$, $A_Y f_2 \in L_2$, причем если операторы A_T и A_Y ограничены в $L_2(I_T)$ и $L_2(I_Y)$, то в пространстве L_2 они также всюду определены и имеют ту же норму (теорема 2 [24]). В этом смысле оператор $B = B_T + B_Y$ определен на множестве $D(B_T) \cap D(B_Y)$ и является генератором C_0 -полугруппы $U(\tau) \equiv U_T(\tau)U_Y(\tau)$ ($\|U(\tau)\| \leq \exp(-\sigma_0\tau)$) (следствие 3 [24]), а операторы B_T и B_Y в пространстве L_2 являются генераторами соответствующих C_0 -полугрупп $U_T(\tau)$ и $U_Y(\tau)$ (следствие 2 [24]). Операторы B_Y^α и $U_Y(\tau)$ могут быть представлены рядами Фурье вида (3) и (4), сходящимися в норме L_2 , где $f \in L_2$, $(f, \Psi_j)_{L_2(I_Y)} \in L_2(I_T)$ $((f, \Psi_j)_{L_2(I_Y)}(t) \equiv \int_{I_Y} f(t, y) dy)$ и выполняется «равенство Парсеваля»: $\|f\|_{L_2}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|(f, \Psi_j)_{L_2(I_Y)}\|_{L_2(I_T)}^2$ [25, с. 137].

Пусть $C(\Omega')$ и $C^k(\Omega')$ – пространства непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых на некотором множестве $\Omega' \subset \mathbf{R}^2$ векторных функций со значениями в L_2 . Задачи (2) однозначно разрешимы в классе функций $C(\overline{\Omega_\pm}) \cap C^2(\Omega_\pm)$ при любых $w \in C(\partial\Omega)$ [26, 27]. Решения имеют вид векторных потенциалов:

$$u_\pm(x) = G_0(x)v_\pm \quad (x \in \Omega_\pm), \quad (5a)$$

где функции плотности $v_\pm \in C(\partial\Omega)$ находятся из соответствующих ГИУ (I – тождественный оператор):

$$(G_\pm v_\pm)(x) = w(x) \quad (x \in \partial\Omega), \quad G_\pm \equiv \mp 2^{-1}I + G_2 - \eta G_0, \quad (5b)$$

$$G_i(x)f = (G_i f)(x) \equiv \int_{\partial\Omega} K_i(x, x') f(x') ds' \quad (f \in C(\partial\Omega), i = 0, 2),$$

$K_i(x, x')$ ($x \neq x'$) – ограниченные операторы в пространстве L_2 , определяемые равенствами:

$$K_i(x, x')f \equiv \int_{I_T} g_i(x, x', \tau) U(\tau) f d\tau \quad (f \in L_2, i = 0, 2),$$

$$g_0(x, x', \tau) \equiv a_0(r, \tau), \quad g_2(x, x', \tau) \equiv a_2(r, \tau) b_2(x, x'),$$

$$a_0(r, \tau) \equiv a(r, \tau), \quad a_2(r, \tau) \equiv -r \partial_r a(r, \tau), \quad b_2(x, x') \equiv \partial_{n(x)} \ln r^{-1}.$$

Здесь $a(r, \tau) \equiv (4\pi\tau)^{-1} \exp[-r^2/(4\tau)]$, $r \equiv |x - x'|$; дифференцирование $\partial_{n(x)}$ осуществляется по точке x .

Зададим параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = \tilde{x}_1(s)$, $x_2 = \tilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки и заканчивающейся в точке $\tilde{\mathbf{x}}(s) \equiv (\tilde{x}_1(s), \tilde{x}_2(s))$, причем $s > 0$, если дуга откладывается по часовой стрелке, и $s < 0$, если против. Функции $\tilde{x}_1(s)$, $\tilde{x}_2(s)$, периодические с периодом $2S$ (S – половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимнооднозначное отображение множества $I_S \equiv [-S, S]$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^k$, если существуют непрерывные на замкнутом множестве $\overline{I_S}$ производные $\tilde{x}_i^{(l)}(s)$ ($i = 1, 2$, $l = \overline{0, k}$), причем $\tilde{x}_i^{(l)}(-S+0) = \tilde{x}_i^{(l)}(S-0)$. Обозначим через s, s' значения параметра s , соответствующие точкам $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \partial\Omega$.

Условимся ограниченный оператор A , отображающий банахово пространство B в банахово пространство C , обозначать как $A [B \rightarrow C]$, а если $C = B$, то $A [B]$.

Зададим операторы $\tilde{B}'_Y \equiv Y^2 B'_Y$ ($D(\tilde{B}'_Y) = D(B'_Y)$) и $\tilde{B}_Y$: $\tilde{B}_Y f = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\sigma}_j P_j f$ ($\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\sigma}_j^2 \left| (f, \Psi_j)_{L_2(I_Y)} \right|^2 < \infty$, $\tilde{\sigma}_j \equiv \pi^2 (j+1)^2$) в соответствующих пространствах $L_2(I_Y)$ ($Y > 0$). Так как $\tilde{\mu}_j \equiv Y \mu_j \sim \pi j$ при $j \rightarrow \infty$, то $D(\tilde{B}_Y) = D(\tilde{B}'_Y)$. Через $H_Y^{n/2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$) обозначим гильбертовы пространства функций $f \in L_2(I_Y)$: $f \in D(\tilde{B}_Y^{n/2})$, с нормами $\|f\|_{H_Y^{n/2}} \equiv \left[\sum_{m=0}^n \|\tilde{B}_Y^{m/2} f\|_{L_2(I_Y)}^2 \right]^{1/2}$. Пространства $H_Y^{n/2}$ при фиксированном $n \in \mathbf{Z}_+$ и всех $Y > 0$ изоморфны между собой и эквивалентные элементы в них имеют вид $f = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \tilde{\sigma}_j^{-n/2} \Psi_j$ при одинаковых для всех $Y > 0$ числах $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ ($\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|^2 < \infty$). В силу неравенств $\tilde{\mu}_j \leq \pi(j+1)$ операторы $(\tilde{B}'_Y)^{n/2} [H_Y^{n/2} \rightarrow L_2(I_Y)]$ ограничены: $\|(\tilde{B}'_Y)^{n/2}\| \leq 1$, равномерно по $Y > 0$. В отличие от операторов $(\tilde{B}'_Y)^{n/2}$ операторы $(B'_Y)^{n/2} [H_Y^{n/2} \rightarrow L_2(I_Y)]$ неограниченно возрастают, например, на функциях $(j+1)^{-n} \Psi_j$ при $Y \rightarrow 0$; равномерно же ограничены они по $Y > 0$ на множествах $\{f \in H_Y^{n/2}: \|f\|_{H_Y^{n/2}} \leq Y^n R, R > 0\}$. Зададим также операторы $\tilde{B}_Y \equiv \tilde{B}'_Y + pY^2 I$ ($D(\tilde{B}_Y) = D(\tilde{B}'_Y)$). Операторы $(\tilde{B}_Y)^{n/2} [H_Y^{n/2} \rightarrow L_2(I_Y)]$ равномерно ограничены по $Y \in (0, Y_0]$ при любом $Y_0 > 0$: $\|(\tilde{B}_Y)^{n/2}\| \leq (1 + pY_0^2)^{n/2}$.

Пусть $k, i, j, m, n \in \mathbf{Z}_+$. Введем в рассмотрение банаховы пространства $C^k(\partial\Omega)$ функций $f \in C(\partial\Omega)$, имеющих непрерывные на множестве $\partial\Omega$ производные $f^{(l)}$: $f^{(l)}(s) \equiv d^l f(\tilde{\mathbf{x}}(s))/ds^l$ ($s \in \overline{I_S}$, $l = \overline{0, k}$), с нормами $\|f\|_{C^k(\partial\Omega)} \equiv \max_{l=0, k} \sup_{s \in \overline{I_S}} \|f^{(l)}(s)\|_{L_2}$. Обозначим через $H^{m, n/2}$ гильбертовы пространства функ-

ций $f \in L_2$: $f \in D(B_T^m \tilde{B}_Y^{n/2})$, с нормами $\|f\|_{H^{m,n/2}} \equiv \left[\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \|B_T^i \tilde{B}_Y^{j/2} f\|_{L_2}^2 \right]^{1/2}$.

Введем в рассмотрение банаховы пространства $H^{i,j/2;m,n/2} \equiv H^{i,j/2} \cap H^{m+i,0} \cap H^{0,(n+j)/2}$ с нормами $\|f\|_{H^{i,j/2;m,n/2}} \equiv \|f\|_{H^{i,j/2}} + \|f\|_{H^{m+i,0}} + \|f\|_{H^{0,(n+j)/2}}$.

Определим банаховы пространства $C_{i,j/2;m,n/2}(\partial\Omega)$ функций $f \in C(\partial\Omega)$: $f(s) \in H^{i,j/2;m,n/2}$ ($s \in I_S$) и $B_T^i \tilde{B}_Y^{j/2} f \in C(\partial\Omega)$, $B_T^{i+m} f \in C(\partial\Omega)$, $\tilde{B}_Y^{(j+n)/2} f \in C(\partial\Omega)$, с нормами $\|f\|_{C_{i,j/2;m,n/2}(\partial\Omega)} \equiv \sup_{s \in I_S} \|f(s)\|_{H^{i,j/2;m,n/2}}$. Зададим

банаховы пространства $C_{i,j/2;m,n/2}^k(\partial\Omega) \equiv C^k(\partial\Omega) \cap C_{i,j/2;m,n/2}(\partial\Omega)$ с нормами $\|f\|_{C_{i,j/2;m,n/2}^k(\partial\Omega)} \equiv \|f\|_{C^k(\partial\Omega)} + \|f\|_{C_{i,j/2;m,n/2}(\partial\Omega)}$.

Операторы B_i и B_y ограниченно обратимы, поэтому в силу следствия 3 [28] имеет место утверждение:

Теорема 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Тогда операторы $G_{\pm} [C_{i,j/2;m,n/2}^k(\partial\Omega)]$ всюду определены, ограничены и ограниченно обратимы ($k, i, j, m, n \in \mathbf{Z}_+$).

Операторы $G_0(x)$ и $G_2(x)$ допускают представление с помощью рядов Фурье, сходящихся в норме L_2 :

$$G_i(x)f = \sum_{j=0}^{\infty} G_i(x, \sigma_j) P_j f \quad (f \in L_2, i = 0, 2).$$

Операторы $G_i(x, \sigma_j) [P_j C(\partial\Omega) \rightarrow P_j L_2]$ могут быть получены из операторов $G_i(x) [C(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$, если вместо C_0 -полугруппы $U_Y(\tau)$ подставить соответствующую C_0 -полугруппу $\exp(-\sigma_j \tau) P_j$. Они определяют решения соответствующих НКЗТ для уравнения (1) на основе формул, аналогичных формулам (5). Аппроксимация операторов $G_i(x, \sigma_j)$ и решение с их помощью НКЗТ для уравнения (1) исследовались в работах [18, 19].

Обозначим через $\Lambda_m(z)$ ($m = 0, 2, z \in [a, b]$) интерполяционные многочлены Лагранжа:

$$\Lambda_m(z) \equiv \prod_{j=0, (j \neq m)}^2 \frac{z - z_j}{z_m - z_j}, \quad z_j \equiv \bar{z} + q_j h_z \quad (j = 0, 2).$$

Здесь $h_z \equiv 2^{-1}(b-a)$, $\bar{z} \equiv 2^{-1}(a+b)$; $q_0 \equiv -1$, $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 1$. Пусть $f(z)$ – трижды непрерывно дифференцируемая на промежутке $[a, b]$ функция со значениями в произвольном банаховом пространстве B . Тогда для функции $\tilde{f}(z) \equiv \sum_{m=0}^2 f(z_m) \Lambda_m(z)$ при $z \in [a, b]$ имеют место оценки:

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(z) - f(z)\|_B &\leq c_{\omega} \sup_{z \in [a, b]} \|f^{(3)}(z)\|_B h_z^3 \quad (c_{\omega} \equiv 2\sqrt{3}/9), \\ \|\tilde{f}(z)\|_B &\leq c_{\Lambda} \max_{m=0,2} \|f(z_m)\|_B \quad (c_{\Lambda} \equiv 3). \end{aligned} \quad (6)$$

Интерполяция функций в пространстве L_2

Пусть $N/2 \in \mathbf{N}$. Зададим функции $\tilde{U}_T(\tau)$ ($\tau \geq 0$), значения которых – операторы в пространствах L_2 :

$$\tilde{U}_T(\tau)f \equiv \sum_{m=0}^2 \Lambda_m(\tau) U_T(\tau_{2n+1} + q_m h_\tau) f$$

$$(\tau \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}], n = \overline{0, N/2-1}, f \in L_2).$$

Здесь $\tau_n \equiv n h_\tau$ ($n \in \mathbf{Z}_+$), $h_\tau \equiv T/N$. В силу оценок $\|U_T(\tau)\| \leq 1$ и (6) имеем оценки $\|\tilde{U}_T(\tau)\| \leq c_\Lambda$ и

$$\|\tilde{U}_T(\tau)f - U_T(\tau)f\|_{L_2} \leq c_\omega \|B_T^3 f\|_{L_2} h_\tau^3 (f \in H^{3,0}). \quad (7)$$

Пусть $\tilde{N}_j/2 \in \mathbf{N}$ ($j \in \mathbf{Z}_+$). Зададим функции $\tilde{U}_Y(\tau)$ ($\tau \geq 0$), значения которых – операторы в L_2 ($Y > 0$):

$$\tilde{U}_Y(\tau)f = \sum_{j=0}^{\infty} e_j(\tau) P_j f (f \in L_2), \quad (8)$$

$$e_j(\tau) \equiv \sum_{m=0}^2 \exp\left[-\sigma_j \left(\tilde{\tau}_{j,n\tilde{N}_j+2\tilde{n}_j+1} + q_m \tilde{h}_{\tau,j}\right)\right] \Lambda_m(\tau)$$

$$(\tau \in [\tilde{\tau}_{j,n\tilde{N}_j+2\tilde{n}_j}, \tilde{\tau}_{j,n\tilde{N}_j+2\tilde{n}_j+2}], \tilde{n}_j = \overline{0, \tilde{N}_j/2-1}, n = \overline{0, N-1}).$$

Здесь $\tilde{\tau}_{j,n} \equiv n \tilde{h}_{\tau,j}$, $\tilde{h}_{\tau,j} \equiv h_\tau / \tilde{N}_j$. Так как $|e_j(\tau)| \leq c_\Lambda$, то ряды Фурье (8) сходятся в норме L_2 и $\|\tilde{U}_Y(\tau)\| \leq c_\Lambda$.

В силу первой оценки (6) имеем оценки:

$$\Delta e_j(Y) \equiv |e_j(\tau) - \exp(-\sigma_j \tau)| \leq c_\omega \tilde{N}_j^{-3} \sigma_j^3 \exp(-\sigma_j \tau) h_\tau^3 (j \in \mathbf{Z}_+, Y > 0). \quad (9)$$

Так как $\sigma_j \sim (\pi j/Y)^2$, то погрешности $\Delta e_j(Y)$ не ограничены сверху при $j \rightarrow \infty$ или $Y \rightarrow 0$.

Допустим, что $\tilde{N}_j = \tilde{N}$ ($j \in \mathbf{Z}_+$, $\tilde{N}/2 \in \mathbf{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$). Соответствующие операторы $\tilde{U}_Y(\tau)$ обозначим $\tilde{U}_Y^{[1]}(\tau)$. С помощью неравенств (9), формулы (3) для B_Y^3 и формулы (4) получаем следующие оценки:

$$\|\tilde{U}_Y^{[1]}(\tau)f - U_Y(\tau)f\|_{L_2} \leq c_\omega \tilde{N}^{-3} Y^{-6} \|\tilde{B}_Y^3 f\|_{L_2} h_\tau^3 \leq c_\omega \tilde{N}^{-3} Y^{-6} (1 + p Y_0^2)^3 \|f\|_{H^{0,3}} h_\tau^3$$

$$(f \in H^{0,3}, \tau \in I_T, Y \in (0, Y_0]), \quad (10)$$

согласно которым операторы $\tilde{U}_Y^{[1]}(\tau)$ сходятся в пространстве L_2 с кубической скоростью при $N \rightarrow \infty$ к соответствующим операторам $U_Y(\tau)$ равномерно по $j \in \mathbf{Z}_+$, $\tau \in I_T$, $Y \in (0, Y_0]$ ($Y_0 > 0$) на функциях $Y^6(j+1)^{-6} \Psi_j$.

Пусть $\tilde{N}_j = 2 \left[\sigma_j / \pi^2 \right] + 2$, где $[A]$ – целая часть числа $A \in \mathbf{R}$. Соответствующие операторы $\tilde{U}_Y(\tau)$ обозначим $\tilde{U}_Y^{[0]}(\tau)$. Тогда из неравенств (9) вытекают оценки:

$$\left\| \tilde{U}_Y^{[0]}(\tau) \mathbf{f} - U_Y(\tau) \mathbf{f} \right\|_{L_2} \leq 2^{-3} c_\omega \pi^6 \|\mathbf{f}\|_{L_2} h_\tau^3 \quad (\mathbf{f} \in L_2, \tau \in I_T, Y > 0),$$

в силу которых операторы $\tilde{U}_Y^{[0]}(\tau)$ сходятся в пространстве L_2 при $N \rightarrow \infty$ с кубической скоростью к соответствующим операторам $U_Y(\tau)$ равномерно по $j \in \mathbf{Z}_+$, $\tau \in I_T$, $Y > 0$ на функциях Ψ_j , а не $Y^6(j+1)^{-6}\Psi_j$, как $\tilde{U}_Y^{[1]}(\tau)$. Но при $p \approx 0$ число точек коллокации у функций $e_j(\tau)$, образующих операторы $\tilde{U}_Y^{[0]}(\tau)$, больше, чем у функций $e_j(\tau)$, образующих $\tilde{U}_Y^{[1]}(\tau)$ при $\tilde{N} = 2$, приблизительно в $(j/Y)^2$ раз. Поэтому введем в рассмотрение операторы $\tilde{U}_Y^{[2]}(\tau)$: $\tilde{U}_Y^{[2]}(\tau) = \tilde{U}_Y^{[0]}(\tau)$ при $\tau \leq T_j$, $\tilde{U}_Y^{[2]}(\tau) = \tilde{U}_Y^{[1]}(\tau)$ ($\tilde{N} = 2$) при $\tau > T_j$, где $T_j \equiv \pi T \sigma_j^{-1/2}$. Для $\mathbf{f} \in L_2$, $Y > 0$ имеем оценки:

$$\left\| \tilde{U}_Y^{[2]}(\tau) \mathbf{f} - U_Y(\tau) \mathbf{f} \right\|_{L_2} \leq 2^{-3} \pi^6 c_\omega \|\mathbf{f}\|_{L_2} h_\tau^3 \quad (0 \leq \tau \leq T_j),$$

$$\left\| \tilde{U}_Y^{[2]}(\tau) \mathbf{f} - U_Y(\tau) \mathbf{f} \right\|_{L_2} \leq 2^{-3} c_\omega c^{[2]} \|\mathbf{f}\|_{L_2} h_\tau^3 \quad (T_j < \tau \leq T), \quad (11)$$

где $c^{[2]} \equiv \sup_{\lambda \geq 0} \lambda^6 \exp(-\pi T \lambda)$. В силу оценок (11) операторы $\tilde{U}_Y^{[2]}(\tau)$ так же, как и $\tilde{U}_Y^{[0]}(\tau)$, сходятся в пространстве L_2 к операторам $U_Y(\tau)$ на функциях Ψ_j , но при $p \approx 0$ и $j/Y \leq N$ число точек коллокации у функций $e_j(\tau)$, образующих операторы $\tilde{U}_Y^{[2]}(\tau)$, больше, чем у функций $e_j(\tau)$, образующих $\tilde{U}_Y^{[1]}(\tau)$ при $\tilde{N} = 2$, приблизительно лишь в j/Y раз.

На основании оценок (7), (10), (11) получаем утверждение:

Теорема 2. Пусть $N/2 \in \mathbf{N}$. Операторы $\tilde{U}^{[1]}(\tau) \equiv \tilde{U}_T(\tau) \tilde{U}_Y^{[1]}(\tau)$ [$H^{0,0;3,3} \rightarrow L_2$] ($\tilde{U}^{[2]}(\tau) \equiv \tilde{U}_T(\tau) \tilde{U}_Y^{[2]}(\tau)$ [$H^{3,0} \rightarrow L_2$]) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $N \rightarrow \infty$ к соответствующим операторам $U(\tau)$ [$H^{0,0;3,3} \rightarrow L_2$] ($U(\tau)$ [$H^{3,0} \rightarrow L_2$]) равномерно по $\tau \in I_T$ ($\tau \in I_T$, $Y > 0$).

Введем в рассмотрение банаховы пространства C_Y^n ($n \in \mathbf{Z}_+$) функций $\mathbf{f} \in L_2$, имеющих непрерывные на множестве I_Y производные $\mathbf{f}^{(j)}(y)$ ($j = \overline{0, n}$), с нормами $\|\mathbf{f}\|_{C_Y^n} \equiv \max_{j=0, n} \sup_{y \in I_Y} \|\mathbf{f}^{(j)}(y)\|_{L_2(I_T)}$, а также банаховы пространства C_T^m ($m \in \mathbf{Z}_+$) функций $\mathbf{f} \in L_2$, имеющих непрерывные на множестве $I_T \times I_Y$ частные производные $\partial_t^i \mathbf{f}(t, y)$ ($i = \overline{0, m}$), с нормами $\|\mathbf{f}\|_{C_T^m} \equiv \max_{i=0, m} \sup_{(t, y) \in I_T \times I_Y} \|\partial_t^i \mathbf{f}(t, y)\|$.

Учитывая, что $|\mu_j^{-m} \psi_j^{(m)}(y)| \leq (2/Y)^{1/2} \quad (j \in \mathbf{N}, \quad m \in \mathbf{Z}_+)$, имеем при $\mathbf{f} \in H^{0,(n+1)/2}$, $y \in I_Y$, $Y > 0$, $m \leq n$ оценки:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}^{(m)}(y)\|_{L_2(I_T)} &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\sigma}_j^{-(n+1)/2} \left(\tilde{\mathbf{B}}_Y^{(n+1)/2} \mathbf{f}, \boldsymbol{\Psi}_j \right)_{L_2(I_Y)} \psi_j^{(m)}(y) \right\|_{L_2(I_T)} \leq \\ &\leq 2^{1/2} Y^{-m-1/2} \tilde{c}_{n-m} \|\mathbf{f}\|_{H^{0,(n+1)/2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\tilde{c}_k \equiv \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\sigma}_j^{-k-1} \right)^{1/2}$. Пусть $\mathbf{f} \in H^{1,1/2}$, $\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{B}}_Y^{1/2} \mathbf{f}$. Тогда $g(t, y) = \int_0^t \partial_{t'} g(t', y) dt'$, и в силу теоремы Фубини

$$\left| \left(\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\Psi}_j \right)_{L_2(I_Y)} \right| = \left| \int_0^t \left(\mathbf{B}_T \mathbf{g}, \boldsymbol{\Psi}_j \right)_{L_2(I_Y)}(t') dt' \right| \leq \sqrt{T} \left\| \left(\mathbf{B}_T \mathbf{g}, \boldsymbol{\Psi}_j \right)_{L_2(I_Y)} \right\|_{L_2(I_T)}.$$

При $(t, y) \in I_T \times I_Y$, $Y > 0$ имеем оценки:

$$\begin{aligned} |f| &= \left| \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\sigma}_j^{-1/2} \psi_j(y) \int_0^t \left(\mathbf{B}_T \tilde{\mathbf{B}}_Y^{1/2} \mathbf{f}, \boldsymbol{\Psi}_j \right)_{L_2(I_Y)}(t') dt' \right| \leq \\ &\leq (2T/Y)^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\sigma}_j^{-1/2} \left\| \left(\mathbf{B}_T \tilde{\mathbf{B}}_Y^{1/2} \mathbf{f}, \boldsymbol{\Psi}_j \right)_{L_2(I_Y)} \right\|_{L_2(I_T)} \leq (2T/Y)^{1/2} \tilde{c}_0 \|\mathbf{f}\|_{H^{1,1/2}}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем оценки:

$$\begin{aligned} \left| \partial_t^m f(t, y) \right| &\leq (2T/Y)^{1/2} \tilde{c}_0 \|\mathbf{f}\|_{H^{m+1,1/2}} \\ ((t, y) \in I_T \times I_Y, \quad Y > 0, \quad \mathbf{f} \in H^{m+1,1/2}, \quad m \in \mathbf{Z}_+). \end{aligned} \quad (13)$$

В силу оценок (13) и (12) имеем включения: $H^{n+1,1/2} \subset C_T^n$, $H^{0,(n+1)/2} \subset C_Y^n$ ($n \in \mathbf{Z}_+$).

Зададим операторы $\mathbf{P}_T [H^{1,1/2} \rightarrow C_Y^0]$ ($n \in \mathbf{Z}_+$):

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_T \mathbf{f})(t, y) &\equiv \sum_{l=0}^2 f(\tau_{2k+l}, y) \Lambda_l(t) \\ (\mathbf{f} \in H^{1,1/2}, \quad t \in [\tau_{2k}, \tau_{2k+2}], \quad y \in I_Y, \quad k = \overline{0, N/2-1}). \end{aligned}$$

Используя неравенства $\|\mathbf{f}\|_{C_Y^0} \leq T^{1/2} \|\mathbf{f}\|_{C_T^0}$ ($\mathbf{f} \in C_T^0$) и (6), (13), получаем оценки

$$\|\mathbf{P}_T\| \leq (2/Y)^{1/2} T \tilde{c}_0 c_\Lambda$$

и

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_T \mathbf{f} - \mathbf{f}\|_{C_Y^0} &\leq T^{1/2} c_\omega \|\mathbf{B}_T^3 \mathbf{f}\|_{C_T^0} h_\tau^3 \leq (2/Y)^{1/2} T \tilde{c}_0 c_\omega \|\mathbf{f}\|_{H^{4,1/2}} h_\tau^3 \\ (\mathbf{f} \in H^{4,1/2}, \quad Y > 0). \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть $M/2 \in \mathbf{N}$, $y_m \equiv mY/M$, $m = \overline{0, M}$. Зададим операторы $\mathbf{P}_Y [C_Y^0 \rightarrow L_2]$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_Y \mathbf{f})(y) &\equiv \sum_{l=0}^2 \mathbf{f}(y_{2m+l}) \Lambda_l(y) \\ (\mathbf{f} \in C_Y^0, \quad y \in [y_{2m}, y_{2m+2}], \quad m = \overline{0, M/2-1}). \end{aligned}$$

Учитывая неравенства $\|f\|_{L_2} \leq Y^{1/2} \|f\|_{C_Y^0}$ ($f \in C_Y^0$) и (6), (12), получаем оценки

$$\|P_Y\| \leq c_\Lambda Y^{1/2}$$

и

$$\|P_Y f - f\|_{L_2} \leq c_\omega Y^{7/2} \|d^3 f / dy^3\|_{C_Y^0} h_y^3 \leq 2^{1/2} \tilde{c}_0 c_\omega \|f\|_{H^{0,2}} h_y^3$$

$$(f \in H^{0,2}, Y > 0). \quad (15)$$

Здесь $h_y \equiv 1/M$. Пусть $\tilde{M}(f) \equiv M \left(\left[\pi^{-1} Y \left(\|d^3 f / dy^3\|_{C_Y^0} / \|f\|_{C_Y^0} \right)^{1/3} \right] + 1 \right)$ ($[A]$ – целая часть $A \in \mathbf{R}$, $f \in H^{0,2}$). Операторы P_Y при $M = \tilde{M}(f)$ и $f \in H^{0,2}$ обозначим $\tilde{P}_Y(f)$. В силу неравенств (15) имеем оценки:

$$\|\tilde{P}_Y(f) - f\|_{L_2} \leq \pi^3 c_\omega Y^{1/2} \|f\|_{C_Y^0} h_y^3 \leq 2^{1/2} \pi^3 \tilde{c}_0 c_\omega \|f\|_{H^{0,1/2}} h_y^3$$

$$(f \in H^{0,2}, Y > 0). \quad (16)$$

Согласно первым неравенствам (15) и (16), интерполянты вида $(j+1)^{-3} P_Y \psi_j$ и $\tilde{P}_Y(\psi_j)$ сходятся в норме L_2 с кубической скоростью при $M \rightarrow \infty$ к соответствующим функциям $(j+1)^{-3} \psi_j$ и ψ_j равномерно по $j \in \mathbf{Z}_+$ и $Y > 0$, при этом число точек коллокации у $\tilde{P}_Y(\psi_j)$ лишь в $\approx j$ раз больше, чем у $P_Y \psi_j$.

Доопределим операторы $\tilde{P}_Y(f)$ на функциях $f \in H^{0,1/2} \setminus H^{0,2}$: $\tilde{P}_Y(f) \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} P_Y f = f$. Тогда оценки (16) выполняются при всех $f \in H^{0,1/2}$.

С учетом оценок (14), (16) и $\|P_Y\| \leq c_\Lambda Y^{1/2}$ имеем оценки:

$$\|\tilde{P}_Y(P_T f) - f\|_{L_2} \leq 2^{1/2} c_\omega \tilde{c}_0 (c_\Lambda T \|f\|_{H^{4,1/2}} h_\tau^3 + \pi^3 \|f\|_{H^{0,1/2}} h_y^3)$$

$$(f \in H^{4,1/2}, Y > 0). \quad (17)$$

На основании оценок (17) делаем следующий вывод:

Теорема 3. Пусть $M/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$. Интерполянты $\tilde{P}_Y(P_T f)$ сходятся в норме L_2 с кубической скоростью при $M, N \rightarrow \infty$ к соответствующим функциям $f \in H^{4,1/2}$; равномерно относительно $\|f\|_{H^{4,1/2}} \leq R$ ($R > 0$) и равномерно по $Y > 0$.

Приближенное решение граничных интегральных уравнений

Так как здесь выполняются оценки $|\tilde{U}_Y^{[j]}(\tau)| \leq c_\Lambda$ и (10), (11) вместо аналогичных оценок для аппроксимации C_0 -полугруппы $\exp(-p\tau)I$ в работах [18, 19] и проводится аналогичное построение аппроксимаций операторов $G_\pm^{-1}$, $G_0(x)$, то мы опускаем некоторые подробности при обосновании их аппроксимирующих свойств.

Оператор $\mathbf{G}_{\pm} [C(\partial\Omega)]$ может быть представлен в виде $\mathbf{G}_{\pm} \mathbf{f} = \mp 2^{-1} \mathbf{I} + \int_{I_T} \mathbf{A}(\tau) \mathbf{U}(\tau) \mathbf{f} d\tau$ ($\mathbf{f} \in C(\partial\Omega)$). Значения функции $\mathbf{A}(\tau)$ ($\tau > 0$) – ограниченные операторы в пространстве $C(\partial\Omega)$: $(\mathbf{A}(\tau) \mathbf{f})(s) \equiv \int_{I_s} [g_2(s, s', \tau) - \eta g_0(s, s', \tau)] \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(s')) ds'$ ($s \in I_s$, $\mathbf{f} \in C(\partial\Omega)$, $g_i(s, s', \tau) \equiv g_i(\tilde{\mathbf{x}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s'), \tau)$). Справедливы оценки $\|\mathbf{A}(\tau)\| \leq c\tau^{-1/2}$ ($\tau > 0$), где c – константа, зависящая только от параметров кривой $\partial\Omega$ (см. оценки (8) [18]). Зададим операторы $\tilde{\mathbf{G}}_{\pm}^{[j]} : \tilde{\mathbf{G}}_{\pm}^{[j]} \mathbf{f} \equiv \mp 2^{-1} \mathbf{I} + \int_{I_T} \mathbf{A}(\tau) \tilde{\mathbf{U}}^{[j]}(\tau) \mathbf{f} d\tau$ ($\mathbf{f} \in C(\partial\Omega)$, $j = 1, 2$). В силу оценок $\|\mathbf{A}(\tau)\| \leq c\tau^{-1/2}$, (6), $\|\tilde{\mathbf{U}}_T(\tau)\| \leq c_{\Lambda}$ и теоремы 2 операторы $\tilde{\mathbf{G}}_{\pm}^{[j]} [C(\partial\Omega)]$ ограничены равномерно по N и справедлива теорема:

Теорема 4. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\tilde{\mathbf{G}}_{\pm}^{[1]} [C_{0,0;3,3}(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)]$ и $\tilde{\mathbf{G}}_{\pm}^{[2]} [C_{0,0;3,0}(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)]$ ($N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $N \rightarrow \infty$ к соответствующим операторам $\mathbf{G}_{\pm} [C_{0,0;3,3}(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)]$ и $\mathbf{G}_{\pm} [C_{0,0;3,0}(\partial\Omega) \rightarrow C(\partial\Omega)]$ ($\tilde{\mathbf{G}}_{\pm}^{[2]}$ – равномерно по $Y > 0$).

Заметим, что операторы $\tilde{\mathbf{G}}_{\pm}^{[j]}$ ($j = 1, 2$) имеют вид полиномов, образованных степенями оператора $\mathbf{U}_T(h_{\tau})$:

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\pm}^{[j]} = \tilde{\mathbf{G}}_{\pm,0}^{[j]} + \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{\mathbf{G}}_n \mathbf{U}_T(\tau_n), \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\pm,0}^{[j]} \equiv \mp 2^{-1} \mathbf{I} + \int_{\tau_0}^{\tau_2} \mathbf{A}(\tau) \tilde{\mathbf{U}}_Y^{[j]}(\tau) \Lambda_0(\tau) d\tau,$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{2n+1}^{[j]} \equiv \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \mathbf{A}(\tau) \tilde{\mathbf{U}}_Y^{[j]}(\tau) \Lambda_1(\tau) d\tau \quad (n = \overline{0, N/2-1}),$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{2n}^{[j]} \equiv \int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \mathbf{A}(\tau) \tilde{\mathbf{U}}_Y^{[j]}(\tau) \Lambda_2(\tau) d\tau + \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \mathbf{A}(\tau) \tilde{\mathbf{U}}_Y^{[j]}(\tau) \Lambda_0(\tau) d\tau \quad (n = \overline{1, N/2-1}).$$

Пусть $L/2 \in \mathbf{N}$. Введем в рассмотрение пространства H_L векторных сеточных функций $\mathbf{f}$ со значениями $\mathbf{f}_l \in L_2$, заданными в узлах $\mathbf{x}_l \equiv \tilde{\mathbf{x}}(s_l)$ ($s_l \equiv lh_s$, $l = \overline{-L-1, L}$, $h_s \equiv S/(L+1)$), с нормой: $\|\mathbf{f}\|_{H_L} = \max_{-L-1 \leq l \leq L} \|\mathbf{f}_l\|_{L_2}$. Зададим проекционные операторы $\mathbf{P}_L [C(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$: $(\mathbf{P}_L \mathbf{f})_l = \mathbf{f}(\mathbf{x}_l)$, и операторы $\tilde{\mathbf{P}}_L [H_L \rightarrow C(\partial\Omega)]$:

$$(\tilde{\mathbf{P}}_L \mathbf{f})(s) \equiv \sum_{m=0}^2 f_{2l+m} \Lambda_m(s) \quad (\mathbf{f} \in H_L, s \in [s_{2l}, s_{2l+2}], l = \overline{-L/2, L/2-1}).$$

Очевидно, что $\|P_L\| \leq 1$. В силу оценок (6) имеем оценки $\|\tilde{P}_L\| \leq c_\Lambda$ и

$$\|\tilde{P}_L P_L f - f\|_{C(\partial\Omega)} \leq c_\omega \|f^{(3)}\|_{C(\partial\Omega)} h_s^3 \quad (f \in C^3(\partial\Omega)). \quad (19)$$

Определение. Будем говорить, что ограниченные операторы $A_n [C \rightarrow D]$ ($n \in \mathbb{N}$) сходятся по операторной норме при $n \rightarrow \infty$ к соответствующим ограниченным операторам $B_n [C \rightarrow D]$, если $\|A_n f - B_n f\|_D \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно во шаре $\|f\|_C \leq 1$.

С помощью равенств $\tilde{G}_\pm^{[j]} f \equiv \int_{I_T} P_L A(\tau) \tilde{U}^{[j]}(\tau) \tilde{P}_L f d\tau$ ($f \in H_L$, $j=1,2$) зададим операторы $\tilde{G}_\pm^{[j]} [H_L]$. В силу оценок (19), $\|A(\tau)\| \leq c\tau^{-1/2}$, $\|\tilde{U}^{[j]}(\tau)\| \leq c_\Lambda^2$, $\|P_L\| \leq 1$ имеет место утверждение:

Теорема 5. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\tilde{G}_\pm^{[j]} P_L [C^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$ ($L/2 \in \mathbb{N}$, $N/2 \in \mathbb{N}$, $j=1,2$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $L \rightarrow \infty$ к соответствующим операторам $P_L \tilde{G}_\pm^{[j]} [C^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$ равномерно по N и $Y > 0$ с порядком аппроксимации $O(h_s^3)$.

Обозначим через $\hat{G}_\pm^{[j]}$ ($i=0,2$, $j=1,2$) операторы $\hat{G}_\pm^{[j]}$, у которых для вычисления интегралов $\int_{s_l}^{s_{l+1}} g_i(s_k, s, \tau) \tilde{\Lambda}_m(s) ds$ ($k = \overline{-L, L-1}$, $l = \overline{-L/2, L/2-1}$, $m = \overline{0, 2}$) используются ККИ по расстоянию $\tilde{r} \equiv |\tilde{x}(s) \tilde{x}(s')|$ и ПКФГ с γ узлами в соответствии с работой [18]. Тогда имеем аналог теоремы 5 [18]:

Теорема 6. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{G}_\pm^{[j]} P_L [C^2(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$ ($L/2 \in \mathbb{N}$, $N/2 \in \mathbb{N}$, $j=1,2$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $L \rightarrow \infty$ к соответствующим операторам $\tilde{G}_\pm^{[j]} P_L [C^2(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$ равномерно по N и $Y > 0$.

С помощью формул (18) по аналогии с теоремой 6 [18] доказывается следующее утверждение:

Теорема 7. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда существует $N_{\min} \in \mathbb{N}$, такое, что при $N/2 \in \mathbb{N}_{\min} \equiv \{N_{\min}, N_{\min} + 1, \dots\}$, $L/2 \in \mathbb{N}$, $Y > 0$, $j=1,2$ операторы $(\hat{G}_\pm^{[j]})^{-1} [H_L]$ ограничены в совокупности.

На основании теорем 1, 4–7 делаем следующий вывод:

Следствие 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $(\hat{G}_\pm^{[1]})^{-1} P_L [C_{0,0,3,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$, $(\hat{G}_\pm^{[2]})^{-1} P_L [C_{0,0,3,0}^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$ ($L/2 \in \mathbb{N}$, $N/2 \in \mathbb{N}_{\min}$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $L, N \rightarrow \infty$ к соответствующим операторам $P_L G_\pm^{-1} [C_{0,0,3,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$, $P_L G_\pm^{-1} [C_{0,0,3,0}^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$ ($(\hat{G}_\pm^{[2]})^{-1} P_L$ – равномерно по $Y > 0$).

Приближенное решение краевых задач

Операторы $\mathbf{G}_0(\mathbf{x}) [C(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ ($\mathbf{x} \in \Omega_{\pm}$) представим в следующем виде: $\mathbf{G}_0(\mathbf{x})\mathbf{f} = \int_{I_T} \mathbf{A}_0(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{U}(\tau) \mathbf{f} d\tau$, где $\mathbf{A}_0(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{f} \equiv \int_{\partial\Omega} a(r, \tau) \mathbf{f}(\mathbf{x}') ds'$. Для операторов $\mathbf{A}_0(\mathbf{x}, \tau)$ ($\mathbf{x} \in \Omega_{\pm}$, $\tau > 0$) выполняются оценки: $\|\mathbf{A}_0(\mathbf{x}, \tau)\| \leq c'_0 \tau^{-1/2} + c''_0$, где c'_0 , c''_0 – константы, зависящие только от параметров кривой $\partial\Omega$ (см. оценки (9) [19]). Зададим операторы $\tilde{\mathbf{G}}_0^{[j]}(\mathbf{x})$: $\tilde{\mathbf{G}}_0^{[j]}(\mathbf{x})\mathbf{f} \equiv \int_{I_T} \mathbf{A}_0(\mathbf{x}, \tau) \tilde{\mathbf{U}}^{[j]}(\tau) \mathbf{f} d\tau$ ($\mathbf{x} \in \Omega_{\pm}$, $j=1, 2$). Имеет место аналог теоремы 6 [19]:

Теорема 8. Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $N/2 \in \mathbb{N}$. Тогда операторы $\tilde{\mathbf{G}}_0^{[1]}(\mathbf{x}) [C_{0,0;3,3}(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ ($\tilde{\mathbf{G}}_0^{[2]}(\mathbf{x}) [C_{0,0;3,0}(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $N \rightarrow \infty$ к соответствующим операторам $\mathbf{G}_0(\mathbf{x}) [C_{0,0;3,3}(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ ($\mathbf{G}_0(\mathbf{x}) [C_{0,0;3,0}(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$) равномерно по $\mathbf{x} \in \Omega_{\pm}$ ($\mathbf{x} \in \Omega_{\pm}$, $Y > 0$).

Пусть $d \in I_D$ ($I_D \equiv (0, D]$), где D – треть радиуса круга Ляпунова. Тогда существует кривая $\partial\Omega_d^{\pm} \subset \Omega_{\pm}$, параллельная кривой $\partial\Omega$, т.е. существует взаимно однозначное соответствие между точками $\tilde{\mathbf{x}}(s) \in \partial\Omega$ и $\tilde{\mathbf{x}}_d^{\pm}(s) \in \partial\Omega_d^{\pm}$ ($s \in I_S$), такое, что $\tilde{\mathbf{x}}(s)\tilde{\mathbf{x}}_d^{\pm}(s)$ – нормаль к $\partial\Omega$ и $|\tilde{\mathbf{x}}(s)\tilde{\mathbf{x}}_d^{\pm}(s)| = d$ [29, с. 313]. Область, образованную кривыми $\partial\Omega_d^{\pm}$ ($d \in (0, d_0]$, $d_0 \in I_D$), обозначим через $\Pi_{d_0}^{\pm}$, $\Omega_{d_0}^{\pm} \equiv \Omega_{\pm} \setminus \Pi_{d_0}^{\pm}$. Имеем неравенства: $r \geq d$ при $\mathbf{x} \in \Omega_d^{\pm}$ ($d \in I_D$), позволяющие сделать оценки норм операторов $\mathbf{A}_0(\mathbf{x}, \tau) [C(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$:

$$\|\mathbf{A}_0(\mathbf{x}, \tau)\| \leq c_A \exp[-d^2/(8\tau)] \quad (\mathbf{x} \in \Omega_d^{\pm}, d \in I_D, \tau > 0);$$

$$c_A \equiv (2\pi)^{-1} S \sup_{\tau \in (0, \infty)} \tau^{-1} \exp[-d^2/(8\tau)].$$

Принимая также во внимание оценки (6), (9) и формулу (4), получаем неравенства:

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{I_T} \mathbf{A}_0(\mathbf{x}, \tau) \tilde{\mathbf{U}}_T(\tau) (\tilde{\mathbf{U}}_Y^{[j]}(\tau) - \mathbf{U}_Y(\tau)) \mathbf{f} d\tau \right\|_{L_2}^2 \leq \\ & \leq \tilde{N}^{-6} c_A^2 c_{\omega}^2 h_{\tau}^6 \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^6 \left\| \mathbf{A}_0(\mathbf{x}, \tau) (\mathbf{f}, \boldsymbol{\Psi}_j)_{L_2(I_Y)} \right\|_{L_2(I_T)}^2 \exp(-2\sigma_j \tau) \leq \\ & \tilde{N}^{-6} c_A^2 c_{\Lambda}^2 c_{\omega}^2 h_{\tau}^6 \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^6 \exp[-d^2/(4\tau)] \exp(-2\sigma_j \tau) \left\| (\mathbf{f}, \boldsymbol{\Psi}_j)_{L_2(I_Y)} \right\|_{L_2(I_T)}^2 \leq \\ & \leq \tilde{N}^{-6} c_A^2 c_{\Lambda}^2 c_{\omega}^2 c_{\mu} \|\mathbf{f}\|_{L_2}^2 h_{\tau}^6 \quad (j=1, 2), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\mathbf{f} \in L_2$, $\mathbf{x} \in \Omega_d^{\pm}$, $d \in I_D$, $c_{\mu} \equiv \sup_{\mu \geq 0} \mu^{12} \exp(-\sqrt{2} d \mu)$. Следовательно, справедливо утверждение:

Теорема 9. Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $N/2 \in \mathbf{N}$, $d \in I_D$, $j=1,2$. Тогда операторы $\tilde{G}_0^{[j]}(\mathbf{x}) [C_{0,0,3,0}(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $N \rightarrow \infty$ к соответствующим операторам $G_0(\mathbf{x}) [C_{0,0,3,0}(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ равномерно по $\mathbf{x} \in \Omega_d^\pm$, $Y > 0$.

С помощью равенств: $\tilde{G}_0^{[j]}(\mathbf{x})f \equiv \int_{I_T} P_L A_0(\mathbf{x}, \tau) \tilde{U}^{[j]}(\tau) \tilde{P}_L f d\tau$ ($f \in H_L$, $\mathbf{x} \in \Omega_\pm$, $j=1,2$), зададим операторы $\tilde{G}_0^{[j]}(\mathbf{x}) [H_L]$, для которых справедливо утверждение, аналогичное теореме 7 [19]:

Теорема 10. Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$. Тогда операторы $\tilde{G}_0^{[j]}(\mathbf{x})P_L [C^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$ ($j=1,2$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $L \rightarrow \infty$ к соответствующим операторам $\tilde{G}_0^{[j]}(\mathbf{x}) [C^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$ равномерно по N , $\mathbf{x} \in \Omega_\pm$, $Y > 0$.

Обозначим через $\hat{G}_0^{[j]}(\mathbf{x})$ ($j=1,2$) операторы $\tilde{G}_0^{[j]}(\mathbf{x})$, у которых для вычисления интегралов $\int_{s_l}^{s_{l+1}} g_0(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}(s), \tau) \tilde{\Lambda}_m(s) ds$ ($l = \overline{-L/2, L/2-1}$, $m = \overline{0,2}$) используются ККИ по переменной $\rho \equiv \sqrt{r^2 - d^2}$ ($d \in I_D$) и ПКФГ с γ узлами в соответствии с работой [19]. Тогда имеем аналоги теоремы 8 [19] и следствия 3 [19]:

Теорема 11. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$, $L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$. Тогда операторы $\hat{G}_0^{[j]}(\mathbf{x})P_L [C^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ ($j=1,2$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $L \rightarrow \infty$ к соответствующим операторам $\tilde{G}_0^{[j]}(\mathbf{x})P_L [C^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ равномерно по N , $\mathbf{x} \in \Omega_\pm$, $Y > 0$.

Следствие 2. Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$. Тогда операторы $\hat{G}_0^{[j]}(\mathbf{x}) [H_L \rightarrow L_2]$ ($\mathbf{x} \in \Omega_\pm$, $Y > 0$, $j=1,2$) ограничены в совокупности.

На основании теорем 8–11 делаем вывод:

Следствие 3. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$, $L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$, $d \in I_D$. Тогда операторы $\hat{G}_0^{[1]}(\mathbf{x})P_L [C_{0,0,3,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ ($\hat{G}_0^{[2]}(\mathbf{x})P_L [C_{0,0,3,0}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$, $\hat{G}_0^{[1]}(\mathbf{x})P_L [C_{0,0,3,0}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $L, N \rightarrow \infty$ к соответствующим операторам $G_0(\mathbf{x}) [C_{0,0,3,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ ($G_0(\mathbf{x}) [C_{0,0,3,0}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$, $G_0(\mathbf{x}) [C_{0,0,3,0}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$) равномерно по $\mathbf{x} \in \Omega_\pm$ ($\mathbf{x} \in \Omega_\pm$, $Y > 0$; $\mathbf{x} \in \Omega_d^\pm$, $Y > 0$).

Введем в рассмотрение операторы $R_\pm(\mathbf{x}) \equiv G_0(\mathbf{x})G_\pm^{-1}$ и $\hat{R}_\pm^{[j]}(\mathbf{x}) \equiv \hat{G}_0^{[j]}(\mathbf{x})(\hat{G}_\pm^{[j]})^{-1}$. Операторы $\hat{R}_\pm^{[j]}(\mathbf{x})$ экономно вычисляются в алгебре полиномов, образованных N степенями полугруппового оператора $U_T(h_\tau)$. В силу теоремы 1 и следствий 1–3 получаем утверждение:

Следствие 4. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$, $L/2 \in \mathbb{N}$, $N/2 \in \mathbb{N}_{\min}$, $d \in I_D$. Тогда операторы $\hat{R}_{\pm}^{[1]}(\mathbf{x}) P_L$ [$C_{0,0,3,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] ($\hat{R}_{\pm}^{[2]}(\mathbf{x}) P_L$ [$C_{0,0,3,0}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2$], $\hat{R}_{\pm}^{[1]}(\mathbf{x}) P_L$ [$C_{0,0,3,0}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2$]) сходятся по операторной норме с кубической скоростью при $L, N \rightarrow \infty$ к соответствующим операторам $R_{\pm}(\mathbf{x})$ [$C_{0,0,3,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] ($R_{\pm}(\mathbf{x})$ [$C_{0,0,3,0}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2$], $R_{\pm}(\mathbf{x})$ [$C_{0,0,3,0}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2$]) равномерно по $\mathbf{x} \in \Omega_{\pm}$ ($\mathbf{x} \in \Omega_{\pm}$, $Y > 0$; $\mathbf{x} \in \Omega_d^{\pm}$, $Y > 0$).

На основании теоремы 7, следствия 2 и оценки $\|P_L P_Y P_T\| \leq 2^{1/2} T \tilde{c}_0 c_{\Lambda}^2$ для операторов P_T [$H^{1,1/2} \rightarrow C_Y^0$], P_Y [$C_Y^0 \rightarrow L_2$], P_L [$C(\partial\Omega) \rightarrow H_L$] можно сделать вывод об ограниченности операторов $\hat{R}_{\pm}^{[j]}(\mathbf{x}) P_L P_Y P_T$ [$C_{1,1/2,0,0}(\partial\Omega) \rightarrow H_L$] ($\mathbf{x} \in \Omega_{\pm}$, $Y > 0$, $j = 1, 2$) в совокупности. С учетом теоремы 3 сформулируем утверждение о сходимости и устойчивости сеточных решений краевых задач (2) $\hat{u}_{\pm}^{[j]}(\mathbf{x}) \equiv \hat{R}_{\pm}^{[j]}(\mathbf{x}) P_L \tilde{P}_Y (P_T \mathbf{w})$:

Следствие 5. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$, $L/2 \in \mathbb{N}$, $M/2 \in \mathbb{N}$, $N/2 \in \mathbb{N}_{\min}$, $d \in I_D$, $R > 0$, $j = 1, 2$. Тогда $\|\hat{u}_{\pm}^{[j]}(\mathbf{x}) - u_{\pm}(\mathbf{x})\|_{L_2} \rightarrow 0$ с кубической скоростью при $L, M, N \rightarrow \infty$ равномерно относительно функций $\mathbf{w} \in C_{4,1/2,0,5/2}(\partial\Omega)$ ($\mathbf{w} \in C_{4,1/2,0,0}(\partial\Omega)$, $\mathbf{w} \in C_{4,1/2,0,0}(\partial\Omega)$), удовлетворяющих условиям $\|\mathbf{w}\|_{C_{4,1/2,0,5/2}^3(\partial\Omega)} \leq R$ ($\|\mathbf{w}\|_{C_{4,1/2,0,0}^3(\partial\Omega)} \leq R$, $\|\mathbf{w}\|_{C_{4,1/2,0,0}^3(\partial\Omega)} \leq R$), и равномерно по $\mathbf{x} \in \Omega_{\pm}$ ($\mathbf{x} \in \Omega_{\pm}$, $Y > 0$; $\mathbf{x} \in \Omega_d^{\pm}$, $Y > 0$). Кроме того, значения функций $\hat{u}_{\pm}^{[j][\delta]}(\mathbf{x}) \equiv \hat{R}_{\pm}^{[j]}(\mathbf{x}) P_L \tilde{P}_Y (P_T \mathbf{w}^{[\delta]})$ сходятся при $L, M, N \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ в норме L_2 к соответствующим $u_{\pm}(\mathbf{x})$ равномерно по $\mathbf{x} \in \Omega_{\pm}$ ($\mathbf{x} \in \Omega_{\pm}$, $Y > 0$; $\mathbf{x} \in \Omega_d^{\pm}$, $Y > 0$) и равномерно относительно функций $\mathbf{w}^{[\delta]} \in C_{1,1/2,0,0}(\partial\Omega)$ и $\mathbf{w} \in C_{4,1/2,0,5/2}(\partial\Omega)$ ($\mathbf{w} \in C_{4,1/2,0,0}(\partial\Omega)$, $\mathbf{w} \in C_{4,1/2,0,0}(\partial\Omega)$), удовлетворяющих условиям $\|\mathbf{w}^{[\delta]} - \mathbf{w}\|_{C_{1,1/2,0,0}(\partial\Omega)} \leq \delta$ и $\|\mathbf{w}\|_{C_{4,1/2,0,5/2}^3(\partial\Omega)} \leq R$ ($\|\mathbf{w}\|_{C_{4,1/2,0,0}^3(\partial\Omega)} \leq R$, $\|\mathbf{w}\|_{C_{4,1/2,0,0}^3(\partial\Omega)} \leq R$).

Операторы $\hat{R}_{\pm}^{[i]}(\mathbf{x}) P_L$ ($i = 1, 2$) могут быть вычислены с помощью рядов Фурье:

$$\hat{R}_{\pm}^{[i]}(\mathbf{x}) P_L f = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{G}_0^{[i]}(\mathbf{x}, \sigma_j) [\hat{G}_{\pm}^{[i]}(\sigma_j)]^{-1} P_L P_j f \quad (f \in C(\partial\Omega), \mathbf{x} \in \Omega_{\pm}), \quad (21)$$

сходящихся в норме пространства L_2 . Здесь операторы $\hat{G}_0^{[i]}(\mathbf{x}, \sigma_j)$ [$P_j H_L \rightarrow P_j L_2$], $\hat{G}_{\pm}^{[i]}(\sigma_j)$ [$P_j H_L$] аппроксимируют операторы $G_0(\mathbf{x}, \sigma_j)$ [$P_j C(\partial\Omega) \rightarrow P_j L_2$] и $G_{\pm}(\sigma_j) \equiv \mp 2^{-1} I + G_2(\sigma_j) - \eta G_0(\sigma_j)$ [$P_j C(\partial\Omega)$] в соответствии со следствием 4 [19] и следствием 2 [18]. Они могут быть получены из операторов $\hat{G}_0^{[i]}(\mathbf{x})$ и $\hat{G}_{\pm}^{[i]}$, если вместо функций $\tilde{U}_Y^{[i]}(\tau)$ подставить соответствующие функции $e_j(\tau) P_j$.

В заключение продемонстрируем, как уменьшение гладкости функций по y уменьшает скорость сходимости вблизи границы $\partial\Omega$ операторов $\tilde{G}_{0,0}^{[1]}(x)$: $\tilde{G}_{0,0}^{[1]}(x)f \equiv \int_0^{h_\tau} A_0(x, \tau) \tilde{U}_Y^{[1]}(\tau) f d\tau$, возникающих при вычислении операторов $\tilde{G}_0^{[1]}(x)$. С целью упрощения будем рассматривать случай кусочно-линейной интерполяции (КЛИ) C_0 -полугруппы $U_Y(\tau)$ и полагать $\tilde{N}=1$. Тогда операторы $\tilde{G}_{0,0}^{[1]}(x) [C_{0,2;0,0}(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ сходятся по операторной норме с квадратичной скоростью при $N \rightarrow \infty$ к соответствующим операторам $\tilde{G}_{0,0}(x) [C_{0,2;0,0}(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$: $\tilde{G}_{0,0}(x)f \equiv \int_0^{h_\tau} A_0(x, \tau) U_Y(\tau) f d\tau$, равномерно по $x \in \Omega_\pm$. Покажем, что порядок аппроксимации равномерной по $x \in \Omega_\pm$ сходимости операторов $\tilde{G}_{0,0}^{[1]}(x) [C_{0,1/2;0,0}(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ к операторам $G_{0,0}(x) [C_{0,1/2;0,0}(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ не более, чем $O(h_\tau)$.

В случае КЛИ C_0 -полугруппы $U_Y(\tau)$ остаточные члены аппроксимаций $e_j(\tau)$ знакопостоянны [30, с. 43]:

$$e_j(\tau) - \exp(-\sigma_j \tau) = 2^{-1} \sigma_j^2 \exp(-\sigma_j \tau) \tau (h_\tau - \tau) > 0 \quad (\tau \in [0, h_\tau]).$$

Введем в рассмотрение последовательность функций $f_n(x, t, y) = \tilde{\sigma}_n^{-1/2} \psi_n(y)$ ($n \in \mathbb{N}$), для которых

$$\begin{aligned} \delta_n &\equiv \tilde{G}_{0,0}^{[1]}(x) f_n - G_{0,0}(x) f_n = \\ &= (8\pi)^{-1} \sigma_n^2 \tilde{\sigma}_n^{-1/2} \psi_n \int_0^{h_\tau} \exp(-\sigma_n \tau) (h_\tau - \tau) \int_{\partial\Omega} \exp[-r^2/(4\tau)] ds' d\tau. \end{aligned}$$

Пусть $x = \tilde{x}_d^\pm(s)$ и $z \equiv s' - s$ ($s, s' \in I_S$, $d \in I_D$). Тогда $r^2 = \rho^2 + d^2$ и $\rho^2 \leq c_\rho z^2$ при некотором $c_\rho > 0$ (см. теорему 5 [19]). Введем в рассмотрение последовательности $h_{\tau,n} = \tilde{\sigma}_n^{-1}$, $d_n = (4h_{\tau,n})^{1/2}$. Полагая $h_\tau = h_{\tau,n}$, $d = d_n$ и $c_\sigma \equiv (8\sqrt{2}\pi)^{-1} \min_{n \in \mathbb{N}} (\sigma_n^2 / \tilde{\sigma}_n^2)$, имеем оценки:

$$\begin{aligned} \|\delta_n\|_{L_2} / \|f_n\|_{C_{0,1/2;0,0}} &\geq T^{1/2} c_\sigma \tilde{\sigma}_n^{3/2} \exp(-\sigma_n h_{\tau,n}) \times \\ &\times \int_0^{h_{\tau,n}} (h_{\tau,n} - \tau) \exp[-d_n^2/(4\tau)] \int_{-d_n}^{d_n} \exp[-c_\rho z^2/(4\tau)] dz d\tau \geq \\ &\geq e^{-1} T^{1/2} c_\sigma h_{\tau,n}^{1/2} d_n \int_0^1 (1-\gamma) \exp(-1/\gamma) \int_{-1}^1 \exp[-c_\rho \lambda^2/\gamma] d\lambda d\gamma \geq \\ &\geq 4e^{-1} T^{1/2} c_\sigma h_{\tau,n} \int_0^1 (1-\gamma) \exp[-(c_\rho + 1)/\gamma] d\gamma, \end{aligned}$$

согласно которым скорость равномерной по $x \in \Omega_\pm$ сходимости операторов

$\tilde{G}_{0,0}^{[1]}(x) [C_{0,1/2,0,0}(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ к операторам $G_{0,0}(x) [C_{0,1/2,0,0}(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ при $N \rightarrow \infty$ не более линейной.

Вычислительные эксперименты

Рассмотрим численное решение краевой задачи (2) в круглом цилиндре с радиусом основания $R=1$, значениями параметров $\eta=h_0=h_Y=1$, $p=0$, $T=1$ и граничными условиями вида $w_2(R'=1, \varphi, t, y) = 150\pi^{-1}\psi_j(y)t^2 \cos \varphi$ ($j \in \mathbf{Z}_+$; R' , φ – полярные радиус и угол). Точные решения $\bar{u}_+(R', \varphi, t, y)$ имеют вид:

$$\bar{u}_+ = 150\pi^{-1}\psi_j(y)\cos\varphi \times \left\{ R't^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_k R')}{J_1(\mu_k)} \left[\frac{\sigma_j t^2}{\mu_k^2 - \sigma_j} - 2\mu_k^2 \left(\frac{t}{(\mu_k^2 - \sigma_j)^2} + \frac{\exp[-(\mu_k^2 - \sigma_j)t] - 1}{(\mu_k^2 - \sigma_j)^3} \right) \right] \right\},$$

где $J_1(z)$ – функция Бесселя, μ_k – положительные корни уравнения $zJ_1'(z) + J_1(z) = 0$. Приближенные решения $\hat{u}_+^{[i]}$ ($i=1,2$) вычисляем согласно следствию 5, используя ПКФГ с $\gamma=12$ узлами. Но функцию $\tilde{U}_Y^{[1]}(\tau)$ вычисляем более точно: полагаем $N_j = 2j+6$, с той целью, чтобы точек коллокации у функции $\tilde{U}_Y^{[1]}(\tau)$ было не меньше, чем точек коллокации у функции $\tilde{U}_Y^{[2]}(\tau)$. Кроме того, вычисляем приближенные решения вида $\hat{u}_+^{[i]} \equiv P_j \tilde{u}_+^{[i]}$. Все решения вычисляем с помощью рядов Фурье (21) с тридцатью первыми членами при $Y=1$ и тремя первыми членами при $Y=0.1$ в узлах (x'_l, τ_n, y_m) ($l = -L-1, L$, $n = \overline{1, N}$, $m = \overline{0, M}$), где x'_l – точки, получающиеся из точек $\tilde{x}(s_j)$ в результате сжимающего отображения окружности $\partial\Omega$ на окружность $\partial\Omega'$ радиуса $R' < R$. Длины дуг, на которых осуществляется ККИ по переменной ρ , выбираем так, чтобы значения выражений $z_j \equiv \rho^2 / (4\tilde{h}_{\tau,j})$ на этих дугах не превосходили единицу, и тогда интегральные показательные функции $Ei(-z_j)$ мы заменяем первыми десятью членами ряда Маклорена и осуществляем аналитическое интегрирование по переменной ρ . В следующей таблице в каждой основной ячейке в соответствующем порядке сверху вниз приведены пять значений среднеквадратичных отклонений приближенных решений от точного решения $\bar{u}_+$: относительное отклонение $\delta\hat{u}_+^{[2]}$ функции $\hat{u}_+^{[2]}$ и абсолютные отклонения $\Delta\hat{u}_+^{[2]}$, $\Delta\tilde{u}_+^{[2]}$, $\Delta\hat{u}_+^{[1]}$, $\Delta\tilde{u}_+^{[1]}$ функций $\hat{u}_+^{[2]}$, $\tilde{u}_+^{[2]}$, $\hat{u}_+^{[1]}$, $\tilde{u}_+^{[1]}$.

Результаты вычислительных экспериментов в основном подтверждают теоретические выводы и демонстрируют существенно более равномерную сходимость относительно j , Y , d сеточных решений $\hat{u}_+^{[2]}$ по сравнению с $\tilde{u}_+^{[1]}$. А именно: скорость сходимости решений $\hat{u}_+^{[1]}$ становится существенно меньше кубической при больших j и малых Y и d , тогда как кубическая скорость сходимости $\hat{u}_+^{[2]}$

Погрешности численных решений

		$Y = 1$				$Y = 0.1$			
		$j = 0$	$j = 10$	$j = 20$	$j = 30$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$R' = 0.999999$	$N = 16$ $L = 6$ $M = 4$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-3}$	$6.9 \cdot 10^{-3}$	$6.9 \cdot 10^{-3}$	$3.8 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-3}$	$6.9 \cdot 10^{-3}$	$6.9 \cdot 10^{-3}$
		$3.2 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-5}$
		$3.2 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-5}$
		$3.2 \cdot 10^{-4}$	$5.9 \cdot 10^{-3}$	$8.0 \cdot 10^{-3}$	$8.0 \cdot 10^{-3}$	$2.9 \cdot 10^{-4}$	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$8.1 \cdot 10^{-3}$	$8.0 \cdot 10^{-3}$
		$3.2 \cdot 10^{-4}$	$5.9 \cdot 10^{-3}$	$8.0 \cdot 10^{-3}$	$8.0 \cdot 10^{-3}$	$2.9 \cdot 10^{-4}$	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$8.1 \cdot 10^{-3}$	$8.0 \cdot 10^{-3}$
	$N = 32$ $L = 14$ $M = 6$	$9.3 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$
		$1.5 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$8.1 \cdot 10^{-6}$	$5.4 \cdot 10^{-6}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$8.1 \cdot 10^{-6}$	$5.4 \cdot 10^{-6}$
		$1.6 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$8.1 \cdot 10^{-6}$	$5.5 \cdot 10^{-6}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$8.2 \cdot 10^{-6}$	$5.4 \cdot 10^{-6}$
		$1.5 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$
		$1.6 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$
	$N = 64$ $L = 30$ $M = 12$	$5.6 \cdot 10^{-6}$	$6.9 \cdot 10^{-5}$	$7.7 \cdot 10^{-5}$	$8.0 \cdot 10^{-5}$	$3.0 \cdot 10^{-5}$	$7.0 \cdot 10^{-5}$	$7.8 \cdot 10^{-5}$	$8.0 \cdot 10^{-5}$
		$8.6 \cdot 10^{-7}$	$9.8 \cdot 10^{-7}$	$5.5 \cdot 10^{-7}$	$3.8 \cdot 10^{-7}$	$2.6 \cdot 10^{-6}$	$9.9 \cdot 10^{-7}$	$5.6 \cdot 10^{-7}$	$3.8 \cdot 10^{-7}$
		$9.7 \cdot 10^{-7}$	$9.9 \cdot 10^{-7}$	$5.6 \cdot 10^{-7}$	$3.9 \cdot 10^{-7}$	$2.6 \cdot 10^{-6}$	$9.9 \cdot 10^{-7}$	$5.6 \cdot 10^{-7}$	$3.8 \cdot 10^{-7}$
		$8.7 \cdot 10^{-7}$	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$8.8 \cdot 10^{-7}$	$2.9 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$
		$9.8 \cdot 10^{-7}$	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$8.8 \cdot 10^{-7}$	$2.9 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$
$R' = 0.9$	$N = 16$ $L = 6$ $M = 4$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$3.1 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$
		$1.6 \cdot 10^{-4}$	$7.6 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-7}$	$6.8 \cdot 10^{-9}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$7.0 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-7}$	$6.6 \cdot 10^{-9}$
		$1.6 \cdot 10^{-4}$	$8.3 \cdot 10^{-6}$	$8.7 \cdot 10^{-7}$	$3.7 \cdot 10^{-7}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$7.0 \cdot 10^{-6}$	$4.0 \cdot 10^{-6}$	$2.8 \cdot 10^{-8}$
		$1.6 \cdot 10^{-4}$	$6.2 \cdot 10^{-4}$	$8.8 \cdot 10^{-5}$	$9.8 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$6.5 \cdot 10^{-4}$	$8.8 \cdot 10^{-5}$	$9.8 \cdot 10^{-5}$
		$1.7 \cdot 10^{-4}$	$6.2 \cdot 10^{-4}$	$8.8 \cdot 10^{-5}$	$9.8 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$6.5 \cdot 10^{-4}$	$8.8 \cdot 10^{-5}$	$9.8 \cdot 10^{-5}$
	$N = 32$ $L = 14$ $M = 6$	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$
		$3.9 \cdot 10^{-6}$	$9.5 \cdot 10^{-7}$	$2.1 \cdot 10^{-8}$	$6.2 \cdot 10^{-10}$	$9.9 \cdot 10^{-6}$	$8.9 \cdot 10^{-7}$	$2.1 \cdot 10^{-8}$	$6.1 \cdot 10^{-10}$
		$4.9 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-6}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$7.3 \cdot 10^{-8}$	$9.9 \cdot 10^{-6}$	$8.9 \cdot 10^{-7}$	$7.1 \cdot 10^{-7}$	$6.7 \cdot 10^{-9}$
		$4.0 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$7.8 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$7.8 \cdot 10^{-5}$
		$5.0 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$7.8 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$7.8 \cdot 10^{-5}$
	$N = 64$ $L = 30$ $M = 12$	$2.1 \cdot 10^{-6}$	$9.1 \cdot 10^{-5}$	$9.1 \cdot 10^{-5}$	$9.3 \cdot 10^{-5}$	$3.0 \cdot 10^{-6}$	$9.3 \cdot 10^{-5}$	$9.4 \cdot 10^{-5}$	$9.6 \cdot 10^{-5}$
		$2.7 \cdot 10^{-7}$	$5.8 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-9}$	$3.8 \cdot 10^{-11}$	$1.7 \cdot 10^{-7}$	$5.5 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-9}$	$3.8 \cdot 10^{-11}$
		$3.1 \cdot 10^{-7}$	$7.5 \cdot 10^{-8}$	$1.7 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$1.7 \cdot 10^{-7}$	$5.5 \cdot 10^{-8}$	$4.7 \cdot 10^{-8}$	$4.1 \cdot 10^{-9}$
		$2.7 \cdot 10^{-7}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$	$2.7 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$2.8 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$
		$3.2 \cdot 10^{-7}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$	$2.7 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$2.8 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$

при этом сохраняется, причем погрешности $\Delta \tilde{u}_+^{[1]}$ значительно превосходят погрешности $\Delta \tilde{u}_+^{[2]}$. Однако скорость сходимости решений $\tilde{u}_+^{[2]}$ при больших j и малых Y снижается при увеличении d , погрешности $\Delta \tilde{u}_+^{[2]}$ значительно возрастают по сравнению с $\Delta \hat{u}_+^{[2]}$, при этом решения $\hat{u}_+^{[2]}$ сходятся с кубической скоростью равномерно по j , Y , d . Дело в том, что при больших значениях d вклад в погрешность высокочастотных гармоник ($j \gg 1$, $Y \ll 1$) от низкочастотных гармоник ($j \approx 1$, $Y \sim 1$) значительно больше, чем при малых значениях d , так как правая часть оценки (20) при больших d стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$ и $Y \rightarrow 0$ значительно быстрее, чем при малых d .

Здесь рассматривались краевые задачи (2) с граничными условиями второго и третьего рода. Аналогичные сеточные решения могут быть построены для такой же первой краевой задачи в соответствии с работой [20].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
2. Onishi K. Convergence in the boundary element method for heat equation // Teaching for Robust Understanding of Mathematics. 1981. V. 17. P. 213–225.
3. Costabel M., Onishi K., Wendland W.L. A boundary element collocation method for the Neumann problem of the heat equation // Inverse and Ill-Posed Problems (H.W. Engl and C.W. Groetsch, ed.). Boston: Academic Press, 1987. P. 369–384.
4. Iso Y., Takahashi S., Onishi K. Numerical convergence of the boundary solutions in transient heat conduction problems // Topics in Boundary Element Research (C.A. Brebbia, ed.). V. 3. Berlin: Springer, 1987. P. 1–24.
5. Hongtao Y. On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation // Mathematics of Computation. 1999. V. 68. No. 226. P. 547–557.
6. Majchrzak E., Ladyga E., Mendakiewicz J., Belkhatat A.P. Different variants of the boundary element method for parabolic equations // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2004. V. 3. No. 1. P. 127–132.
7. Werner-Juszczuk A.J., Sorko S.A. Application of boundary element method to solution of transient heat conduction // Acta Mechanica et Automatica. 2012. V. 6. No. 4. P. 67–74.
8. Kukla S., Siedlecka U. Heat conduction problem in a two-layered hollow cylinder by using the green's function method // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2013. V. 12. No. 2. P. 45–50. DOI: 10.17512/jamcm.2013.2.06.
9. Kukla S., Siedlecka U. Green's function for heat conduction problems in a multi-layered hollow cylinder // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2014. V. 13. No. 3. P. 115–122. DOI: 10.17512/jamcm.2014.3.12.
10. Petres R., Lacerda L.A., Carrer J.A.M. A boundary element formulation for the heat equation with dissipative and heat generation terms // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2015. V. 51. February. P. 191–198. DOI: 10.1016/j.enganabound.2014.11.005.
11. Yang D.-S., Ling J. A new boundary-type mesh-free method for solving the multi-domain heat conduction problem // Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals. 2016. V. 69. No. 2. P. 167–178. DOI: 10.1080/10407790.2015.1092823.
12. Godinho L., Tadeu A., Simões N. Study of transient heat conduction in 2.5D domains using the boundary element method // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2004. V. 28. P. 593–606. DOI: 10.1016/j.enganabound.2003.09.002.
13. Lu X., Tervola P., Viljanen M. Transient analytical solution to heat conduction in composite-circular cylinder // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2006. V. 49. P. 341–348. DOI: 10.1016/j.jheatmasstransfer.2005.06.019.

14. *Asgari M., Akhlaghi M.* Transient heat conduction in two-dimensional functionally graded hollow cylinder with finite length // *Heat Mass Transfer*. 2009. V. 45. P. 1383–1392. DOI: 10.1007/s00231-009-0515-8.
15. *González-Durán J.E.E., Rodríguez-Reséndiz J., Ramirez J.M.O., Zamora-Antuñano M.A., Lira-Cortes L.* Finite-Element Simulation for Thermal Modeling of a Cell in an Adiabatic Calorimeter // *Energies*. 2020. V. 13. No. 9: 2300. 12 p. DOI: 10.3390/en13092300.
16. *Nolasco C., Jácome N.J., Hurtado-Lugo N.A.* Solution by numerical methods of the heat equation in engineering applications. A case of study: Cooling without the use of electricity // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. V. 1388: 012034. 7 p. DOI: 10.1088/1742-6596/1388/1/012034.
17. *Marchesse Y., Changenet C.* Forced convective heat transfer over a non-circular slender cylinder // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2008. V. 223. No. 2. P. 427–437. DOI: 10.1243/09544062jmes1182.
18. *Иванов Д.Ю.* О решении плоских задач нестационарной теплопроводности коллокационным методом граничных элементов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2017. № 50. С. 9–29. DOI: 10.17223/19988621/50/2.
19. *Иванов Д.Ю.* Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. № 57. С. 5–25. DOI: 10.17223/19988621/57/1.
20. *Иванов Д.Ю.* Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы двумерной области с помощью полуаналитической аппроксимации теплового потенциала двойного слоя // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 65. С. 30–52. DOI: 10.17223/19988621/65/3.
21. *Иванов Д.Ю.* Экономичный метод вычисления операторов, разрешающих некоторые задачи теплопроводности в прямых цилиндрах // *Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук*. 2014. № 9. С. 16–32.
22. *Иванов Д.Ю.* Вычисление операторов, разрешающих задачи теплопроводности в прямых цилиндрах, с использованием полугрупповой симметрии // *Известия Московского государственного технического университета МАМИ*. 2014. Т. 4. № 4 (22). С. 26–38.
23. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1979. 685 с.
24. *Иванов Д.Ю.* Замкнутость сумм неограниченных операторов, действующих по разным переменным в пространствах квадратично суммируемых функций нескольких переменных // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2017. № 45. С. 35–48. DOI: 10.17223/19988621/45/3.
25. *Лянцэ В.Э., Сторож О.Г.* Методы теории неограниченных операторов. Киев: Наукова думка, 1983. 212 с.
26. *Иванов Д.Ю.* Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам диффузии на прямом цилиндре // *Дифференц. уравнения*. 2010. Т. 46. № 8. С. 1094–1103. DOI: 10.1134/S0012266110080045.
27. *Иванов Д.Ю., Дзержинский Р.И.* Решение задач Робена для двумерных дифференциально-операторных уравнений, описывающих теплопроводность в прямом цилиндре // *Научно-технический вестник Поволжья*. 2016. № 1. С. 15–17.
28. *Иванов Д.Ю.* Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2015. № 38. С. 33–45. DOI: 10.17223/19988621/38/4.
29. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 551 с.
30. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 636 с.

Статья поступила 08.09.2020 г.

Ivanov D.Y. (2021) ON THE JOINT APPLICATION OF THE COLLOCATION BOUNDARY ELEMENT METHOD AND THE FOURIER METHOD FOR SOLVING PROBLEMS OF HEAT CONDUCTION IN FINITE CYLINDERS WITH SMOOTH DIRECTRICES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 15–38

DOI 10.17223/19988621/72/2

Keywords: unsteady heat conduction, boundary integral equations, boundary element, collocation, uniform convergence, stability, non-circular cylinder, Fourier method, dissipation.

Here we consider the initial-boundary value problems in a homogeneous cylindrical domain $\Omega_+ \times I_Y$ (Ω_+ is an open two-dimensional bounded simply connected domain with a boundary $\partial\Omega \in C^5$, $\Omega_- \equiv \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega_+}$ is the open exterior of the domain Ω_+ , $I_Y \equiv [0, Y]$ is the height of the cylinder) on a time interval $I_T \equiv [0, T]$. The initial conditions and the boundary conditions on the bases of the cylinder are zero, and the boundary conditions on the lateral surface of the cylinder are given by the function $w(x_1, x_2, y, t)$ ($(x_1, x_2) \in \partial\Omega$, $y \in I_Y$, $t \in I_T$). An approximate solution of such problems is obtained through the combined use of the Fourier method and the collocation boundary element method based on piecewise quadratic interpolation (PQI). The solution to the problem in the cylinder is expanded in a Fourier series in terms of eigenfunctions of the operator $B_y \equiv \partial_{yy}^2$ with the corresponding zero boundary conditions. The coefficients of such a Fourier series are solutions of problems for two-dimensional heat equations $\nabla^2 u = \partial_t u + k^2 u$. With a low smoothness of the functions w in the variable y , the weight of solutions at large values of k increases and the accuracy of solving the problem in the cylinder decreases. To maintain accuracy on a uniform grid, the step of discretization of the boundary function w with respect to the variable y is decreased by a factor of j . Here j is an averaged value of the quantity Yk/π depending on the function w . In addition, the steps of discretization of functions $\exp(-k^2 \tau)$ with respect to the variable τ in domains $\tau \leq \pi T/k$ are reduced by a factor of k^2/π^2 . The steps in the remaining ranges of values τ and the steps by the other variables remain unchanged.

The approximate solutions obtained on the basis of this procedure converge stably to exact solutions in the $L_2(I_Y \times I_T)$ -norm with a cubic velocity uniformly with respect to sets of functions w , bounded by norm of functions with low smoothness in the variable y , uniformly along the length of the generatrix of the cylinder Y , and uniformly in the domain Ω . The latter is also associated with the use of PQI along the curve $\partial\Omega$ over the variable $\rho \equiv \sqrt{r^2 - d^2}$, which is carried out at small values of r (d and r are the distances from the observed point of the domain Ω to the boundary $\partial\Omega$ and to the current point of integration along $\partial\Omega$, respectively).

The theoretical conclusions are confirmed by the results of the numerical solution of the problem in a circular cylinder, where the dependence of the boundary functions w on y is given by the normalized eigenfunctions of the differential operator B_y , which vary in a sufficiently large range of values of k .

AMS Mathematical Subject Classification: 65J10, 65N38, 80M15

Dmitry Y. IVANOV (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russian Federation). E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

REFERENCES

1. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. (1984) *Boundary element techniques*. New York: Springer-Verlag.
2. Onishi K. (1981) Convergence in the boundary element method for heat equation. *Teaching for Robust Understanding of Mathematics*. 17. pp. 213–225.
3. Costabel M., Onishi K., Wendland W.L. (1987) A boundary element collocation method for the Neumann problem of the heat equation. *Inverse and Ill-Posed Problems* (H.W. Engl and C.W. Groetsch, eds.). Boston: Academic Press. pp. 369–384.
4. Iso Y., Takahashi S., Onishi K. (1987) Numerical convergence of the boundary solutions in transient heat conduction problems. *Topics in Boundary Element Research* (C.A. Brebbia, ed.), Vol. 3. Berlin: Springer. pp. 1–24.
5. Hongtao Y. (1999) On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation. *Mathematics of Computation*. 68 (226). pp. 547–557.
6. Majchrzak E., Ładyga E., Mendakiewicz J., Belkhayat A.P. (2004) Different variants of the boundary element method for parabolic equations. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. 3(1). pp. 127–132.
7. Werner-Juszczuk A.J., Sorko S.A. (2012) Application of boundary element method to solution of transient heat conduction. *Acta Mechanica et Automatica*. 6 (4). pp. 67–74.
8. Kukla S., Siedlecka U. (2013) Heat conduction problem in a two-layered hollow cylinder by using the green's function method. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. 12(2). pp. 45–50. DOI: 10.17512/jamcm.2013.2.06.
9. Kukla S., Siedlecka U. (2014) Green's function for heat conduction problems in a multi-layered hollow cylinder. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. 13(3). pp. 115–122. DOI: 10.17512/jamcm.2014.3.12.
10. Pettres R., Lacerda L.A., Carrer J.A.M. (2015) A boundary element formulation for the heat equation with dissipative and heat generation terms. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 51 (February). pp. 191–198. DOI: 10.1016/j.enganabound.2014.11.005.
11. Yang D.-S., Ling J. (2016) A new boundary-type mesh-free method for solving the multi-domain heat conduction problem. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*. 69(2). pp. 167–178. DOI: 10.1080/10407790.2015.1092823.
12. Godinho L., Tadeu A., Simões N. (2004) Study of transient heat conduction in 2.5D domains using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 28. pp. 593–606. DOI: 10.1016/j.enganabound.2003.09.002.
13. Lu X., Tervola P., Viljanen M. (2006) Transient analytical solution to heat conduction in compositecircular cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 49. pp. 341–348. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.06.019.
14. Asgari M., Akhlaghi M. (2009) Transient heat conduction in two-dimensional functionally graded hollow cylinder with finite length. *Heat Mass Transfer*. 45. pp. 1383–1392. DOI: 10.1007/s00231-009-0515-8.
15. González-Durán J.E.E., Rodríguez-Reséndiz J., Ramirez J.M.O., Zamora-Antuñano M.A., Lira-Cortes L. (2020) Finite-element simulation for thermal modeling of a cell in an adiabatic calorimeter. *Energies*. 13(9), 2300. DOI: 10.3390/en13092300.
16. Nolasco C., Jácome N.J., Hurtado-Lugo N.A. (2019). Solution by numerical methods of the heat equation in engineering applications. A case of study: Cooling without the use of electricity. *Journal of Physics: Conference Series*. 1388, 012034. DOI: 10.1088/1742-6596/1388/1/012034.
17. Marchesse Y., Changenet C. (2008) Forced convective heat transfer over a non-circular slender cylinder. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 223(2). pp. 427–437. DOI: 10.1243/09544062jmes1182.
18. Ivanov D.Yu. (2017) O reshenii ploskikh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti kollokatsionnym metodom granichnykh elementov [On the solution of plane problems of non-stationary heat conduction by the boundary element collocation method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 9–29. DOI: 10.17223/19988621/50/2.

19. Ivanov D.Yu. (2019) Utochneniye kollokatsionnogo metoda granichnykh elementov vblizi granitsy oblasti v sluchaye dvumernykh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti s granichnymi usloviyami vtorogo i tret'yego roda [A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of domain in the case of two-dimensional problems of non-stationary heat conduction with boundary conditions of the second and third kind]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 5–25. DOI: 10.17223/19988621/57/1.
20. Ivanov D.Yu. (2020) Utochneniye kollokatsionnogo metoda granichnykh elementov vblizi granitsy dvumernoy oblasti s pomoshch'yu poluanaliticheskoy approksimatsii teplovogo potentsiala dvoynogo sloya [A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of a two-dimensional domain using semianalytic approximation of the double layer heat potential]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 30–52. DOI: 10.17223/19988621/65/3.
21. Ivanov D.Yu. (2014) Ekonomichnyy metod vychisleniya operatorov, razreshayushchikh nekotorye zadachi teploprovodnosti v pryamykh tsidindrakh [An economical method for calculating operators that solve some heat conduction problems in direct cylinders]. *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk*. 9. pp. 16–32.
22. Ivanov D.Yu. (2014) Vychisleniye operatorov, razreshayushchikh zadachi teploprovodnosti v pryamykh tsilindrakh, s ispol'zovaniyem polugruppovoy simmetrii [Calculation of operators, which solve problems of heat conduction in straight cylinders using semigroup symmetry]. *Izvestiya Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta MAMI – Proceedings of Moscow State Technical University MAMI*. 4 (22). pp. 26–38.
23. Budak B.M., Samarskiy A.A., Tikhonov A.N. (1979) *Sbornik zadach po matematicheskoy fizike* [Collection of problems in mathematical physics]. Moscow: Nauka.
24. Ivanov D.Yu. (2017) Zamknutost' summ neogranichennykh operatorov, deystvuyushchikh po raznym peremennym v prostranstvakh kvadrachno summiruyemykh funktsiy neskol'kikh peremennykh [Closedness of sums of unbounded operators acting on different variables in the spaces of square-integrable functions of several variables]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 45. pp. 35–48. DOI: 10.17223/19988621/45/3.
25. Lyantse V.E., Storozh O.G. (1983) *Metody teorii neogranichennykh operatorov* [Methods of the Theory of Unbounded Operators]. Kyiv: Naukova dumka.
26. Ivanov D.Yu. (2010) Solution of two-dimensional boundary-value problems corresponding to initial-boundary value problems of diffusion on a right cylinder. *Differential Equations*. 46(8). pp. 1104–1113. DOI: 10.1134/S0012266110080045.
27. Ivanov D.Yu., Dzerzhinskiy R.I. (2016) Resheniye zadach Robena dlya dvumernykh differentsial'no-operatornykh uravneniy, opisyyayushchikh teploprovodnost' v pryamom tsilindre [Solution of the Robin problems for two-dimensional differential-operator equations describing the thermal conductivity in a straight cylinder]. *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik Povolzh'ya – Scientific and Technical Journal of the Volga Region*. 1. pp. 15–17.
28. Ivanov D.Yu. (2015) Ustoychivaya razreshimost' v prostranstvakh differentsiruyemykh funktsiy nekotorykh dvumernykh integral'nykh uravneniy teploprovodnosti s operatorno-polugruppovym yadrom [Stable solvability in spaces of differentiable functions of some two-dimensional integral equations of heat conduction with an operator-semigroup kernel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 38. pp. 33–45. DOI: 10.17223/19988621/38/4.
29. Smirnov V.I. (1964) *Kurs vysshey matematiki* [A course of higher mathematics]. Vol. 4. Part II. Moscow: Nauka.
30. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. (2008) *Chislennyye metody*. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy.

Received: September 8, 2020

МЕХАНИКА

УДК 621.735.043

DOI 10.17223/19988621/72/3

А.Ю. Албагачиев, А.М. Моисеенко, Е.В. Зернов, А.В. Лутьянов**ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НАПЛЫВА ПРИ ВНЕДРЕНИИ
ПАРАБОЛОИДНОГО ИНДЕНТОРА В ПОЛУПРОСТРАНСТВО**

Разработан метод приближенного аналитического определения геометрических параметров высоты и длины наплыва в зависимости от глубины внедрения параболоида в упругопластическое полупространство. Проведены опыты по индентированию образцов технического пластилина индентором, имеющим форму параболоида вращения с измерением параметров наплыва и давления. Теоретически полученные данные показали удовлетворительное соответствие экспериментальным.

Ключевые слова: *индентор, высота и длина наплыва, упругопластическое внедрение, пластическое течение, напряжения и деформации при индентировании.*

Вопросам индентирования материалов в машиностроении, металлургии, строительстве, механике грунтов и т.д. уделено много внимания. С помощью индентирования определяют твердость материалов, конструкций, исследуют состояние и определяют степень упрочнения поверхностного слоя после механической обработки. Установлено, что процесс внедрения индентора в полупространство можно разделить на три стадии [1–3]: упругого контакта, стесненного упруго-пластического состояния, когда исследуемый материал в области, примыкающей к вершине конического или сферического индентора, уже находится в состоянии пластического течения, а в области у свободной поверхности сохраняется упругое состояние и стадии развитой пластической деформации, когда вся область, прилегающая к поверхности индентора, находится в состоянии пластического течения и материал выходит на свободную поверхность, соприкасаясь с индентором, образуя наплыв.

Для изучения напряженно-деформированного состояния поверхностного слоя важно определить глубину и диаметр отпечатка в зависимости от глубины внедрения индентора и геометрические параметры наплыва на различных стадиях внедрения. Первые две стадии достаточно подробно изучены и приведены во многих работах, из которых наиболее часто цитируемы [1, 5]. Однако в них не приводится достаточно сведений о количественных прочностных характеристиках материала на этих стадиях (напряжения, деформации) для различных материалов. Меньше изучена стадия развития пластического течения [6, 7]. Недостаточно данных о прочностных и геометрических параметрах слоя, в то время как они являются определяющими при оценке степени наклепа. В предлагаемой статье изложен метод приближенного определения геометрических параметров на-

плыва от высоты Δh и длины l (рис. 1) в зависимости от глубины внедрения и проведены опыты по индентированию образцов технического пластилина индентором, имеющим форму параболоида вращения с замером Δh и l и усилия давления. Проверялась согласованность теоретически полученных данных с экспериментальными.

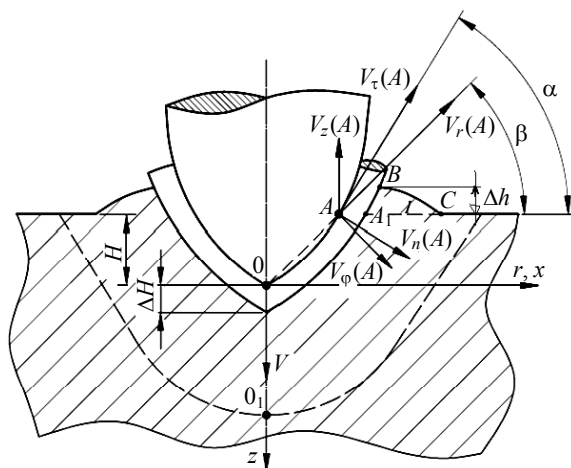


Рис. 1. Схема при внедрении параболоида в полупространство

Fig. 1. Scheme of the paraboloid embedded into a half-space

Пусть индентор в форме параболоида вращения первоначально заглублен в плиту на глубину H и движется вертикально с постоянной скоростью V . На стадии упругого контакта материал увлекается (прогибается) индентором в направлении скорости его перемещения, образуя лунку, диаметр которой приблизительно в 1.5 раза больше (для пластилина) диаметра окружности в сечении индентора свободной поверхностью. На второй стадии по мере углубления движения материала вниз замедляется и он приходит в соприкосновение с поверхностью индентора на всей глубине его внедрения H . В этот момент начинается выход материала на поверхность, т.е. образование наплыва. Таким образом, образование наплыва начинается на стадии развитого пластического течения.

Определим сначала скорости V_r , V_ϕ движения частиц материала в сферической системе координат (ϕ, ϑ, r) с началом в точке 0, где ϕ и ϑ соответственно полярный и аксиальный углы (рис. 1), а затем геометрические параметры наплыва – длину $l = AC$ и высоту Δh при погружении индентора на глубину ΔH . Одновременно удобно пользоваться декартовой системой координат $xoyz$ с тем же началом в точке 0 (рис. 1). Зададим тангенциальную скорость частицы материала из соотношений выполнения граничных условий:

$$V_\phi = V \left(\frac{C_1 r^2}{H^2} + \frac{C_2 r}{H} + C_3 \right) \sin \phi. \quad (1)$$

Радиальную скорость получим из условия несжимаемости:

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2V_r}{r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + V_\phi \cotg \phi \right).$$

Решая это уравнение, получим

$$V_r = -2V \left(\frac{C_1 r^2}{4H^2} + \frac{C_2 r}{3H} + \frac{C_3}{2} \right) \cos \varphi + F(\varphi). \quad (2)$$

При $F(\varphi) = 0$ выполняется граничное условие в точке 0: $V_r(\varphi = r = 0) = V$ при $C_3 = -1$. Определяем остальные коэффициенты C_1, C_2 из следующих граничных условий:

$$1) \frac{\partial V_r(0)}{\partial r} = 0 \text{ — условие, указывающее, что радиальная скорость материала в}$$

точке 0, максимальна, т.е. выполняется равенство $-2V \left(\frac{C_1 r}{2H^2} + \frac{C_2}{3H} \right) = 0$. Откуда

$$C_2 = 0.$$

2) $V_r(0_1) = 0$, где точка 0_1 принадлежит линии, ограничивающей очаг пластической деформации (рис. 1). Из этого условия получим $r_{0_1} = \frac{2H^2}{C_1}$.

3) Условия $V_r(0) = V$ и $V_\varphi(0) = 0$ выполняются тождественно. Итак, после использования граничных условий формулы для компонент скоростей материала имеют вид

$$V_\varphi = V \left(\frac{C_1 r^2}{H^2} - 1 \right) \sin \varphi, \quad V_r = V \left(1 - \frac{C_1 r^2}{2H^2} \right) \cos \varphi.$$

4) В точке A пересечения параболы $Z = -\kappa x^2$ со свободной поверхностью $Z = -H_0$ имеем

$$V_\tau(A) = V_n(A) \sin(\alpha - \beta) + V_r(A) \cos(\alpha - \beta); \quad (3)$$

$$V_\varphi(A) = V_n(A) \cos(\alpha - \beta) - V_\tau(A) \sin(\alpha - \beta), \quad (4)$$

где $V_n(A), V_r(A)$ — нормальная и касательная компоненты скорости материала в точке A , $V_n(A) = V \cos \beta$, где $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{H\kappa}$, $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{H\kappa}$. Подставим в левые части выражений (3) и (4) $V_\varphi(A)$ и $V_r(A)$ и, исключив $V_\tau(A)$, получим

$$C_1 = \frac{\cos \beta + \sin \beta \sin(\alpha - \beta) - \cos \beta \cos(\alpha - \beta)}{\sin \beta 0.5 \sin \beta \sin(\alpha - \beta) + \cos \beta \cos(\alpha - \beta)}.$$

Высоту наплыва Δh определяем из отношения: $\frac{\Delta h}{\Delta H} = \frac{V_z(A)}{V}$, полученное из условия: $\Delta h = V_z t$, $\Delta H = Vt$, где t — время заглубления на Δh , $V_z(A)$ — вертикаль-

ная скорость частицы в точке A $\left(\varphi_A = 90 + \beta, r_A = \sqrt{H^2 + \frac{H}{\kappa}} \right)$, где $\kappa \left[\frac{1}{\text{м}} \right]$ — па-

раметр параболы $z = \kappa x^2$. Длину наплыва $l = A_1 C$ определим из условия: $V_1 = V_2$, где V_1 — объем лунки, образовавшейся при погружении индентора на глубину ΔH :

$$V_1 = \frac{\pi(H + \Delta H)^2}{2\kappa} - \frac{\pi H^2}{2\kappa} = \frac{\pi}{2\kappa}(2H \cdot \Delta H + \Delta H^2),$$

V_2 – объем наплыва вокруг индентора, образовавшийся при внедрении индентора на глубину ΔH . Сечение наплыва осевой плоскостью представлено в виде треугольника ABC (рис. 1).

$$V_2 = \frac{2}{3} \pi S (x_{A_1} + x_B + x_C),$$

где $S = \frac{1}{2} l \cdot \Delta h$, $x_{A_1} \cong x_B = \sqrt{\frac{H + \Delta H}{\kappa}}$; $x_C = x_{A_1} + l$, где l – длина наплыва (рис. 1),

тогда из условия $V_1 = V_2$ получим

$$l = \frac{1}{2} \left[-3 \sqrt{\frac{H + \Delta H}{\kappa}} + \sqrt{\left(3 \sqrt{\frac{H + \Delta H}{\kappa}} \right)^2 + \frac{6(2H \cdot \Delta H + \Delta H^2)}{\kappa \cdot \Delta h}} \right].$$

Перейдем к определению напряжений. Для рассматриваемой жесткопластической модели их определяют по формулам Леви – Мизеса:

$$\sigma_r = \sigma + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\xi_i} \xi_r,$$

где σ – среднее напряжение;

$$\sigma_\varphi = \sigma + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\xi_i} \xi_\varphi,$$

где σ_i – интенсивность напряжений;

$$\sigma_\theta = \sigma + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\xi_i} \xi_\theta,$$

где ξ_i – интенсивность скоростей деформаций и деформаций сдвигов;

$$\tau_{\varphi r} = \frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{\xi_i} \xi_{\varphi r}, \quad \xi_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\xi_r - \xi_\varphi)^2 + (\xi_r - \xi_\theta)^2 + (\xi_\varphi - \xi_\theta)^2} + \frac{3}{2} \xi_{\varphi r}^2.$$

Применяем условие пластичности

$$\sigma_i = \sigma_T, \text{ где } \sigma_T - \text{предел текучести}$$

и ввиду сложности выражения для ξ_i , принимаем её постоянной и равной

$$\xi_i = \xi_i(r_1, \varphi_1), \text{ где } r_1 = r_{0_1}, \varphi_1 = \varphi_A/2.$$

Используя выражения (1) и (2) для скоростей, получим

$$\xi_r = \frac{\theta V_2}{\partial r} = -2V \left(\frac{C_1 r}{2H^2} \right) \cos \varphi, \quad \xi_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} + V_r \right) = V \left(\frac{C_1 r}{2H^2} \right) \cos \varphi,$$

$$\xi_\theta = \frac{1}{r} (V_\varphi \operatorname{ctg} \varphi + V_r) = V \left(\frac{C_1 r}{2H^2} \right) \cos \varphi,$$

$$\xi_{\varphi 2} = \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} = V \left(\frac{3}{2} \frac{C_1 r}{H^2} \right) \sin \varphi.$$

Итак $\xi_\varphi = \xi_\theta$, т.е. $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$, а значит, уравнение (3), например, можно исключить. Тогда, учитывая выражения для ξ_r и ξ_φ , получим

$$\sigma_r = \sigma + \frac{2}{3} \frac{\sigma_\tau}{\xi_i} \left[-2V \left(\frac{C_1 r}{2H^2} \right) \cos \varphi \right],$$

$$\sigma_\varphi = \sigma + \frac{2}{3} \frac{\sigma_\tau}{\xi_i} \left[V \left(\frac{C_1 r}{2H^2} \right) \cos \varphi \right].$$

Вычитая из второго выражения первое, получим

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = \frac{2}{3} \frac{\sigma_\tau}{\xi_i} V \cos \varphi \left(\frac{3}{2} \frac{C_1 r}{H^2} \right).$$

Второе условие для определения σ_φ, σ_r получим из уравнения равновесия, которое при условии $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} = - \left(r \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} + 3 \tau_{\varphi r} \right), \text{ где } \tau_{\varphi r} = \frac{1}{3} \frac{\sigma_\tau}{\xi_i} V \sin \varphi \left(\frac{3}{2} \frac{C_1 r}{H^2} \right).$$

После интегрирования получим

$$\sigma_\varphi = 2 \frac{\sigma_r}{\xi_i} V \cos \varphi \left(\frac{C_1 r}{H^2} + \frac{C_2}{3H} \right) + F_1(r).$$

При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\sigma_\varphi = F_1(r)$. Тогда, учитывая, что σ_φ убывает при увеличении r , представим $F_1(r)$ так:

$$F_1(r) = \frac{V \sigma_\tau}{\xi_i} \left(\frac{\kappa_1 r}{H^2} + \frac{\kappa_2}{H} \right),$$

где κ_1, κ_2 – коэффициенты, подлежащие определению. Тогда выражения для σ_r и σ_φ имеют вид

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_\tau}{\xi_i} V \left[\cos \varphi \left(\frac{2C_1 r}{H^2} \right) + \frac{\kappa_1 r}{H^2} + \frac{\kappa_2}{H} \right],$$

$$\sigma_r = \frac{\sigma_\tau}{\xi_i} V \left[\cos \varphi \frac{C_1 r}{H^2} + \frac{\kappa_1 r}{H^2} + \frac{\kappa_2}{H} \right],$$

Так как в точке 0 материал находится в состоянии пластического течения, то в ней можно принять

$$\sigma_r = \sigma_n = \sigma_\tau = \frac{\sigma_\tau}{\xi_i} V \frac{\kappa_2}{H}, \text{ откуда } \kappa_2 = \frac{\xi_i H}{V}.$$

В точке A $\left(\varphi_A = 90 + \beta, r_A = \sqrt{H^2 + \frac{H}{\kappa}} \right)$, $\beta = \arctg \sqrt{H\kappa}$, касательное напряжение сдвига

$$\tau_{\varphi r} = \frac{1}{3} \frac{\sigma_\tau}{\xi_i} \sin \varphi_A V \left(\frac{3}{2} \frac{C_1 r_A}{H^2} \right). \quad (5)$$

По закону Кулона $\tau_{\varphi r} = \sigma_n f$, где f – коэффициент внешнего трения,

$$\sigma_n(A) = \sigma_\varphi(A) \cos(\alpha - \beta) - \sigma_r(A) \sin(\alpha - \beta).$$

Подставляя выражения для $\tau_{\varphi r}$ и σ_n в (5), получим выражение для отыскания коэффициента

$$\kappa_1 = \frac{A - B}{C}, \text{ где } A = \frac{1}{2} \frac{C_1 r_A \sin \varphi_A}{f H^2},$$

$$B = \cos \varphi_A \left[\sin(\alpha - \beta) \left(\frac{C_1 r_A}{H^2} + \frac{\kappa_2}{H} \right) - \cos(\alpha - \beta) \left(\frac{2C_1 r_A}{H^2} + \frac{\kappa_2}{H} \right) \right],$$

$$C = \frac{r_A}{H^2} [\sin(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \cos \varphi_A.$$

Для проверки точности формул для скоростей V_r, V_φ , определяющих параметров наплыва Δh и l , проводились опыты с идентифицированием образцов из технического пластилина $\left(\sigma_t = 2 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}, E = 30 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} \right)$, представляющих собой плиты размерами $130 \times 105 \times 35$ мм с различными по форме параболическими инденторами, с учетом рекомендаций ГОСТ 56232-2014. После каждого опыта образец разрезался осевой плоскостью и замерялись параметры Δh и l для каждой глубины H погружения индентора.

Опыт для каждой глубины повторялся 3 раза при температуре 21–22 °С. Контактные поверхности смазывались тальком. Опытные результаты по замеру параметров наплыва для каждой глубины погружения H (мм) индентора с уравнением поверхности параболического: $Z = \kappa \cdot r^2$, где $\kappa = 0.067 \frac{1}{\text{мм}}$, приведены в таблице.

Экспериментальные данные по замеру параметров наплыва

Глубина внедрения, H	Высота наплыва, Δh	Длина наплыва, l
7	1.5	11.2
13	2.6	13.0
18	3.5	14.5

Для примера рассмотрим определение параметров наплыва при погружении индентора с параметром $\kappa = 0.067$ по нижеприведенным зависимостям, со следующими входными данными $V = 1$ мм/с, $H_0 = 1$ мм, $\Delta H = 0,1$ мм. Осуществляя пошаговые вычисления Δh и l при достижении глубины внедрения $H = 7$ мм, получили $\Delta h = 1.9$ мм, $l = 9.4$ мм. Результаты удовлетворительно согласуются с опытными данными таблицы.

В работах некоторых исследователей [1, 3] отмечается, что при идентифицировании стальных образцов между материалом и индентором образуется жесткая зона. Для изучения этой особенности при идентифицировании образцов из пластилина брали двуслойный образец из слоев разного цвета. Верхний – телесного цвета, толщиной 5 мм, нижний – черного цвета толщиной 35 мм.

На рис. 2 показан разрез плиты осевой плоскостью в результате погружения индентора на 18 мм. Контактный слой телесного слоя имеет толщину 1.2–1.5 мм, остальной материал верхнего слоя переместился в напыл. Отсюда можно сделать вывод, что в случае индентирования образцов из пластилина жесткая зона имеет незначительную толщину или отсутствует.

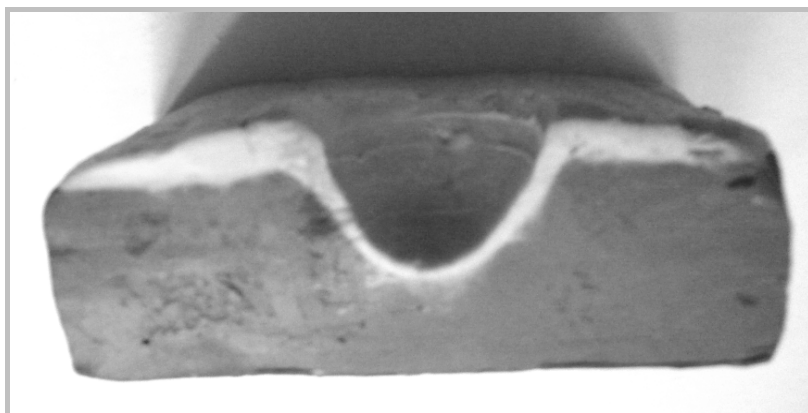


Рис. 2. Образование напыла после внедрения параболоида на 18 мм

Fig. 2. Sag formation following the paraboloid embedding by 18 mm

Заключение

Разработанный метод приближенного аналитического определения геометрических параметров высоты и длины напыла в зависимости от глубины внедрения параболоида в упругопластическое полупространство показал удовлетворительное соответствие экспериментальным результатам. Полученные аналитические зависимости для расчета скоростей $V_r = V_\phi$ позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние материала в поверхностном слое полупространства и при других похожих процессах механической обработки, например, дробеударной обработки поверхностного слоя и резания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев И.В. Основы выбора режима, упрочняющего поверхностный наклеп. М.: Машиностроение, 1965. 108 с.
2. Саверин М.М. Дробеструйный наклеп. М.: Машгиз, 1955. 316 с.
3. Петросов В.В. Дробеструйное упрочнение деталей и инструмента. М.: Машиностроение, 1977. 173 с.
4. Булычев С.И. О корреляции диаграмм вдавливания и растяжения // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. № 11. С. 33–41.
5. Огар П.М., Тарасов В.Л., Дайнеко А.Л. К вопросу упругопластического внедрения сферического индентора // Системы. Методы. Технологии. 2009. № 4. С. 17–19.
6. Максименко А.А., Котенева Н.В., Перфильева А.Д. Исследование нормальных напряжений при упругопластическом контактом взаимодействии // Ползуновский вестник. 2009. № 1–2. С. 264–267.
7. Сапожников С.Б., Игнатова А.В. Исследование механических свойств технического пластилина при квазистатическом и динамическом деформировании // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 2. С. 210–219.

8. Воронцов А.Л., Стротьев В.К., Ступников В.П. О пробе Бринелля и внедрении Пуансона в тело больших поперечных размеров // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Машиностроение». 2012. № 2. С. 12–21.
9. Албагачиев А.Ю., Моисеенко А.М., Якобовская И.М., Зернов Е.В. Напряжённо-деформированное состояние тонкой квадратной заготовки при её осадке шероховатыми плитами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 49. С. 75–80.
10. Lida K. Dent and affected layer produced by shot peening // The second international conference on shot peening (ICSP2). Paris, 1984. P. 283–292.
11. Prevey P.S., Cammett J.T. The effect of shot peening coverage on residual stress, cold work and fatigue in Ni-Cr-Mo low alloy steel // The eighth international conference on shot peening (ICSP8). Leipzig, 2002. P. 1–7.
12. Beidokhti H.N. et al. A comparison between dynamic implicit and explicit finite element simulations of the native knee joint // Med. Eng. Phys. 2016. V. 38. P. 1123–1130.

Статья поступила 05.09.2020

Albagachiev A.Yu., Moiseenko A.M., Zernov E.V., Lut'yanov A.V. (2021) APPROXIMATE DETERMINATION OF GEOMETRIC PARAMETERS OF THE SAG FOLLOWING THE EMBEDDING OF A PARABOLOID INDENTER INTO A HALF-SPACE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 39–47

DOI 10.17223/19988621/72/3

Keywords: indenter, sag height and length, elastic-plastic embedding, plastic flow, stresses and strains during indentation.

The problem of the indenter embedding into a half-space is formulated and solved. A concept of the elastic contact is used, which implies the uniformity of the stress-strain state in a surface layer. The process of the surface layer formation after mechanical treatment is studied. Based on the general theory of indenter penetration into a half-space, numerical and analytical solutions, determining the length and depth of penetration of a paraboloid into elastoplastic space, are obtained. According to the theory of indentation, the problem is reduced to the use of the method of approximate determination of geometric parameters of a bead, when a paraboloid is being embedded into elastoplastic space. An exact solution to the formulated problem allows one to obtain analytical dependences for calculating the velocities and to study the stress-strain state of the material in the half-space surface layer during the processing. The reliability of the obtained analytical solution is confirmed by numerical calculations without introducing additional hypotheses.

Based on the analytical solution, the geometric parameters of the influx from the penetration depth are determined. Calculations can be performed at any embedding depth. Sag formation during the indenter embedding by 18 mm into plasticine specimens is considered as an example. It is shown that the rigid zone is insignificant or absent.

Ali Yu. ALBAGACHIEV (Doctor of Technical Sciences, Professor, IMASH RAS, Moscow, Russian Federation). E-mail: albagachiev@yandex.ru

Anatoliy M. MOISEENKO (Doctor of Technical Sciences, Professor, Orel Branch of VEPI, Orel, Russian Federation). E-mail: puare54@yandex.ru

Evgeniy V. ZERNOV (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, RTU-MIREA, Moscow, Russian Federation). E-mail: zernov1935@mail.ru

Aleksandr V. LUT'YANOV (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, RTU-MIREA, Moscow, Russian Federation). E-mail: alou99@mail.ru

REFERENCES

1. Kudryavtsev I.V. (1965) *Osnovy vybora rezhima uprochnyayushchego poverkhnostnyy naklep* [Basis for a choice of the mode of hardening surface cold working]. Moscow: Mashgiz.
2. Saverin M.M. (1955) *Drobestruyny naklep* [Peen hardening]. Moscow: Mashgiz.
3. Petrosov V.V. (1977) *Drobestruynoe uprochnenie detaley i instrumenta* [Peen hardening of component parts and tools]. Moscow: Mashgiz.
4. Bulychev S.I. (2001) O korrelyatsii diagramm vдавlivaniya i rastyazheniya [On the correlation of indentation and tension diagrams]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov – Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials*. 11. pp. 33–41.
5. Ogar P.M., Tarasov V.L., Dayneko A.L. (2009) K voprosu uprugoplasticheskogo vnedreniya sfericheskogo indentora [On the issue of the elastic-plastic penetration of a spherical indenter]. *Sistemy. Metody. Tekhnologii – Systems. Methods. Technologies*. 4. pp. 17–19.
6. Maksimenko A.A., Koteneva N.V., Perfil'eva A.D. (2009) Issledovanie normal'nykh napryazheniy pri uprugoplasticheskom kontaktnom vzaimodeystvii [Study of normal stresses during elastoplastic contact interaction]. *Polzunovskiy vestnik*. 1–2. pp. 264–267.
7. Sapozhnikov S.B., Ignatova A.V. (2014) Issledovanie mekhanicheskikh svoystv tekhnicheskogo plastilina pri kvazistaticheskom i dinamicheskom deformirovanii [Mechanical properties of technical plasticine under static and dynamic loadings]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 2. pp. 210–219.
8. Vorontsov A. L., Strot'ev V.K., Stupnikov V.P. (2012) O probe Brinellya i vnedrenii Puanсона v telo bol'shikh poperechnykh razmerov [On Brinell test and the Punch indentation into a body with large cross section]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya «Mashinostroyeniye» – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*. 2. pp. 12–21.
9. Albagachiev A.Yu., Moiseenko A.M., Yakobovskaya I.M., Zernov E.V. (2017) Napryazhenno-defomirovannoe sostoyanie tonkoy kvadratnoy zagotovki pri ee osadke sherokhovatyimi plitami [A stress-strain state of the thin square workpiece during upsetting by the rough plates]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 75–80. DOI: 10.17223/19988621/49/7.
10. Lida K. (1984) Dent and affected layer produced by shot peening. *Proceedings of the 2nd International Conference on Shot Peening (ICSP2)*. pp. 283–292.
11. Prevey P. S. (2002) The effect of shot peening coverage on residual stress, cold work and fatigue in Ni-Cr-Mo low alloy steel. *Proceedings of the 8th International Conference on Shot Peening (ICSP8), Leipzig*. pp. 1–7.
12. Beidokhti H.N., Janssen D., Khoshgoftar M., Sprengers A., Perdahcioglu E.S., Van den Boogaard T., Verdonschot N. (2016) A comparison between dynamic implicit and explicit finite element simulations of the native knee joint. *Medical Engineering & Physics*. 38(10). pp. 1123–1130. DOI: 10.1016/j.medengphy.2016.06.001.

Received: September 5, 2020

УДК 621.453, 519.63

DOI 10.17223/19988621/72/4

И.Г. Воропаева, А.А. Козулин, Л.Л. Миньков, Э.Р. Шрагер

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЗАРЯДА ТТ БЕССОПЛОВОГО РДТТ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ¹

Рассматривается численное решение в сопряженной задаче о нестационарном течении продуктов сгорания в проточном тракте бессоплового ракетного двигателя и колебании заряда твердого топлива под действием сил со стороны продуктов сгорания. Для математического описания течения продуктов сгорания используются уравнения Навье – Стокса для сжимаемого вязкого газа, а для описания колебания заряда – уравнения механики деформируемого твердого тела, учитывающие свойства гиперупругости твердого топлива. Показано, что в бессопловом ракетном двигателе с зарядом топлива, имеющим низкий модуль Юнга, может возникать резонанс, приводящий к неконтролируемым колебаниям заряда.

Ключевые слова: *бессопловый ракетный двигатель, гиперупругость, колебание заряда, сопряженная задача, резонанс.*

Одним из основных требований, предъявляемых к современным интегральным твердотопливным ракетно-прямоточным двигателям (РПД) является отсутствие отбрасываемых элементов конструкции при переходе с режима разгона на маршевый режим полета ракеты. В связи с этим, в качестве стартово-разгонных ступеней нашли применение бессопловые ракетные двигатели (БРД), в конструкции которых нет традиционного соплового блока и соответственно нет необходимости его сбрасывания. Скрепленный с корпусом заряд твердого топлива бессопловой стартовой ступени размещается в камере сгорания прямоточного контура маршевой ступени интегрального РПД. При этом оптимизируются массово-габаритные характеристики и упрощается конструкция ДУ.

Однако существуют проблемы, связанные с большими перепадами давления по каналу заряда и уменьшением удельного импульса по сравнению с сопловыми двигателями. Для выполнения тягово-энергетических требований, предъявляемых к двигательной установке (ДУ), возникает необходимость профилирования канала заряда таким образом, чтобы выходная его часть представляла собой имитатор сопла, разгоняющий поток продуктов сгорания твердого топлива (ТТ) до необходимых параметров. В подобных конструкциях критические условия течения газовой смеси (скорость звука) достигаются в сечении канала, предшествующем расширяющейся «сопловой» части. При этом на малом участке длины канала реализуется сверхкритический перепад давления (порядка $0.5P_{\max}$), что ведет к большим напряжениям внутри заряда и деформациям канала, способным разрушить заряд в начале квазистационарного участка работы ДУ. Широкий температурный диапазон эксплуатации РПД ($-50, +70$) °С предъявляет противоречивые требования к физико-механическим свойствам твердого топлива. Уменьшение модуля

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 0721-2020-0028.

упругости ТТ при высоких температурах способствует снижению максимальных напряжений в заряде, но ведет росту опасных деформаций, и наоборот.

Одной из задач, возникающих при оптимизации формы заряда и прогноза внутрибаллистических характеристик БРД, является определение максимально возможных перемещений поверхности заряда ТТ после приложения газодинамической нагрузки. С одной стороны, максимальные осевые перемещения определяют размеры торцевых зазоров между корпусом БРД и поверхностью заряда ТТ, с другой стороны, радиальные перемещения поверхности заряда изменяют как величину площади критического сечения сопла, так и площадь поверхности горения, в результате чего изменяется давление в камере сгорания (КС), которое в свою очередь изменяет нагрузку на заряд ТТ. В этом смысле задача определения величины перемещения поверхности ТТ является сопряженной задачей.

Решение сопряженной задачи для классического РДТТ с традиционным сопловым блоком и прочноскрепленным зарядом типа «зонтик» в квазистационарной постановке рассматривалось в работе [1].

В работе [2] для модельного двигателя с одноканальным прочноскрепленным зарядом определялись частоты колебаний корпуса, сопла и газовой полости в продольном и радиальном направлениях на основе упруго-массовой модели РДТТ. Для рассмотрения резонансных явлений в РДТТ предполагалось, что возникающие деформации в заряде ТТ не влияют на положение поверхности горения.

Упругие свойства современных твердых топлив сильно зависят от температуры термостатирования. Увеличение температуры, как правило, ведет к снижению модуля упругости ТТ, в результате чего оно становится более податливым внешним нагрузкам. Поэтому для разных температур термостатирования заряда ТТ точки его поверхности будут вести себя по-разному под действием одной и той же приложенной нагрузки.

Современные ТТ (композиция на основе НТРВ и НМХ, НТРВ и RDX) представляют собой гиперупругий материал, который характеризуется относительно низким модулем упругости и высоким объемным модулем [3]. У таких материалов функция плотности упругой энергии деформации является скалярной функцией тензоров деформации, чьи производные по компонентам деформации определяют соответствующие компоненты напряжения. Поведение таких материалов для малых и умеренных деформаций можно описывать моделью Neo-Hookean (нео-Гука), моделью Огдена или трехпараметрической моделью Муни – Ривлина, а для больших деформаций – использовать модель Arruda – Boyce (Арруда – Бойса) [4].

Целью настоящей работы является исследование нестационарного поведения осесимметричного заряда ТТ бессоплового РДТТ под действием сил давления со стороны продуктов сгорания и оценка максимальных перемещений точек поверхности ТТ на основе численного решения уравнений механики деформируемого твердого тела и газовой динамики продуктов сгорания.

Физико-математическая постановка задачи

Рассматривается модельный осесимметричный бессопловой РДТТ, состоящий из стального корпуса 1, термоизоляционного вкладыша 2, резиновой прослойки 3, заряда ТТ 4. Область 5 соответствует КС, рис. 1.

С поверхности твердого топлива продукты сгорания поступают в канал и вытекают через выходное отверстие наружу. Под действием давления продуктов сгорания заряд твердого топлива деформируется, что приводит как к изменению

площади поверхности горения и тем самым к изменению газоприхода, так и к изменению площади критического сечения канала, что в конечном итоге изменяет давление внутри канала.

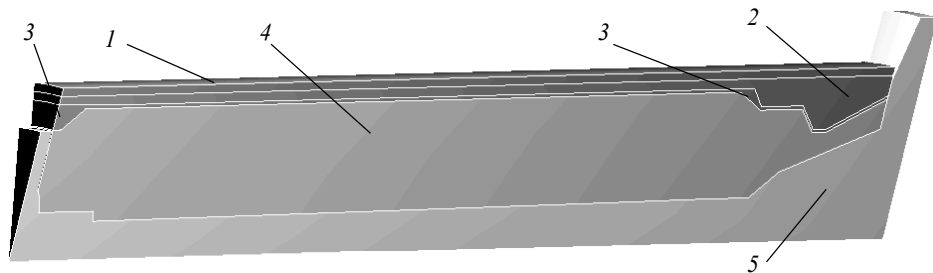


Рис. 1. Разрез бесоплового РДТТ:

1 – корпус, 2 – вкладыш, 3 – прослойка, 4 – заряд, 5 – камера сгорания

Fig. 1. Section of a nozzleless solid rocket motor (SRM):

1 – body, 2 – insert, 3 – interlayer, 4 – charge, and 5 – combustion chamber

Для исследования протекающих процессов в БРД выделим область, представляющую собой трехмерный цилиндрический сектор, который состоит из подобластей для заряда, вкладыша, прослойки, корпуса и канала, рис. 1

Внутрикамерные процессы в ДУ описываются нестационарными уравнениями Навье – Стокса для вязких сжимаемых продуктов сгорания ТТ, уравнениями напряженно-деформированного состояния для упругих и гиперупругих тел и условиями, сопрягающими решения задач на границах разнородных материалов. Материалы, из которых изготовлены прослойка и заряд, предполагаются гиперупругими, а материалы, из которых выполнены корпус и вкладыш, – упругими.

Система уравнений для НДС

Уравнение сохранения массы

$$\frac{d\rho^d}{dt} + \rho^d \nabla_k v_k^d = 0. \quad (1)$$

Уравнение движения частицы среды

$$\rho^d \frac{d^2 u_i^d}{dt^2} = \nabla_k \sigma_{ki}^d, \quad (2)$$

где u_i – перемещение частицы среды.

Тензор конечных деформаций

$$\varepsilon_{ij}^d = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j^d + \nabla_j u_i^d + \nabla_i u_k^d \nabla_j u_k^d). \quad (3)$$

Связь между напряжениями и деформациями:

- для упругого тела:

$$\sigma_{ij}^d = 2\mu \left(\varepsilon_{ij}^d + \frac{v^d}{1-2v^d} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^d \right); \quad (4)$$

- для гиперупругого тела:

$$\sigma_{ij}^d = \frac{1}{J} F_{ik} S_{kl}^d F_{jl}, \quad (5)$$

где $F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$ – компоненты тензора градиентов деформации, S_{ij} – компоненты напряжения, выражающиеся через энергию деформаций W в виде

$$S_{ij}^d = 2 \frac{\partial W^d}{\partial C_{ij}}. \quad (6)$$

Здесь $C_{ij} = F_{ki} F_{kj}$ – правый тензор деформаций Коши – Грина;

$$J = \det[F_{ij}].$$

Согласно модели Neo-Hookean, энергия деформации имеет вид

$$W^d = \frac{\mu^d}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d^d} (J - 1)^2, \quad (7)$$

где $\bar{I}_1 = I_1 / J^{2/3}$, $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$;

I_1 – первый инвариант матрицы C_{ij} ; $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$ – собственные значения матрицы

C_{ij} ; $\mu^d = \frac{E^d}{2(1+\nu^d)}$ – начальный модуль сдвига материала; $d^d = 2/K^d$ – пара-

метр несжимаемости материала; $K^d = \frac{E^d}{3(1-2\nu^d)}$ – начальный объемный модуль упругости; E^d – модуль Юнга; ν^d – коэффициент Пуассона.

Индекс d соответствует номеру материала: 1 – корпус, 2 – вкладыш, 3 – прослойка, 4 – топливо.

Г р а н и ч н ы е у с л о в и я

Граница раздела поверхность твердого тела – газ:

$$\sigma_{nn}^d = -p + \tau_{nn}$$

– равенство нормальных напряжений в топливе и газе;

$$\sigma_{n\tau_1}^d = \tau_{n\tau_1}; \quad \sigma_{n\tau_2}^d = \tau_{n\tau_2}$$

– равенство касательных напряжений в топливе и газе.

Граница контакта между разнородными материалами:

$$\sigma_{nn}^d = \sigma_{nn}^{d+1}; \quad \sigma_{n\tau_1}^d = \sigma_{n\tau_1}^{d+1}; \quad \sigma_{n\tau_2}^d = \sigma_{n\tau_2}^{d+1}$$

– равенство нормальных и касательных напряжений;

$$u_{nn}^d = u_{nn}^{d+1}; \quad u_{n\tau_1}^d = u_{n\tau_1}^{d+1}; \quad u_{n\tau_2}^d = u_{n\tau_2}^{d+1}$$

– равенство нормальных и касательных перемещений; $d = 1, 2, 3$.

Плоскость симметрии:

$$u_{nn}^d = 0$$

– равенство нулю нормальных перемещений.

Условия закрепления:

$$u_i^d = 0$$

– равенство нулю перемещений во всех направлениях.

Уравнения течения вязкого сжимаемого газа

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} = \rho_T u_{01} p^v K_{er} \delta(x_k; R_k). \quad (8)$$

Уравнение сохранения количества движения

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_k}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}. \quad (9)$$

Уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k h}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} + \tau_{ik} v_i \right) + C_p T_p \rho_T u_{01} p^v K_{er} \delta(x_k; R_k), \quad (10)$$

где R_k – функции, описывающие поверхность горения; $e = \frac{1}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$ – полная внутренняя энергия; $h = e + \frac{p}{\rho}$ – полная энтальпия; $V^2 = \sum_{k=1}^3 v_k^2$ – квадрат вектора скорости; K_{er} – коэффициент, учитывающий эффект эрозии, задается в виде [5]

$$K_{er} = \begin{cases} 1, & \text{при } I < I_{kr} \\ \sqrt{1 + k_{er} (I - I_{kr})}, & \text{при } I \geq I_{kr}. \end{cases}$$

где $I = \frac{\rho U}{\rho_T u_{01} p^v} \sqrt{\lambda_r}$ – параметр Виллюнова; I_{kr} – пороговое значение параметра

Виллюнова; λ_r – коэффициент сопротивления; U – скорость продуктов сгорания, осредненная по поперечному сечению канала; τ_{ik} – тензор вязких напряжений;

$\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right)$; t – время; x – пространственная координата; p – давление; v – скорость; k – отношение удельной теплоемкости при постоянном давлении к удельной теплоемкости при постоянном объеме C_p/C_v ; R – газовая постоянная.

Коэффициенты I_{kr} и k_{er} определялись полуэмпирическим способом из работы [6] и принимались равными 5.6 и 0.08 соответственно.

Уравнение состояния:

$$p = \rho R T \quad (11)$$

Граничные условия

Недеформируемая твердая стенка:

$$v_k = 0.$$

Деформируемая твердая стенка, топливо:

$$v_k = \frac{du_k^d}{dt}.$$

Выход из канала:

$$p = p_n$$

– при дозвуковом истечении давление равно давлению окружающей среды.

Плоскость симметрии:

$$v_n = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad \phi = \{p, v_{\tau 1}, v_{\tau 2}, p\}.$$

В данной постановке горящая поверхность заменена твердой стенкой, а приход массы и энергии газов моделируется через источники члены в соответствующих уравнениях (8) и (10) [7].

Метод решения

Твердотельные подобласти разбиваются на конечные элементы, а подобласть канала – на конечные объемы. В окружном направлении задавался один конечный элемент (конечный объем) в соответствии с приближением осесимметричности.

Для численного решения уравнений (1) – (5) используется метод конечных элементов построенный на линейных функциях формы для конечных элементов, представляющих собой шестигранники.

Для численного решения системы уравнений (8) – (11) используется метод Патанкара [8] и противопоточная разностная схема второго порядка аппроксимации для конвективных слагаемых.

Дельта-функция Дирака $\delta(x_k; R_k)$ в уравнениях (8) и (10) аппроксимируется отношением площади соприкасающейся с поверхностью горения грани ячейки к объему этой ячейки.

Результаты решения задачи (1) – (11) были получены с помощью пакета Ansys (Fluent и Transient Structural). При решении сопряженной задачи давление со стороны газа (нагрузка) прикладывалась не сразу, а разбивалась на 2 этапа: на первой итерации к поверхности заряда прикладывалась половина избыточной нагрузки, а на втором этапе – полная избыточная нагрузка. Количество итераций на каждом этапе сопряжения давление – перемещение составляло не более 5 раз.

Обсуждение результатов

В экспериментальном исследовании [9] показано, что в результате компенсационного эффекта факторов эрозии и зависимости от давления скорости горения, разница между скоростями горения в разных сечениях канала не превышает 10%. Распределения относительных значений скорости горения $\bar{u} = u_b / u_{\max}$ и давления $\bar{P} = P / P_{\max}$ вдоль оси симметрии заряда ТТ ($\bar{x} = x / x_{\max}$), полученные в результате предварительных расчетов газодинамических параметров, без учета влияния деформации заряда ТТ, для разных моделей скорости горения, представлены на рис. 2 и 3.

Среднеинтегральные значения скорости горения топлива на дозвуковом участке канала заряда определяют газоприход и соответственно средний уровень давления в камере (рис. 3).

Как следует из рис. 2 (кривая 1), расчетные данные хорошо согласуются с [9] на участке поверхности заряда, ограничивающем дозвуковую часть газодинамического тракта канала. Участок резкого спада давления (рис. 3) соответствует переходу от дозвуковой части газодинамического тракта к сверхзвуковой.

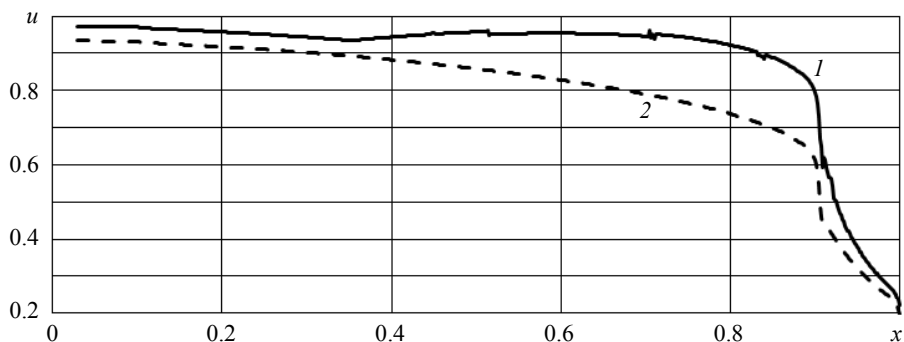


Рис. 2. Распределение скорости горения по поверхности ТТ:

$$1 - u_b = u_{01} P^v K_{er}; 2 - u_b = u_{01} P^v$$

Fig. 2. Burning rate distribution over the propellant surface:

$$1 - u_b = u_{01} P^v K_{er} \text{ and } 2 - u_b = u_{01} P^v$$

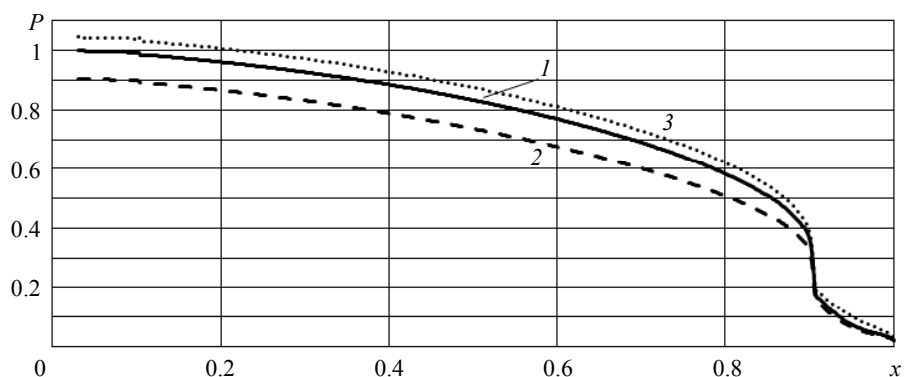


Рис. 3. Распределение давления по каналу для различных моделей скорости горения:

$$1 - u_b = u_{01} P^v K_{er}; 2 - u_b = u_{01} P^v; 3 - u_b = u_{01} P_0^v$$

Fig. 3. Channel pressure distribution for different burning rate models:

$$1 - u_b = u_{01} P^v K_{er}; 2 - u_b = u_{01} P^v; \text{ and } 3 - u_b = u_{01} P_0^v$$

Поскольку точное определение параметров эрозионного горения топлива на этапе проектирования ДУ проблематично, то, как показывает рис. 3, для предварительных оценок ВХ на основном участке канала целесообразно использовать закон скорости горения $u_b = u_{01} P_0^v$ (кривая 3), где P_0 – давление у переднего дна КС. При этом прогноз давления будет примерно на 5 % превышать значения, рассчитанные по модели с учетом эрозионной составляющей скорости горения.

Для решения сопряженной задачи были приняты следующие значения параметров. Механические свойства материалов приведены в табл. 1. Характеристики твердого топлива приведены в табл. 2, а теплофизические параметры продуктов сгорания ТТ – в табл. 3. Термодинамическая оценка влияния начальной температуры в диапазоне от -50°C до $+70^\circ\text{C}$ на теплофизические параметры продуктов сгорания показывает, что ее учет приводит к отклонениям в параметрах, не превышающим 1 %.

Таблица 1

Механические свойства материалов БРД

	Топливо	Резина	Вкладыш	Сталь
Плотность, кг/м ³	1710	1244	1479	7850
Модуль упругости, Па	$5 \cdot 10^6$ при $t = 70^\circ\text{C}$ 10^7 , при $t = -50^\circ\text{C}$	$9.807 \cdot 10^6$	$1.442 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^{11}$
Коэффициент Пуассона	0.4999	0.499	0.2	0.3

Таблица 2

Характеристики твердого топлива

	Вариант 1	Вариант 2
Начальная температура ТТ, °C	-50	+70
Скорость горения при 1 атм, u_{01} , м/с	$4.48 \cdot 10^{-3}$	$6.4 \cdot 10^{-3}$
Показатель степени в законе горения, ν	0.428	0.41
Температура горения, К	2960	2960

Таблица 3

Теплофизические параметры продуктов сгорания ТТ

Теплоемкость, Дж/(кг·К)	1800
Молярная масса, кг/моль	25.4
Динамическая вязкость, Па·с	$1.79 \cdot 10^{-5}$
Теплопроводность, Вт/(м·К)	0.0242

При численном решении сопряженной задачи давление в камере сгорания задавалось равным атмосферному. Задача о зажигании поверхности ТТ не рассматривалась, и предполагалось, что вся поверхность ТТ начинает гореть одновременно.

На рис. 4 показаны зависимости изменения максимального давления в камере сгорания от времени для скоростей горения ТТ, соответствующих разным начальным температурам заряда ТТ (см. табл. 2).

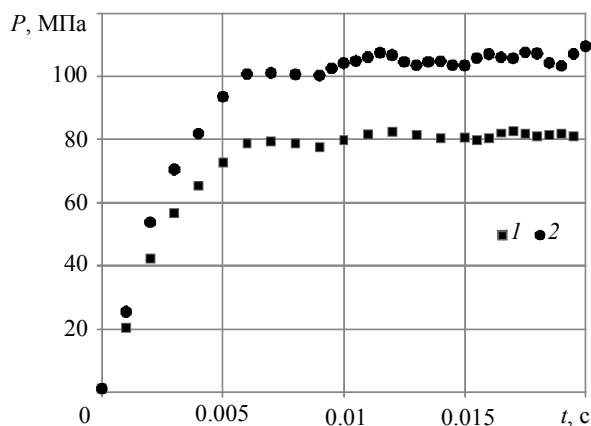


Рис. 4. Зависимость максимального давления в КС от времени:

1 – вариант 1; 2 – вариант 2

Fig. 4. Dependence of the maximum pressure in a combustion chamber on time: 1 – variant 1 and 2 – variant 2

Из рисунка видно, что квазиустановление происходит примерно через 6 мс, после чего начинают происходить колебания максимального давления, причем амплитуда колебания тем выше, чем выше скорость горения ТТ (кривая 2). Период первого колебания составляет около 5 мс. Затем частота колебания увеличивается и период колебания уменьшается до 2–3 мс, что соответствует времени прохождения звуковой волны по продуктам сгорания вдоль канала туда и обратно. Характерная скорость распространения поперечных волн по заряду ТТ, оцененная по формуле $\sqrt{E/[2(1+\nu)\rho]}$, составляет 31 и 44 м/с для варианта 1 и 2 соответственно. Толщина заряда в окрестности критического сечения (наиболее узкой части канала) равна 4 см. Тогда время распространения поперечных волн в радиальном направлении (туда и обратно) находится в диапазоне от 2 до 3 мс.

Для оценки амплитуды колебания давления в камере сгорания, вызванного колебаниями критического сечения сопла, воспользуемся формулой Бори. Согласно этой формуле, давление в камере сгорания РДТТ p_0 на стационарном участке обратно пропорционально радиусу критического сечения сопла R_0 в степени $2/(1-\nu)$. Если радиус критического сечения сопла незначительно изменяется со временем, например по периодическому закону, то и давление также будет изменяться со временем:

$$p(t) \sim R(t)^{-2/(1-\nu)}.$$

Отсюда имеет место равенство

$$p(t)/p_0 = (R_0/R(t))^{2/(1-\nu)}.$$

Пусть изменение радиуса критического сечения сопла является осциллирующим и имеет вид

$$R(t) = R_0 + A_R \cdot \exp(i\omega t),$$

где ω – частота колебания, а A_R – амплитуда колебания радиуса. Тогда

$$\frac{\Delta p(t)}{p_0} = \left(1 + \frac{A_R}{R_0} \cdot \exp(i\omega t) \right)^{-2/(1-\nu)} - 1,$$

где

$$\Delta p(t) = p(t) - p_0.$$

$$\text{Если } \frac{A_R}{R_0} \ll 1, \text{ то } \Delta p(t) = \frac{2}{(1-\nu)} \frac{A_R}{R_0} p_0 \exp(i(\omega t + \pi)).$$

Изменение давления в камере сгорания будет происходить с амплитудой $\frac{2}{(1-\nu)} \frac{A_R}{R_0} p_0$ и с такой же частотой ω , с которой происходит изменение радиуса критического сечения, но при этом будет иметь место сдвиг по фазе равный π .

Поэтому поперечные колебания заряда в радиальном направлении могут являться причиной колебания максимального давления в двигателе, которые изменяют радиус канала, тем самым изменяют площадь поверхности горения и площадь критического сечения.

Тот факт, что период распространения звуковых волн по продуктам сгорания близок к периоду колебания заряда, может вызвать резонансное явление, которое приведет к неконтролируемой раскачке заряда твердого топлива.

Полные перемещения точек осевого сечения хвостовой части заряда ТТ в момент времени $t = 0.02$ с для второго варианта расчета (см. табл. 2) показаны на рис. 5. Маркером отмечено новое положение точки горячей поверхности, определяющей критическое сечение газодинамического тракта, к началу работы ДУ. На рис. 6 представлена зависимость перемещения этой точки от времени.

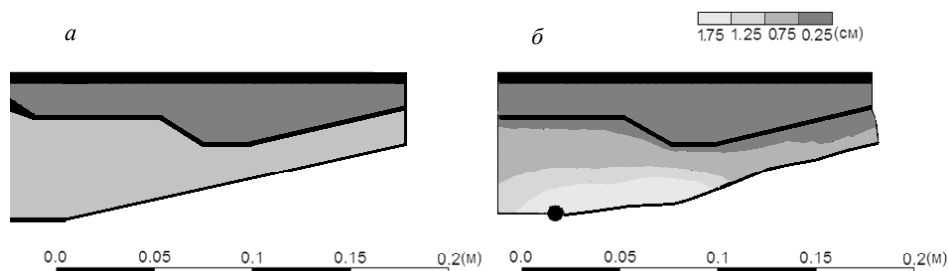


Рис. 5. Положение контура горячей поверхности и контуров полных перемещений точек осевого сечения заряда в момент $t = 0.02$ с; *a* – форма заряда в момент времени $t = 0$; *б* – форма заряда в момент времени $t = 0.02$ с

Fig. 5. Position of the contours of the burning surface and displacement of the points along the axial section of the charge at a time instant $t = 0.02$ s; a shape of the charge at $t = (a) 0$ and $(b) 0.02$ s

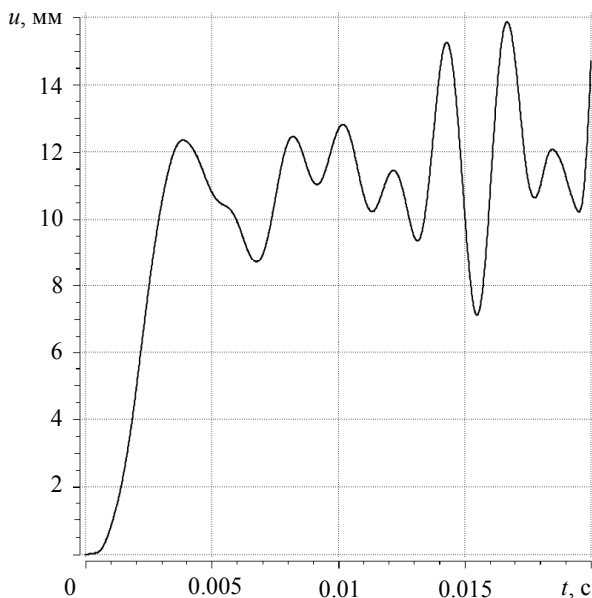


Рис. 6. Зависимость перемещения точки начального критического сечения от времени
Fig. 6. Dependence of the displacement of the initial critical section point on time

Как следует из рис. 5 и 6, максимальные перемещения реализуются в хвостовой части заряда вокруг критического сечения газодинамического тракта, при этом абсолютные значения перемещений точек горячей поверхности изменяются от 6 до 20 мм.

Заключение

Проведенные расчеты показали, что поведение заряда ТТ под действием приложенной газодинамической нагрузки зависит от упругих свойств ТТ, определяемых, в свою очередь, термостатированием. Совпадение характерного времени распространения упругих волн в поперечном направлении заряда и характерного времени распространения звуковой волны по газодинамическому тракту может служить источником резонансного явления, приводящего к раскачке заряда твердого топлива и, следовательно, к увеличению амплитуды колебания давления в бесплоплом РДТТ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Милехин Ю.М., Ключников А.Н., Попов В.С., Мельников В.П. Сопряженная задача моделирования внутрибаллистических характеристик РДТТ // Физика горения и взрыва. 2012. Т. 48. № 1. С. 38–46.
2. Модорский В.Я., Козлова А.В. Моделирование газопругих колебательных процессов в ракетных двигателях твердого топлива // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2006. № 43. С. 163–167.
3. Nomesh Kumar, V. Venkateswara Rao. Hyperelastic Mooney-Rivlin Model: Determination and Physical Interpretation of Material Constants // MIT International Journal of Mechanical Engineering. 2016. V. 6. No. 1. P. 43–46.
4. Nowak Z. Constitutive modelling and parameter identification for rubber-like materials // Engineering Transactions. 2008. V. 56. No. 2. P.117–157.
5. Вилунов В.Н. Теория зажигания конденсированных веществ. Новосибирск: Наука, 1984. 190 с.
6. Милехин Ю.М., Бурский Г.В., Лавров Г.С., Попов В.С., Садовничий Д.Н. Энергетика и внутренняя баллистика ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 2018. 359 с.
7. Minkov L.L., Shrager E.R., Kiryushkin A.E. Two approaches for simulating the burning surface in gas dynamics // Key Engineering Materials. 2016. V. 685. P. 114–118. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685. 114.
8. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
9. Gany A., Aharon I. Internal Ballistics Considerations of Nozzleless Rocket Motors. // Journal of Propulsion and Power. 1999. V. 15. No. 6. P. 866–874. DOI: 10.2514/2.5509.

Статья поступила 18.06.2021

Voropaeva I.G., Kozulin A.A., Min'kov L.L., Shrager E.R. (2021) NON-STATIONARY BEHAVIOR OF A SOLID PROPELLANT CHARGE FOR NOZZLELESS SOLID ROCKET MOTORS UNDER GAS-DYNAMIC LOAD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 48–59

DOI 10.17223/19988621/72/4

Keywords: nozzleless solid rocket motor, hyperelasticity, charge oscillation, conjugate problem, resonance.

The numerical solution to a conjugate problem of an unsteady flow of combustion products in a flow path of the nozzleless solid rocket motor (SRM) and the oscillation of a solid propellant charge under the action of the forces directed from combustion products is considered. The Navier-Stokes equations for a compressible viscous gas are used to mathematically describe the flow of the combustion products. To model the charge oscillations, the equations of solid mechanics are applied, which take into account the propellant hyperelasticity. Pressure

distributions and the propellant burning rate along the charge channel are presented for different models of the propellant burning rate. It is revealed that at the stage of SRM design, the use of the burning rate law, determined by pressure in the head of the combustion chamber, is more preferable in order to assess the internal ballistic characteristics. The solution to the conjugate problem shows that in the nozzleless SRM with the propellant having low Young's modulus, resonance can occur, which causes uncontrolled charge oscillations.

Financial support. This work was carried out with financial support from the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (State assignment No. 0721-2020-0028).

Irina G. VOROPAEVA (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: irgev@yandex.ru

Aleksandr A. KOZULIN (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kozulyn@ftf.tsu.ru

Leonid L. MIN'KOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Ernst R. SHRAGER (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: sher@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Milekhin Y.M., Klyuchnikov A.N., Popov V.S., Mel'nikov V.P. (2012) Adjoint problem for modeling intraballistic characteristics of solid-propellant rocket motors. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 48. pp. 33–40. DOI: 10.1134/S0010508212010054.
2. Modorskiy V.Ya., Kozlova A.V. (2006) Modelirovanie gazouprugikh kolebatel'nykh protsessov v raketnykh dvigatelyakh tverdogo topliva [Modeling of gas-elastic oscillatory processes in solid propellant rocket engines]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki – Journal of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences*. 43. pp. 163–167.
3. Kumar N., Rao V.V. (2016) Hyperelastic Mooney-Rivlin model: determination and physical interpretation of material constants. *MIT International Journal of Mechanical Engineering*. 6(1). pp. 43–46.
4. Nowak Z. (2008) Constitutive modelling and parameter identification for rubber-like materials. *Engineering Transactions*. 56(2). pp. 117–157.
5. Vilyunov V.N. (1984) *Teoriya zazhiganiya kondensirovannykh veshchestv* [Ignition theory for condensed substances]. Novosibirsk: Nauka.
6. Milekhin Yu.M., Burskiy G.V., Lavrov G.S., Popov V.S., Sadovnichiy D.N. (2018) *Energetika i vnutrennyaya ballistika raketnykh dvigateley na tverdom toplive* [Energetics and internal ballistics of solid propellant rocket engines]. Moscow: Nauka.
7. Minkov L.L., Shrager E.R., Kiryushkin A.E. (2016) Two approaches for simulating the burning surface in gas dynamics. *Key Engineering Materials*. 685. pp. 114–118. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.114.
8. Patankar S.V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Washington: Hemisphere Publishing Corporation.
9. Gany A., Aharon I. (1999) Internal ballistics considerations of nozzleless rocket motors. *Journal of Propulsion and Power*. 15(6). pp. 866–874. DOI: 10.2514/2.5509.

Received: June 18, 2021

УДК 532.546: 519.6

DOI 10.17223/19988621/72/5

Х.М. Гамзаев

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРФОРИРОВАННОМ ТРУБОПРОВОДЕ

Предложена математическая модель, описывающая нестационарное течение несжимаемой вязкой жидкости в перфорированном трубопроводе. В рамках предложенной модели поставлена задача по определению давления и расхода жидкости в начале трубопровода, необходимых для обеспечения заданного расхода жидкости и давления в конце трубопровода. Исходная задача преобразуется к граничной обратной задаче с нелокально возмущенным краевым условием. Построен дискретный аналог задачи и предложено специальное представление для решения полученной системы разностных уравнений. В результате получены явные формулы для определения приближенных значений расхода жидкости и давления в начале трубопровода.

Ключевые слова: *перфорированный трубопровод, нестационарное течение, граничная обратная задача, метод нелокального возмущения граничных условий, разностная задача.*

Известно, что гидродинамические исследования движения жидкостей в перфорированных трубопроводах имеют важное теоретическое значение и многочисленные практические применения. Перфорированные трубопроводы широко применяются при разработке нефтяных и газовых месторождений горизонтальными скважинами, в гидротранспорте, химической технологии, ракетной технике, мелиорации, гидрологии, биомеханике и т.д. [1–4]. Обычно при исследовании движения жидкостей в перфорированных трубопроводах дискретное распределение точек перфорации (точек отбора или подкачки жидкости) заменяется непрерывным и исследования сводятся к изучению нестационарного движения жидкости в трубопроводах с проницаемыми стенками. При этом для описания способности стенки трубопровода пропустить через себя жидкость вводится понятие коэффициента проницаемости стенки. Численному и аналитическому исследованию математических моделей стационарного и нестационарного течения жидкостей с различными реологическими свойствами в трубопроводах, каналах и сосудах с проницаемыми стенками посвящены работы [1–11]. Для практики транспорта жидкостей в перфорированных трубопроводах важное значение имеют исследования по определению гидродинамических условий в начале трубопровода, необходимых для обеспечения заданного режима на выходе трубопровода.

Целью данной работы является определение давления и расхода жидкости в начале трубопровода, обеспечивающих требуемый режим в выходном сечении трубопровода, на основе решения обратной задачи для одномерной модели нестационарного течения несжимаемой жидкости в перфорированном трубопроводе.

Постановка задачи и метод решения

Пусть рассматривается процесс нестационарного течения несжимаемой вязкой жидкости в горизонтально расположенном перфорированном трубопроводе длиной l диаметром d . Плотность перфорации, т.е. число перфорационных отверстий, приходящихся на единицу длины трубопровода, обозначим через k . Для построения математической модели данного процесса используем дифференциальное уравнение движения и дифференциальное уравнение неразрывности потока жидкости [12]. Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости в трубопроводе с переменных расход жидкости – давление можно представить в виде

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + \frac{q(x,t)}{s} \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = -\frac{s}{\rho} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{\lambda |q(x,t)|}{2sd} q(x,t), \quad (1)$$

где $p(x,t)$ – давление жидкости в трубопроводе, $q(x,t)$ – объемный расход жидкости, ν – кинематическая вязкость жидкости, ρ – плотность жидкости, $s = \pi d^2 / 4$ – площадь поперечного сечения трубопровода, λ – коэффициент гидравлического сопротивления.

Скорость оттока жидкости через перфорационное отверстие на стенке трубы обозначим через $w(x,t)$. Тогда дифференциальное уравнение неразрывности потока жидкости с учетом оттока жидкости через перфорационные отверстия запишется как

$$-\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = k s_0 w(x,t), \quad (2)$$

где d_0 и $s_0 = \pi d_0^2 / 4$ – соответственно диаметр и площадь перфорационного отверстия.

Для описания оттока жидкости через перфорационное отверстие используем известное соотношение гидростатики

$$\frac{p(x,t) - p_e(x,t)}{\rho g} = \frac{w^2(x,t)}{2g}$$

или

$$w(x,t) = \sqrt{\frac{2(p(x,t) - p_e(x,t))}{\rho}}, \quad (3)$$

$p_e(x,t)$ – давление внешней среды; g – ускорение свободного падения.

Пусть состояние потока жидкости в трубопроводе в начальный момент времени $t = 0$ известно, т.е. для системы уравнений (1)– (3) известно следующее начальное условие

$$q(x, 0) = \phi(x). \quad (4)$$

Предполагается, что в сечении трубопровода $x = 0$ обеспечивается подача жидкости в трубопровод, а в конце трубопровода $x = l$ расход жидкости и давление соответствуют назначению трубопровода и считаются заданными. Тогда для системы уравнений (1)– (3) будем иметь следующие краевые условия:

$$q(l, t) = q_l(t), \quad (5)$$

$$p(l, t) = p_l(t), \quad (6)$$

где $q_l(t)$, $p_l(t)$ – заданные функции.

Требуется найти законы изменения во времени давления $p(0,t)$ и расхода жидкости $q(0,t)$ в начале трубопровода, которые обеспечивали бы пропуск заданного расхода жидкости $q_l(t)$ по трубопроводу при сохранении давления $p_l(t)$ в конце трубопровода.

Сначала преобразуем систему уравнений (1)–(3). Учитывая соотношение (3), уравнение (2), запишем в виде

$$-\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = ks_0 \sqrt{\frac{2(p(x,t) - p_e(x,t))}{\rho}}. \quad (7)$$

Найдем $p(x,t)$ из уравнения (7):

$$p(x,t) = p_e(x,t) + \frac{\rho}{2k^2 s_0^2} \left(\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \right)^2 \quad (8)$$

и полученное выражение подставим в уравнение (1). В результате будем иметь

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + \frac{q(x,t)}{s} \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = -\frac{s}{\rho} \frac{\partial p_e(x,t)}{\partial x} + (v - \sigma \frac{\partial q(x,t)}{\partial x}) \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{\lambda |q(x,t)|}{2sd} q(x,t), \quad (9)$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq T;$$

$$q(x,0) = \phi(x); \quad (10)$$

$$q(l,t) = q_l(t), \quad (11)$$

$$\text{где } \sigma = \frac{1}{k^2 s_0^2}.$$

Очевидно, что краевое условие (11) недостаточно для однозначного разрешения уравнения (9). Для получения дополнительного условия для уравнения (9) запишем уравнение (7) при $x = l$

$$-\frac{\partial q(l,t)}{\partial x} = ks_0 \sqrt{\frac{2(p(l,t) - p_e(l,t))}{\rho}}.$$

Отсюда, учитывая краевое условие (6), получим дополнительное условие для уравнения (9)

$$\frac{\partial q(l,t)}{\partial x} = -ks_0 \sqrt{\frac{2(p_l(t) - p_e(l,t))}{\rho}}. \quad (12)$$

Поставленная задача (9) – (12) относится к классу граничных обратных задач [13, 14]. Для решения граничной обратной задачи (2)–(7) используем метод нелокального возмущения граничных условий [14]. Граничное условие (11) заменим на нелокальное

$$q(l,t) + \alpha q(0,t) = q_l(t), \quad (13)$$

где α – параметр нелокального возмущения выступает в качестве параметра регуляризации.

Для численного решения граничной обратной задачи (9), (10), (12), (13) сначала построим ее дискретный аналог. С этой целью введем равномерную разностную сетку в прямоугольной области $\{0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T\}$

$$\bar{\omega} = \{(t_j, x_i) : x_i = i\Delta x, \quad t_j = j\Delta t, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m\}$$

с шагами $\Delta x = l/n$ по переменной x и $\Delta t = T/m$ по времени t . Используя полуневяную аппроксимацию по времени для нелинейных членов уравнения (9), дискретный аналог задачи (9), (10), (12), (13) на сетке $\bar{\omega}$ представим в виде

$$\begin{aligned} & \frac{q_i^j - q_i^{j-1}}{\Delta t} + \frac{q_i^{j-1}}{s} \frac{q_i^j - q_{i-1}^j}{\Delta x} = \\ & = -\frac{s}{\rho} \frac{p_{ei+1}^j - p_{ei-1}^j}{2\Delta x} + (v - \sigma \frac{q_i^{j-1} - q_{i-1}^{j-1}}{\Delta x}) \frac{q_{i+1}^j - 2q_i^j + q_{i-1}^j}{\Delta x^2} - \frac{\lambda |q_i^{j-1}|}{2sd} q_i^j, \\ & i = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

$$q_i^0 = \phi_i, \quad i = 0, 2, \dots, n,$$

$$\frac{q_n^j - q_{n-1}^j}{\Delta x} = -ks_0 \sqrt{\frac{2(p_l^j - p_{en}^j)}{\rho}},$$

$$q_n^j + \alpha q_0^j = q_l^j,$$

где $q_i^j \approx q(x_i, t_j)$, $p_{ei}^j \approx p_e(x_i, t_j)$, $p_l^j = p_l(t_j)$, $\phi_i = \phi(x_i)$.

Полученная разностная задача представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, в которой в качестве неизвестных выступают приближенные значения искомых функций $q(x, t)$ в узлах разностной сетки $\bar{\omega}$, т.е. q_i^j , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, 3, \dots, m$. Данную систему разностных уравнений преобразуем к виду

$$a_i q_{i-1}^j - c_i q_i^j + b_i q_{i+1}^j = f_i^{j-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad (14)$$

$$q_n^j = q_{n-1}^j - \Delta x k s_0 \sqrt{\frac{2(p_l^j - p_{en}^j)}{\rho}}; \quad (15)$$

$$q_n^j + \alpha q_0^j = q_l^j, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (16)$$

$$q_i^0 = \phi_i, \quad i = 0, 2, \dots, n, \quad (17)$$

где $a_i = s\Delta t(v - \sigma \frac{q_i^{j-1} - q_{i-1}^{j-1}}{\Delta x}) + q_i^{j-1} \Delta t \Delta x$, $c_i = a_i + b_i + s\Delta x^2 + \frac{\lambda |u_i^{j-1}|}{2d} \Delta x^2 \Delta t$,

$$b_i = s\Delta t(v - \sigma \frac{q_i^{j-1} - q_{i-1}^{j-1}}{\Delta x}), \quad f_i^{j-1} = s^2 \Delta t \Delta x \frac{p_{ei+1}^j - p_{ei-1}^j}{2\rho} - s\Delta x^2 q_i^{j-1}.$$

С целью разделения разностной задачи (14)–(17) на взаимно независимые подзадачи, каждая из которых может решаться самостоятельно, решение этой системы при каждом фиксированном значении j , $j = 1, 2, \dots, m$, представим в виде [14–16]

$$q_i^j = g_i^j + q_0^j \theta_i^j, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (18)$$

где g_i^j , θ_i^j – неизвестные переменные. Подставив выражение q_i^j в (14), (15) и

учитывая справедливость соотношения $q_0^j = g_0^j + q_0^j \theta_0^j$, получим следующие разностные задачи для определения вспомогательных переменных g_i^j, θ_i^j :

$$a_i g_{i-1}^j - c_i g_i^j + b_i g_{i+1}^j = f_i^{j-1}; \quad (19)$$

$$g_0^j = 0; \quad (20)$$

$$g_n^j = g_{n-1}^j - \Delta x k s_0 \sqrt{\frac{2(p_l^j - p_{en}^j)}{\rho}}; \quad (21)$$

$$a_i \theta_{i-1}^j - c_i \theta_i^j + b_i \theta_{i+1}^j = 0; \quad (22)$$

$$\theta_0^j = 1; \quad (23)$$

$$\theta_n^j = \theta_{n-1}^j. \quad (24)$$

Разностные задачи (19)–(21) и (22)–(24) при каждом фиксированном значении $j = 1, 2, \dots, m$ представляют собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей и решения этих систем можно найти методом Томаса [14].

Подставив представление (18) в (16), будем иметь

$$g_n^j + q_0^j \theta_n^j + \alpha q_l^j = q_l^j.$$

Отсюда получим формулу для определения расхода жидкости в начале трубопровода

$$q_0^j = \frac{q_l^j - g_n^j}{\theta_n^j + \alpha}. \quad (25)$$

Определив q_0^j по формуле (25), можно последовательно найти $q_1^j, q_2^j, \dots, q_n^j$ по рекуррентной формуле (18).

После определения распределения расхода жидкости по длине трубопровода можно перейти к определению распределения давления. Построив дискретный аналог уравнения (8) на сетке $\bar{\omega}$, получим следующую расчетную формулу для вычисления давления

$$p_i^j = p_{ei}^j + \frac{\rho}{2k^2 s_0^2 \Delta x^2} (q_{i+1}^j - q_i^j)^2, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (26)$$

В частности, для давления в начале трубопровода будем иметь

$$p_0^j = p_{e0}^j + \frac{\rho}{2k^2 s_0^2 \Delta x^2} (q_1^j - q_0^j)^2.$$

Таким образом, вычислительный алгоритм решения обратной задачи (1)–(6) по восстановлению давления и расхода жидкости в начале трубопровода при каждом дискретном значении временной переменной $t_j, j = 1, 2, \dots, m$, состоит в следующем:

- определяются решения двух линейных разностных задач второго порядка (19)–(21) и (22)–(24) относительно вспомогательных переменных $g_i^j, \theta_i^j, i = \overline{0, n}$;

- по формуле (25) определяется расход жидкости в начале трубопровода q_0^j ;
- определяется распределение расхода жидкости по длине трубопровода, т.е. вычисляются значения переменных q_i^j , $i = \overline{0, n}$, по формуле (18);
- определяется распределение давления по длине трубопровода, т.е. вычисляются значения переменных p_i^j , $i = \overline{0, n}$, по формуле (26).

Результаты численных расчетов

Для выяснения эффективности предложенного вычислительного алгоритма были проведены численные эксперименты для модельных задач. Схема численного эксперимента заключалась в следующем:

- для заданных функций $\phi(x)$, $q_0(t)$ и $p_l(t)$ конечно-разностным методом решается прямая краевая задача для системы уравнений

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + \frac{q(x, t)}{s} \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = -\frac{s}{\rho} \frac{\partial p_e(x, t)}{\partial x} + (v - \sigma \frac{\partial q(x, t)}{\partial x}) \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{\lambda |q(x, t)|}{2sd} q(x, t),$$

$$p(x, t) = p_e(x, t) + \frac{\rho}{2k^2 s_0^2} \left(\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \right)^2, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

$$q(x, 0) = \phi(x),$$

$$q(0, t) = q_0(t),$$

$$\frac{\partial q(l, t)}{\partial x} = -ks_0 \sqrt{\frac{2(p_l(t) - p_e(l, t))}{\rho}},$$

$$p(l, t) = p_l(t),$$

При этом путем проведения серии расчетов со сгущающейся разностной сеткой обеспечивается практическая сходимость разностного метода;

- определяются функции $q(l, t)$ и $p(0, t)$;
- найденная зависимость $q_l(t) = q(l, t)$ и заданная функция $p_l(t) = p(l, t)$ принимаются за точные данные для численного решения обратной задачи по восстановлению $q(0, t)$ и $p(0, t)$.

Первая серия расчетов выполнялась с использованием невозмущенных данных. Вторая – проводилась при наложении на $q_l(t)$ и $p_l(t)$ некоторой функции, моделирующей погрешность экспериментальных данных

$$\tilde{q}_l(t) = q_l(t) + \delta \eta(t) q_l(t),$$

$$\tilde{p}_l(t) = p_l(t) + \delta \eta(t) p_l(t),$$

где δ – уровень погрешности, $\eta(t)$ – случайная величина, моделируемая с помощью датчика случайных чисел. Величина параметра регуляризации определяется в соответствии с принципом невязки [13, 14], т.е. задаются α_0 , χ и строится последовательность $\alpha_{k+1} = \alpha_k \chi$. Вычисления проводятся до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\left[\sum_{j=1}^m (\tilde{q}_l(t_j) - q_n^j)^2 \Delta t \right]^{1/2} \leq \varepsilon,$$

где ε – заданная погрешность.

Для возмущения входных данных в качестве уровня погрешности использовались $\delta = 0.05$.

Результаты численного эксперимента, проведенного для случая $d = 1.2$ м, $d_0 = 0.01$ м, $l = 100$ м, $\rho = 1000$ кг/м³, $\nu = 10^{-6}$ м²/с, $\lambda = 0.02$, $k = 20$ 1/м, $p_e(x, t) = 0.1$ МПа, $p_l(t) = 0.12$ МПа, $q(0, t) = 3 + 1.1 \sin 5t$ м³/с, $\phi(x) = 0$ с использованием невозмущенных и возмущенных входных данных представлены в табл. 1, где t – время; q^t , $\bar{q}$, $\tilde{q}$ – соответственно точные, вычисленные при невозмущенных и вычисленные при возмущенных данных значения функции $q(0, t)$; p^t , $\bar{p}$ и $\tilde{p}$ – аналогичные обозначения для значения функции $p(0, t)$.

Таблица 1

Численные результаты по определению функций $q(0, t)$, $p(0, t)$

$t_j, \text{с}$	Значение функции $q(0, t)$, м ³ /с			Значение функции $p(0, t)$, МПа		
	q^t	$\bar{q}$	$\tilde{q}$	p^t	$\bar{p}$	$\tilde{p}$
120	3.049	3.049	3.169	1.249	1.249	1.310
240	2.903	2.903	2.983	1.195	1.195	1.239
360	3.145	3.145	3.167	1.251	1.251	1.274
480	2.807	2.807	2.852	1.193	1.193	1.199
600	3.241	3.241	3.356	1.253	1.253	1.298
720	2.712	2.712	2.796	1.191	1.191	1.229
840	3.335	3.335	3.445	1.255	1.255	1.297
960	2.619	2.619	2.634	1.190	1.190	1.204
1080	3.426	3.426	3.450	1.257	1.257	1.264
1200	2.530	2.530	2.579	1.188	1.188	1.213
1320	3.514	3.514	3.667	1.259	1.259	1.308
1440	2.444	2.444	2.457	1.188	1.188	1.210
1560	3.598	3.598	3.606	1.261	1.261	1.271
1680	2.362	2.362	2.363	1.187	1.187	1.199
1800	3.677	3.677	3.693	1.262	1.262	1.279
1920	2.285	2.285	2.307	1.187	1.187	1.207
2040	3.751	3.751	3.859	1.263	1.263	1.341
2160	2.214	2.214	2.204	1.187	1.187	1.183
2280	3.819	3.819	3.870	1.264	1.264	1.289
2400	2.149	2.149	2.166	1.188	1.188	1.208

Результаты численного эксперимента показывают, что при использовании невозмущенных входных данных искомые функции $q(0, t)$ и $p(0, t)$ восстанавливаются с высокой точностью (2–3-й и 5–6-й столбцы таблицы). При $\alpha = 2 \cdot 10^{-6}$ относительные погрешности восстановления значений искомых функций не превышают 0.00002 %. А при использовании возмущенных входных данных, в которых погрешность имеет флуктуационный характер, относительные погрешности восстановления значений искомых функций не превышают 5.32 % (4-й и 7-й столбцы) при $\alpha = 0.02$.

Для изучения влияния плотности перфорации на гидродинамические параметры трубопровода были проведены численные расчеты. Результаты численных расчетов для случая $v = 10^{-6}$ м²/с; $\rho = 1000$ кг/м³, $d = 1.2$ м, $d_0 = 0.01$ м, $l = 100$ м, $\lambda = 0.02$, $p_e(x, t) = 0.1$ МПа, $p_l(t) = 0.12$ МПа представлены в табл. 2. В ней указаны заданные объемные расходы жидкости на выходном сечении трубопровода $q_l(t)$ и вычисленные значения расхода $q(0, t)$ и давления в начале трубопровода $p(0, t)$ при различных значениях плотности перфорации k .

Таблица 2

Определение гидродинамических параметров трубопровода

$q_l(t)$	$k = 10$		$k = 20$		$k = 40$	
	$q(0, t)$	$p(0, t)$	$q(0, t)$	$p(0, t)$	$q(0, t)$	$p(0, t)$
2	2.511	1.226	3.017	1.223	4.004	1.214
3	3.530	1.260	4.053	1.256	5.068	1.245
4	4.556	1.307	5.102	1.301	6.158	1.288
5	5.587	1.367	6.161	1.360	7.270	1.343

Из табл. 2 следует, что для обеспечения пропускания заданного расхода жидкости по перфорированному трубопроводу необходимое давление в начале трубопровода с увеличением плотности перфорации уменьшается, а необходимый расход жидкости увеличивается.

Анализ результатов численных расчетов показывает, что предложенный метод численного моделирования можно применять при исследовании процессов течения однофазных жидкостей в перфорированных трубопроводах.

Заключение

Численно исследована обратная задача по определению давления и расхода жидкости в начале перфорированного трубопровода по заданному гидродинамическому режиму в выходном сечении трубопровода. Предложенный безытерационный вычислительный алгоритм, основанный на использовании метода нелокального возмущения граничных условий, позволяет в каждом временном слое последовательно определить распределения расхода жидкости и давления по всей длине трубопровода только на основании информации в выходном сечении перфорированного трубопровода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Marshall E.A., Trowbridge E.A. Flow of a Newtonian fluid through a permeable tube: The application to the proximal renal tubule // Bulletin of Mathematical Biology. 1974. V. 36. P. 457–476.
2. Ross S.M. A mathematical model of mass transport in a long permeable tube with radial convection // Journal of Fluid Mechanics. V. 63. 1974. No. 4. P. 157–175.
3. Pozrikidis C. Stokes flow through a permeable tube // Archive of Applied Mechanics. 2010. V. 80. No. 4. P. 323–333. DOI: 10.1007/s00419-009-0319-9.
4. Zhang Q., Wang Z. Modeling study on fluid flow in horizontal perforated pipes with wall influx // International Journal of Fluid Mechanics Research. 2014. V. 41. No. 6. P. 556–566. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v41.i6.80.

5. Elshahed M. Blood flow in capillary under starling hypothesis // *Applied Mathematics and Computation*. 2004. V. 149. No. 2. P. 431–439.
6. Muthu P., Berhane T. Mathematical model of flow in renal tubules // *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2010. V. 6. No. 20. P. 94–107.
7. Mariamma N.K., Majhi S.N. Flow of a Newtonian Fluid in a blood vessel with permeable wall – a theoretical model // *Computers & Mathematics with Applications*. 2000. V. 40. No. 12. P. 1419–1432.
8. Гамзаев Х.М. Обратная задача нестационарного течения несжимаемой жидкости в трубе с проницаемой стенкой // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»*. 2020. Т. 12. № 1. С. 24–30.
9. Мерзляков А.В., Крюкова Е.А. Свободные колебания идеальной жидкости в прямоугольном сосуде с горизонтальной проницаемой перегородкой // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. № 60. С. 107–118. DOI: 10.17223/19988621/60/8.
10. Thomas C. Flow in perforated pipes: A comparison of models and experiments // *SPE Production & Operations*. 2006. V. 21. No. 2. P. 302–311.
11. Zhang Q., Wang Z., Wang X., Zhai Y., Wei J., Gao Q. Analysis of the modeling of single-phase flow in a perforated pipe with wall fluid influx // *Applied Mechanics and Materials*. 2013. V. 275–277. P. 491–495.
12. Лурье М.В. Математическое моделирование процессов трубопроводного транспорта нефти, нефтепродуктов и газа. М.: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2012. 456 с.
13. Alifanov O.M. Inverse heat transfer problems. Berlin: Springer, 2011. 280 p.
14. Samarskii A. A., Vabishchevich P.N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. Walter de Gruyter, 2007. 438 p.
15. Vabishchevich P.N., Vasil'ev V.I. Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations // *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2016. V. 24. No. 1. P. 42–59. DOI: 14.1080/17415977.2014.993984.
16. Gamzaev Kh.M. Numerical method of pipeline hydraulics identification at turbulent flow of viscous liquids // *Pipeline Science and Technology*. 2019. V. 3. No. 2. P. 118–124. DOI: 10.28999/2514-541X-2019-3-2-118-124.

Статья поступила 19.03.2020

Gamzaev Kh.M. SIMULATION OF AN UNSTEADY INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW THROUGH A PERFORATED PIPELINE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 60–69

DOI 10.17223/19988621/72/5

Keywords: perforated pipeline, unsteady flow, boundary inverse problem, method of nonlocal perturbation of boundary conditions, difference problem.

A mathematical model of the unsteady flow of an incompressible viscous fluid through a perforated pipeline is proposed, which is described by a system of nonlinear partial differential equations. In the framework of the model, the purpose is to determine the pressure and the flow rate of the fluid at the pipeline inlet, providing the flow rate and the pressure required at the pipeline outlet. By combining the system of the equations, the original problem is reduced to a boundary-value inverse problem for a nonlinear parabolic equation with respect to fluid flow rate. To solve the boundary inverse problem, the method of nonlocal perturbation of boundary conditions is proposed. A discrete analog of the inverse problem is obtained using the finite-difference approximation, and a special approach is suggested for solving the resulting system of difference equations. As a result, the difference problem for each discrete value of the time variable splits into two second-order difference problems and a linear equation with respect to an approximate value of the desired flow rate at the pipeline inlet. The absolutely stable Thomas method is used to numerically solve the obtained difference problems. After determining the flow

rate distribution along the entire pipeline, the pressure at the pipeline inlet is also calculated using an explicit formula. Based on the proposed computational algorithm, the numerical experiments are performed for benchmark problems.

Khanlar M.o. GAMZAEV (Doctor of Technical Sciences, Professor Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: xan.h@rambler.ru

REFERENCES

1. Marshall E.A., Trowbridge E.A. (1974) Flow of a Newtonian fluid through a permeable tube: the application to the proximal renal tubule. *Bulletin of Mathematical Biology*. 36. pp. 457–476. DOI: 10.1007/BF02463260.
2. Ross S.M. (1974) A mathematical model of mass transport in a long permeable tube with radial convection. *Journal of Fluid Mechanics*. 63(1). pp. 157–175. DOI: 10.1017/S0022112074001066.
3. Pozrikidis C. (2010) Stokes flow through a permeable tube. *Archive of Applied Mechanics*. 80(4). pp. 323–333. DOI: 10.1007/s00419-009-0319-9.
4. Zhang Q., Wang Z. (2014) Modeling study on fluid flow in horizontal perforated pipes with wall influx. *International Journal of Fluid Mechanics Research*. 41(6). pp. 556–566. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v41.i6.80.
5. Elshahed M. (2004) Blood flow in capillary under starling hypothesis. *Applied Mathematics and Computation*. 149(2). pp. 431–439. DOI: 10.1016/S0096-3003(03)00151-6.
6. Muthu P., Berhane T. (2010) Mathematical model of flow in renal tubules. *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 6(20). pp. 94–107.
7. Mariamma N.K., Majhi S.N. (2000) Flow of a Newtonian Fluid in a blood vessel with permeable wall – a theoretical model. *Computers & Mathematics with Applications*. 40(12). pp. 1419–1432. DOI: 10.1016/S0898-1221(00)00250-9.
8. Gamzaev Kh.M. (2020) Obratnaya zadacha nestatsionarnogo techeniya zhidkosti v trube s pronitsaemoy stenкой [Inverse problem of unsteady incompressible fluid flow in a pipe with a permeable wall]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Fizika – Bulletin of the South Ural State University. Mathematics. Mechanics. Physics*. 12(1). pp. 24–30.
9. Merzlyakov A.V., Kryukova E.A. (2019) Svobodnye kolebaniya ideal'noy zhidkosti v pryamougol'nom sosude s gorizontol'noy pronitsaemoy peregorodkoy [Free oscillations of an ideal fluid in a rectangular vessel with a horizontal permeable membrane]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 60. pp. 107–118. DOI: 10.17223/19988621/60/8.
10. Clemo T. (2006) Flow in perforated pipes: a comparison of models and experiments. *SPE Production & Operations*. 21(2). pp. 302–311. DOI: 10.2118/89036-PA.
11. Zhang Q., Wang Z., Wang X., Zhai Y., Wei J., Gao Q. (2013) Analysis of the modeling of single-phase flow in a perforated pipe with wall fluid influx. *Applied Mechanics and Materials*. 275–277. pp. 491–495. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.275-277.491.
12. Lurie M.V. (2012) *Matematicheskoe modelirovanie protsessov truboprovodnogo transporta nefii, nefteproduktov i gaza* [Mathematical modeling of oil products and gas pipeline transportation]. Moscow: National University of Oil and Gas "Gubkin University".
13. Alifanov O.M. (2011) *Inverse Heat Transfer Problems*. Berlin: Springer.
14. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. (2007) *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*. Berlin: De Gruyter.
15. Vabishchevich P.N., Vasil'ev V.I. (2016) Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 24(1). pp. 42–59. DOI: 10.1080/17415977.2014.993984.
16. Gamzaev Kh.M. (2019) Numerical method of pipeline hydraulics identification at turbulent flow of viscous liquids. *Pipeline Science and Technology*. 3(2). pp. 118–124. DOI: 10.28999/2514-541X-2019-3-2-118-124.

Received: March 19, 2020

УДК 532.517.4+621.928.93
DOI 10.17223/19988621/72/6

Н.С. Евсеев, И.А. Жуков

ВЛИЯНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ НА ПРОЦЕСС ФРАКЦИОННОГО РАЗДЕЛЕНИЯ МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ ПОРОШКОВ НИТРИДОВ МЕТАЛЛОВ¹

Показано влияние турбулентных пульсаций на процесс фракционного разделения твердых частиц. Произведен расчет траекторий движения мелкодисперсных частиц в зависимости от коэффициента турбулентной диффузии. В качестве твердой фазы рассмотрены мелкодисперсные частицы нитридов металлов. Численные исследования показали, что закрутка газа и стенок аппарата, а также турбулентные пульсации вносят существенные изменения в процесс разделения. Проведено исследование на достоверность результатов численного моделирования.

Ключевые слова: математическое моделирование, закрученное турбулентное течение, классификация частиц по размеру, нитриды металлов.

На сегодняшний день практически все промышленные отрасли для решения своих задач в том или ином виде используют мелкодисперсные порошки. Однако, к качеству таких порошков предъявляется ряд жестких требований, в том числе такие требования предъявляются к однородности грансостава. Для многих технологических процессов гранулометрический состав играет ключевую роль. Одним из примеров таких технологий могут служить аддитивные технологии, где размер порошковых частиц непосредственно влияет на подбор режимных параметров спекания и, как следствие, на качество получаемого изделия. Такие изделия применяются в аэрокосмической отрасли, энергетике и ряде других отраслей, где малейшее изменение технологического процесса может привести к серьезным последствиям.

Основываясь на мировом опыте можно утверждать, что на сегодняшний день пневматические методы остаются наиболее безопасными и эффективными методами получения однородных порошковых материалов. Однако, несмотря на достаточно продолжительное развитие таких методов, они далеки до полного их изучения. Фундаментальные исследования в области двухфазных течений вносят непосредственный вклад в совершенствование пневматических методов и модернизации существующего оборудования с целью повышения остроты сепарации.

В настоящей работе рассмотрена сепарационная камера, имеющая в конструкции подвижный элемент, изменение положения которого позволяет влиять на граничный размер и остроту сепарации. Как известно, турбулентные пульсации влияют на аэродинамическую картину и могут вносить в процесс фракционного разделения существенные изменения. В работе рассмотрено влияние турбулентных пульсаций на траектории движения твердых частиц различного диаметра.

При проведении расчетов в качестве твердой фазы были выбраны нитриды металлов. Данный выбор был основан исходя из следующего. Нитриды металлов

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-38-60036.

обладают уникальными физико-химическими свойствами, к которым можно отнести коррозионную стойкость, жаропрочность, износостойкость. Благодаря этим свойствам нитриды металлов имеют высокую прикладную значимость [1, 2]. Наиболее важными возможными направлениями их практического применения является их использование в качестве лигатур для повышения жаропрочности металлических материалов, исходных порошков для получения нитридных керамик и в качестве легирующих добавок для повышения хладостойкости стали. В работе в качестве твёрдой фазы рассматриваются нитриды титана, алюминия, кремния и ванадия, отличающиеся в действительности друг от друга как по плотностям, так и по морфологии. Такой выбор позволяет провести более качественную оценку о влиянии турбулентных пульсаций на процесс фракционного разделения на примере реальных соединений.

Физико-математическая постановка задачи

В работе рассматривается процесс фракционного разделения в сепарационной камере, имеющей в своей конструкции три существенные особенности, позволяющие влиять на процесс классификации. Схематически данная камера изображена на рис. 1. Главной особенностью является разделительный подвижный элемент, расположенный на выходе сепарационной области, изменение положения которого может влиять на граничный размер и остроту сепарации.

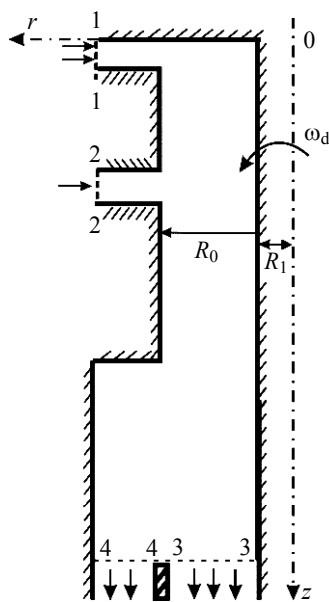


Рис. 1. Схема расчетной области
Fig. 1. Computational domain

Численные исследования [3] показали, что окружная компонента скорости несущего газового потока привносит в аэродинамическую картину течения существенные изменения. Зачастую поле окружной компоненты скорости распределено неравномерно. Второй особенностью рассматриваемой сепарационной камеры является наличие вращающегося элемента вдоль вертикальной оси Oz . Данный элемент способствует выравниванию поля окружной компоненты скорости. Третьей особенностью данной камеры является наличие патрубка для подвода вспомогательного газового потока (сечение 2-2). Такой поток имеет две основные функции: служит для оттеснения частиц от стенки камеры, а также для продува разделяемых частиц, с целью предотвращения агломерации.

Таким образом, принцип работы вихревой камеры следующий. Закрученный вязкий газ и порошкообразный материал поступают в зону сепарации (сечение 1-1). Вспомогательный закрученный газовый поток (без твёрдой примеси) подводится при помощи патрубка в сечении 2-2. В выходном сечении имеется подвижный разделительный элемент, который разделяет поток газа на два потока. Более мелкая фракция твёрдых частиц устремляется в сечение 3-3, а более крупная покидает рабочую область через сечение 4-4. Стоит отметить, что твёрдые стенки камеры также могут вращаться вокруг оси Oz .

При расчете допускалось, что газ несжимаемый, так как в реальных центробежных аппаратах скорости несущей среды и перепад давления малы [4].

Аналогично работе [5] при моделировании аэродинамики закрученного турбулентного потока использовалась система уравнений Рейнольдса. Данная задача решалась в цилиндрической системе координат для случая осевой симметрии (относительно $0z$). Замыкание уравнений Рейнольдса проводилось на основе обобщенной модели Буссинеска. В данной модели считается, что тензор турбулентных напряжений пропорционален тензору скоростей деформаций с точностью до коэффициента турбулентной вязкости [5]. Опустив некоторые математические выводы [5], представим систему уравнений Рейнольдса в безразмерном виде:

$$\frac{\partial}{\partial r}(u_r r) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z r) = 0; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial ru_r}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial r}(ru_r^2) + \frac{\partial}{\partial z}(ru_r u_z) - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[r(1+v_t) \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[r(1+v_t) \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] \right\} = \\ = u_\varphi^2 - r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial v_t}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} (1+v_t) \right]; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial ru_z}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial z}(ru_z^2) + \frac{\partial}{\partial r}(ru_r u_z) - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[r(1+v_t) \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[r(1+v_t) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \right\} = \\ = -r \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{r}{\text{Re}} \left[\frac{\partial v_t}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial ru_\varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial r}(ru_r u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(ru_z u_\varphi) - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[r(1+v_t) \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[r(1+v_t) \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right] \right\} = \\ = -u_r u_\varphi - \frac{1}{\text{Re}} \left[(1+v_t) \frac{u_\varphi}{r} + u_\varphi \frac{\partial v_t}{\partial r} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

При приведении уравнений (1) – (4) к безразмерному виду были использованы масштабы скорости и длины и постоянной плотности (так как скорости малы). За масштаб скорости была выбрана радиальная компонента скорости на входе в сепарационную камеру U_0 (сечение 1-1), за масштаб длины – радиус канала R_0 . В результате приведения уравнений к безразмерному виду формируется критерий Рейнольдса (Re), а при обезразмеривании граничных условий окружной компоненты скорости [5] формируются два критерия закрутки, которые запишутся в виде

$$\text{Rg} = \frac{\omega_g R_0}{U_0}; \quad \text{Rd} = \frac{\omega_d R_0}{U_0}. \quad (5)$$

Здесь ω_g и ω_d – угловые скорости вращения газа во входном сечении камеры и стенок сепарационной камеры соответственно.

С помощью известной k - ω -модели турбулентности Уилкокса определялась турбулентная вязкость и замыкалась система уравнений (1) – (4). Аналогично работе [5] записывались два дополнительных уравнения для кинетической энергии турбулентных пульсаций k и удельной скорости диссипации ω .

Для замыкания системы уравнений были поставлены следующие граничные условия. Во входных сечениях камеры (рис. 1) были заданы радиальная и окружная компоненты вектора скорости, кинетическая энергия и удельная скорость диссипации. Для аксиальной компоненты скорости использовалось условие Неймана. Для твердых стенок граничными условиями для скоростей были условия прилипания, для удельной скорости диссипации граничное условие выводилось из баланса диссипации и молекулярной диффузии уравнения переноса [6]. На выходе из камеры использовалось условие Неймана для всех искомых компонент.

При моделировании движения твёрдой фазы, состоящей из мелкодисперсных частиц, применялся известный траекторный метод. При этом рассматривается совокупность решений для i -й исходной фракции мелкодисперсных частиц, которые расположены в j -х точках старта по высоте входного сечения расчетной области (рис. 1, сечение 1-1). Следует отметить, что в работе рассматривается двухфазное течение при малых концентрациях твёрдой фазы, что позволяет пренебречь обратным силовым влиянием частиц на газовый поток. Скорость и траекторию движения твёрдой частицы можно найти, решив следующие уравнения:

$$\frac{d\mathbf{r}^{i,j}}{dt} = \mathbf{W}^{i,j}; \quad (6)$$

$$m^{i,j} \frac{d\mathbf{W}^{i,j}}{dt} = \mathbf{F}^{i,j}. \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{W}$ – вектор скорости частицы, m – ее масса, r – радиус-вектор, F – вектор сил, оказывающих влияние на частицу.

Опустим математические выводы, подробно описанные в работе [5], а также опустим индексы i и j , тогда представленная система уравнений в безразмерном виде для цилиндрической системы координат запишется в виде

$$\frac{dw_r}{d\tau} = \frac{w_\varphi^2}{r} + \frac{u_r - w_r}{Stk} \xi; \quad (8)$$

$$\frac{dw_\varphi}{d\tau} = -\frac{w_\varphi w_r}{r} + \frac{u_\varphi - w_\varphi}{Stk} \xi; \quad (9)$$

$$\frac{dw_z}{d\tau} = \frac{u_z - w_z}{Stk} \xi - \frac{1}{Fr}; \quad (10)$$

$$d\tau = \frac{dr}{w_r} = \frac{rd\varphi}{w_\varphi} = \frac{dz}{w_z}. \quad (11)$$

где
$$\xi = 1 + 0.197 Re_p^{0.63} + 2.64 \cdot 10^{-4} Re_p^{1.38} \quad (12)$$

представляет собой коэффициент, который принимает во внимание отклонение коэффициента аэродинамического сопротивления частицы от его значения, вычисленного по закону Стокса, а критерии Stk , Fr , Re_p – критерии Стокса, Фруда и Рейнольдса частицы. Эти критерии имеют вид

$$Re_p = \frac{\delta |\mathbf{U} - \mathbf{W}|}{\nu}; \quad Fr = \frac{U_0^2}{gR_0}; \quad Stk = \frac{\rho_p}{\rho} \frac{\delta^2 U_0}{18\nu R_0}. \quad (13)$$

Здесь ρ , ρ_p – плотности несущей среды и твердой фазы, δ – диаметр шарообразной частицы, g – ускорение свободного падения.

Представленный метод расчета носит детерминированный характер. Однако необходимо учитывать факторы, которые могут повлиять на траекторию частицы. Одним из них является участие частиц в пульсационном движении несущего турбулентного потока. Как показали экспериментальные данные, явление турбулентной диффузии существенно сказывается на процессе фракционного разделения частиц и понижает эффективность процесса разделения [7]. Учет этого явления в данной работе проводится аналогично с работой [7], когда пульсационные значения скоростей определяются вероятностным законом Гаусса:

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \exp\left(-\frac{(u' - u'_m)^2}{2k}\right). \quad (14)$$

Здесь u'_m – математическое ожидание, значение которого равно нулю; k – дисперсия, равная кинетической энергии пульсационного движения; f – плотность вероятности.

Опустив некоторые выводы, подробно представленные в работе [5], случайную величину пульсационной скорости найдем из выражения

$$u' = \pm \gamma \sqrt{-2k \ln N}, \quad (15)$$

где $0 < N < 1$; γ – эмпирическая константа.

При интегрировании уравнений (8) – (10) осредненная скорость несущей среды складывается с пульсационной составляющей, в результате получаем систему

$$\frac{dw_r}{d\tau} = \frac{w_\varphi^2}{r} + \frac{u_r + u'_r - w_r}{Stk} \xi; \quad (16)$$

$$\frac{dw_\varphi}{d\tau} = -\frac{w_\varphi w_r}{r} + \frac{u_\varphi + u'_\varphi - w_\varphi}{Stk} \xi; \quad (17)$$

$$\frac{dw_z}{d\tau} = \frac{u_z + u'_z - w_z}{Stk} \xi - \frac{1}{Fr}. \quad (18)$$

Здесь τ – характерное время, наименьшее из двух значений: $\Delta\tau_1$ – времени пребывания частицы в вихре и $\Delta\tau_2$ – времени жизни турбулентного вихря [5].

Метод численного решения

При решении данной задачи использовались численные методы, подробно описанные в работе [3]. Решение системы уравнений переноса импульса и уравнения неразрывности для несущей среды проводилось в переменных скорость – давление. Численное решение проводилось на гибридной шахматной разностной сетке методом контрольного объёма на основе неявного обобщённого метода переменных направлений. Конвективные и диффузионные слагаемые уравнения переноса радиальной, аксиальной, окружной составляющих вектора скорости, а также кинетической энергии и удельной скорости диссипации записываются с помощью известной экспоненциальной схемы.

Достоверность численного исследования подтверждается тестовыми исследованиями на сеточную и итерационную сходимость, а также сравнением полученных численных расчетов с известными опытными данными, приведенными в [3, 5].

Анализ численных результатов

В работе при расчете движения твёрдой фазы были использованы следующие параметры несущей среды:

$Re = 5000$, $Rg = 0.3$, $Rd = 0.3$. На основе рассчитанных полей компонент скорости, кинетической энергии, удельной скорости диссипации был проведен расчет траекторий движения твёрдых мелкодисперсных частиц в сепарационной камере.

На рис. 2 представлены результаты расчета траекторий движения твёрдых частиц нитридов металлов при детерминированном и стохастическом подходах. Рис. 2, *a* отражает траектории движения частиц диаметром $\delta = 5$ мкм, а рис. 2, *b* – частиц диаметром $\delta = 20$ мкм. Из рис. 2 видно, что наиболее мелкие частицы подвержены влиянию как мелкомасштабных, так и крупномасштабных пульсаций. Это объясняет сглаженные траектории движения крупных частиц по сравнению с частицами меньшего размера.

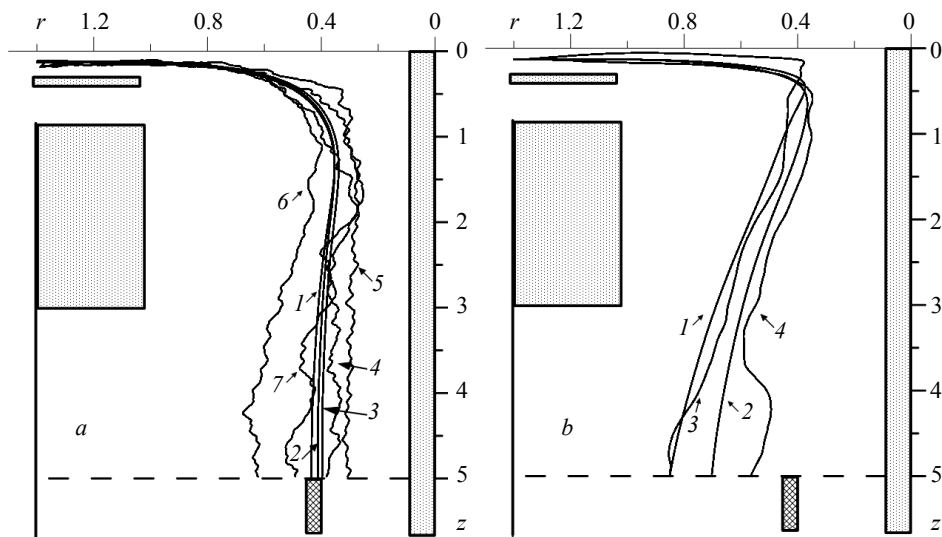


Рис. 2. Траектории движения одиночных частиц с одинаковой точкой старта при детерминированном и вероятностном подходах. (а) $\delta = 5$ мкм; (1 – VN, 2 – Si_3N_4 , 3 – AlN; при $\gamma = 0$), (4 – Si_3N_4 , 5 – AlN, 6 – VN, 7 – TiN; при $\gamma = 1.5$); (б) $\delta = 20$ мкм; (1 – VN, 2 – Si_3N_4 ; при $\gamma = 0$), (3 – VN, 4 – Si_3N_4 ; при $\gamma = 1.5$)

Fig. 2. Trajectories of single particles with the same starting point at deterministic and stochastic approaches. (a) $\delta = 5 \mu m$; (1 – VN, 2 – Si_3N_4 , 3 – AlN; at $\gamma = 0$), (4 – Si_3N_4 , 5 – AlN, 6 – VN, 7 – TiN; at $\gamma = 1.5$); (b) $\delta = 20 \mu m$; (1 – VN, 2 – Si_3N_4 ; at $\gamma = 0$), (3 – VN, 4 – Si_3N_4 ; at $\gamma = 1.5$)

На рис. 3 отражены траектории движения твёрдых частиц нитридов кремния и ванадия диаметром $\delta = 5$ мкм в зависимости от положения точки старта во входном сечении камеры. Видно, что более легкие частицы подвергаются более сильному воздействию турбулентной диффузии.

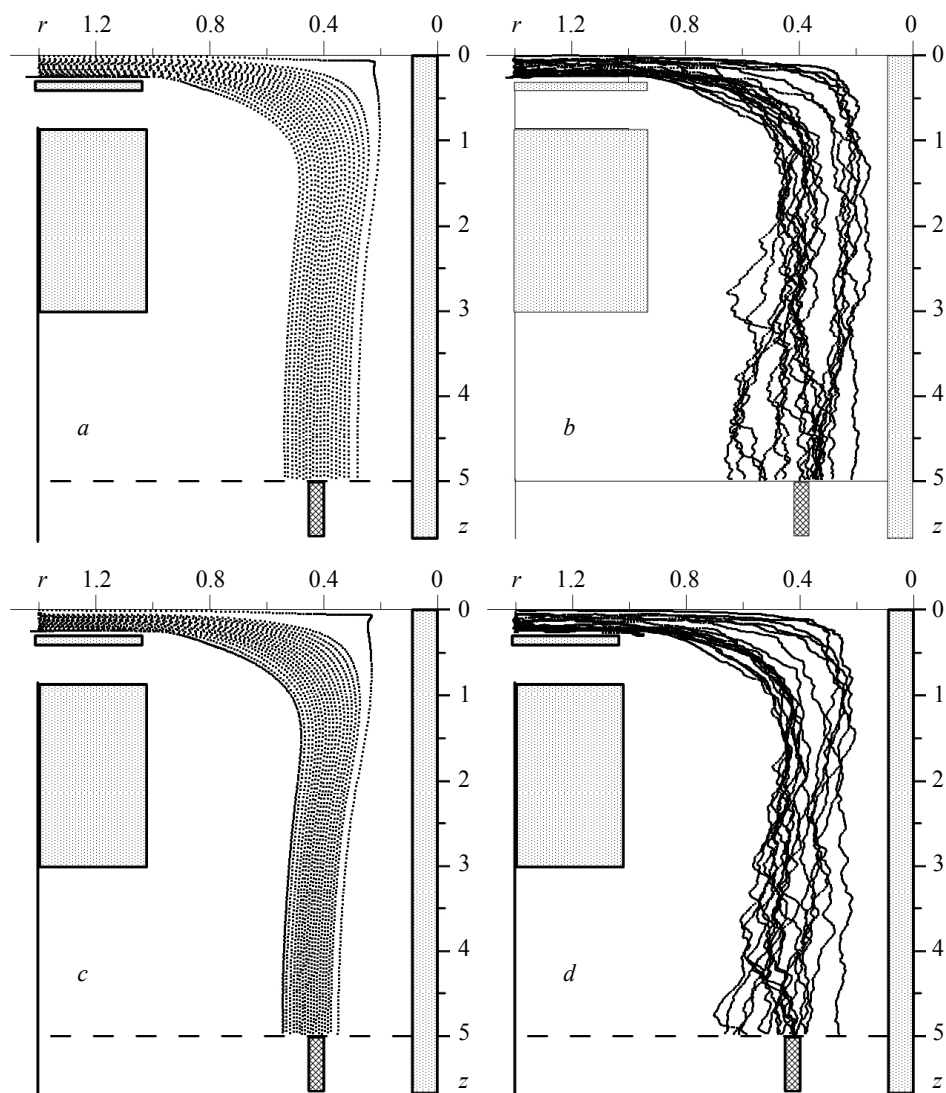


Рис. 3. Траектории движения частиц в зависимости от расположения точки старта во входном сечении при детерминированном и вероятностном подходах. $\delta = 5$ мкм; (a) Si_3N_4 при $\gamma = 0$; (b) Si_3N_4 при $\gamma = 1.5$; (c) VN при $\gamma = 0$; (d) VN при $\gamma = 1.5$

Fig. 3. Particle trajectories with respect to the starting point location in the input section at deterministic and stochastic approaches. $\delta = 5$ μm ; (a) Si_3N_4 at $\gamma = 0$; (b) Si_3N_4 at $\gamma = 1.5$; (c) VN at $\gamma = 0$; and (d) VN at $\gamma = 1.5$

Как было описано выше, экспериментальные данные подтверждают, что в расчетах с использованием детерминированного подхода завышена реальная эффективность процесса фракционного разделения. Для более точного расчета процесса разделения необходимо учитывать и турбулентную диффузию.

Проведённые численные исследования также подтвердили, что турбулентные пульсации газа влияют на остроту сепарации и граничный размер частиц. Для

оценки остроты сепарации были построены кривые разделения Тромпа (рис. 4). Из графика видно, что при детерминированном подходе острота сепарации завышена, а учёт влияния турбулентной диффузии частиц уточняет величину эффективности процесса фракционного разделения. Для примера на рис. 4 были приведены кривые разделения для нитрида кремния Si_3N_4 .

Следует отметить, что при проведении численных расчетов и построении кривых разделения использовался множественный расчет пробных частиц, однако, для лучшей визуализации на графиках приведена лишь малая часть таких траекторий.

Конструктивной особенностью рассматриваемой вихревой камеры является разделительный подвижный элемент, расположенный на выходе сепарационной области, изменение положения которого может влиять на граничный размер и остроту сепарации. На рис. 5 показано такое влияние. Данные кривые построены при расчете траекторий движения нитрида ванадия VN. Кривая 1 отражает процесс сепарации при положении перегородки на расстоянии 0.8 [безразмерных единиц] от вращающегося приосевого цилиндра, кривая 2– 0.6; кривая 3– 0.4.

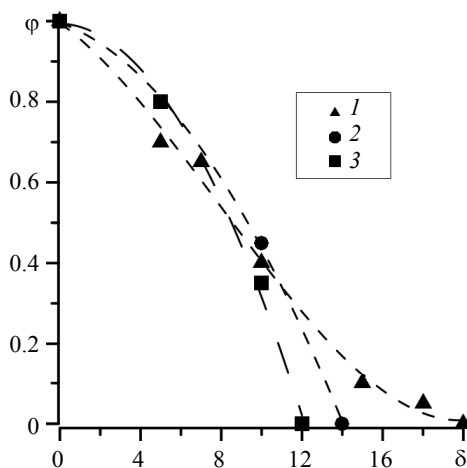


Рис. 4. Кривые разделения Тромпа при детерминированном и вероятностном подходах: 1– $\gamma = 1.5$, 2– $\gamma = 0.5$, 3– $\gamma = 0$

Fig. 4. Tromp separation curves at deterministic and stochastic approaches: $\gamma = (1)$ 1.5; (2) 0.5; and (3) 0

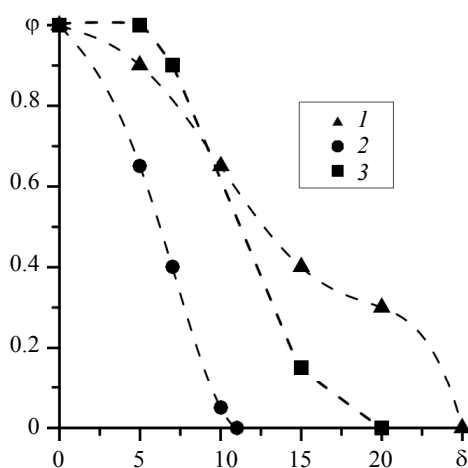


Рис. 5. Влияние положения разделительного элемента на эффективность процесса классификации

Fig. 5. Influence of the dividing element position on the efficiency of the classification process

Заключение

Представлены результаты численного исследования процесса фракционного разделения твёрдых мелкодисперсных частиц в сепарационной камере. Показана возможность управлять граничным размером частиц при перемещении разделительного элемента, расположенного на выходе из вихревой камеры. Показано влияние турбулентных пульсаций на процесс фракционного разделения твердых частиц. Численные исследования показали, что турбулентные пульсации вносят существенные изменения в процесс разделения и влияют на граничный размер и остроту сепарации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Khrustalyov A.P., Vorozhtsov S.A., Zhukov I.A., et al. Structure and mechanical properties of magnesium-based composites reinforced with nitride aluminum nanoparticles // Russian Physics Journal. 2017. V. 59. No. 12. P. 2183–2185. DOI: 10.1007/s11182-017-1034-6.
2. Khrustalyov A.P., Garkushin G.V., Zhukov I.A., Razorenov S.V. and Vorozhtsov A.B. Quasi-static and plate impact loading of cast magnesium alloy ML5 reinforced with aluminum nitride nanoparticles. *Metals*. 2019. V. 9. No. 6. P. 715. DOI: 10.3390/met9060715.
3. Шваб А.В., Евсеев Н.С. Моделирование процесса фракционного разделения частиц в пневматическом центробежном аппарате // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 4. С. 826–836. DOI: 10.1007/s10891-016-1443-3.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
5. Шваб А.В., Евсеев Н.С. Исследование процесса сепарации частиц в турбулентном закрученном потоке // Теоретические основы химической технологии. 2015. Т. 49. № 2. С. 197–205. DOI: 10.7868/S0040357115020128
6. Шваб А.В., Брендаков В.Н. Влияние гидродинамики и турбулентной диффузии на процессы разделения в центробежных и гравитационных аппаратах порошковой технологии // Изв. вержд. Физика. 1993. № 4. С. 69–80. DOI: 10.1007/BF00570743.
7. Мостафа А.А., Монджиа Х.Ц., Макдоннелл В.Г., Самуэлсен Г.С. Распространение запыленных струйных течений. Теоретическое и экспериментальное исследование // Аэрокосмическая техника. 1990. №3. С. 65–81. DOI: 10.2514/3.10079.

Статья поступила 29.07.2020

Evseev N.S., Zhukov I.A. (2021) EFFECT OF TURBULENT PULSATIONS ON THE FRACTIONAL SEPARATION OF FINE POWDERS OF METAL NITRIDES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 70–79

DOI 10.17223/19988621/72/6

Keywords: mathematical modeling, swirling turbulent flow, particle size classification, metal nitrides.

This paper presents a numerical study of a two-phase swirling turbulent flow in a separation element of a vortex chamber. The paper considers a process of fractional separation in the separation chamber with three particular features in its design. The main feature is the separation mobile element located at the outlet of the separation area. Changes in the position of this element can affect the boundary size and the sharpness of the separation. The second feature of the considered separation chamber is the presence of a rotating element along the vertical axis. This element helps to align the field of the circumferential velocity component. The third feature of this chamber is the presence of a branch pipe for the auxiliary gas flow supply intended to push the particles away from the chamber wall and to blow the separated particles in order to prevent them from agglomeration. In this work, the trajectories of the motion of fine nitride particles are calculated taking into account the turbulent diffusion effect. A possibility to control the boundary size of the particles, when moving the separation element located at the outlet of the vortex chamber, is demonstrated. Numerical study results show that the turbulent pulsations cause significant changes in the separation process and affect the boundary size and the sharpness of the separation.

Financial support. The reported study was funded by RFBR, project number 19-38-60036.

Nikolay S. EVSEEV (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tomsk State University, Tomsk, Institute for Problems of Chemical and Energetic Technologies of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Biysk, Russian Federation). E-mail: evseevns@gmail.com

Il'ya A. ZHUKOV (Candidate of Technical Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gofra930@gmail.com

REFERENCES

1. Khrustalyov A.P., Vorozhtsov S.A., Zhukov I.A., Promakhov V.V., Dammer V.Kh., Vorozhtsov A.B. (2017) Structure and mechanical properties of magnesium-based composites reinforced with nitride aluminum nanoparticles. *Russian Physics Journal*. 59(12). pp. 2183–2185. DOI: 10.1007/s11182-017-1034-6.
2. Khrustalyov A.P., Garkushin G.V., Zhukov I.A., Razorenov S.V., Vorozhtsov A.B. (2019) Quasi-static and plate impact loading of cast magnesium alloy ML5 reinforced with aluminum nitride nanoparticles. *Metals*. 9(6). pp. 715–727. DOI: 10.3390/met9060715.
3. Shvab A.V., Evseev N.S. (2016) Modeling the process of particle fractionation in a pneumatic centrifugal apparatus. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 89(4). pp. 829–839. DOI: 10.1007/s10891-016-1443-3.
4. Loytsyanskiy L.G. (1987) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow: Nauka.
5. Shvab A.V., Evseev N.S. (2015) Studying the separation of particles in a turbulent vortex flow. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 49(2). pp. 191–199. DOI: 10.1134/S0040579515020128.
6. Shvab A.V., Brendakov V.N. (1993) Effect of hydrodynamics and turbulent diffusion on separation processes in centrifugal and gravitational apparatus of powder technology. *Russian Physics Journal*. 36(4). pp. 350–359. DOI: 10.1007/BF00570743.
7. Mostafa A.A., Mongia H.C., McDonnell V.G., Samuelsen G.S. (1989) On the evolution of particle-laden jet flows: a theoretical and experimental study. *AIAA Journal*. 27. pp. 167–183. DOI: 10.2514/3.10079.

Received: July 29, 2020

УДК 533

DOI 10.17223/19988621/72/7

А.М. Липанов

**НЕЯВНЫЙ МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК НА РЕГУЛЯРНОЙ СЕТКЕ
(ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ)**

Предложен неявный метод численного решения одномерных нестационарных уравнений газовой динамики, преобразованных к виду вдоль характеристик. Расчёт величин газодинамических параметров осуществляется в узлах регулярной координатной сетки. Показана высокая (20-тикратная) эффективность предлагаемого алгоритма по сравнению с явным разностным методом.

Ключевые слова: *неявный метод, характеристика, газовая динамика, внутренняя точка.*

Метод характеристик – один из наиболее ранних методов численного решения дифференциальных уравнений с частными производными [1]. В данном случае речь идёт о гиперболических уравнениях, имеющих действительные характеристики. В докомпьютерный период данный метод использовался, как явный. В этом случае область (t, x) при решении одномерной нестационарной задачи покрывалась нерегулярно расположенными точками, в которых были определены величины газодинамических параметров (ГДП). Данное явление имело место при решении уравнений как с первым порядком точности, так и со 2-м (метод Массо) [2]. Это создавало неудобства при анализе результатов расчётов. Оно же явилось одной из причин, почему при решении систем гиперболических уравнений перешли к использованию явных [3, 4] и неявных разностных схем [5] вместо решения дифференциальных уравнений, выполняющихся вдоль характеристических направлений. В этом случае определяемые в результате решения задачи величины ГДП находятся в узловых точках регулярной разностной сетки и удобно располагаются при использовании результатов.

Однако этому же требованию можно удовлетворить и при использовании метода характеристик, если воспользоваться неявным методом решения уравнений, записанных вдоль характеристических направлений. Предлагаемый в данной работе подход удовлетворяет этому требованию. В данном случае вся область интегрирования (t, x) заранее разделена шагами Δt и Δx , образующими регулярную сетку, в узлах которой и определяются величины ГДП. Шаги этой сетки Δt и Δx могут быть переменными или постоянными. При резком изменении величин ГДП сетка может сгущаться как вдоль пространственной координаты, так и при интегрировании по времени. Величины шагов Δt и Δx определяются в результате решения задачи на основе асимптотической сходимости [6].

В данной работе будем рассматривать канал в заряде твёрдотопливного ракетного двигателя [7] (рис. 1), по которому без разрывов ГДП движется нестационарный поток газа. Данный канала 3 слева граничит с объёмом 4, в котором находится источник 5 прихода массы газов и их энергии. Через правую, или сопловую границу канала газы истекают в сопло, а по нему в окружающую среду.

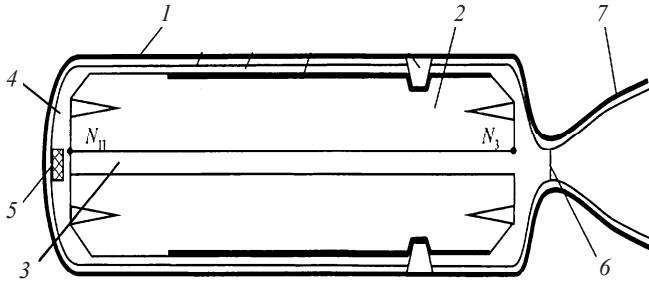


Рис. 1. Продольное сечение твёрдотопливного ракетного двигателя: 1 – корпус двигателя; 2 – заряд твёрдого топлива; 3 – канал заряда; 4 – левый объём; 5 – источник прихода массы газов и их энергии; 6 – расширяющаяся часть сопла; 7 – минимальное (критическое) сечение сопла

Fig. 1. Longitudinal section of a solid propellant rocket engine: 1 – engine housing; 2 – solid-propellant charge; 3 – charge channel; 4 – left volume; 5 – source of the mass of gases and their energy; 6 – divergent section of the nozzle; 7 nozzle throat (a critical section)

Рассматриваем следующую систему уравнений [8, 9]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho} + v \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho} + (k-1) \frac{p}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

где p – давление, ρ – плотность, v – скорость движения газа, k – отношение изобарной (c_p) и изохорной (c_v) теплоёмкостей газа. Начальными условиями будем считать $v = 0$; $p = p_{\text{нач}}$, $\rho = \rho_{\text{нач}}$. Если переменные в системе уравнений (1) – (3) приводятся к безразмерному виду, то в качестве масштабов можно использовать:

для давления $p_{\text{нач}}$; для плотности $\rho_{\text{нач}}$; для скорости потока газа $\sqrt{\frac{p_{\text{нач}}}{\rho_{\text{нач}}}}$. Масштабом для координаты x можно взять радиус канала r_0 , на его левой границе.

Тогда масштаб для времени будет произведение $r_0 \sqrt{\frac{\rho_{\text{нач}}}{p_{\text{нач}}}}$.

Данная работа посвящена изложению сути неявного метода 2-го порядка точности как при интегрировании во времени, так и при расчёте величин ГДП по длине канала. Рассмотрим внутренние точки канала. Расчёту величин ГДП на границах канала посвящена отдельная работа.

Исключим в уравнении (3) градиент $\frac{\partial v}{\partial x}$ с помощью уравнения (1). Получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{kp}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0. \quad (4)$$

Видим, что вдоль характеристического направления (траектории движения газа)

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (5)$$

выполняется уравнение

$$\frac{dp}{dt} - \frac{kp}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (6)$$

Решая уравнение (6), получим равенство для энтропийной функции:

$$\frac{p}{\rho^k} = s, \quad (7)$$

где s – постоянная величина при переходе с одного временного слоя на другой вдоль траектории движения газа. Параметр s при переходе от одной траектории к другой может меняться.

В уравнении (4) полную производную $\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x}$ исключим с помощью уравнения (1). Получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + kp \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Последнее уравнение запишем в виде

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{kp}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

где
$$c^2 = \frac{kp}{\rho}. \quad (9)$$

(c – скорость звука).

Умножим уравнение (2) на c и сложим с уравнением (8). Получим

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + (v+c) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + c \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v+c) \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \quad (10)$$

Видим, что вдоль характеристического направления (характеристик 1-го семейства)

$$\frac{dx}{dt} = v + c \quad (11)$$

выполняется уравнение

$$\frac{dp}{dt} + \rho c \frac{dv}{dt} = 0. \quad (12)$$

Вычтем, далее, из уравнения (8) уравнение (2), умноженное на c . Будем иметь

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + (v-c) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + c \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v-c) \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \quad (13)$$

Получили уравнение

$$\frac{dp}{dt} - \rho c \frac{dv}{dt} = 0, \quad (14)$$

выполняющееся вдоль характеристического направления (характеристик 11-го семейства)

$$\frac{dx}{dt} = v - c. \quad (15)$$

Таким образом, вместо уравнений (1) – (3) имеем три характеристических направления (5), (11), (15), вдоль которых выполняются три уравнения (6), (12), (14) соответственно.

Рассмотрим, далее, регулярную сетку, фрагмент которой показан на рис. 2.

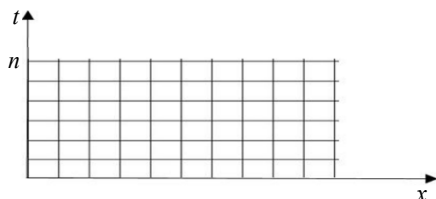


Рис. 2. Фрагмент регулярной сетки в координатах (t, x) ; n – номер временного слоя, до которого доведён расчёт

Fig. 2. Fragment of a regular grid in coordinates (t, x) ; n is the number of the limiting time layer for calculations

Пусть расчёт величин ГДП доведён до временного слоя, отмеченного на рис. 2 буквой n . Требуется найти величины ГДП на $(n+1)$ -м временном слое. Изложим алгоритм расчёта их величин на примере i -й точки, находящейся на $(n+1)$ -м временном слое, где $i = 2, 3, \dots, N-1$ – для дозвукового потока (рис. 3) и $i = 2, 3, \dots, N$ – для сверхзвукового потока (рис. 4). Здесь N – общее количество узловых точек вдоль оси x (вдоль рассматриваемого канала).

Характеристический треугольник ABC , показанный на рис. 3, соответствует дозвуковому потоку. В этом случае при $i = N-1$ точка C будет находиться между $(N-1)$ -й и N -й точками, то есть будет находиться внутри канала.

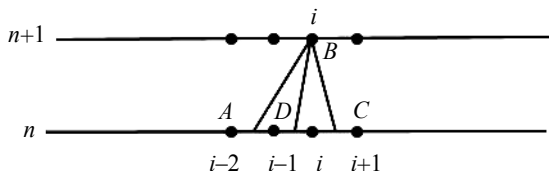


Рис. 3. Характеристический треугольник ABC с вершиной в i -й точке на $(n+1)$ -м временном слое (дозвуковой поток)

Fig. 3. Characteristic triangle ABC with an apex at i -th point on $(n+1)$ -th time layer (subsonic flow)

Аналогичная ситуация имеет место, если $i = 2$. В этом случае точка A будет находиться между нулевой и первой точками, то есть тоже будет находиться внутри канала. Расчёт величин ГДП в первой точке и на границах канала здесь не рассматриваем.

Если поток сверхзвуковой, то характеристический треугольник ABC будет иметь вид, показанный на рис. 4.

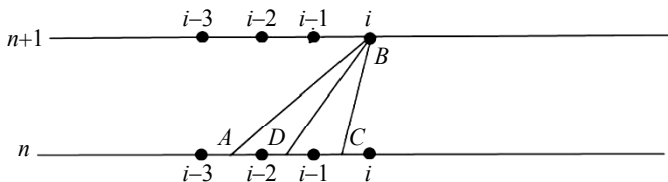


Рис. 4. Характеристический треугольник ABC при сверхзвуковом потоке.

Точка B на $(n+1)$ -м временном слое является i -й на оси x

Fig. 4. Characteristic triangle ABC for a supersonic flow.

Point B on $(n+1)$ -th time layer is the i -th point on the x -axis

Стороны AB треугольников ABC на рис. 3 и 4 соответствуют характеристикам 1-го семейства (11). Если поток сверхзвуковой, то при $i = N$, то есть на правой границе канала граничные условия не требуются и расчёт величин ГДП в точке N будет осуществляться так же, как, например, в точке $N-1$ или в любой другой внутренней точке. В окрестности левой границы считаем, что поток всегда дозвуковой. Поэтому при $i = 2$, когда в окрестности правой границы канала поток газа сверхзвуковой, точка A будет находиться между нулевой и первой точками. Проинтегрируем уравнение (11) вдоль отрезка AB по времени, учитывая, что интервал между временными слоями равен Δt . Выполнив интегрирование, получим

$$x_B - x_A = \frac{(v+c)_A + (v+c)_B}{2} \Delta t. \quad (16)$$

Аналогично, для отрезка BC находим

$$x_B - x_C = \frac{(v-c)_C + (v-c)_B}{2} \Delta t. \quad (17)$$

Далее, уравнения (12) и (14) проинтегрируем вдоль отрезков AB и BC соответственно. Будем иметь

$$p_B = p_A - \frac{(\rho c)_A + (\rho c)_B}{2} (v_B - v_A); \quad (18)$$

$$p_B = p_C - \frac{(\rho c)_C + (\rho c)_B}{2} (v_B - v_C). \quad (19)$$

В пределах характеристического треугольника ABC из точки B в точку D проведём отрезок DB траектории (5) движения газов (рис. 3 и 4). Вдоль отрезка DB выполняется уравнение (7), которое запишем в виде

$$\frac{\rho_B}{\rho_D} = \left(\frac{p_B}{p_D} \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (20)$$

Чтобы рассчитать величины газодинамических параметров в точке B , надо знать их значения в точках A , D и C на n -м временном слое.

При известных величинах ГДП в точках A , D и C трёх уравнений (18) – (20) достаточно для нахождения значений давления, плотности газов и скорости их

движения в точке B . Однако, связь между ними нелинейная и решить их относительно неизвестных переменных не представляется возможным. Для этого необходимо задаваться величиной давления p_B . Тогда из уравнения (20) найдём плотность ρ_B , а из уравнения (18) – скорость движения газов v_B . Полученные результаты необходимо подставить в уравнение (19) и, решая однопараметрическую трансцендентную задачу, найти и величину давления p_B в точке B .

Начнём с определения величин ГДП в точках A , D и C . Для этого воспользуемся их значениями на n -м временном слое в точках $i-2$, $i-1$, i и $i+1$ при дозвуковом потоке (рис. 3) или точками $i-3$, $i-2$, $i-1$ и i в случае сверхзвукового потока (рис. 4).

Введём в рассмотрение вектор ξ с компонентами $i-2$ и $i-3$. Использование вектора ξ в качестве индекса будет означать, что это индекс, равный $i-2$ и $i-3$, то есть годится как при дозвуковом потоке, так и при сверхзвуковом. С этой же целью введём векторы: χ с компонентами $i-1$, $i-2$; ψ с компонентами i , $i-1$ и ω с компонентами $i+1$, i .

Для определения величин координат x_A , x_D и x_C введём в рассмотрение вектор-индекс θ с компонентами A , D и C . Тогда для определения величины координаты x_θ воспользуемся уравнением, аналогичным уравнению (16):

$$x_B - x_\theta = \frac{\Phi_\theta + \Phi_B}{2} \Delta t, \quad (21)$$

В уравнении (21) Φ – вектор с компонентами $v+c$, v и $v-c$.

Если переменная Φ относится к n -му временному слою, то её можно записать в виде квадратичной функции от x , проходящей через точки, соответствующие векторам ξ , χ и ψ для точки A , векторам χ , ψ и ω – для точки D и векторам ω , ψ и χ – для точки C . Поэтому имеем

$$\Phi = a_{0\theta} + a_{1\theta}(x - x_\pi) + a_{2\theta}(x - x_\pi)^2, \quad (22)$$

где π – вектор с компонентами ξ , χ и ω , соответствующими началам аппроксимации квадратичными выражениями (22).

$$a_{0\theta} = \Phi_\pi,$$

а коэффициенты $a_{1\theta}$ и $a_{2\theta}$ находим, решая следующую систему двух уравнений:

$$a_{1\theta} + a_{2\theta}(x_\nu - x_\pi) = \frac{\Phi_\nu - \Phi_\pi}{x_\nu - x_\pi}, \quad (23)$$

где ν – вектор с тремя компонентами (α, β, γ) ; α , β и γ – векторы с двумя компонентами: (χ, ψ) , (ψ, ω) , (ψ, χ) – соответственно.

В каждой точке A , D или C (компоненты вектора θ) имеем свои вектор α и компонент ξ , вектор β и компонент χ , вектор γ и компонент ψ соответственно. В свою очередь, векторы α , β и γ имеют по два компонента. Это значит, что в каждой точке (A , D или C) с помощью уравнения (23) получим по два уравнения для определения коэффициентов $a_{1\theta}$, $a_{2\theta}$ ($\theta = A, D, C$).

Зная коэффициенты $a_{1\theta}$, $a_{2\theta}$ ($\theta = A, D, C$), в каждой точке $x = x_\theta$ можем записать

$$\Phi_\theta = \Phi_\pi + a_{1\theta}(x_\theta - x_\pi) + a_{2\theta}(x_\theta - x_\pi)^2. \quad (24)$$

Для определения величины координаты x_θ из уравнения (21) получаем квадратное уравнение. Решив его, будем иметь

$$x_\theta = x_\pi + \frac{b_1}{1 + \sqrt{1 + a_{2\theta}\Delta t \frac{b_1}{1 + a_{1\theta}0.5\Delta t}}}. \quad (25)$$

Здесь

$$b_1 = \frac{2(x_B - x_\pi) - (\Phi_B + \Phi_\pi)\Delta t}{1 + 0.5\Delta t a_{1\theta}}.$$

Зная x_θ , величины ГДП квадратичным интерполированием из узловых точек на n -м временном слое пересчитаем в точку x_θ . В результате будем знать величины ГДП в каждой точке $x = x_\theta$.

Однако коэффициент b_1 в выражении для x_θ содержит слагаемое Φ_B , относящееся к $(n+1)$ -му временному слою и пока ещё не известное. Поэтому решение задачи по определению величин координат x_A и x_D разделим на два этапа. На первом этапе уравнение (21), относящееся к точкам A и D , будем решать, предполагая, что величины ГДП в точке B равны таковым в точках A и D . Поэтому вместо уравнения (21) будем иметь

$$x_B - x_\theta = \Phi_\theta \Delta t. \quad (26)$$

Здесь

$$\Phi_A = (v + c)_A; \Phi_D = v_D.$$

Переменную Φ , как функцию координаты x на n -м временном слое, по-прежнему записываем в виде (22). Поэтому для Φ_θ будем иметь равенство (24). Подставим его в уравнение (26). Получим

$$x_B - x_\theta = \Delta t \left[\Phi_\pi + a_{1\theta}(x_\theta - x_\pi) + a_{2\theta}(x_\theta - x_\pi)^2 \right] \quad (27)$$

квадратное уравнение. Решая его, будем иметь

$$x_\theta = x_\pi + \frac{b_2}{1 + \sqrt{1 + 2a_{2\theta}\Delta t \frac{b_2}{1 + a_{1\theta}\Delta t}}}, \quad (28)$$

$$b_2 = 2 \frac{x_B - x_\pi - \Phi_\pi \Delta t}{1 + a_{1\theta}\Delta t}.$$

Из уравнения (27) для θ , равного A или D , получим координаты x_A и x_D . После этого, квадратичным интерполированием значений ГДП, в точки x_A и x_D найдём их величины в этих точках. Имея величины ГДП в точках A и D можно приступить к расчёту величин ГДП в точке B .

Величину давления в точке B будем задавать. После этого из уравнения (20) найдём величину плотности ρ_B . При заданном давлении и найденной плотности из уравнения (18) определим величину скорости потока газов v_B . Имея величины ГДП в точке B , значения координат x_A и x_D с помощью уравнения (25) можно уточнить. А квадратичным интерполированием значений ГДП в точки x_A и x_D найдём их уточнённые величины в этих точках. После этого с помощью уравнения (25) находим величину координаты x_C . Квадратичным интерполированием значений ГДП в точку C , найдём значения ГДП в этой точке. Найденные величины ГДП подставляем в уравнение (19). Получим невязку σ_{0i} . Введём в рассмотрение величину допустимой невязки σ_* , соответствующей требуемой точности решения уравнения (19). И если полученная невязка

$$\sigma_{0i} \leq \sigma_*, \quad (29)$$

то величина давления p_B была задана правильно.

Поэтому вопросу определения правильно прогнозируемой величины давления p_B следует уделить специальное внимание, чтобы не выполнять лишних дополнительных расчётов. Величина p_B может быть равна

$$p_B = p_{in} + \delta p_{in}, \quad (30)$$

где p_{in} – величина давления в i -й точке на n -м временном слое; δp_{in} – изменение давления при переходе с $(n-1)$ -го временного слоя на n -й.

Но лучше воспользоваться двумя шагами изменения давления δp_{in} и $\delta p_{i(n-1)}$ (при переходе с $(n-2)$ -го временного слоя на $(n-1)$ -й). В этом случае можем записать

$$p_i = p_{in} + a_{1ip}(t - t_n) + a_{2ip}(t - t_n)^2. \quad (31)$$

Имея $p_i = p_{i(n-1)}$ при $t_i = t_{(n-1)}$ и $p_i = p_{i(n-2)}$ при $t_i = t_{(n-2)}$, получим два равенства для определения коэффициентов a_{1ip} и a_{2ip} . Определив a_{1ip} и a_{2ip} и подставив их выражения в равенство (31), при $t_i = t_{(n+1)}$ получим

$$p_{i(n+1)} = p_{in} + 2\delta p_{in} - \delta p_{i(n-1)}. \quad (32)$$

Видим, что если δp_{in} окажется равным $\delta p_{i(n-1)}$, то величина $p_{i(n+1)}$ при использовании равенства (32) окажется такой же, как и при использовании равенства (30). В общем же случае величины δp_{in} и $\delta p_{i(n-1)}$ совпадать не будут и

$$\delta p_{эф} = 2\delta p_{in} - \delta p_{i(n-1)}, \quad (33)$$

полученное с помощью равенства (33), учитывающее кривизну зависимости $p_i(t)$ при переходе с n -го временного слоя на $(n+1)$ -й, позволит получать более точную прогнозируемую величину давления $p_{i(n+1)}$.

Использование равенства (32) при переходе с n -го временного слоя на $(n+1)$ -й позволит на нескольких шагах интегрирования по времени без повторных приближений получать величины ГДП, удовлетворяющие неравенству (29).

Однако в нестационарном газодинамическом потоке могут распространяться волны сжатия и волны разрежения, при наличии которых на кривой $p(t)$ будут наблюдаться изломы. По тем же причинам кривая $p(t)$ может достаточно резко изменяться и без изломов при переходе с n -го временного слоя на $(n+1)$ -й. При этих условиях величины ГДП, найденные с использованием равенства (32) не будут удовлетворять неравенству (29). В таких ситуациях для кривой невязки $\sigma_i(p)$ уравнения (19) важно знать и использовать частную производную $\frac{\partial \sigma_i}{\partial p}$.

Как показывает практика вычислений, при решении конкретной задачи частная производная $\frac{\partial \sigma_i}{\partial p}$ для уравнения (19) изменяется не очень сильно для достаточно широкого диапазона изменения давления p_i .

Её приближённую величину найдём, если полученное с помощью равенства (32) давление $p_{i(n+1)}$ изменим на величину δp_i , составляющую, например, 0.01 от $p_{i(n+1)}$. Используя новое значение p_B , с помощью уравнений (20) и (18) находим плотность ρ_B и скорость движения газов v_B , не уточняя ни величины координат x_A , x_D и x_C , ни величины ГДП в этих точках. Полученные результаты подставляем в уравнение (18). Найдём невязку σ_{li} и рассчитаем приближённую величину частной производной $\frac{\partial \sigma_i}{\partial p} \cong \frac{\sigma_{li} - \sigma_{0i}}{\delta p_i}$. Имея величину $\frac{\partial \sigma_i}{\partial p}$, в соответствии с методом касательных Ньютона [10] решения трансцендентных уравнений можем записать уравнение касательной

$$\sigma_i = \sigma_{0i} + \frac{\partial \sigma_i}{\partial p} (p - p_{i(n+1)})$$

к кривой невязки $\sigma_i(p)$. При $\sigma_i = 0$ найдём уточнённое значение давления

$$p'_B = p_{i(n+1)} - \frac{\sigma_{0i}}{\frac{\partial \sigma_i}{\partial p}}. \quad (34)$$

Используя давление p'_B , с помощью уравнений (20) и (18) находим плотность ρ'_B и скорость движения газов v'_B соответственно при неизменных величинах координат x_A и x_D и, следовательно, неизменных величинах ГДП в этих точках.

После этого с помощью формулы (25), используя найденные в первом приближении величины ГДП в точке B , уточняем величины координат x_A и x_D и после этого рассчитываем уточнённые значения ГДП в этих точках. Имея уточнённые величины ГДП в точках A и D при том же давлении p'_B повторно находим плотность ρ''_B с помощью уравнения (20) и скорость движения газов v''_B , используя уравнение (18). С помощью найденных параметров p'_B , ρ''_B и v''_B уточняем величину координаты x_C и рассчитываем величины ГДП в этой точке. Величины найденных ГДП для точек B и C подставляем в уравнение (19) и находим

невязку σ_{2i} . С большой долей вероятности она будет удовлетворять условию (29). После этого переходим к расчёту величин ГДП в следующей $(i+1)$ -й точке на $(n+1)$ -м временном слое.

Предлагаемый алгоритм решения уравнений газовой динамики на каждую узловую точку будет затрачивать примерно в 2 раза больше машинного времени, чем явный разностный метод (в 1.67 из-за двух приближений при расчёте величин ГДП в точках A и D и плюс ещё 0.2, если примерно через каждые 10 шагов интегрирования по времени величину давления p_B с помощью равенства (33) при

известном значении частной производной $\frac{\partial \sigma_i}{\partial p}$ необходимо уточнять). А так как

при использовании неявного метода шаг Δt интегрирования во времени при одинаковой точности примерно в 40 раз больше, чем при использовании явного разностного метода [6], то время, затрачиваемое на решение одного варианта газодинамической задачи примерно в 20–25 раз будет меньше.

В качестве примера использования изложенного алгоритма выполним расчёт величин ГДП в точке B для дозвукового потока при известных значениях ГДП на n -м временном слое. Их значения в точках $i-2$, $i-1$, i и $i+1$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

**Величины давления, плотности, скорости движения газа
и скорости звука в узловых точках на n -м временном слое**

Координата, м Параметры	$i-2$	$i-1$	i	$i+1$
p , 10^5 кг/(с ² ·м)	5.134	5.0	4.90	4.822
ρ , кг/м ³	2.18	2.128	2.093	2.066
v , м/с	246.3	247.8	250.3	253.3
c , м/с	574.2	573.5	572.5	571.6

Шаг интегрирования по времени выбираем равным $\Delta t = 0.0002$ с. Тогда в 1-м приближении, используя формулы (26) – (28) для точек A и D , получим следующие величины координат x_A и x_D , приведенные в табл. 2 (верхние цифры).

Таблица 2

Величины координат точек A , D и C

Координата	x_A	x_D	x_C
Величина координаты, м	0.355584 (0.354762)	0.470192 (0.469237)	0.583428

Квадратичным интерполированием между узловыми точками в каждую из точек A и D найдём величины ГДП (давления, плотности и скорости движения газа) в этих точках. По найденным величинам давления и плотности газа найдём в этих точках величины скорости звука в газе, принимая $k = 1.4$. Полученные значения ГДП приведены в табл. 3.

Таблица 3

Величины ГДП в точках *A*, *D* и *C*

Координата	x_A	x_D	x_C
$p, 10^5 \text{ кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{м})$	5.073350 (5.074799)	4.945147 (4.946069)	4.849799
$\rho, \text{ кг}/\text{м}^3$	2.156366 (2.156929)	2.106457 (2.106804)	2.073693
$v, \text{ м}/\text{с}$	246.810577 (246.795585)	249.040304 (249.017090)	252.070707
$c, \text{ м}/\text{с}$	573.918158 (573.925443)	573.294582 (573.300396)	572.207646

Имея величины ГДП в точках *A* и *D*, можно приступить к расчёту их значений в точке *B*. Для этого величину давления p_B находим (прогнозируем) с помощью равенства (32). Имея $\delta p_{эф} = 0.02886 \cdot 10^5 \text{ кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{м})$, получим $p_B = 4.92886 \cdot 10^5 \text{ кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{м})$. При этой величине p_B и $k = 1.4$ с помощью равенства (20) находим плотность $\rho_B = 2.101566 \text{ кг}/\text{м}^3$. Имея величины давления и плотности, определяем значение скорости звука $c_B = 573.014672 \text{ м}/\text{с}$. После этого с помощью уравнения (18) найдём величину скорости потока $v_B = 258.747293 \text{ м}/\text{с}$. Получив величины ГДП в точке *B*, найденные в 1-м приближении, необходимо выполнить расчёт координат точек *A* и *D* во 2-м приближении. Их величины приведены в табл.2 в скобках. Видим, что величины координат точек *A* и *D* во 2-м приближении от 1-го отличаются не более, чем на одну единицу в третьей значащей цифре. Поэтому и величины ГДП в этих точках во 2-м приближении (таблица 3) практически совпадают с их значениями в 1-м приближении (разница в 4-х и более высоких по порядку расположения значащих цифрах).

Поэтому величины ГДП в точке *B* во 2-м приближении совпадают с их величинами в 1-м приближении. Далее, находим величину координаты x_C точки *C*. Её значение приведено в табл. 2. После этого квадратичным интерполированием в точку *C* находим величины ГДП в этой точке. Их значения приведены в табл. 3. Величины ГДП в точках *B* и *C* подставляем в уравнение (19), поделив его слева и справа на 10^5 , чтобы не иметь дела со слишком большими числами. Получаем $\sigma_0 = 0.00075 \text{ кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{м})$. Если σ_* принять равной $10^{-3} \text{ кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{м})$, то неравенство (29) будет выполнено и можно переходить к расчёту величин ГДП в следующей $(i + 1)$ -й узловой точке на $(n + 1)$ -м временном слое.

Заключение

На основе одномерных нестационарных уравнений газовой динамики, преобразованных к виду вдоль характеристических направлений, на шаге интегрирования по времени Δt получены со 2-м порядком точности уравнения для любого характеристического треугольника, соответствующего *i*-й внутренней точке канала на $(n + 1)$ -м временном слое.

Сформулирован алгоритм решения полученных уравнений, выполняющихся вдоль характеристических направлений, неявным методом со 2-м порядком точ-

ности как при интегрировании по времени t , так и при расчётах вдоль пространственной координаты x на заданной сетке для области (t, x) .

Для i -й внутренней точки канала выполнен пример расчёта величин ГДП при переходе с n -го временного слоя на $(n+1)$ -й. Показана хорошая сходимость вычислительного процесса и высокая эффективность использования предлагаемого алгоритма при решении газодинамических задач неявным методом характеристик по сравнению с явным разностным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С.А. Задача Коши для нелинейных уравнений гиперболического типа // Математический сборник. Новая серия. 1937. Т. 2(44). Вып. 5. С. 871–899.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматгиз, 1959. 620 с.
3. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982.
4. Вязников К.В., Тишков В.Ф., Фаворский А.П. Построение монотонных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа // Математическое моделирование. 1989. Т. 1. № 5. С. 95–120.
5. Ермолаев Б.С., Новожилов Б.В., Посвянский В.С., Сулимоа А.А. Результаты численного моделирования конвективного горения порошкообразных взрывчатых систем при возрастании давления // Физика горения и взрыва. 1985. № 5. С. 3–12.
6. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1977.
7. Внутренняя баллистика РДТТ / под ред. А.М. Липанова и Ю.М. Милёхина. М.: Машиностроение, 2007. 502 с.
8. Бетехтин С.А., Виноцкий А.М., Горохов М.С., Станюкович К.П., Федотов И.Д. Газодинамические основы внутренней баллистики. М.: Оборонгиз, 1957. 386 с.
9. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1967. 559 с.
10. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1986. 544 с.

Статья поступила 15.03.2021

Lipanov A.M. (2021) APPLICATION OF THE IMPLICIT METHOD OF CHARACTERISTICS ON A REGULAR GRID FOR SOLVING THE GAS-DYNAMIC PROBLEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 80–92

DOI 10.17223/19988621/72/7

Keywords: implicit method, characteristics, gas dynamics, interior point.

In this work, an implicit method is proposed to numerically solve a system of the one-dimensional nonstationary equations of gas dynamics transformed by the method of characteristics. Internal points of the channel for a solid-propellant charge are considered at a pre-ignition period of the solid-propellant rocket engine operation. The use of the implicit method makes it possible to calculate the values of gas-dynamic parameters at nodal points of the regular coordinate grid. Calculations of the gas-dynamic parameters both when integrating over time and along the spatial coordinate are performed with the second order of accuracy. Both subsonic and supersonic flows are studied. It is shown that, when predicting the expected pressure value during the transition from one time layer to another with the second order of accuracy, the twenty-fold efficiency of the implicit method is achieved in comparison with the explicit difference method. The trial calculation is performed.

Aleksey M. LIPANOV (Academician of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor, Institute of Applied Mathematics M.V. Keldysh RAS, Moscow, Russian Federation). E-mail: aml35@yandex.ru

REFERENCES

1. Khristianovich S.A. (1937) Zadacha Cauchy dlya nelineynykh uravneniy giperbolicheskogo tipa [Cauchy problem for nonlinear hyperbolic equations]. *Matematicheskiiy sbornik. Novaya seriya*. 44(5). pp. 871–899.
2. Berezin I.S., Zhidkov N.P. (1959) *Metody vychisleniy* [Calculation methods]. Moscow: Fizmatgiz.
3. Belotserkovskiy O.M., Davydov Yu.M. (1982) *Metod krupnykh chastits v gazovoy dinamike* [Method of large particles in gas dynamics]. Moscow: Nauka.
4. Vyaznikov K.V., Tishkov V.F., Favorskiy A.P. (1989) Postroenie monotonnykh skhem povyshennogo poryadka approksimatsii dlya sistem uravneniy giperbolicheskogo tipa [Construction of monotone schemes of higher order of approximation for systems of hyperbolic equations]. *Zhurnal Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*. 1(5). pp. 95–120.
5. Ermolaev B.S., Novozhilov B.V., Posvyanskiy V.S., Sulimoa A.A. (1985) Rezul'taty chislennogo modelirovaniya konvektivnogo goreniya poroshkoobraznykh vzryvchatykh sistem pri vozrastanii davleniya [Numerical modeling results for convective combustion of powdery explosive systems at increasing pressure]. *Fizika goreniya i vzryva – Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 5. pp. 3–12.
6. Samarskiy A.A. (1977) *Vvedeniye v teoriyu raznostnykh skhem* [Introduction to the theory of difference schemes]. Moscow: Nauka.
7. Lipanov A.M., Milekhin Yu.M. (2007) *Vnutrennyaya ballistika RDTT* [Internal ballistics of solid propellants]. Moscow: Mashinostroenie.
8. Betekhtin S.A., Vinitskiy A.M., Gorokhov M.S., Stanyukovich K.P., Fedotov I.D. (1957) *Gazodinamicheskie osnovy vnutrenney ballistiki* [Gas-dynamic foundations of internal ballistics]. Moscow: Oborongiz.
9. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. (1967) *Teoreticheskaya gidromekhanika, chast' 2* [Theoretical hydromechanics, part 2]. Moscow: Fizmatgiz.
10. Bronstein I.N., Semendyaev K.A. (1986) *Spravochnik po vysshey matematike* [Handbook of higher mathematics]. Moscow: Nauka.

Received: March 15, 2021

УДК 532.5

DOI 10.17223/19988621/72/8

З.М. Маликов, М.Э. Мадалиев

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ С ВНЕЗАПНЫМ РАСШИРЕНИЕМ

Проводится численное исследование внезапно расширяющегося сильно закрученного потока с помощью моделей Рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM и EARSМ. Полученные результаты сравниваются с известными экспериментальными данными. Целью настоящей работы является проверка способности моделей описывать анизотропную турбулентность. Показано, что модель SSG/LRR-RSM является более подходящей для исследования подобных течений.

Ключевые слова: осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье – Стокса, явные алгебраические модели напряжения Рейнольдса, модель SSG/LRR-RSM-w2012, вихревая вязкость, прогонка, SIMPLE.

В настоящее время для решения задач турбулентности используются метод прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS) [1, 2], метод моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) [3] и метод осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса (Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations, RANS). Современные возможности метода DNS с определением всех составляющих движения ограничены расчетами при относительно невысоких числах Рейнольдса, не превышающих величину порядка 10^3 . Метод LES по сравнению с DNS может применяться для расчетов течений с существенно большими числами Рейнольдса. Однако использование метода LES для расчета пристеночных течений требует либо введения дополнительного «эмпиризма», заключающегося в параметризации прилегающего к стенке слоя, либо применения сеток, приближающихся по своим характеристикам к сеткам метода DNS [4]. Например, в работе [5] метод LES применен для расчета внезапно расширяющегося закрученного потока. Однако для этого была использована трехмерная блочно-структурированная сетка в количестве 716 тыс. ячеек, что привела к большим затратам вычислительных ресурсов.

Поэтому для технических приложений более применимыми являются методы, которые базируются на решении уравнений Навье – Стокса, осредненные по Рейнольдсу. Эти методы называются RANS-моделями турбулентности. Большинство моделей турбулентности RANS используют обобщенную гипотезу Буссинеска, которая связывает тензоры Рейнольдсовых напряжений с тензорами скоростей деформаций, что является аналогом реологического закона Ньютона для молекулярной вязкости. Достоинством гипотезы Буссинеска является то, что она позволяет сократить количество определяемых в процессе моделирования переменных с 6 до 1. Модели, в основе которых лежит гипотеза Буссинеска называются линейными. Однако в основе этой гипотезы лежит изотропная турбулентность. Поэтому в анизотропных турбулентных течениях гипотеза Буссинеска несправедлива и ее использование приводит к получению качественно неверного результата.

Следовательно, в таких случаях необходимо использование нелинейных моделей, где не используется гипотеза Буссинеска.

К нелинейным RANS-моделям можно отнести модели Рейнольдсовых напряжений. Представителем из данного класса моделей является модель SSG/LRR-RSM. Эта модель напряжений Рейнольдса со вторым моментом смешанного SSG/LRR, в которых используется уравнение ω для уравнения масштаба длины. Модели напряжений Рейнольдса с полным вторым моментом сильно отличаются от более простых линейных или нелинейных моделей с одним уравнением, так как последние используют конститутивное соотношение, дающее напряжения Рейнольдса τ_{ij} в терминах других тензоров через некоторое предполагаемое соотношение (такое, как гипотеза Буссинеска). С другой стороны, полные модели напряжений Рейнольдса второго момента вычисляют каждое из 6 напряжений Рейнольдса напрямую (тензор напряжений Рейнольдса симметричен, поэтому имеется 6 независимых членов). Каждое напряжение Рейнольдса имеет свое собственное уравнение переноса. Существует также седьмое уравнение переноса для переменной, определяющей масштаб. Данная модель в настоящее время в основном используется там, где обычные RANS-модели не в состоянии описывать сложные анизотропные турбулентные течения.

Существуют также облегченный вариант модели Рейнольдсовых напряжений, это так называемая алгебраическая модель напряжений Рейнольдса. Например, в работе [6, 7] Hellsten, Wallin и Johansson была предложена нелинейная модель *EARSM* $k-\omega$. В этой модели также используется гипотеза Буссинеска, однако вводится дополнительный нелинейный член. Данная модель была успешно применена для решения ряда задач с анизотропной турбулентностью.

Недавно появилась работа одного из соавторов настоящей статьи [8], где предложен иной подход к проблеме турбулентности. В указанной работе получена математическая модель турбулентности на основе нового подхода, которая способна описывать анизотропную турбулентность. Еще одно достоинство новой математической модели – это то, что она проста для решения инженерных задач. Однако вышеуказанные нелинейные модели RANS уже широко используются практически во всех пакетах программ для расчета турбулентных течений. Поэтому целью настоящей работы является тестирование моделей SSG/LRR-RSM и *EARSM* $k-\omega$ для внезапно расширяющегося закрученного потока. Для верификации, проводится сравнение численных результатов этих моделей с известными экспериментальными данными [9].

Постановка задачи

Схема канала с внезапным расширением приведена на рис. 1. Область течения представляла собой канал радиусом 1 м и длиной 1 м, расширяющийся в канал радиусом 2 м и длиной 40 м (рис. 1). Сильно закрученный поток из маленького канала поступал в большой канал со следующими характеристиками [9]:

$$Re = 3.0 \cdot 10^4, S_w = 0.6,$$

где число Рейнольдса определяется как

$$Re = \frac{\rho U_{in} D}{\mu}.$$

Здесь U_{in} – среднерасходная скорость на входе, D – диаметр меньшей трубы, ρ – плотность, а μ – динамическая вязкость.

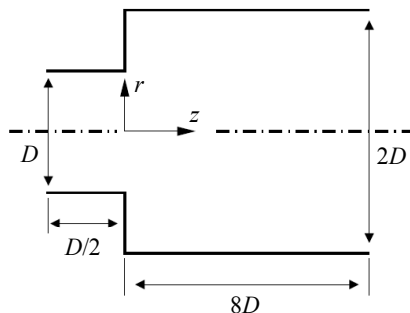


Рис. 1. Схема канала с внезапным расширением
Fig. 1. Schematic representation of a channel with an abrupt expansion

Степень закрутки потока определяется как

$$S_w = \frac{1}{R} \frac{\int_0^R r^2 U W dr}{\int_0^R r W^2 dr}, \quad (1)$$

где R – радиус; r – радиальное положение; U – осевая, а W – тангенциальная скорости.

Известно, что если ограниченная струя закручивается достаточно сильно, образуется центральная точка застоя и область рециркуляции. Разрушение вихря обычно происходит после точки застоя из-за быстрого расширения тонкого вихря в гораздо более широкий вихрь [10]. Турбулентный вихревой поток через внезапное осесимметричное расширение обладает несколькими отчетливо различными режимами потока, такими, как разделение, одна или две области рециркуляции, высокие уровни турбулентности и периодическая асимметрия при некоторых условиях. Разрушение вихря часто вызывает крупномасштабную прецессирующую спиральную когерентную структуру. Известно, что расходящийся характер расширяющегося потока инициирует и блокирует место разрушения вихря и неустойчивости потока. Многие исследователи сообщают об экспериментальных [11], аналитических [12] и численных исследованиях [13] разрушения вихрей. Этот тип потока, однако, все еще не совсем понятен, особенно для сильно закрученного потока с числом вихрей около единицы.

Есть только несколько подробных численных исследований, которые тщательно анализируют когерентные структуры и разрушение вихрей при внезапном расширении [14, 15]. Пробой вихря происходит, когда степень закрутки потока превышает критическое значение [16]. Он характеризуется профилем скорости в виде следа с точкой застоя, за которой следует изменение направления потока. При высокой степени закрутки ($S_w \geq 0.6$) вихревая струя, возникающая в результате внезапного расширения, отклоняется к стенке, внешняя область рециркуляции уменьшается и становится очевидным изменение направления потока вблизи центральной линии расширения [9].

Математическое моделирование задачи

Для моделирования поставленной задачи использовалась система уравнений Навье – Стокса, осредненных по Рейнольдсу в цилиндрической системе координат [17]:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial rV}{r\partial r} = 0, \\ \frac{dU}{dt} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial U}{r\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{r\partial r} (-rv'u') + \frac{\partial}{\partial z} (-u'u'), \\ \frac{dV}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial V}{r\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{V}{r^2} \right) + \frac{\partial}{r\partial r} (-rv'v') + \frac{\partial}{\partial z} (-u'v') - \frac{1}{r} (-w'v'), \\ \frac{dW}{dt} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\partial W}{r\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{W}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} (-v'w') + \frac{\partial}{\partial z} (-w'u') + \frac{2}{r} (-v'w'). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь U, V, W – соответственно аксиальная, радиальная и тангенциальная составляющие вектора скорости воздушного потока; p – гидростатическое давление; ρ – плотность газа; ν – молекулярная его вязкость; $\rho u'v', \rho u'u', \rho u'w', \rho v'w', \rho v'v', \rho w'w'$ – компоненты тензора Рейнольдсовых напряжений.

В качестве начальных условий задавались параметры закрученного потока во всей расчетной области. Для численного расчета на входе задавался экспериментальный профиль скорости, измеренный для сечения $z/D = -0.5D$, соответствующего расположению входа расчетной области.

На стенках ставились условия прилипания:

$$U|_{r=R} = 0, V|_{r=R} = 0, W|_{r=R} = 0,$$

а на оси:

$$U|_{r=0} = \frac{\partial U}{\partial r}, V|_{r=0} = 0, W|_{r=0} = 0.$$

На выходе ставились условия экстраполяции [24].

Система уравнений Навье – Стокса, осредненная по Рейнольдсу (2), является незамкнутой. Для замыкания в методе EARSМ используется нелинейная гипотеза Буссинеска

$$\tau_{ij} = -u_i' u_j' = 2\nu_t \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} - a_{ij}^{ex} k.$$

Здесь ν_t – турбулентная вязкость; S_{ik} – тензор скоростей деформации; W_{ik} – тензор завихренности; δ_{ij} – символ Кронекера и тензор

$$a_{ij}^{(ex, 2D)} = \beta_4^{2D} (S_{ik}^* W_{kj}^* - W_{ik}^* S_{kj}^*).$$

Остальные величины подробно представлены в [6, 7]. Турбулентная вязкость вычислялась по формуле

$$\nu_t = \frac{C_\mu k}{\beta^* \omega}.$$

Чтобы найти энергию турбулентности k и удельную скорость диссипации ω используется модель турбулентности k – ω Вилкокса. Модель с двумя уравнениями (записанная в форме сохранения) определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial U_k k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + P - \beta^* \omega k, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial U_k \omega}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] + \frac{\gamma \omega}{k} P - \beta \omega^2 + \frac{\sigma_d}{\omega} \max \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k} \frac{\partial k}{\partial x_k}, 0 \right). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь P – генерация; $\sigma_k, \sigma_\omega, \sigma_d, \gamma$ – масштабные константы. Остальные функции и константы для модели k – ω представлены в [18].

Модель напряжений Рейнольдса SSG/LRR-RSM изложена в работах [19, 20], поэтому здесь приведем лишь уравнения для напряжений и длины масштаба:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial U_k R_{ij}}{\partial x_k} &= P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + D_{ij}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial U_k \omega}{\partial x_k} &= \frac{a_\omega \omega}{k} \frac{P_{kk}}{2} - B_\omega \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(\mu + \sigma_\omega \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) + \sigma_d \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\rho R_{ij} = -\tau_{ij} = \rho u_i' u_j'$; P_{ij} – генерация Рейнольдсовых напряжений; D_{ij} – диффузия; ε_{ij} – диссипация; Π_{ij} – член перераспределения давления.

Для численной реализации уравнений (2), (3) и (4) использовалась равномерная сетка 200×200 . Уравнения в безразмерный вид приводились соотношением всех скоростей к U_{in} , а пространственные масштабы – к радиусу меньшей трубы. При этом производные в радиальном направлении в уравнениях аппроксимировались в неявном виде центральной разностью, а конвективные члены в продольном направлении аппроксимировались в явном виде против потока со вторым порядком точности [21]. Поэтому использованная схема имела погрешности порядка $o(\Delta t, \Delta z^2, \Delta r^2)$. Для реализации полунейвной схемы использован метод прогонки в радиальном направлении. Численный эксперимент показал, что увеличение числа узлов сетки практически не влияет на конечные результаты. Интегрирование по времени проводилось безразмерным шагом $\Delta t = 0.0001$. Коррекции давления и скоростей потока производились методом SIMPLEC [23, 25] и использовалась шахматная разностная сетка методом контрольного объема.

Обсуждение результатов

На рис. 2 приведены графики сравнения расчетных и экспериментальных данных. На рисунках представлены профили тангенциальной W и осевой U составляющих скорости в двух измеренных сечениях на расстояниях от входа в широкий канал: $z/D = 0.25$ и $z/D = 0.75$.

Расчетные профили аксиальной и тангенциальной компонент скорости, представленные на рис. 2, показывают, что модель турбулентности SSG/LRR-RSM во всех сечениях дает более близкие результаты к опытным данным [22], чем по модели EARSM. Таким образом, рассмотренная задача показывает, что моделирование закрученных турбулентных потоков требует специального подхода к моделям турбулентности. Поскольку закрутка потока подавляет генерацию турбулентности, то избыточная турбулентная вязкость на входе может привести к существенному искажению решения и быстрому размыванию концентрированного вихря. По той же причине для получения более корректных результатов следует использовать модели турбулентности, учитывающие закрутку усредненного потока. В этом отношении модель SSG/LRR-RSM является приемлемой для расчета подобных сложных течений.

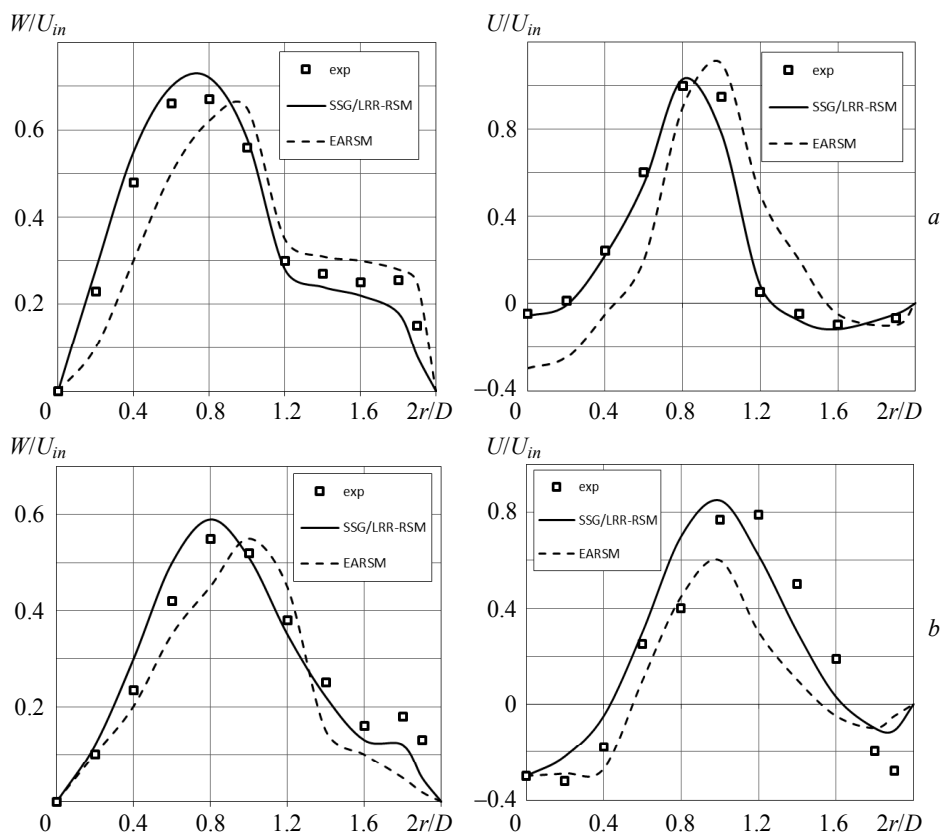


Рис. 2. Профили тангенциальной (W) и аксиальной (U) компонент скорости в сечениях $z = 0.25D$ (a), $z = 0.75D$ (b)

Fig. 2. Profiles of tangential (W) and axial (U) velocity components in sections $z =$ (a) $0.25D$ and (b) $0.75D$

ЛИТЕРАТУРА

1. Versteegh T.A., Nieuwstadt F.T.M. Turbulent budgets of natural convection in an infinite, differentially heated, vertical channel // Intern. J. Heat Fluid Flow. 1998. V. 19. P. 135–149.
2. Boudjemadi R., Maupu V., Laurence D., Le Quere P. Direct numerical simulation of natural convection in a vertical channel: A tool for second-moment closure modelling // Proc. Engineering Turbulence Modelling and Experiments 3. Amsterdam: Elsevier, 1996. P. 39.
3. Peng S.-H., Davidson L. Large eddy simulation of turbulent buoyant flow in a confined cavity // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2001. V. 22. P. 323–331.
4. Cabot W., Moin P. Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow // Flow, Turbulence and Combustion. 1999. V. 63. P. 269–291.
5. Сентябов А.В., Гаврилов А.А., Дектерев А.А. Исследование моделей турбулентности для расчета закрученных течений // Теплофизика и аэромеханика. 2011. Т. 18. № 1. С. 81–94.
6. Hellsten A. New advanced $k-\omega$ turbulence model for high-lift aerodynamics // AIAA Journal. 2005. V. 43. No. 9. P. 1857–1869.
7. Валлин С., Йоханссон А.В. Явная алгебраическая модель напряжений Рейнольдса для несжимаемых и сжимаемых турбулентных течений // Жидкостная механика. 2000. Т. 403. С. 89–132.

8. *Malikov Z.M., Madaliev M.E.* Numerical simulation of two-phase flow in a centrifugal separator. fluid dynamics. 2020. V. 55. No. 8. P. 1012–1028.
9. *Dellenback P.A., Metzger D.E., Neitzel G.P.* Measurements in turbulent swirling flow through an abrupt axisymmetric expansion // *AIAA J.* 1988. V. 26(6). P. 669–681.
10. *Leibovich S.* Vortex stability and breakdown: survey and extension // *AIAA J.* 1984. V. 22. P. 1192–1206.
11. *Wang P., Bai X.S., Wessman M., Klingmann J.* Large eddy simulation and experimental studies of a confined turbulent swirling flow // *Phys. Fluids.* 2004. V. 16. P. 3306–3324. DOI: 10.1063/1.1769420.
12. *Gyllenram W., Nilsson H., Davidson L.* On the failure of the quasi-cylindrical approximation and the connection to vortex breakdown in turbulent swirling flow // *Phys. Fluids.* 2007. V. 19. P. 045108.
13. *Nilsson H.* Simulations of the vortex in the Dellenback abrupt expansion, resembling a hydro turbine draft tube operating at part-load // 26th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems. Beijing, China, 2012.
14. *Mak H., Balabani S.* Near field characteristics of swirling flow past a sudden expansion. *Chem. Eng. Sci.* 2007. V. 62. P. 6726–6746.
15. *Gyllenram W., Nilsson H. and Davidson L.* Large eddy simulation of turbulent swirling flow through a sudden expansion // 23rd IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems. Yokohama, Japan, 2006.
16. *Gyllenram W. and Nilsson H.* Design and validation of a scale-adaptive filtering technique for LRN turbulence modeling of unsteady flow // *J. Fluid Eng.-T ASME.* 2008. V. 130(5).
17. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
18. *Wilcox D.C.* Turbulence Modeling for CFD. California, 1994.
19. *Lauder B.E., Reece G.J., Rodi W.* Progress in the development of a Reynolds – stress turbulence closure // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 68. P. 537–566.
20. *Speziale C.G., Sarkar S., Gatski T.B.* Modeling the pressure strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 227. P. 245–272.
21. *Nazarov F.X., Malikov Z.M., Rakhmanov N.M.* Simulation and numerical study of two-phase flow in a centrifugal dust catcher // AMSD-2019 Journal of Physics: Conference Series 1441 (2020) 012155 IOP Publishing. DOI: 10.1088/1742-6596/1441/1/012155.
22. *Julianne C. Dudek., Jan-Renee Carlson.* Evaluation of full Reynolds stress turbulence models in Fun3D // NASA/TM–2017-219468. P. 1–36, Texas, January 9–13, 2017.
23. *Турубаев Р.Р., Шваб А.В.* Численное исследование аэродинамики закрученного потока в вихревой камере комбинированного пневматического аппарата // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 47. С. 87–98.
24. *Хмелева М.Г., Даммер В.Х., Тохметова А.Б., Миньков Л.Л.* Численное исследование вихреобразования в жидком металле под действием дискового завихрителя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 46. С. 76–85.
25. *Маликов З.М., Мадалиев М.Э.* Математическое моделирование турбулентного течения в центробежном сепараторе. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 71. С. 121–138.

Статья поступила 24.02.2020

Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2021) NUMERICAL STUDY OF A SWIRLING TURBULENT FLOW THROUGH A CHANNEL WITH AN ABRUPT EXPANSION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 93–101

DOI 10.17223/19988621/72/8

Keywords: Reynolds-averaged Navier–Stokes equations, explicit algebraic Reynolds stress models, SSG/LRR-RSM-w2012 model, eddy viscosity, SIMPLE.

A strongly swirling turbulent flow through an abrupt expansion is studied using the highly resolved DNS, LES, and SAS to shed more light on a stagnation region and spiral vortex destruction, though these methods require high computational expenses. The vortex fracture induced by a sudden expansion resembles the so-called vortex rope that occurs in hydropower draft tubes. It is known that large-scale spiral vortex structures can be captured by regular RANS turbulence models. In this paper, a numerical study of a strongly swirling flow, which abruptly expands, is carried out using the Reynolds stress models SSG / LRR-RSM and EARSM with experimental measurements implemented by Dellenback et al. (1988). Calculations are carried out using the finite volume method. The flow dynamics is studied at the Reynolds number of 3.0×10^4 at almost constant large swirl numbers of 0.6. The time-averaged velocity and pressure fields, as well as the root-mean-square values of the velocity fluctuations are recorded and studied qualitatively.

The obtained results are compared with known experimental data. The aim of this work is to test the ability of the models to describe anisotropic turbulence. It is shown that the SSG / LRR-RSM model is more appropriate for studying such flows.

Zafar M. MALIKOV (Doctor of Technical Sciences, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbayev, Tashkent, Republic of Uzbekistan). E-mail: malikov.z62@mail.ru

Murodil E. MADALIEV (Fergana Polytechnic Institute, Fergana, Republic of Uzbekistan). E-mail: Madaliev.ME2019@mail.ru

REFERENCES

1. Versteegh T.A., Nieuwstadt F.T.M. (1998) Turbulent budgets of natural convection in an infinite, differentially heated, vertical channel. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 19(2). pp. 135–149. DOI: 10.1016/S0142-727X(97)10018-2.
2. Boudjemadi R., Maupu V., Laurence D., Le Quere P. (1996) Direct numerical simulation of natural convection in a vertical channel: a tool for second-moment closure modelling. *Engineering Turbulence Modelling and Experiments*. 3. Amsterdam: Elsevier.
3. [Peng S.H., Davidson L. (2001) Large eddy simulation of turbulent buoyant flow in a confined cavity. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 22(3). pp. 323–331. DOI: 10.1016/S0142-727X(01)00095-9.
4. Cabot W., Moin P. (1999) Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow. *Flow Turbulence and Combustion*. 63. pp. 269–291. DOI: 10.1023/A:1009958917113.
5. Sentyabov A.V., Gavrilov A.A., Dekterev A.A. (2011) Issledovanie modeley turbulentnosti dlya rascheta zakruchennykh techeniy [Study of turbulence models for calculating swirling flows]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 18(1). pp. 81–94.
6. Hellsten A. (2005) New advanced $k-\omega$ turbulence model for high-lift aerodynamics. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 43(9). pp. 1857–1869. DOI: 10.2514/1.13754.
7. Wallin S., Johansson A.V. (2000) An explicit algebraic model of Reynolds stresses for incompressible and compressible turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*. 403. pp. 89–132. DOI: 10.1017/S0022112099007004.
8. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2020) Numerical simulation of two-phase flow in a centrifugal separator. *Fluid Dynamics*. 55(8). pp. 1012–1028. DOI: 10.1134/S0015462820080066.
9. Dellenback P.A., Metzger D.E., Neitzel G.P. (1988) Measurements in turbulent swirling flow through an abrupt axisymmetric expansion. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 26(6). pp. 669–681. DOI: 10.2514/3.9952.
10. Leibovich S. (1984) Vortex stability and breakdown: survey and extension. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 22. pp. 1192–1206. DOI: 10.2514/3.8761.

11. Wang P., Bai X.S., Wessman M., Klingmann J. (2004) Large eddy simulation and experimental studies of a confined turbulent swirling flow. *Physics of Fluids*. 16(9). pp. 3306–3324. DOI: 10.1063/1.1769420.
12. Gyllenram W., Nilsson H., Davidson L. (2007) On the failure of the quasi-cylindrical approximation and the connection to vortex breakdown in turbulent swirling flow. *Physics of Fluids*. 19(4). Article 045108. pp. 1–10. DOI: 10.1063/1.2717724.
13. Nilsson H. (2012) Simulations of the vortex in the Dellenback abrupt expansion, resembling a hydro turbine draft tube operating at part-load. *26th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems, Beijing, China*. DOI: 10.1088/1755-1315/15/2/022016.
14. Mak H., Balabani S. (2007) Near field characteristics of swirling flow past a sudden expansion. *Chemical Engineering Science*. 62(23). pp. 6726–6746. DOI: 10.1016/j.ces.2007.07.009.
15. Gyllenram W., Nilsson H., Davidson L. (2006) Large eddy simulation of turbulent swirling flow through a sudden expansion. *23rd IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems, Yokohama, Japan*.
16. Gyllenram W., Nilsson H. (2008) Design and validation of a scale-adaptive filtering technique for LRN turbulence modeling of unsteady flow. *Journal of Fluid Engineering*. 130(5). Article 051401. pp. 1–10. DOI: 10.1115/1.2911685.
17. Loytsyanskiy L.G. (1987) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow: Nauka.
18. Wilcox D.C. (1998) *Turbulence Modeling for CFD*. La Canada, California: DCW Industries, Inc.
19. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. (1975) Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *Journal of Fluid Mechanics*. 68(3). pp. 537–566. DOI: 10.1017/S0022112075001814.
20. Speziale C.G., Sarkar S., Gatski T.B. (1991) Modeling the pressure strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. *Journal of Fluid Mechanics*. 227. pp. 245–272. DOI: 10.1017/S0022112091000101.
21. Nazarov F.Kh., Malikov Z.M., Rakhmanov N.M. (2020) Simulation and numerical study of two-phase flow in a centrifugal dust catcher. *Journal of Physics: Conference Series*. 1441. Article 012155. DOI: 10.1088/1742-6596/1441/1/012155.
22. Dudek J.C., Carlson J.-R. (2017) Evaluation of Full Reynolds Stress Turbulence Models in Fun3D. *NASA/TM-219468*. pp. 1–36. DOI: 10.2514/6.2017-0541.
23. Turubaev R.R., Shvab A.V. (2017) Chislennoe issledovanie aerodinamiki zakruchennogo potoka v vikhreвой kamere kombinirovannogo pnevmaticheskogo apparata [Numerical study of swirled flow aerodynamics in the vortex chamber of the combined pneumatic machine]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 87–98. DOI: 10.17223/19988621/47/9.
24. Khmeleva M.G., Dammer V.Kh., Tokhmetova A.B., Min'kov L.L. (2017) Chislennoe issledovanie vikhreobrazovaniya v zhidkom metalle pod deystviem diskovogo zavikhritelya [Numerical investigation of the vortex formation in a liquid metal under the action of disk agitator]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 76–85. DOI: 10.17223/19988621/46/10.
25. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2021) Matematicheskoe modelirovanie turbulentnogo techeniya v tsentrobeznom separatore [Mathematical modeling of a turbulent flow in a centrifugal separator]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 71. pp. 121–138. DOI: 10.17223/19988621/71/10.

Received: February 24, 2020

УДК 539.37:691.32

DOI 10.17223/19988621/72/9

О.В. Матвиенко, О.И. Данейко, Т.А. Ковалевская

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПОСЛЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ СТЕНОК ТРУБЫ ИЗ ДИСПЕРСНО-УПРОЧНЕННОГО АЛЮМИНИЕВОГО СПЛАВА В РЕЗУЛЬТАТЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ¹

С использованием подхода, основанного на сочетании методов физической теории пластичности и механики деформируемого твердого тела, проведено исследование формирования остаточных напряжений после упругопластической деформации стенок трубы в результате воздействия внешнего давления. В результате исследований установлено, что при одном и том же значении приложенного давления для сплавов, упрочненных более крупными частицами, толщина области, подвергнувшейся пластической деформации, оказывается меньше, чем для сплава, упрочненного мелкими частицами. Величина остаточных окружных и осевых напряжений более чем на порядок превосходит величину остаточных радиальных напряжений. Поэтому в первом приближении остаточные радиальные напряжения можно не учитывать.

Ключевые слова: дисперсно-упрочнённые материалы, наноразмерные частицы, пластическая деформация, математическая модель, деформационное упрочнение, разгрузка, остаточные напряжения.

Повышение прочностных и эксплуатационных свойств конструкционных материалов является важнейшей задачей в машиностроении. Известно, что использование композиционных материалов, состоящих из высокопрочных наполнителей (дисперсных фаз) и пластичных связующих (матриц), позволяет обеспечить требуемый уровень надежности и долговечности технологических устройств, применяемых в энергетике, химической и нефтеперерабатывающей промышленности, автомобилестроении, авиации и космонавтике [1]. В связи с этим применение дисперсно-упрочнённых сплавов открывает новые возможности для создания высокоэффективного оборудования в различных отраслях промышленности.

Дисперсно-упрочненные материалы, в матрице которых распределены наноразмерные частицы [2, 3], проявляют уникальные свойства по сравнению с традиционными сплавами [4–6]. Эти материалы характеризуются изотропией механических свойств, высокой пластичностью и прочностью [7]. Ансамбль дисперсных частиц наполнителя упрочняет материал за счет сопротивления движению дислокаций при нагружении, что затрудняет пластическую деформацию. Упрочняющие частицы, распределенные в матрице, в соответствии с теорией Орована [8] препятствуют движению дислокаций и тем самым способствуют повышению прочностных и деформационных свойств. Прочностные характеристики дисперсно-упрочненных материалов определяются формой, размером частиц, а также расстоянием между ними [9]. Варьирование состава матрицы, размера частиц и их объемной доли [10] позволяет получить материалы, обладающие различными свойствами.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-13-01252).

Существуют и внедрены в производство различные методы управления структурой сплава [11]. Применение упрочняющих неметаллических частиц является актуальной проблемой для улучшения структуры литого сплава за счет измельчения структурных составляющих (твердый раствор α -Al, эвтектические фазы α -Al + Si). В настоящее время имеется ряд экспериментальных данных по использованию оксидов металлов (Al_2O_3 , TiO_2), карбидов и боридов для модификации зеренной структуры сплава Al-Si [12]. Углеродные наноматериалы (углеродные нанотрубки, фуллерен и шунгитовый углерод) также широко используются для улучшения зеренной структуры и улучшения механических свойств алюминиевых сплавов [13, 14]. В работе [13] исследованы микроструктура и механические характеристики алюминиевого сплава A356, упрочненного наночастицами трифторида скандия с отрицательным коэффициентом теплового расширения. Обнаружена высокая эффективность использования модификаторов на основе фторида скандия и дополнительной обработки ультразвуком. В работе [14] проведено комплексное изучение изменения физико-механических свойств от технологии изготовления и обработки каждой партии полученных сплавов. Установлено, что сплавы, содержащие частицы TiB_2 , имеют сформировавшуюся зернистую структуру. Введение частиц TiB_2 позволяет повысить предел текучести, предел прочности и пластичность сплава. Наибольший эффект измельчения структуры литых сплавов достигается при использовании лигатуры, содержащей микрочастицы TiB_2 размером 1 мкм.

Теоретическое изучение физических основ пластичности и деформационного упрочнения гетерофазных сплавов берёт своё начало с работ Орована [8], Эшби [15], Хирша [16], Хамфриса [17]. В исследовании [18] рассматриваются аспекты деформационного поведения дисперсно-упрочненных алюминиевых материалов при одноосной ползучести в широком температурном диапазоне. Полученные в рамках этой работы результаты показывают возможность значительного улучшения свойств микрокомпозитов.

Авторами [19, 20] проведено исследование влияния масштабных характеристик некогерентных упрочняющих частиц на деформационное упрочнение ГЦК-кристаллических материалов и формирование их дислокационной структуры: призматических петель, диполей, матричных сдвигообразующих дислокаций. В рамках математической модели пластической деформации монокристаллов дисперсно-упрочненных ГЦК-материалов с наноразмерными частицами в работе проведено исследование влияния температуры и скорости деформации на поведение материала и эволюцию его дислокационной подсистемы. Установлено, что в материалах с наноразмерной упрочняющей фазой независимо от её сопряжения с матрицей наблюдается более интенсивное деформационное упрочнение, чем в материалах с более крупными частицами при одинаковой объёмной доле упрочняющей фазы.

В процессе эксплуатации в результате различных физических процессов, связанных с изготовлением и обработкой изделий, в элементах конструкций могут возникать остаточные напряжения, которые влияют на прочностные характеристики конструкций при повторных нагружениях [21]. Поэтому проблемам исследования остаточных напряжений уделяется значительное внимание [22–24].

Настоящая работа продолжает исследования воздействия поля давления на деформацию стенок трубы из сплава на основе алюминия, упрочненного некогерентными наночастицами [25–34]. Цель настоящей работы – изучение остаточных напряжений в трубе, изготовленной из дисперсно-упрочненного сплава на основе

алюминия, в состоянии разгрузки после упругопластического деформирования. Исследования проведены на основе подхода, сочетающего методы физической теории пластичности и механики деформируемого твердого тела. В рамках этого подхода напряжения в стенках трубы находятся в результате решения уравнений механики деформируемого твердого тела с использованием условия упрочнения материала, выражающего связь между предельным напряжением сдвига и степенью деформации, которое получено на основе физической теории пластичности.

Механические свойства материала

Для описания пластических свойств материала использована математическая модель пластической деформации дисперсно-упрочненных сплавов с некогерентными частицами [19]. Модель включает уравнения баланса деформационных линейных и точечных дефектов с учетом их генерации, аннигиляции и трансформации в процессе пластической деформации. Физические механизмы, лежащие в основе математической модели, представлены в работе [35]. При моделировании процесса пластической деформации и деформационного упрочнения предполагается, что в процессе пластического сдвига дисперсно-упрочненных материалов с ГЦК-матрицей, содержащих некогерентную дисперсную фазу, формируется зона сдвига и образуются следующие типы деформационных дефектов: линейные – сдвигообразующие дислокации, призматические петли вакансионного и межузельного типа; дислокационные диполи вакансионного и межузельного типа, точечные деформационные дефекты – межузельные атомы, моновакансии, бивакансии.

Аппроксимация результатов численного решения уравнений баланса элементов деформационной дефектной среды позволяет с погрешностью, не превышающей 0.1 %, предложить следующую функциональную зависимость предельного напряжения сдвига τ_s от степени деформации α :

$$\tau_s = \max \left[\tau_0, \quad \tau_0 + \tau_1 \frac{G\alpha - \tau_0}{G(a + a_*) - \tau_0} \right], \quad (1)$$

где G – модуль сдвига; τ_0 , τ_1 , a_* – параметры, характеризующие свойства материала, значения которых для различных размеров упрочняющих частиц δ , расстояний Λ_p между ними при разных температурах деформации представлены в таблице.

Параметры	$T = 293 \text{ K}$	$T = 393 \text{ K}$	$T = 493 \text{ K}$
$\Lambda_p = 100 \text{ нм}$ $\delta = 10 \text{ нм}$	$\tau_0 = 81.08 \text{ МПа}$	$\tau_0 = 77.06 \text{ МПа}$	$\tau_0 = 68.83 \text{ МПа}$
	$\tau_1 = 139.94 \text{ МПа}$	$\tau_1 = 99.29 \text{ МПа}$	$\tau_1 = 69.87 \text{ МПа}$
	$a_* = 0.0437$	$a_* = 0.0244$	$a_* = 0.0151$
$\Lambda_p = 200 \text{ нм}$ $\delta = 20 \text{ нм}$	$\tau_0 = 43.13 \text{ МПа}$	$\tau_0 = 40.73 \text{ МПа}$	$\tau_0 = 36.26 \text{ МПа}$
	$\tau_1 = 110.13 \text{ МПа}$	$\tau_1 = 71.86 \text{ МПа}$	$\tau_1 = 52.02 \text{ МПа}$
	$a_* = 0.0548$	$a_* = 0.0264$	$a_* = 0.0167$

Пластическая деформация начинается, когда интенсивность напряжений в материале становится равной предельному напряжению сдвига τ_0 . Кривые упрочнения характеризуются монотонной зависимостью предельного напряжения сдвига от степени деформации. Рассмотрение кривой упрочнения показывает, что в процессе пластического деформирования материал упрочняется, поскольку повыша-

ется предел пластичности. При малых значениях степени пластической деформации a_{pl} наблюдается заметное увеличение τ . При больших a_{pl} кривая упрочнения выходит на горизонтальную асимптоту, соответствующую площадке текучести при $\tau = \tau_{\infty} = \tau_0 + \tau_1$. Быстроту выхода кривой течения на асимптоту определяет эмпирический параметр a_* .

Результаты моделирования показывают, что упрочнение материала наночастицами существенно изменяет прочностные характеристики материала. Уменьшение расстояния между частицами для одной и той же объемной доли упрочняющей фазы приводит к более интенсивному торможению дислокаций, что вызывает упрочнение материала, приводящее к росту напряжения течения τ . С ростом температуры материал становится более пластичным, что сопровождается понижением напряжения течения материала.

Напряжения и деформации в стенке трубы, нагруженной равномерным внешним давлением

Рассмотрим сначала напряженно-деформированное состояние трубы, нагруженной равномерным внешним давлением. Внутреннее давление предполагается отсутствующим. Радиусы внутренней и внешней стенок трубы равны соответственно R_{in} и R_{ex} .

При малой величине приложенного давления p деформация стенок трубы является упругой. Если величина приложенного давления становится равной пределу упругого сопротивления ($p = p_{el}$), то на внутренней стенке трубы возникает пластическая деформация. При ещё большем давлении пластическое состояние охватывает кольцевой слой радиусом R_{pl} , примыкающий к внутренней поверхности трубы. К внешней границе этого слоя будет примыкать область, в которой ещё сохраняется упругое состояние материала. Когда величина приложенного давления достигает предела пластического сопротивления ($p = p_{pl}$), весь материал по толщине трубы перейдёт в пластическое состояние. С увеличением приложенного давления напряжения в стенке трубы возрастают.

Известно [36], что поперечные сечения длинной трубы, удаленные от торцов, в случае приложения нагрузки в радиальном направлении будут оставаться плоскими. С учетом осевой симметрии задачи уравнение равновесия, описывающее баланс напряжений в радиальном направлении можно записать как

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) содержит две неизвестные величины: компоненты тензора напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\phi\phi}$. Дополнительное соотношение в случае упругой деформации можно получить с помощью уравнения совместности напряжений, которое имеет вид [37]

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_{rr} + \sigma_{\phi\phi}) \right) = 0. \quad (3)$$

Решение уравнения равновесия (2) вместе с уравнением совместности напряжений (3) при выполнении граничных условий

$$r = R_{pl} : \sigma_{rr} = q ; \quad r = R_{ex} : \sigma_{rr} = -p \quad (4)$$

позволяет определить напряжения в стенках трубы в упругой области ($R_{pl} \leq r \leq R_{ex}$)

с помощью следующих зависимостей:

$$\sigma_{rr} = -\frac{qR_{pl}^2}{R_{ex}^2 - R_{pl}^2} \left(1 - \frac{R_{ex}^2}{r^2} \right) - \frac{pR_{ex}^2}{R_{ex}^2 - R_{pl}^2} \left(1 - \frac{R_{pl}^2}{r^2} \right); \quad (5)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{qR_{pl}^2}{R_{ex}^2 - R_{pl}^2} \left(1 + \frac{R_{ex}^2}{r^2} \right) - \frac{pR_{ex}^2}{R_{ex}^2 - R_{pl}^2} \left(1 + \frac{R_{pl}^2}{r^2} \right); \quad (6)$$

$$\sigma_{zz} = -2\nu \frac{qR_{pl}^2 + pR_{ex}^2}{R_{ex}^2 - R_{pl}^2}. \quad (7)$$

В уравнениях (5) – (7) q – радиальное напряжение на границе упругой и пластической областей.

При пластической деформации упрочняющейся среды дополнительным условием, связывающим компоненты тензора напряжений, является условие пластического упрочнения [36]:

$$|\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}| = \tau_s(a). \quad (8)$$

Известно [37], что изменение объема происходит только за счет упругих деформаций, а при пластическом деформировании материал ведет себя как несжимаемый. Условие несжимаемости материала запишем в виде.

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} = 0, \quad (9)$$

где u_r – перемещение стенки трубы в радиальном направлении. Интегрируя (9), получаем

$$u_r = \frac{C}{r}, \quad (10)$$

где C – константа интегрирования, которая подлежит определению. Выражение (10) позволяет установить зависимость компонент тензора деформации и интенсивности сдвиговых деформаций от радиальной координаты:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{C}{r^2}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = \frac{C}{r^2}, \quad a = \sqrt{2(\varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2)} = 2\frac{|C|}{r^2}. \quad (11)$$

С учетом физических соотношений (1), (2) уравнение равновесия в пластической области ($R_{in} \leq r \leq R_{pl}$) запишем в виде

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = -\left(\frac{\tau_0}{r} + \tau_1 \frac{2G|C| - \tau_0 r^2}{a_2 G r^3 + 2G|C|r} \right), \quad (12)$$

где $a_2 = a_* - \frac{\tau_0}{G}$.

В результате интегрирования (12) с учетом граничного условия на внутренней стенке трубы (при $r = R_{in}$, $\sigma_{rr} = 0$), а также непрерывности напряжений на границе зон упругого и пластического деформирования материала получим

$$|C| = \frac{1}{2} \tau_0 G^{-1} R_{pl}^2; \quad (13)$$

$$q = -(\tau_0 + 2\tau_1) \ln\left(\frac{R_{pl}}{R_{in}}\right) - \tau_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{Ga_2}\right) \ln\left(\frac{\tau_0 R_{pl}^2 + a_2 GR_{in}^2}{(\tau_0 + a_2 G) R_{pl}^2}\right); \quad (14)$$

$$\sigma_{rr} = -(\tau_0 + 2\tau_1) \ln\left(\frac{r}{R_{in}}\right) - \tau_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{Ga_2}\right) \ln\left(\frac{\tau_0 R_{pl}^2 + a_2 GR_{in}^2}{\tau_0 R_{pl}^2 + a_2 Gr^2}\right); \quad (15)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} - \tau_0 \left(1 + \frac{\tau_1 (R_{pl}^2 - r^2)}{a_2 Gr^2 + \tau_0 R_{pl}^2}\right); \quad (16)$$

$$\sigma_{zz} = -(\tau_0 + 2\tau_1) \ln\left(\frac{r}{R_{in}}\right) - \tau_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{Ga_2}\right) \ln\left(\frac{\tau_0 R_{pl}^2 + a_2 GR_{in}^2}{\tau_0 R_{pl}^2 + a_2 Gr^2}\right) - \frac{\tau_0}{2} \left(1 + \frac{\tau_1 (R_{pl}^2 - r^2)}{a_2 Gr^2 + \tau_0 R_{pl}^2}\right). \quad (17)$$

Границу зоны упругого и пластического деформирования материала для заданного давления p можно определить из решения трансцендентного уравнения:

$$p = (\tau_0 + 2\tau_1) \ln\left(\frac{R_{pl}}{R_{in}}\right) + \tau_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{Ga_2}\right) \ln\left(\frac{\tau_0 R_{pl}^2 + a_2 GR_{in}^2}{\tau_0 R_{pl}^2 + a_2 GR_{pl}^2}\right) + \tau_0 \left(1 + \frac{R_{ex}^2 - R_{pl}^2}{2R_{ex}^2}\right). \quad (18)$$

Математическая модель процесса разгрузки

Рассмотрим теперь напряженно-деформированное состояние трубы после снятия внешнего давления p . Разгрузка после упругой деформации приводит к восстановлению первоначального состояния. Однако если в процессе деформации материал стенок трубы перешел в пластическое состояние, то материал в зоне пластической деформации будет характеризоваться остаточными напряжениями и деформациями.

В бывшей пластической области ($r \leq R_{pl}$) после снятия нагрузки будут действовать напряжения:

$$\sigma_{rr} = -(\tau_0 + 2\tau_1) \ln\left(\frac{r}{R_{in}}\right) - \tau_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{Ga_2}\right) \ln\left(\frac{R_{pl}^2 \tau_0 + a_2 GR_{in}^2}{R_{pl}^2 \tau_0 + a_2 Gr^2}\right) + \frac{R_{ex}^2}{R_{ex}^2 - R_{in}^2} p \left(1 - \frac{R_{in}^2}{r^2}\right); \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} = & -(\tau_0 + 2\tau_1) \ln\left(\frac{r}{R_{in}}\right) - \tau_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{Ga_2}\right) \ln\left(\frac{\tau_0 R_{pl}^2 + a_2 GR_{in}^2}{\tau_0 R_{pl}^2 + a_2 Gr^2}\right) - \\ & \tau_0 \left(1 + \frac{\tau_1 (R_{pl}^2 - r^2)}{a_2 Gr^2 + \tau_0 R_{pl}^2}\right) + \frac{R_{ex}^2}{R_{ex}^2 - R_{in}^2} p \left(1 + \frac{R_{in}^2}{r^2}\right); \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & -(\tau_0 + 2\tau_1) \ln\left(\frac{r}{R_{in}}\right) - \tau_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{Ga_2}\right) \ln\left(\frac{\tau_0 R_{pl}^2 + a_2 GR_{in}^2}{\tau_0 R_{pl}^2 + a_2 Gr^2}\right) - \\ & - \frac{\tau_0}{2} \left(1 + \frac{\tau_1 (R_{pl}^2 - r^2)}{a_2 Gr^2 + \tau_0 R_{pl}^2}\right) + 2\nu \frac{R_{ex}^2}{R_{ex}^2 - R_{in}^2} p. \end{aligned} \quad (21)$$

В бывшей упругой области ($R_{pl} \leq r \leq R_{ex}$) напряжения будут равны

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_{rr}^* R_{pl}^2}{R_{ex}^2 - R_{pl}^2} \left(1 - \frac{R_{ex}^2}{r^2} \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{\sigma_{rr}^* R_{pl}^2}{R_{ex}^2 - R_{pl}^2} \left(1 + \frac{R_{ex}^2}{r^2} \right), \quad \sigma_{zz} = 2\nu\sigma_{rr}^* \frac{R_{pl}^2}{2R_{ex}^2}, \quad (22)$$

где σ_{rr}^* – нормальное напряжение на границе бывших упругой и пластической областей:

$$\sigma_{rr}^* = -(\tau_0 + 2\tau_1) \ln \left(\frac{R_{pl}}{R_{in}} \right) - \tau_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{Ga_2} \right) \ln \left(\frac{R_{pl}^2 \tau_0 + a_2 GR_{in}^2}{R_{pl}^2 \tau_0 + a_2 GR_{pl}^2} \right) + \frac{R_{ex}^2}{R_{ex}^2 - R_{in}^2} p \left(1 - \frac{R_{in}^2}{R_{pl}^2} \right). \quad (23)$$

Анализ результатов

Рассмотрим основные результаты исследования пластической деформации трубы из алюминия, упрочненного некогерентными наночастицами. При математическом моделировании предполагалось, что внутренний радиус равен $R_{in} = 0.1$ м, а внешний – $R_{ex} = 0.105$ м.

Рассмотрим сначала напряжения, возникающие в результате нагружения стенки трубы внешним давлением.

На рис. 1 приведены зависимости радиального σ_{rr} , тангенциального $\sigma_{\varphi\varphi}$ и осевого напряжения σ_{zz} от радиальной координаты, рассчитанные при разных давлениях, соответствующих различному положению границы между зоной пластической и упругой деформации. Кривая 1 соответствует пределу упругого сопротивления, кривая 5 – пределу пластического сопротивления. Радиальные напряжения в стенке трубы σ_{rr} принимают отрицательные значения, что свидетельствует о сжатии стенки трубы в радиальном направлении. Абсолютные значения напряжения σ_{rr} по мере удаления от внутренней стенки трубы монотонно увеличиваются от $|\sigma_{rr}| = 0$ до $|\sigma_{rr}| = p$. Различие значений предела упругого и пластического сопротивления $\Delta p = p^* - p_1$ мало. Этим объясняется близость кривых 1 – 5 (рис. 1, а).

Зависимость $\sigma_{\varphi\varphi}(r)$ в предельных случаях является монотонной: при $p = p_1$ – монотонно возрастающей, при $p = p^*$ – монотонно убывающей (рис. 1, б). Это означает, что при достижении предела упругого сопротивления максимальное абсолютное значение тангенциального напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$ достигается вблизи внутренней стенки трубы, а при достижении предела пластического сопротивления – вблизи внешней стенки. В промежуточных случаях распределение $\sigma_{\varphi\varphi}(r)$ является немонотонным. Абсолютная величина напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$ возрастает в пластической области, достигая максимума при $r = R_{pl}$. В упругой области величина напряжения по мере приближения к внешней стенке монотонно убывает. С увеличением приложенного давления наблюдается увеличение абсолютных значений напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$ вблизи границы зоны пластической деформации. Отметим, что напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$, связанные с деформацией стенки трубы в тангенциальном направлении, более чем на порядок превосходят по абсолютной величине напряжения в радиальном направлении σ_{rr} .

Осевые напряжения σ_{zz} во всем сечении трубы принимают отрицательные значения, что означает сжатие стенок трубы в осевом направлении. В бывшей пластической области осевые напряжения возрастают по абсолютной величине по мере удаления от внутренней стенки трубы и приближения к R_{pl} . На границе бывшей пластической зоны осевые напряжения терпят разрыв. Абсолютная величина

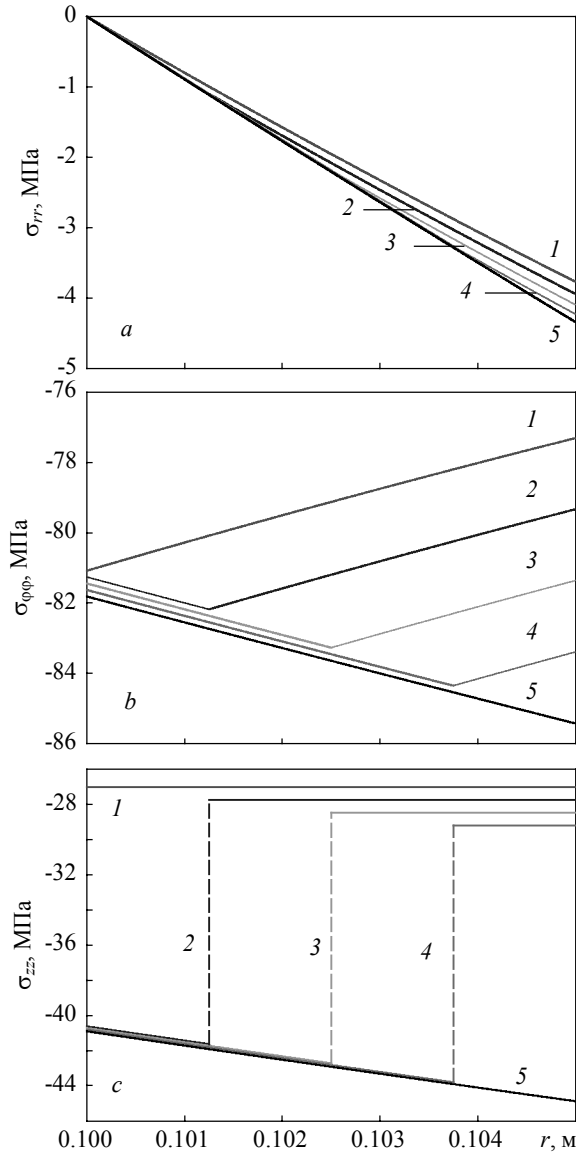


Рис. 1. Зависимость (а) радиального σ_{rr} , (б) тангенциального $\sigma_{\phi\phi}$ и (с) осевого напряжения σ_{zz} от радиальной координаты p : 1 – 3.77 МПа ($R_{pl} = 0.1$ м), 2 – 3.94 МПа ($R_{pl} = 0.10125$ м), 3 – 4.09 МПа ($R_{pl} = 0.1025$ м), 4 – 4.34 МПа ($R_{pl} = 0.10375$ м), 5 – 2.26 МПа ($R_{pl} = 0.105$ м). Масштабные характеристики упрочняющей фазы: $\Lambda_p = 100$ нм, $\delta = 10$ нм; температура деформации $T = 293$ К

Fig. 1. Dependence of the (a) radial σ_{rr} , (b) tangential $\sigma_{\phi\phi}$, and (c) axial stresses σ_{zz} on the radial coordinate p : 1 – 3.77 MPa ($R_{pl} = 0.1$ m), 2 – 3.94 MPa ($R_{pl} = 0.10125$ m), 3 – 4.09 MPa ($R_{pl} = 0.1025$ m), 4 – 4.34 MPa ($R_{pl} = 0.10375$ m), and 5 – 2.26 MPa ($R_{pl} = 0.105$ m). Scale characteristics of a hardening phase: $\Lambda_p = 100$ nm, $\delta = 10$ nm; deformation temperature is $T = 293$ K

осевых напряжений резко уменьшается. При $R_{pl} < 1$ величина осевых напряжений не зависит от радиальной координаты. С увеличением величины приложенного давления p происходит рост абсолютных значений σ_{zz} .

Перейдем теперь к рассмотрению напряженного состояния после прекращения действия внутреннего давления p (рис. 2). Зависимость остаточного радиального напряжения от радиальной координаты в сплавах, упрочненных частицами различного размера, при разных значениях p показана на рис. 2, а. Если в процессе нагружения величина приложенного давления не превышает

$$p_* = \frac{R_{ex}^2 - R_{in}^2}{2R_{ex}^2} \left(\tau_0 + \tau_1 \left(2 - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{Ga_2} \right) \frac{2Ga_2 R_{in}^2}{\tau_0 R_{pl}^2 + Ga_2 R_{in}^2} \right) \right), \quad (24)$$

то в бывшей пластической области происходит сжатие материала в радиальном направлении. Абсолютная величина остаточного радиального напряжения монотонно возрастает по мере удаления от внутренней стенки, а в бывшей пластической – убывает. Максимальное значение остаточного радиального напряжения локализуется при $r = R_{pl}$. Если в результате нагружения величина приложенного давления $p > p_*$, то разгрузка вблизи внутренней стенки трубы приводит к растяжению: остаточные напряжения принимают положительные значения (рис. 2, кривая 4). Область растяжения увеличивается с ростом давления и при $p = p_{pl}$ достигает внешней стенки трубы. При одном и том же значении приложенного давления для сплавов, упрочненных более крупными частицами, толщина области, подвергнувшейся пластической деформации, оказывается меньше, чем для сплава, упрочненного мелкими частицами.

Вблизи внутренней стенки трубы остаточные радиальные напряжения возрастают с ростом размеров упрочняющих частиц. Вблизи внешней стенки наблюдается противоположная зависимость.

Величина остаточных окружных (рис. 2, б) и осевых (рис. 2, в) напряжений более чем на порядок превосходит величину остаточных радиальных напряжений. Поэтому в первом приближении остаточные радиальные напряжения σ_{rr} можно не учитывать. Окружные остаточные напряжения $\sigma_{\phi\phi}$ при разгрузке становятся растягивающими (рис. 2, б). Наибольшие значения окружных остаточных напряжений $\sigma_{\phi\phi}$ наблюдаются на внутренней стенке. При $r < R_{pl}$ окружные напряжения линейно уменьшаются с увеличением радиальной координаты r . При $r > R_{pl}$ изменение $\sigma_{\phi\phi}$ становится несущественным. Величина остаточного напряжения $\sigma_{\phi\phi}$ определяется как условиями нагружения трубы, так и размером упрочняющих частиц. С ростом давления происходит увеличение абсолютных значений остаточного напряжения $\sigma_{\phi\phi}$ по всей толщине стенки трубы. В результате упрочнения сплава более крупными частицами возрастает сопротивляемость материала пластическим деформациям. После снятия нагрузки абсолютная величина остаточных окружных напряжений тем больше, чем меньше размер упрочняющих частиц.

Радиальное распределение остаточного напряжения σ_{zz} (рис. 2, в) качественно повторяет распределение остаточного напряжения $\sigma_{\phi\phi}$: при $r < R_{pl}$ осевые напряжения линейно убывают по мере удаления от внутренней стенки трубы. При $r = R_{pl}$ происходит резкое уменьшение остаточных осевых напряжений, при $r > R_{pl}$ остаточные напряжения σ_{zz} перестают зависеть от радиальной координаты. Отметим, что во всем сечении трубы остаточные осевые напряжения являются растягивающими. С ростом давления нагружения p происходит рост абсолютных значений σ_{zz} . Увеличение размеров упрочняющих частиц приводит к уменьшению абсолютных значений остаточных осевых напряжений.

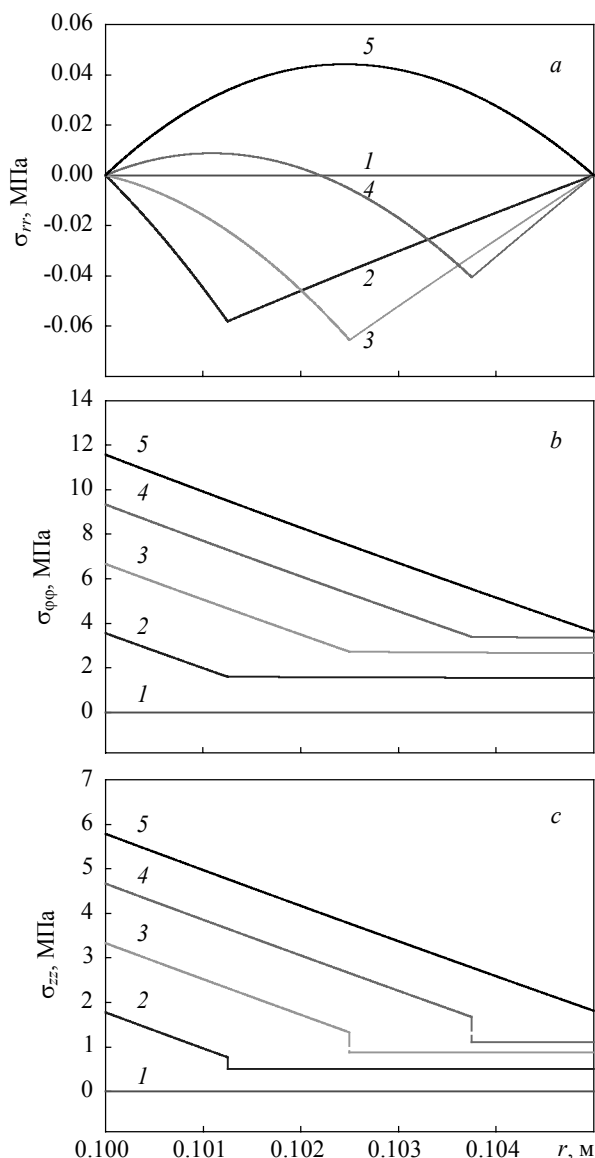


Рис. 2. Зависимость остаточных (a) радиального σ_{rr} , (b) тангенциального $\sigma_{\phi\phi}$ и (c) осевого напряжения σ_{zz} от радиальной координаты p : 1 – 3.77 МПа ($R_{pl} = 0.1$ м), 2 – 3.94 МПа ($R_{pl} = 0.10125$ м), 3 – 4.09 МПа ($R_{pl} = 0.1025$ м), 4 – 4.34 МПа ($R_{pl} = 0.10375$ м), 5 – 2.26 МПа ($R_{pl} = 0.105$ м). Масштабные характеристики упрочняющей фазы: $\Lambda_p = 100$ нм, $\delta = 10$ нм; температура деформации $T = 293$ К

Fig. 2. Dependence of the (a) radial, (b) tangential, and (c) axial residual stresses on the radial coordinate p : 1 – 3.77 MPa ($R_{pl} = 0.1$ m), 2 – 3.94 MPa ($R_{pl} = 0.10125$ m), 3 – 4.09 MPa ($R_{pl} = 0.1025$ m), 4 – 4.34 MPa ($R_{pl} = 0.10375$ m), 5 – 2.26 MPa ($R_{pl} = 0.105$ m). Scale characteristics of a hardening phase: $\Lambda_p = 100$ nm, $\delta = 10$ nm; deformation temperature is $T = 293$ K

Заключение

Таким образом, в ходе проведенных исследований создана физико-математическая модель разгрузки из упругопластического состояния трубы, изготовленной из дисперсно-упрочнённого сплава на основе алюминия, а также определены поля остаточных напряжений после разгрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мэтьюз Ф., Ролингс Р. Композитные материалы. М.: Техносфера, 2004. 408 с.
2. Карабасов Ю.С. Новые материалы / под науч. ред. Ю.С. Карабасова. М.: МИССИС, 2002. 736 с.
3. Arnhold V., Hummert K. New Materials by Mechanical Alloying Techniques / ed. By E. Arzt, L. Schultz. Oberursel: DGM Informationsgesellschaft Verlag, 1989. P. 263.
4. Matvienko O., Daneyko O., Kovalevskaya T. Mathematical modeling of nanodispersed hardening of FCC materials // *Acta Metallurgica Sinica (English Letters)*. 2018. V. 31. No. 12. P. 1297–1304. DOI: 10.1007/s40195-018-0754-0.
5. Луц А.Р., Галочкина И.А. Алюминиевые композиционные сплавы – сплавы будущего / сост. А.Р. Луц, И.А. Галочкина. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2013. 82 с.
6. Vorozhtsov S., Zhukov I., Promakhov V., Naydenkin E., Khrustalyov A., Vorozhtsov A. The influence of ScF3 nanoparticles on the physical and mechanical properties of new metal matrix composites based on A356 aluminum alloy // *JOM*. 2016. V. 68. No. 12. P. 3101–3106. DOI: 10.1007/s11837-016-2141-5.
7. Weber J.H., Schelleng R.D. Dispersion-Strengthened Aluminum Alloys / ed. By Y.-W. Kim, W.M. Griffith. Warrendale: TMS, 1988. P. 468.
8. Orowan E. // *Proceedings of Symposium on Internal Stresses in Metals and Alloys*. Institute of Metals. London, 1948. P. 451–454.
9. Stewart A.T., Martin J.W. Dislocation-particle interactions in plastically deformed two-phase aluminium crystals // *Acta Materialia*. 1975. V. 23. P. 1–7. DOI: 10.1016/0001-6160(75)90062-0.
10. Matvienko O., Daneyko O., Kovalevskaya T. Mathematical modeling of plastic deformation of a tube from dispersion-hardened aluminum alloy in an inhomogeneous temperature field // *Crystals*. 2020. V. 10. P. 1103-1–1103-18. DOI: 10.3390/cryst10121103.
11. Wang G., Wang Q., Easton M.A., Dargusch M.S., Qian M., Eskin D.G., Stjohn D.H. Role of ultrasonic treatment, inoculation and solute in the grain refinement of commercial purity aluminium // *Scientific Reports*. 2017. V. 7. Article number 9729. DOI: 10.1038/s41598-017-10354-6.
12. Valiev R.Z., Estrin Y., Horita Z., Langdon T.G., Zehetbauer M.J., Zhu Y. Producing bulk ultrafine-grained materials by severe plastic deformation: Ten years later // *JOM*. 2016. V. 68. No. 4. P. 1216–1226. DOI: 10.1007/s11837-016-1820-6.
13. Vorozhtsov S., Minkov L., Khrustalyov A., Dammer V., Zhukov I., Promakhov V., Vorozhtsov A., Khmeleva M. Ex situ introduction and distribution of nonmetallic particles in aluminum melt: modeling and experiment // *JOM*. 2017. V. 69. No. 12. P. 2653–2657. DOI: 10.1007/s11837-017-2594-1.
14. Ворожцов А.Б., Платов В.В., Козулин А.А., Хрусталева А.П., Мишин И.П., Жуков И.А. Исследование влияния частиц TiB₂ на структуру, деформационное поведение и свойства алюминиевого сплава 1550 // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика* 2020. № 67. С. 102–116. DOI: 10.17223/19988621/67/10.
15. Ashby M.F., Johnson K. Materials and Design, the Art and Science of Materials Selection in Product Design. Oxford: Butterworth Heinemann, 2002. 390 p.
16. Gould D., Hirsch P.B., Humphreys F.J. The Bauschinger effect, work-hardening and recovery in dispersion-hardened copper crystals // *The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics*. 1974. V. 30. No. 6. P. 1353–1377. DOI: 10.1080/14786437408207287.

17. *Humphreys F.J., Martin J.W.* The effect of dispersed phases upon dislocation distributions in plastically deformed copper crystals // *Philosophical Magazine*. 1967. V. 16. No. 143. P. 927–957. DOI: 10.1080/14786436708229685.
18. *Kröppl O., Vöhringer E.* Creep behavior of dispersion-hardened aluminum materials // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 1999. V. 3. P. 1–13. DOI: 10.1023/A:1009875316242.
19. Кулаева Н.А., Данейко О.И., Ковалевская Т.А., Старенченко В.А. Влияние масштабных характеристик упрочняющей фазы со сверхструктурой L12 на эволюцию дислокационных диполей в процессе пластической деформации // *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*. 2016. Т. 21. № 3. С. 1089–1092. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-3-1089-1092.
20. Ковалевская Т.А., Колупаева С.Н., Данейко О.И., Кулаева Н.А., Семенов М.Е. Влияние масштабных характеристик упрочняющей фазы на эволюцию дефектной подсистемы в гетерофазных материалах с ГЦК матрицей // *Материаловедение*. 2011. № 8. С. 6–11.
21. *Stacey A., Webster G.A.* Determination of residual stress distributions in autofrettaged tubing // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1998. V. 31. No. 3. P. 205–220. DOI: 10.1016/0308-0161(88)90003-8.
22. Биргер И.А. Остаточные напряжения. М.: Машгиз, 1963. 231 с.
23. Матвиенко О.В., Данейко О.И., Ковалевская Т.А. Остаточные напряжения в трубе из сплава, упрочненного некогерентными наночастицами после разгрузки из упругопластического состояния // *Изв. вузов. Физика*. 2018. Т. 61. № 4. С. 113–124.
24. Матвиенко О.В., Данейко О.И., Ковалевская Т.А. Влияние размеров упрочняющих наночастиц на остаточные напряжения в трубе из дисперсно-упрочнённого сплава // *Изв. вузов. Физика*. 2018. Т. 61. № 5. С. 140–150.
25. *Matvienko O., Daneyko O., Kovalevskaya T.* Mathematical modeling of nanodispersed hardening of FCC materials // *Acta Metallurgica Sinica (English Letters)*. 2018. V. 31. No. 12. P. 1297–1304. DOI: 10.1007/s40195-018-0754-0.
26. Матвиенко О.В., Данейко О.И., Ковалевская Т.А. Исследование влияния распределения температуры на напряжённо-деформированное состояние стенок трубы из дисперсно-упрочнённого сплава // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. 2020. Т. 17. № 3. С. 330–337. DOI: 10.25712/ASTU.1811-1416.2020.03.008.
27. Матвиенко О.В., Данейко О.И., Ковалевская Т.А. Исследование пластической деформации толстостенной трубы из сплава, упрочненного некогерентными наночастицами // *Изв. вузов. Физика*. 2017. Т. 60. № 2. С. 35–45.
28. Матвиенко О.В., Данейко О.И., Ковалевская Т.А. Напряженно-деформируемое состояние нагруженной трубы из сплава, упрочненного некогерентными наночастицами // *Изв. вузов. Физика*. 2017. Т. 60. № 4. С. 7–13.
29. Матвиенко О.В., Данейко О.И., Ковалевская Т.А. Исследование формирования дислокационной структуры нагруженной равномерным внутренним давлением трубы из сплава, упрочненного некогерентными наночастицами // *Изв. вузов. Физика*. 2017. Т. 60. № 7. С. 133–141.
30. Матвиенко О.В., Данейко О.И., Ковалевская Т.А. Упругопластическая деформация трубы из дисперсно-упрочненного алюминия под действием внешнего давления // *Изв. вузов. Физика*. 2018. Т. 61. № 8. С. 138–145.
31. Матвиенко О.В., Данейко О.И., Ковалевская Т.А. Упругопластическая деформация трубы из дисперсно-упрочненного алюминия под действием внешнего и внутреннего давления // *Изв. вузов. Физика*. 2019. Т. 62. № 4. С. 144–151.
32. Матвиенко О.В., Данейко О.И., Ковалевская Т.А. Напряженное состояние стенок трубы из дисперсно-упрочненного алюминия под действием внешнего и внутреннего давления // *Изв. вузов. Физика*. 2019. Т. 62. № 10. С. 50–57.
33. *Matvienko O., Daneyko O., Kovalevskaya T.* Mathematical modeling of plastic deformation of a tube from dispersion-hardened aluminum alloy // *MATEC Web of conferences*. 2018. V. 243. P. 00008-1-00008-6. DOI: 10.1051/mateconf/201824300008.
34. Матвиенко О.В., Данейко О.И., Ковалевская Т.А. Напряженное состояние стенок составной трубы из дисперсно-упрочненного алюминия под действием внутреннего давления // *Изв. вузов. Физика*. 2020. Т. 63. № 5. С. 64–73.

35. Данейко О.И., Ковалевская Т.А., Матвиенко О.В. Влияние наноразмерных некогерентных частиц на прочностную термическую стабильность лёгких сплавов на основе алюминия // Изв. вузов. Физика. 2018. Т. 61. № 7(727). С. 40–46.
36. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of Elasticity. New York: Mcgraw Hill, 2010. 567 p.
37. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение. 1975.

Статья поступила 01.12.2020

Matvienko O.V., Daneyko O.I., Kovalevskaya T.A. (2021) A STUDY OF RESIDUAL STRESS FORMATION AFTER ELASTOPLASTIC DEFORMATION OF PIPE WALLS, MADE FROM DISPERSE-HARDENED ALUMINUM ALLOY, AS A RESULT OF EXTERNAL PRESSURE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 102–117

DOI 10.17223/19988621/72/9

Keywords: dispersion-hardened materials, nanoscale particles, plastic deformation, mathematical model, strain hardening, unloading, residual stresses.

The formation of residual stresses after elastic-plastic deformation of pipe walls as a result of external pressure is studied using the approach based on a combination of methods of the physical theory of plasticity and mechanics of a deformable solid. As a result of the research, it is found that at the same value of the applied pressure, the thickness of the area subjected to plastic deformation is less for the alloys reinforced with large particles than for those reinforced with small particles. The values of the circumferential and axial residual stresses exceed the value of the radial residual stresses by more than an order of magnitude. Therefore, in the first approximation, the radial residual stresses can be neglected.

Financial support. This work was performed with the financial support of a grant from the Russian Science Foundation (Project No. 17-13-01252).

Oleg V. MATVIENKO (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: matvolegv@mail.ru

Olga I. DANAYKO (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: olya_dan@mail.ru

Tat'yana A. KOVALEVSKAYA (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: takov47@mail.ru

REFERENCES

1. Matthews F., Rawlings R. (2004) *Kompozitnye materialy* [Composite materials]. Moscow: Tekhnosfera.
2. Karabasov Yu.S. (2002) *Novye materialy* [New materials]. Moscow: MISSIS.
3. Arnhold V., Hummert K. (1989) *New Materials by Mechanical Alloying Techniques*. Ed. by E. Arzt, L. Schultz. Oberursel: DGM Informationsgesellschaft Verlag.
4. Matvienko O., Daneyko O., Kovalevskaya T. (2018) Mathematical modeling of nanodispersed hardening of FCC materials. *Acta Metallurgica Sinica (English Letters)*. 31(12). pp. 1297–1304. DOI: 10.1007/s40195-018-0754-0.
5. Luts A.R., Galochkina I.A. (2013) *Alyuminiyevye kompozitsionnye splavy – splavy budushchego* [Aluminum composite alloys – alloys of the future]. Samara: Samara State Technical University.
6. Vorozhtsov S., Zhukov I., Promakhov V., Naydenkin E., Khrustalyov A., Vorozhtsov A. (2016) The influence of ScF3 nanoparticles on the physical and mechanical properties of new

- metal matrix composites based on A356 aluminum alloy. *Journal of the Minerals, Metals & Materials Society*. 68(12). pp. 3101–3106. DOI: 10.1007/s11837-016-2141-5.
7. Weber J.H., Schelleng R.D. (1988) *Dispersion-Strengthened Aluminum Alloys*. Ed. by Y.-W. Kim, W.M. Griffith. Warrendale: TMS.
 8. Orowan E. (1948) *Proceedings of Symposium on Internal Stresses in Metals and Alloys*. London: Institute of Metals.
 9. Stewart A.T., Martin J.W. (1975) Dislocation-particle interactions in plastically deformed two-phase aluminium crystals. *Acta Materialia*. 23. pp. 1–7. DOI: 10.1016/0001-6160(75)90062-0.
 10. Matvienko O., Daneyko O., Kovalevskaya T. (2020) Mathematical modeling of plastic deformation of a tube from dispersion-hardened aluminum alloy in an inhomogeneous temperature field. *Crystals*. 10. pp. 1103–1–1103-18. DOI: 10.3390/cryst10121103.
 11. Wang G., Wang Q., Easton M.A., Dargusch M.S., Qian M., Eskin D.G., Stjohn D.H. (2017) Role of ultrasonic treatment, inoculation and solute in the grain refinement of commercial purity aluminium. *Scientific Reports*. 7. Article 9729. DOI: 10.1038/s41598-017-10354-6.
 12. Valiev R.Z., Estrin Y., Horita Z., Langdon T.G., Zehetbauer M.J., Zhu Y. (2016) Producing bulk ultrafine-grained materials by severe plastic deformation: ten years later. *Journal of the Minerals, Metals & Materials Society*. 68(4). pp. 1216–1226. DOI: 10.1007/s11837-016-1820-6.
 13. Vorozhtsov S., Minkov L., Khrustalyov A., Dammer V., Zhukov I., Promakhov V., Vorozhtsov A., Khmeleva M. (2017) Ex situ introduction and distribution of nonmetallic particles in aluminum melt: modeling and experiment. *Journal of the Minerals, Metals & Materials Society*. 69(12). pp. 2653–2657. DOI: 10.1007/s11837-017-2594-1.
 14. Vorozhtsov A.B., Plavov V.V., Kozulin A.A., Khrustalev A.P., Mishin I.P., Zhukov I.A. (2020) Issledovanie vliyaniya chastic TiB2 na strukturu, deformatsionnoe povedenie i svoystva alyuminievogo splava 1550 [Study of the effect of TiB2 particles on the structure, deformation behavior, and properties of the aluminum alloy 1550]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 67. pp. 102–116. DOI: 10.17223/19988621/67/10.
 15. Ashby M.F., Johnson K. (2002) *Materials and Design, the Art and Science of Materials Selection in Product Design*. Oxford: Butterworth Heinemann.
 16. Gould D., Hirsch P.B., Humphreys F.J. (1974) The Bauschinger effect, work-hardening and recovery in dispersion-hardened copper crystals. *The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics*. 30(6). pp. 1353–1377. DOI: 10.1080/14786437408207287.
 17. Humphreys F.J., Martin J.W. (1967) The effect of dispersed phases upon dislocation distributions in plastically deformed copper crystals. *Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics*. 16(143). pp. 927–957. DOI: 10.1080/14786436708229685.
 18. Kröpl O., Vöhringer E. (1999) Creep behavior of dispersion-hardened aluminum materials. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 3. pp. 1–13. DOI: 10.1023/A:1009875316242.
 19. Kulaeva N.A., Daneyko O.I., Kovalevskaya T.A., Starenchenko V.A. (2016) Vliyanie masshtabnykh kharakteristik uprochnyayushchey fazy so sverkhstrukturoy L12 na evolyutsiyu dislokatsionnykh dipoley v protsesse plasticheskoy deformatsii [Influence of the scale characteristics of the hardening phase with the L12 superstructure on the evolution of dislocation dipoles during plastic deformation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*. 21(3). pp. 1089–1092. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-3-1089-1092.
 20. Kovalevskaya T.A., Kolupaeva S.N., Daneyko O.I., Kulaeva N.A., Semenov M.E. (2011) Vliyanie masshtabnykh kharakteristik uprochnyayushchey fazy na evolyutsiyu defektnoy podsystemy v geterofaznykh materialakh s GTSK matritsey [Influence of the scale characteristics of the hardening phase on the evolution of the defect subsystem in heterophase materials with an FCC matrix]. *Materialovedenie*. 8. pp. 6–11.
 21. Stacey A., Webster G.A. (1998) Determination of residual stress distributions in autofrettaged tubing. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 31(3). pp. 205–220. DOI: 10.1016/0308-0161(88)90003-8.

22. Birger I.A. (1963) *Ostatochnye napryazheniya* [Residual stresses]. Moscow: Mashgiz.
23. Matvienko O.V., Daneyko O.I., Kovalevskaya T.A. (2018) *Ostatochnye napryazheniya v trube iz splava, uprochnennogo nekogerentnymi nanochastitsami posle razgruzki iz uprugoplasticheskogo sostoyaniya* [Residual stresses in a pipe made of an alloy strengthened by incoherent nanoparticles after unloading from an elastoplastic state]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 61(4). pp. 113–124.
24. Matvienko O.V., Daneyko O.I., Kovalevskaya T.A. (2018) *Vliyanie razmerov uprochnyayushchikh nanochastits na ostatochnye napryazheniya v trube iz dispersno-uprochnennogo splava* [Influence of the size of hardening nanoparticles on residual stresses in a pipe made of a dispersion-hardened alloy]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 61(5). pp. 140–150.
25. Matvienko O., Daneyko O., Kovalevskaya T. (2018) Mathematical modeling of nanodispersed hardening of FCC materials. *Acta Metallurgica Sinica (English Letters)*. 31(12). pp. 1297–1304. DOI: 10.1007/s40195-018-0754-0.
26. Matvienko O.V., Daneyko O.I., Kovalevskaya T.A. (2020) *Issledovanie vliyaniya raspredeleniya temperatury na napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie stenok truby iz dispersno-uprochnennogo splava* [Investigation of the influence of temperature distribution on the stress-strain state of the tube walls made from a disperse-hardened alloy]. *Fundamental'nye problemy sovremennogo materialovedeniya – Basic Problems of Material Science*. 17(3). pp. 330–337. DOI: 10.25712/ASTU.1811-1416.2020.03.008.
27. Matvienko O.V., Daneyko O.I., Kovalevskaya T.A. (2017) *Issledovanie plasticheskoy deformatsii tolstostennoy truby iz splava, uprochnennogo nekogerentnymi nanochastitsami* [Investigation of plastic deformation of a thick-walled tube made of the alloy reinforced with incoherent nanoparticles]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 60(2). pp. 35–45.
28. Matvienko O.V., Daneyko O.I., Kovalevskaya T.A. (2017) *Napryazhenno-deformiruemoie sostoyanie nagruzhennoy truby iz splava, uprochnennogo nekogerentnymi nanochastitsami* [Stress-strain state of the loaded pipe made of the alloy reinforced with incoherent nanoparticles]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 60(4). pp. 7–13.
29. Matvienko O.V., Daneyko O.I., Kovalevskaya T.A. (2017) *Issledovanie formirovaniya dislokatsionnoy struktury nagruzhennoy ravnomernym vnutrennim davleniem truby iz splava, uprochnennogo nekogerentnymi nanochastitsami* [Investigation of the formation of a dislocation structure loaded with uniform internal pressure in a pipe made of the alloy reinforced with incoherent nanoparticles]. *Russian Physics Journal*. 60(7). pp. 133–141.
30. Matvienko O.V., Daneyko O.I., Kovalevskaya T.A. (2018) *Uprugoplasticheskaya deformatsiya truby iz dispersno-uprochnennogo alyuminiya pod deystviem vneshnego davleniya* [Elastoplastic deformation of a pipe made of dispersion-hardened aluminum under the influence of external pressure]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 61(8). pp. 138–145.
31. Matvienko O.V., Daneyko O.I., Kovalevskaya T.A. (2019) *Uprugoplasticheskaya deformatsiya truby iz dispersno-uprochnennogo alyuminiya pod deystviem vneshnego i vnutrennego davleniya* [Elastoplastic deformation of a pipe made of dispersion-hardened aluminum under external and internal pressure]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 62(4). pp. 144–151.
32. Matvienko O.V., Daneyko O.I., Kovalevskaya T.A. (2019) *Napryazhennoe sostoyanie stenok truby iz dispersno-uprochnennogo alyuminiya pod deystviem vneshnego i vnutrennego davleniya* [Stress state of the pipe walls made of dispersion-hardened aluminum under external and internal pressure]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 62(10). pp. 50–57.
33. Matvienko O., Daneyko O., Kovalevskaya T. (2018) Mathematical modeling of plastic deformation of a tube from dispersion-hardened aluminum alloy. *MATEC Web of conferences*. 243. pp. 00008-1–00008-6. DOI: 10.1051/mateconf/201824300008.
34. Matvienko O.V., Daneyko O.I., Kovalevskaya T.A. (2020) *Napryazhennoe sostoyanie stenok sostavnoy truby iz dispersno-uprochnennogo alyuminiya pod deystviem vnutrennego*

- davleniya [Stress state of walls of the composite pipe made of dispersion-hardened aluminum under internal pressure]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 63(5). pp. 64–73.
35. Daneyko O.I., Kovalevskaya T.A., Matvienko O.V. (2018) Vliyanie nanorazmernykh nekogerentnykh chastits na prochnostnuyu termicheskuyu stabil'nost' legkikh splavov na osnove alyuminiya [Influence of nanosized incoherent particles on the strength thermal stability of the light aluminum-based alloys]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 61(7). pp. 40–46.
36. Timoshenko S.P., Goodier J.N. (2010) *Theory of Elasticity*. New York: McGraw Hill.
37. Malinin N.N. (1975) *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow: Mashinostroenie.

Received: December 1, 2020

УДК 531.391

DOI 10.17223/19988621/72/10

И.П. Попов

СИМВОЛИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РАЗВЕТВЛЕННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Представлены методы расчета разветвленных механических систем с любым числом степеней свободы, основанные на использовании символического или комплексного представления вынужденных гармонических колебаний. Доказан ряд релевантных теорем, связывающих активные и реактивные параметры систем при последовательном и параллельном соединении потребителей механической мощности. Показана возможность схемного изменения характера реактивной нагрузки.

Ключевые слова: символический, комплексный метод, параллельное, последовательное соединение, характер нагрузки, векторная диаграмма.

Расчет динамики механической системы с n степенями свободы, включающей инертные тела и упругие элементы, предполагает составление и интегрирование системы из n дифференциальных уравнений второго порядка, которые сводятся к дифференциальному уравнению $2n$ порядка. Увеличение степени свободы на единицу увеличивает порядок результирующего дифференциального уравнения на два. Решение дифференциальных уравнений высоких порядков является достаточно громоздким и трудоемким [1, 2].

Цель исследования состоит в разработке существенно компактных методов расчета механических систем с несколькими степенями свободы для установившихся режимов.

Далее используются следующие обозначения и терминология:

- $\underline{x}_m = \omega t e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega t$ – инертный реактанс в комплексном представлении;
- $\underline{x}_k = -\frac{k}{\omega} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{k}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \frac{k}{\omega}$ – упругий реактанс;
- $\underline{r} = r$ – механический резистанс,
- $\underline{z} = r + \underline{x} = r + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) e^{i\frac{\pi}{2}}$ – механический импеданс;
- $\underline{b}_m = \frac{1}{\omega t} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \frac{1}{\omega t} = \frac{1}{\underline{x}_m}$ – инертный сассептанс;
- $\underline{b}_k = \frac{\omega}{k} e^{i\frac{\pi}{2}} = i \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\underline{x}_k}$ – упругий сассептанс;

- $\underline{g} = g = \frac{1}{r}$ – механический кондактанс;
- $\underline{y} = g + \underline{b} = g + \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}$ – механический адмитанс.

Сила, скорость, импеданс и адмитанс связаны формулами

$$\dot{F} = \underline{z} \dot{V} = ZV e^{i\varphi}; \quad (1)$$

$$\dot{V} = \underline{y} \dot{F} = Y e^{i\varphi} F e^{i\frac{\pi}{2}} = Y F e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}. \quad (2)$$

Несколько релевантных теорем

Выше было показано, что $\underline{b}_m = 1/\underline{x}_m$, $\underline{b}_k = 1/\underline{x}_k$, $g = 1/r$. Соотношение между $\underline{y}$ и $\underline{z}$ устанавливает

Теорема 1. Для механической системы справедлива формула

$$\underline{y} = \frac{1}{\underline{z}}.$$

Доказательство. В соответствии с (1)

$$\underline{z} = \frac{\dot{F}}{\dot{V}}.$$

В соответствии с (2)

$$\underline{y} = \frac{\dot{V}}{\dot{F}} = \frac{1}{\underline{z}}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.1. Для механической системы без демпфера справедлива формула

$$\underline{b} = 1/\underline{x},$$

поскольку в этом случае $\underline{y} = \underline{b}$, $\underline{z} = \underline{x}$.

Теорема 2. Эквивалентные величины для механической системы определяются формулами

$$g^* = \frac{r}{r^2 + x^2},$$

$$\underline{b}^* = \frac{x}{r^2 + x^2} e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

$$r^* = \frac{g}{g^2 + b^2},$$

$$\underline{x}^* = \frac{b}{g^2 + b^2} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Доказательство.

$$\underline{z} = r + \underline{x} = r + ix,$$

$$\underline{y} = \frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{r + ix} \frac{r - ix}{r - ix} = \frac{r - ix}{r^2 + x^2} = \frac{r}{r^2 + x^2} - i \frac{x}{r^2 + x^2} = g^* + \underline{b}^*,$$

$$\underline{y} = g + \underline{b} = g + ib,$$

$$\underline{z} = \frac{1}{\underline{y}} = \frac{1}{g + ib} \frac{g - ib}{g - ib} = \frac{g - ib}{g^2 + b^2} = \frac{g}{g^2 + b^2} - i \frac{b}{g^2 + b^2} = r^* + \underline{x}^*.$$

Теорема доказана.

Пусть n объектов с механическими адмитансами $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ соединены последовательно. Эквивалентный адмитанс системы – $\underline{y}$. Имеет место

Теорема 3. При последовательном соединении объектов справедлива формула

$$\underline{y} = \sum_{j=1}^n \underline{y}_j.$$

Доказательство. При последовательном соединении к объектам приложена единая сила $\dot{F}$. Для произвольного объекта в соответствии с (2) справедлива формула

$$\dot{V}_j = \underline{y}_j \dot{F}.$$

Согласно принципу суперпозиции, скорость штока источника силового гармонического воздействия равна

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^n \dot{V}_j = \sum_{j=1}^n \underline{y}_j \dot{F} = \dot{F} \sum_{j=1}^n \underline{y}_j = \dot{F} \underline{y}.$$

Теорема доказана.

Следствие 3.1.

$$\frac{1}{\underline{z}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\underline{z}_j}.$$

Следствие 3.2.

$$\underline{z} = \frac{\prod_{j=1}^n \underline{z}_j}{\sum_{k=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \underline{z}_j}.$$

Следствие 3.3. Эквивалентный механический импеданс меньше каждого из составляющих механических импедансов.

Следствие 3.4. При $\underline{z}_1 = \underline{z}_2 = \dots = \underline{z}_j = \dots = \underline{z}_n = \underline{z}^*$

$$\underline{z} = \frac{\underline{z}^*}{n}.$$

Следствие 3.5.

$$\lim_{\underline{z}_1 \rightarrow \infty} \underline{z} = \frac{\prod_{j=2}^n \underline{z}_j}{\sum_{k=2}^n \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n \underline{z}_j}.$$

Пусть n объектов с механическими импедансами $\underline{z}_1, \dots, \underline{z}_n$ соединены параллельно. Эквивалентный импеданс системы – $\underline{z}$. Имеет место

Теорема 4. При параллельном соединении объектов справедлива формула

$$\underline{z} = \sum_{j=1}^n \underline{z}_j.$$

Доказательство. При параллельном соединении объекты обладают единой скоростью $\dot{V}$. Для произвольного объекта в соответствии с (1) справедлива формула

$$\dot{F}_j = \underline{z}_j \dot{V}.$$

Согласно принципу суперпозиции, сила, приложенная к системе, равна

$$\dot{F} = \sum_{j=1}^n \dot{F}_j = \sum_{j=1}^n \underline{z}_j \dot{V} = \dot{V} \sum_{j=1}^n \underline{z}_j = \dot{V} \underline{z}.$$

Теорема доказана.

Следствие 4.1.

$$\frac{1}{\underline{y}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\underline{y}_j}.$$

Следствие 4.2.

$$\underline{y} = \frac{\prod_{j=1}^n \underline{y}_j}{\sum_{k=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \underline{y}_j}.$$

Следствие 4.3. Эквивалентный механический адмитанс меньше каждого из составляющих механических адмитансов.

Следствие 4.4. При $\underline{y}_1 = \underline{y}_2 = \dots = \underline{y}_j = \dots = \underline{y}_n = \underline{y}^*$

$$\underline{y} = \frac{\underline{y}^*}{n}.$$

Следствие 4.5.

$$\lim_{\underline{y}_1 \rightarrow \infty} \underline{y} = \frac{\prod_{j=2}^n \underline{y}_j}{\sum_{k=2}^n \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n \underline{y}_j}.$$

Параллельно-последовательное соединение потребителей механической мощности

Схема соединения показана на рис. 1.

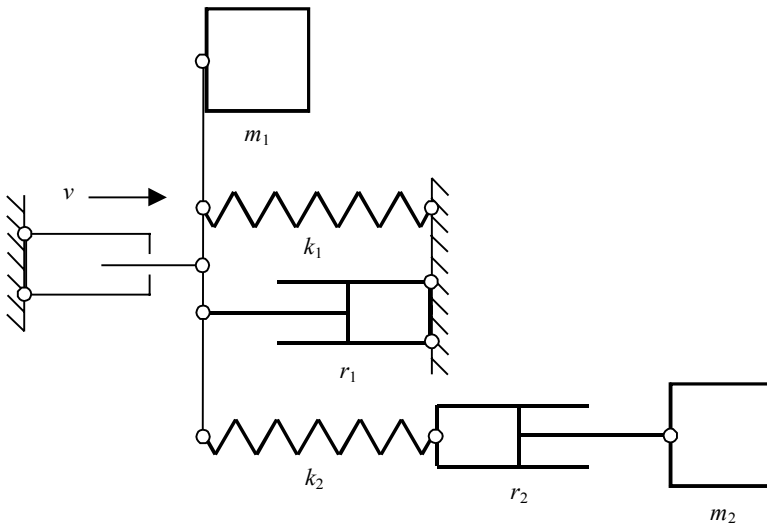


Рис. 1. Параллельно-последовательное соединение
Fig. 1. Parallel-series connection

В соответствии с теоремой 1 $\underline{z}_2 = 1/\underline{y}_2$.

В соответствии с теоремой 4 $\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$.

В соответствии с (1) $\dot{V} = \dot{F}/\underline{z}$.

Пример 1. $\dot{F} = 100e^{i0}$ (Н), $\omega = 2$ рад/с, $m = 10$ кг, $k = 20$ кг·с⁻², $r = 7$ кг·с⁻¹.

Найти все силы и скорости в установившемся режиме.

$$\underline{z}_2 = 1/\underline{y}_2 = 1/(15.135 \cdot 10^{-2} e^{i19.29^\circ}) \approx 6.607 e^{-i19.29^\circ} [\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = 12.207 e^{i55^\circ} + 6.607 e^{-i19.29^\circ} = 15.372 e^{i30.57^\circ} [\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{V} = \dot{F}/\underline{z} = 100/(15.372 e^{i30.57^\circ}) = 6.505 e^{-i30.57^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{F}_{m1} = \underline{x}_{m1} \dot{V} = 20 e^{i90^\circ} \cdot 6.505 e^{-i30.57^\circ} = 130.1 e^{i59.43^\circ} [\text{Н}],$$

$$\dot{F}_{k1} = \underline{x}_{k1} \dot{V} = 10 e^{-i90^\circ} \cdot 6.505 e^{-i30.57^\circ} = 65.05 e^{-i120.57^\circ} [\text{Н}],$$

$$\dot{F}_{r1} = r_1 \dot{V} = 7 e^{i0} \cdot 6.505 e^{-i30.57^\circ} = 45.535 e^{-i30.57^\circ} [\text{Н}],$$

$$\dot{F}_2 = \underline{z}_2 \dot{V} = 6.607 e^{-i19.29^\circ} \cdot 6.505 e^{-i30.57^\circ} = 42.979 e^{-i49.86^\circ} [\text{Н}],$$

$$\dot{V}_{m2} = \underline{b}_{m2} \dot{F}_2 = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 42.979 e^{-i49.86^\circ} = 2.149 e^{-i139.86^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{V}_{k2} = \dot{b}_{k2} \dot{F}_2 = 10 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 42.979 e^{-i49.86^\circ} = 4.298 e^{i40.14^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{V}_{r2} = g_2 \dot{F}_2 = 14.286 \cdot 10^{-2} \cdot 42.979 e^{-i49.86^\circ} = 6.14 e^{-i49.86^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}].$$

Классический расчет предполагает составление и решение системы дифференциальных уравнений и поэтому несоизмеримо сложнее и объемнее по сравнению с примером 1.

Векторная диаграмма для величин из примера 1 представлена на рис. 2.

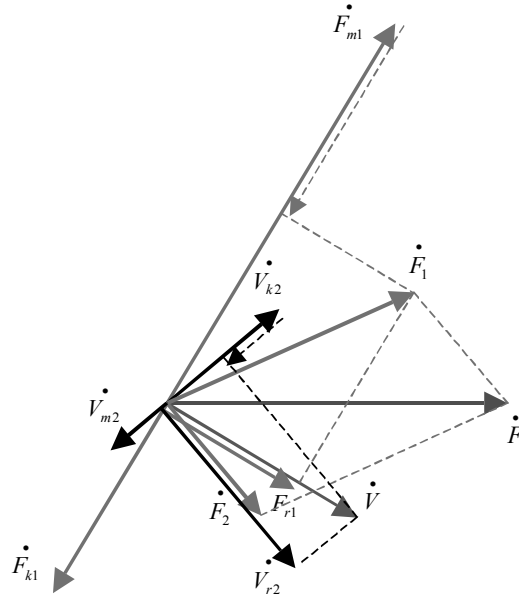


Рис. 2. Векторная диаграмма при параллельно-последовательном соединении

Fig. 2. Vector diagram for a parallel-series connection

Двойной (параллельно-последовательный) резонанс

В дополнение к вышесказанному о резонансах сил и скоростей [3] можно ограничиться численным примером.

Пример 2. $k = 40 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-2}$. Остальные данные – из примера 1. Найти все силы и скорости в установившемся режиме.

$$\underline{z}_1 = \underline{z}_2 = r = 7 e^{i0^\circ} [\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = 2r = 14 e^{i0^\circ} [\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{V} = \dot{F} / \underline{z} = 100 / (14 e^{i0^\circ}) = 7.143 e^{i0^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{F}_{m1} = \underline{x}_{m1} \dot{V} = 20 e^{i90^\circ} \cdot 7.143 e^{i0^\circ} = 142.857 e^{i90^\circ} [\text{Н}],$$

$$\dot{F}_{k1} = \underline{x}_{k1} \dot{V} = 20 e^{-i90^\circ} \cdot 7.143 e^{i0^\circ} = 142.857 e^{-i90^\circ} [\text{Н}],$$

$$\dot{F}_{r1} = \dot{F}_1 = r_1 \dot{V} = 7e^{i0} \cdot 7.143e^{i0^\circ} = 50e^{i0^\circ} [\text{H}],$$

$$\dot{F}_2 = z_2 \dot{V} = 7e^{i0^\circ} \cdot 7.143e^{i0^\circ} = 50e^{i0^\circ} [\text{H}],$$

$$\dot{V}_{m2} = \underline{b}_{m2} \dot{F}_2 = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 50e^{i0^\circ} = 2.5e^{-i90^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{V}_{k2} = \underline{b}_{k2} \dot{F}_2 = 5 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 50e^{i0^\circ} = 2.5e^{i90^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{V}_{r2} = g_2 \dot{F}_2 = 14.286 \cdot 10^{-2} \cdot 50e^{i0^\circ} = 7.143e^{i0^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}].$$

Векторная диаграмма для величин из примера 2 представлена на рис. 3.

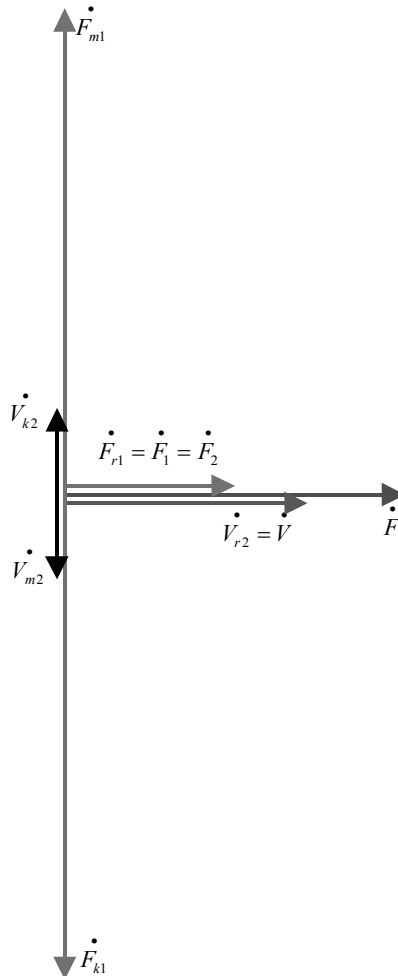


Рис. 3. Векторная диаграмма при двойном (параллельно-последовательном) резонансе
Fig. 3. Vector diagram for double (parallel-series) resonance

Последовательно-параллельное соединение потребителей механической мощности

Схема соединения показана на рис. 4.

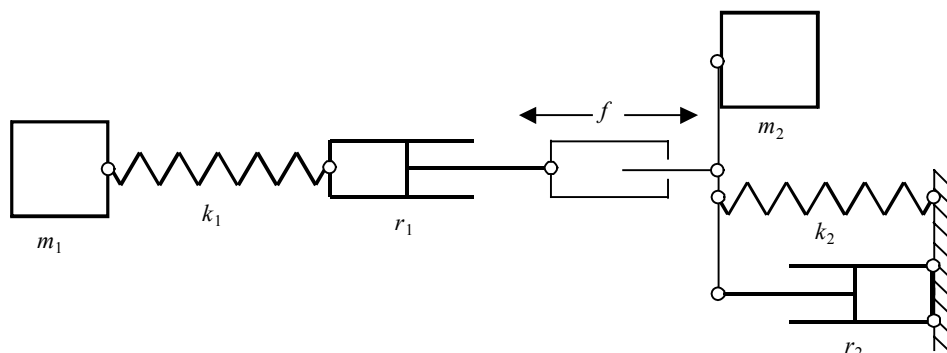


Рис. 4. Последовательно-параллельное соединение
Fig. 4. Series-parallel connection

В соответствии с теоремой 1 $\underline{y}_2 = 1/\underline{z}_2$.

В соответствии с теоремой 3 $\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2$.

В соответствии с (2) скорость штока $\dot{V} = \underline{y} \dot{F}$.

Пример 3. Для данных примера 1 найти все силы и скорости в установившемся режиме.

$$\underline{y}_2 = 1/\underline{z}_2 = 1/(12.207e^{i55^\circ}) = 8.192 \cdot 10^{-2} e^{-i55^\circ} [\text{кг}^{-1} \cdot \text{с}],$$

$$\begin{aligned} \underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 &= 15.135 \cdot 10^{-2} e^{i19.29^\circ} + 8.192 \cdot 10^{-2} e^{-i55^\circ} = \\ &= 19.061 \cdot 10^{-2} e^{-i5.126^\circ} [\text{кг}^{-1} \cdot \text{с}], \end{aligned}$$

$$\dot{V} = \dot{F} \underline{y} = 100 \cdot 19.061 \cdot 10^{-2} e^{-i5.126^\circ} = 19.061 e^{-i5.126^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{V}_2 = \dot{F} \underline{y}_2 = 100 \cdot 8.192 \cdot 10^{-2} e^{-i55^\circ} = 8.192 e^{-i55^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}].$$

$$-\dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 15.135 e^{i19.29^\circ} + 8.192 e^{-i55^\circ} = 19.061 e^{-i5.126^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}] = \dot{V}.$$

Векторная диаграмма для величин из примера 3 представлена на рис. 5.

Двойной (последовательно-параллельный) резонанс

В дополнение к вышесказанному о резонансах сил и скоростей можно ограничиться численным примером.

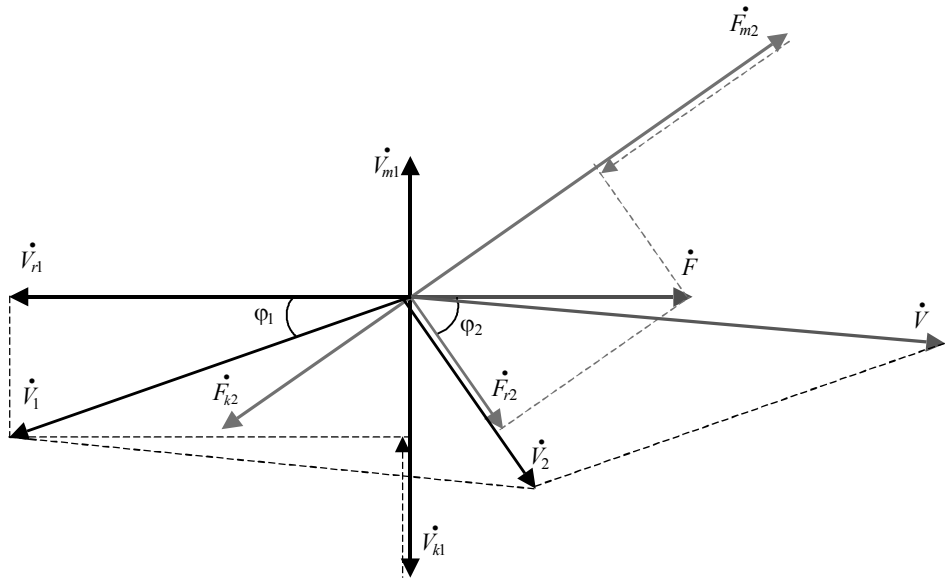


Рис. 5. Векторная диаграмма при последовательно-параллельном соединении
Fig. 5. Vector diagram for a series-parallel connection

Пример 4. Для данных примера 2 найти все силы и скорости в установившемся режиме.

$$\underline{y}_1 = 1/\underline{z}_1 = g_1 = \underline{y}_2 = 1/\underline{z}_2 = g_2 = 1/(12.207e^{i55^\circ}) = 14.286 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} [\text{кг}^{-1} \cdot \text{с}],$$

$$\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 = 2 \cdot 14.286 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} = 28.571 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} [\text{кг}^{-1} \cdot \text{с}],$$

$$\dot{V} = \dot{F} \underline{y} = 100 \cdot 28.571 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} = 28.571 e^{i0^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{V} = -\dot{V}_1 + \dot{V}_2,$$

$$-\dot{V}_1 = -\dot{F} \underline{y}_1 = \dot{V}_2 = \dot{F} \underline{y}_2 = 100 \cdot 14.286 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} = 14.286 e^{i0^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$-\dot{V}_{m1} = \dot{b}_{m1} \dot{F} = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 100 e^{i0^\circ} = 5 e^{-i90^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$-\dot{V}_{k1} = \dot{b}_{k1} \dot{F} = 5 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 100 e^{i0^\circ} = 5 e^{i90^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$-\dot{V}_{r1} = -g_1 \dot{F} = 14.286 \cdot 10^{-2} \cdot 100 e^{i0^\circ} = 14.286 e^{i0^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}],$$

$$\dot{F}_{m2} = \dot{x}_{m2} \dot{V}_2 = 20 e^{i90^\circ} \cdot 14.286 e^{i0^\circ} = 285.714 e^{i90^\circ} [\text{Н}],$$

$$\dot{F}_{k2} = \dot{x}_{k2} \dot{V}_2 = 20 e^{-i90^\circ} \cdot 14.286 e^{i0^\circ} = 285.714 e^{-i90^\circ} [\text{Н}],$$

$$\dot{F}_{r2} = \dot{F}_2 = \dot{F} = r_2 \dot{V}_2 = 7 e^{i0} \cdot 14.286 e^{i0^\circ} = 100 e^{i0^\circ} [\text{Н}].$$

Векторная диаграмма для величин из примера 4 представлена на рис. 6.

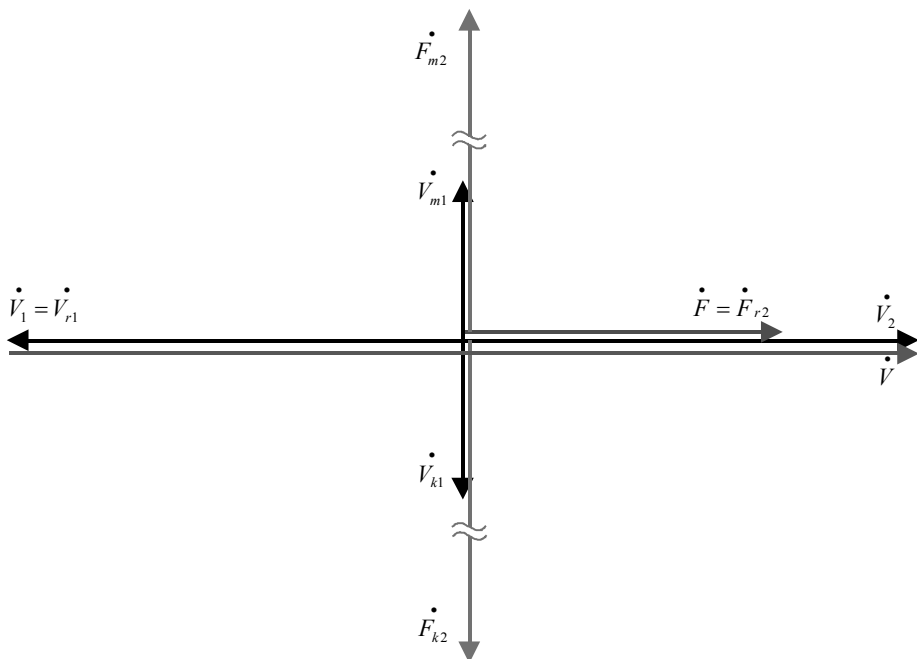


Рис. 6. Векторная диаграмма при двойном (последовательно-параллельном) резонансе
Fig. 6. Vector diagram for double (series-parallel) resonance

О характере механического импеданса

Пусть $\dot{F} = F e^{i0}$,

$$\underline{z} = r + \underline{x}_m = \sqrt{r^2 + x_m^2} e^{i \arctg \frac{x_m}{r}} = z e^{i\varphi}.$$

Тогда

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{F e^{i0}}{z e^{i\varphi}} = \frac{F}{z} e^{-i\varphi}.$$

Пример 5. Для данных предыдущих примеров

$$\begin{aligned} \underline{z} &= \sqrt{r^2 + x_m^2} e^{i \arctg \frac{x_m}{r}} = \sqrt{7^2 + 20^2} e^{i \arctg \frac{20}{7}} \approx \\ &\approx 21.19 e^{i 70.71^\circ} [\text{кг}^{-1} \cdot \text{с}], \end{aligned}$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100 e^{i0}}{21.19 e^{i 70.71^\circ}} \approx 4.719 e^{-i 70.71^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}].$$

Векторная диаграмма для величин из примера 5 представлена на рис. 7.

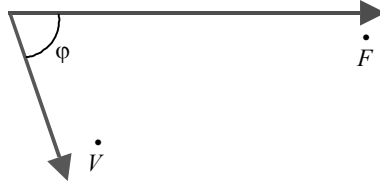


Рис. 7. Инертный характер
Fig. 7. Inert nature

Пусть $\underline{z} = r + \underline{x}_k = \sqrt{r^2 + x_k^2} e^{i \arctg \frac{x_k}{r}} = z e^{i\varphi}$.

Пример 6. Для данных предыдущих примеров

$$\underline{z} = \sqrt{r^2 + x_k^2} e^{i \arctg \frac{x_k}{r}} = \sqrt{7^2 + 10^2} e^{i \arctg \frac{-10}{7}} \approx, \\ \approx 12.207 e^{-i55^\circ} [\text{кг}^{-1} \cdot \text{с}]$$

$$\dot{\underline{V}} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100 e^{i0}}{12.207 e^{-i55^\circ}} \approx 8.192 e^{i55^\circ} [\text{м} \cdot \text{с}^{-1}].$$

Векторная диаграмма для величин из примера 6 представлена на рис. 8.

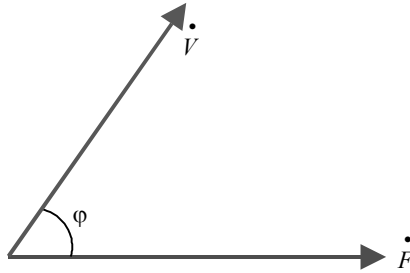


Рис. 8. Упругий характер
Fig. 8. Elastic nature

Представленные выше рассуждения можно принять в качестве иллюстрации справедливости следующей теоремы.

Теорема 5. При инертном характере нагрузки скорость отстает по фазе от приложенной силы. При упругом – опережает. При резистивном – совпадает.

Замечание 5.1. Если $\underline{x} = \underline{x}_m + \underline{x}_k$ и $\underline{x}_m > \underline{x}_k$, то нагрузка имеет инертный характер. Если и $\underline{x}_m < \underline{x}_k$ – то упругий.

Схемное изменение характера нагрузки

Пусть нагрузка состоит из инертного тела и упругого элемента. Пусть $\sqrt{k/m} \neq \omega$. Для этих условий имеет место

Теорема 6. При изменении схемы соединения инертного тела и упругого элемента с параллельного на последовательное или наоборот характер нагрузки меняется.

Доказательство. Пусть $\underline{x}_m > \underline{x}_k$. При параллельном соединении

$$\underline{x} = \underline{x}_m + \underline{x}_k = \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}$$

и в соответствии с замечанием 5.1. нагрузка имеет инертный характер. Фаза $i\pi/2 > 0$.

При изменении схемы соединения на последовательное

$$\underline{b} = \underline{b}_k + \underline{b}_m = \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right) e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{\omega m - k/\omega}{km} e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

В соответствии со следствием теоремы 1

$$\underline{x} = \frac{1}{\underline{b}} = \frac{km}{\omega m - k/\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Фаза $-i\pi/2 < 0$, т.е. нагрузка приобрела упругий характер.

Аналогичным образом рассматривается условие $\underline{x}_m < \underline{x}_k$.

Теорема доказана.

Заключение

Доказан ряд релевантных теорем, связывающих активные и реактивные параметры систем при последовательном и параллельном соединении потребителей механической мощности. На примере параллельно-последовательного и последовательно-параллельного соединения показаны методы расчета разветвленных механических систем с любым числом степеней свободы, основанные на использовании символического или комплексного представления вынужденных гармонических колебаний. Рассмотрены фазовые соотношения, определяющие характер нагрузки и возможность его искусственного изменения. Представлены векторные диаграммы амплитуд сил, скоростей и их составляющих в комплексной плоскости для нулевого момента времени, которые дают исчерпывающее представление о взаимосвязи между этими величинами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонов Е.А., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Влияние нелинейной жесткости упругих элементов на динамику двухмассового микромеханического гироскопа L-L-типа в режиме вынужденных колебаний // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 53–61. DOI: 10.17223/19988621/57/4.
2. Боталов А.Ю., Родионов С.П. Численное исследование влияния жидкого наполнителя на свободные колебания тела, имеющего одну степень свободы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 51. С. 75–85. DOI: 10.17223/19988621/51/7.
3. Попов И.П. Антирезонанс – резонанс скоростей // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т 20. № 6. С. 362–366. DOI: 10.17587/mau.20.362-366.

Popov I.P. (2021) SYMBOLIC REPRESENTATION OF FORCED OSCILLATIONS OF BRANCHED MECHANICAL SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 118–130

DOI 10.17223/19988621/72/10

Keywords: symbolic, complex method, parallel connection, series connection, loading conditions, vector diagram.

A calculation of dynamics of a mechanical system with n degrees of freedom, including inert bodies and elastic and damping elements, involves the derivation and integration of a system of n second-order differential equations, which are reduced to a differential equation of $2n$ order. An increase in the degree of freedom of the mechanical system by one increases the order of the resulting differential equation by two. The solution of higher-order differential equations is rather cumbersome and time-consuming. Integration of equations is proposed to be replaced with rather simpler algebraic methods. A number of relevant theorems that relate both active and reactive parameters of mechanical systems in the series and parallel connection of mechanical power consumers are proved. Using parallel-series and series-parallel connections as an example, the calculation methods for branched mechanical systems with any number of degrees of freedom, based on the use of symbolic or complex representation of forced harmonic oscillations, are shown. The phase relationships determining loading conditions and a possibility of its artificial change are considered. The vector diagrams of the amplitudes of forces, velocities and their components in a complex plane at a zero time instant are presented, which give a complete and clear idea of the relationship between these quantities.

Igor' P. POPOV (High Tech Center, Kurgan, Russian Federation). E-mail: ip.popow@yandex.ru

REFERENCES

1. Antonov E.A., Merkur'ev I.V., Podalkov V.V. (2019) Vliyanie nelineynoy zhestkosti uprugikh elementov na dinamiku dvukhmassovogo mikromekhanicheskogo giroskopa L–L-tipa v rezhime vyznuzhennykh kolebaniy [Influence of nonlinear rigidity of elastic elements on the L–L type two-mass micromechanical gyroscope dynamics in a forced-oscillation regime]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 54–62. DOI: 10.17223/19988621/57/4.
2. Botalov A.Yu., Rodionov S.P. (2018) Chislennoe issledovanie vliyaniya zhidkogo napolnitelya na svobodnye kolebaniya tela, imeyushchego odnu stepen' svobody [Numerical investigation of the effect of liquid filling on free oscillations of one-degree-of-freedom body]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 51. pp. 75–85. DOI: 10.17223/19988621/51/7.
3. Popov I.P. (2019) Antirezonans – rezonans skorostey [Antiresonance – velocity resonance]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*. 20(6). pp. 362–366. DOI: 10.17587/mau.20.362-366.

Received: June 18, 2019

УДК 536.46+662.61

DOI 10.17223/19988621/72/11

В.А. Порязов, К.М. Моисеева, А.Ю. Крайнов**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ГОРЕНИЯ СМЕСЕВОГО ТВЕРДОГО ТОПЛИВА,
СОДЕРЖАЩЕГО БИДИСПЕРСНЫЙ ПОРОШОК БОРА¹**

Представлены результаты численного моделирования горения смесового твердого топлива, содержащего бидисперсный порошок бора. Физико-математическая постановка задачи основана на подходах механики двухфазных реагирующих сред. Для определения линейной скорости горения использована модель горения смесового твердого топлива Германса, основанная на предположении, что скорость горения определяется массовыми потоками компонентов с поверхности топлива. Решение выполнено численно с использованием алгоритма распада произвольного разрыва. Получены зависимости линейной скорости горения смесового твердого топлива от дисперсности частиц бора и давления газа над поверхностью топлива.

Ключевые слова: *смесовое твердое топливо, бор, линейная скорость горения.*

Задача горения смесового твердого топлива, содержащего различные порошки металлов и неметаллов, является актуальной в плане исследования влияния различных составов порошков на линейную скорость горения топлива. Одним из направлений в этой области исследования является определение влияния добавки порошка бора на скорость горения смесового твердого топлива.

Частицы бора отличаются высокими температурами плавления и кипения [1]. Это может приводить к недогоранию бора при горении смесового твердого топлива. И поэтому, несмотря на достаточно высокий тепловой эффект от сгорания порошка бора, на текущий момент использование бора в составах твердых топлив не имеет достаточного обоснования. Для того чтобы прогнозировать поведение смесовых твердых топлив, содержащих порошок бора, требуется проводить достаточно большое количество экспериментальных исследований. С целью предварительного прогноза предлагается использовать инструменты численного моделирования для решения задач горения смесового твердого топлива.

Одной из проблем, возникающих при численном моделировании горения топлива на основе порошка бора, является формулировка надежной модели физико-химических превращений, происходящих при горении частиц бора. В настоящей работе предлагается использовать ранее сформулированную модель окисления и горения частиц бора [2]. Модель [2] основана на классической модели [3] с предположениями из [4]. При наличии в газе водяного пара, хлора, азота скорость горения частиц бора меняется [5]. Присутствие водяного пара в окружающем частицу газе снижает температуру воспламенения частиц бора. Присутствие хлора или азота в газе приводит к уменьшению скорости горения частиц бора из-за

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-79-10054).

снижения удельной теплоты горения бора и возникновения промежуточных продуктов реакции.

В настоящей работе присутствие в газе компонентов водяного пара, хлора, азота учитывается путем уменьшения теплоты реакций окисления и горения частиц бора. Механизм реагирования при этом аналогичен [2]. При относительно низких температурах частицы бора оксид бора находится в конденсированном состоянии и образует на поверхности частицы пленку. Полагается, что в этом случае идет процесс окисления частицы с образованием оксидного слоя и одновременным испарением оксидного слоя. Если температура частицы бора высокая, то происходит интенсивное испарение окисного слоя. После полного испарения оксидного слоя частица бора реагирует гетерогенно. В ходе высокотемпературного реагирования образуются промежуточные газообразные продукты реакции BO и B_2O_2 , которые далее реагируют с окислителем в газовой фазе с образованием конечного газообразного оксида B_2O_3 .

Для определения линейной скорости горения в данной работе использована модель горения смесового твердого топлива Германса [6], основанная на предположении, что скорость горения определяется массовыми потоками компонентов с поверхности топлива.

Целью исследования является определение скорости горения смесового твердого топлива, содержащего бидисперсный порошок бора, в зависимости от давления газа над поверхностью топлива и дисперсности частиц бора.

Физико-математическая модель и метод решения

Математическая постановка задачи формулируется при следующих допущениях. Слева от границы рассматриваемой области находится смесовое твердое топливо (СТТ), состоящее из окислителя, связки и частиц бора с массовыми долями $\alpha_{\text{ок}}$, α_f , α_B соответственно. На правой границе области полагается свободное истечение газодисперсной смеси. С поверхности твердого топлива при испарении поступают продукты его газификации и частицы бора. Скорость истечения компонентов определяется линейной скоростью горения СТТ. Продукты газификации топлива состоят из смеси газообразных окислителя и горючего, способных к экзотермической химической реакции. Скорость реакции в газе зависит от температуры по закону Аррениуса. Коэффициенты диффузии и теплопроводности газа зависят от температуры. Реакции окисления и горения частиц бора подробно описаны в [2]. В физико-математической постановке задачи эти реакции учитываются в правых частях уравнений через источники изменения массы за счет окисления частиц, испарения окисной пленки с поверхности частиц, двух гетерогенных реакций на поверхности частицы бора. Гетерогенные реакции учитывают образование промежуточных газообразных продуктов реакции BO и B_2O_2 и последующее их реагирование в газе с образованием конечного продукта реакции в виде газообразного оксида B_2O_3 . Общая масса частиц в составе топлива равна

$$m_{\text{dust}} = \sum_{j=1}^2 \alpha_B \rho_c \Delta_{p,j} = \alpha_B \rho_c,$$

$\Delta_{p,j}$ – доля частиц j -й фракции в общей массе частиц бора, α_B – массовая доля порошка бора в составе топлива, ρ_c – плотность смесового твердого топлива.

При заданных допущениях физико-математическая постановка задачи записывается в виде

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g u_g}{\partial x} = \sum_{j=1}^2 (G_{1,j} + G_{2,j} - \alpha_3 G_{3,j} + G_{4,j}); \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho_g u_g)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_g u_g^2 + p)}{\partial x} = \sum_{j=1}^2 [(G_{1,j} + G_{2,j} - \alpha_3 G_{3,j} + G_{4,j}) u_{p,j} - \tau_{fr,j}]; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_g (\epsilon_g + 0.5 u_g^2)}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_g u_g (\epsilon_g + 0.5 u_g^2) + p u_g]}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_g (T_g) \frac{\partial T_g}{\partial x} \right) + Q_5 G_5 - \\ &- \sum_{j=1}^2 [u_{p,j} \tau_{fr,j} - (Q_3 - Q_1) G_{1,j} - (Q_3 - Q_2) G_{2,j}] + \\ &+ \sum_{j=1}^2 [\alpha_{p,j} n_{p,j} S_{p,j} (T_{p,j} - T_g) + (G_{1,j} + G_{2,j} - \alpha_3 G_{3,j} + G_{4,j}) (c_p T_{p,j} + 0.5 u_{p,j}^2)]; \quad (3) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho_{ox}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{ox} u_g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_g \rho_g (T_g) \frac{\partial a_{ox}}{\partial x} \right) - G_5 - \sum_{j=1}^2 (\alpha_1 G_{1,j} + \alpha_2 G_{2,j} + \alpha_3 G_{3,j}); \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho_{B2O3}^g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{B2O3}^g u_g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_g \frac{\partial \rho_{B2O3}^g}{\partial r} \right) + \sum_{j=1}^2 [(1 + \alpha_1) (G_{1,j} + G_{2,j}) + G_{4,j}]; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho_{p,j}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{p,j} u_{p,j}}{\partial x} = - (G_{1,j} + G_{2,j} - \alpha_1 G_{3,j} + G_{4,j}), \quad j = 1, 2; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho_{B2O3,j}^k}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{B2O3,j}^k u_{p,j}}{\partial x} = (1 + \alpha_3) G_{3,j} - G_{4,j}, \quad j = 1, 2; \quad (7)$$

$$\frac{\partial (\rho_{p,j} u_{p,j})}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{p,j} u_{p,j}^2}{\partial x} = \tau_{fr,j} - (G_{1,j} + G_{2,j} - \alpha_3 G_{3,j} + G_{4,j}) u_{p,j}, \quad j = 1, 2; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{p,j} (\epsilon_{p,j} + 0.5 u_{p,j}^2)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{p,j} u_{p,j} (\epsilon_{p,j} + 0.5 u_{p,j}^2)}{\partial x} &= -\alpha_{p,j} S_{p,j} n_{p,j} (T_{p,j} - T_g) + \\ &+ \tau_{fr,j} u_{p,j} - (G_{1,j} + G_{2,j} - \alpha_3 G_{3,j} + G_{4,j}) (c_p T_{p,j} + 0.5 u_{p,j}^2) + \\ &+ Q_1 G_{1,j} + Q_2 G_{2,j} + Q_3 G_{3,j} - Q_4 G_{4,j}, \quad j = 1, 2; \quad (9) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial n_{p,j}}{\partial t} + \frac{\partial n_{p,j} u_{p,j}}{\partial x} = 0, \quad j = 1, 2; \quad (10)$$

$$p = \rho_g R_g T_g; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} T_g(x, 0) &= T_{p,j}(x, 0) = T_b, \quad \rho_{ox}(x, 0) = 0, \quad \rho_{p,j}(x, 0) = 0, \\ \rho_g(x, 0) &= \rho_b, \quad \rho_{B2O3,j}^k(x, 0) = \rho_{B2O3,j}^{kb}, \quad \rho_{B2O3}^g(x, 0) = 0, \\ u_g(x, 0) &= u_{p,j}(x, 0) = 0, \quad n_{p,j}(x, 0) = 0, \quad j = 1, 2; \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_g \frac{T_g(0,t)}{\partial x} &= \rho_c V_c (c_{p,g} T_g(0,t) - Q_s - c_c T_s), \quad \frac{\partial \rho_{B_2O_3,j}^k(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \rho_{B_2O_3}^g(0,t)}{\partial x} = 0, \\
T_{p,j}(0,t) &= T_g(0,t), \quad \rho_{p,j}(0,t) = \alpha_B \rho_c \Delta_{p,j}, \quad \rho_g(0,t) = \frac{p}{R_g T_g(0,t)}, \\
\alpha_{ox} V_c \rho_c &= D_g \frac{\partial \rho_{ox}(0,t)}{\partial x} + u_g(0,t) \rho_{ox}(0,t), \quad n_{p,j}(0,t) = \frac{\rho_{p,j}(0,t)}{(4/3)\pi r_{p0,j}^3 \rho_{p,j}^0}, \\
\alpha_B \rho_c V_c \Delta_{p,j} &= \rho_{p,j}(0,t) u_{p,j}(0,t), \quad (1 - \alpha_B) \rho_c V_c = \rho_g(0,t) u_g(0,t); \quad (13) \\
p(x_e, t) &= p_e, \quad (14)
\end{aligned}$$

где $\rho_{B_2O_3,j}^{kb}$ – начальная масса окисла на поверхности части j -й фракции; $\alpha_p = Nu_p \lambda_g / (2r_p)$ – коэффициент теплообмена газа с частицами; α_i – стехиометрические коэффициенты реакций кислорода с горючими компонентами (частицами и газом); $\gamma = c_{p,g} / c_{v,g}$ – показатель адиабаты; $\varepsilon_g = p / (\rho_g (\gamma - 1))$ – внутренняя энергия газа; $\varepsilon_p = c_p T_p$ – внутренняя энергия частиц; $\lambda = \lambda_{st} (T_g / T_b)^{2/3}$ – коэффициент теплопроводности газа; ρ_g – плотность газа; ρ_{ox} – парциальная плотность окислителя; ρ_p – распределенная плотность вещества частиц; $\rho_{B_2O_3}^g$ – газообразный оксид бора; $\rho_{B_2O_3}^k$ – распределенная плотность конденсированного оксида бора; c – удельная теплоемкость; D – коэффициент диффузии; G – скорость изменения массы частиц при горении или окислении; p – давление; Q – тепловой эффект реакции; Q_s – суммарный тепловой эффект реакций на поверхности к-фазы; R_g – газовая постоянная; t – время; T_s – температура поверхности топлива; T – температура; u – скорость; V_c – линейная скорость горения; x – координата. Индексы: 1, 2, 3, 4, 5 – индексы для реакций; B – параметры бора, содержащегося в частице; B_2O_3 – параметры оксида бора; b – начальные значения параметров состояния; c – параметры смесового твердого топлива; g – параметры газа; p – параметры частиц; ox – окислитель; f – горючее; st – параметры при нормальных условиях.

Радиусы частиц и радиусы бора в частицах определялись аналогично [2] из выражений:

$$r_{p,j} = \sqrt[3]{3\rho_{p,j} / (4\pi n_{p,j} \rho_p^0)}, \quad r_{B,j} = \left[\left(\frac{\mu_B + 3/2 \mu_{ox}}{\mu_B} r_{p0,j}^3 - \frac{\rho_{p,j}}{(4/3)\pi n \rho_p^0} \right) \frac{2\mu_B}{3\mu_{ox}} \right]^{1/3}$$

(на этапе окисления частицы), $r_{B,j} = r_{p,j}$ (на этапе гетерогенного горения частицы бора), в которых ρ_p^0 – плотность материала частиц, μ_B , μ_{ox} – молярные массы бора и окислителя, $r_{p0,j}^3$ – начальный радиус частиц j -й фракции.

Скорости изменения массы частиц бора за счет гетерогенных реакций на поверхности частиц ($G_{1,2}$), за счет окисления частиц с образованием конденсированного оксида B_2O_3 (G_3), а также за счет испарения расплава оксида B_2O_3 (G_4) определялись аналогично работе [2] (обозначения также соответствуют работе [2]).

Сила трения между частицами и газом, а также коэффициент теплообмена между газом и частицами определяются выражениями [7].

При постановке задачи полагалось, что координата $x = 0$ соответствует поверхности смешанного твердого топлива. Граница горения перемещается со скоростью V_c , при этом температура поверхности T_s , а также скорость горения V_c смешанного твердого топлива определяются из выражений:

$$V_c = (v_f m_f + v_{ox} m_{ox}) / \rho_c$$

– выражение для определения линейной скорости горения,

$$Q_s = \alpha_{ox} H_{ox} - (v_f H_f + v_B c_B) \frac{m_f}{\rho_c V_c}$$

– суммарный тепловой эффект в конденсированной фазе,

$$\lambda_g \frac{T_g(0, t)}{\partial x} = \rho_c V_c (c_{p,g} T_g(0, t) - Q_s - c_c T_{c,0})$$

– выражение для нахождения температуры поверхности СТТ, где c_c – удельная теплоемкость СТТ,

$$m_f = (\rho_f + \rho_B) k_{0f} \exp(E_f / R(T_g(0, t))),$$

$$m_{ox} = \rho_c V_c (\alpha_{ox} / v_{ox}),$$

v_{ox}, v_f, v_B – объемные доли окислителя, горючего связующего и порошка бора в составе топлива, $\alpha_{ox}, \alpha_f, \alpha_B$ – массовые доли окислителя, горючего связующего и порошка бора в составе топлива, m_{ox}, m_f, m_B – массовые потоки окислителя, горючего связующего и порошка бора с единицы поверхности топлива, H_f, H_{ox} – тепловые эффекты реакций пиролиза связующего и разложения перхлората аммония, соответственно.

Задача (1) – (14) решалась численно, аналогично [2] с использованием метода С.К. Годунова [8] для уравнений, описывающих законы сохранения для газа, и алгоритма распада произвольного разрыва [9] для уравнений, описывающих законы сохранения для частиц.

Результаты

Формально-кинетические параметры химической реакции и теплота разложения ПХА в твердой фазе взяты из [10], формально-кинетические параметры реакции в газовой фазе взяты из [6, 11], формально-кинетические параметры химической реакции окисления бора взяты из [2]. Численное решение задачи (1) – (14) выполнено при следующих значениях физических величин:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 3.6 \text{ МДж/кг}, Q_2 = -1.3 \text{ МДж/кг}, Q_3 = 31 \text{ МДж/кг}, Q_4 = 0.3 \text{ МДж/кг}, \\ Q_5 &= 7.8 \text{ МДж/кг}, k_{01} = 10^3 \text{ м/с}, k_{02} = 10^5 \text{ м/с}, k_{05} = 10^{10} \text{ с}^{-1}, L = 0.36 \text{ МДж/кг}, \\ E_1 &= 112 \text{ кДж/моль}, E_2 = 252 \text{ кДж/моль}, E_d = 10 \text{ кДж/моль}, E_5 = 188 \text{ кДж/моль}, \\ E_f &= 50.24 \text{ кДж/моль}, D_d = 1.89 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, c_{p,g} = 1065 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \\ c_{v,g} &= 768.2 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \lambda_{g,0} = 0.06 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, H_{ox} = 1339.78 \text{ кДж/кг}, \\ H_f &= 732.7 \text{ кДж/кг}, k_{0f} = 0.4 \text{ м/с}, R_u = 8.31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}, R_g = 264 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \end{aligned}$$

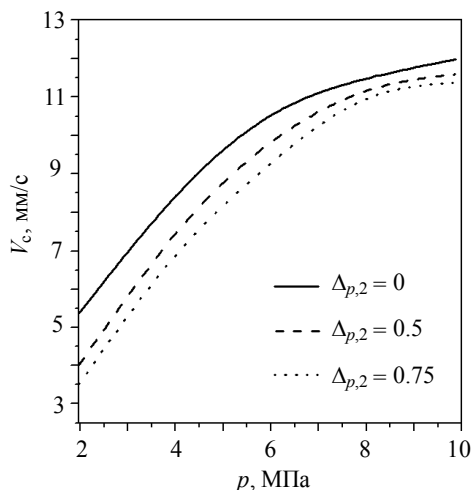
$$\rho_{ox} = 1950 \text{ кг/м}^3, \rho_f = 1270 \text{ кг/м}^3, \rho_B = 2340 \text{ кг/м}^3, \mu_B = 11 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль},$$

$$\mu_{ox} = 16 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}, c_p = 1293 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, c_c = 1465 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)},$$

$$\rho_p^0 = 2340 \text{ кг/м}^3, \eta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}, T_{p,boil} = 2133 \text{ К}, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{6\mu_{ox}}{4\mu_B} = \frac{24}{11}.$$

Массовая доля окислителя в составе смесового топлива задавалась равной $\alpha_{ox} = 0.6$, доля связки $\alpha_f = 0.3$, доля бора $\alpha_B = 0.1$. Начальный радиус частиц бора варьировался в диапазоне $r_{p,0} = 0.5 \cdot 10^{-6} - 10^{-5}$ м. Предполагается, что на поверхности частиц, выходящих с поверхности СТТ в газовую фазу имеется начальный окисный слой толщиной $\Delta r_{p,0} = 10^{-3} r_{p,0}$. Давление газа над поверхностью горения варьировалось в диапазоне $2 \div 10$ МПа.

На рис. 1 представлена зависимость скорости горения смесового твердого топлива с частицами радиуса $r_{p,0,1} = 2$ мкм и $r_{p,0,2} = 10$ мкм. Для расчета взяты составы с содержанием частиц крупной фракции – 50 % (кривая, соответствующая $\Delta_{p,2} = 0.5$) и 75 % (кривая, соответствующая $\Delta_{p,2} = 0.75$). Результаты сравнивались со скоростью СТТ, содержащего монодисперсную взвесь бора радиусом 2 мкм (кривая, соответствующая $\Delta_{p,2} = 0$).



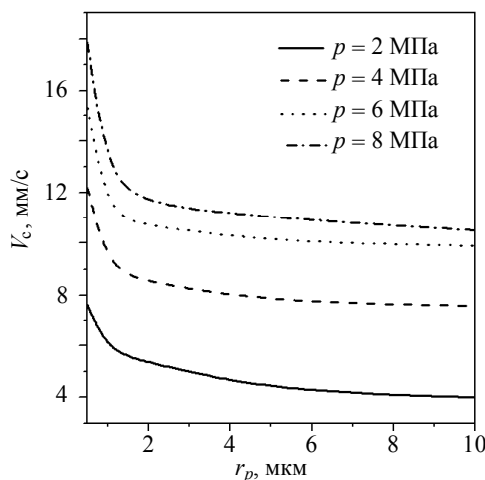
$$r_{p,0,1} = 2 \text{ мкм}, r_{p,0,2} = 10 \text{ мкм}, \alpha_B = 0.1$$

Рис. 1. Зависимость линейной скорости горения смесового твердого топлива с добавлением порошка бора от давления над поверхностью топлива

Fig. 1. Dependence of the linear burning rate of a composite solid propellant with boron powder on the pressure above the propellant surface

Согласно рис. 1, с увеличением доли крупных частиц в продуктах газификации топлива линейная скорость горения смесового твердого топлива, содержащего порошок бора, уменьшается.

На рис. 2 представлена зависимость линейной скорости горения СТТ от радиуса частиц второй фракции. Для расчета взято топливо с радиусом частиц первой фракции $r_{p0,1} = 2 \text{ мкм}$, долей бора в составе СТТ $\alpha_B = 0.1$. Результаты представлены для четырех давлений газа над поверхностью. Взята взвесь с долей частиц первой и второй фракции $\Delta_{p,1} = \Delta_{p,2} = 0.5$.



$$r_{p0,1} = 2 \text{ мкм}, \alpha_B = 0.1, \Delta_{p,1} = \Delta_{p,2} = 0.5$$

Рис. 2. Зависимость линейной скорости горения смешанного твердого топлива от радиуса частиц второй фракции

Fig. 2. Dependence of the linear burning rate of a composite solid propellant on the radius of second-fraction particles

Согласно рис. 2, при начальном радиусе частиц второй фракции больше 2 мкм линейная скорость горения смешанного твердого топлива заданного состава практически прекращает меняться с увеличением радиуса $r_{p,2}$. При давлении 8 МПа в зависимости от радиуса частиц максимальное значение линейной скорости горения СТТ составило 17.9 мм/с, минимальное – 11.9 мм/с. При давлении 2 МПа максимальное значение линейной скорости горения СТТ составило 7.6 мм/с, минимальное – 4 мм/с. Таким образом, при увеличении давления зависимость линейной скорости горения смешанного твердого топлива от радиуса частиц второй фракции возрастает. Также отметим, что для высоких давлений линейная скорость горения смешанного твердого топлива практически прекращает меняться при радиусе частиц второй фракции выше 2 мкм.

Выводы

Разработаны физико-математические модели горения смешанного твердого топлива, содержащего бидисперсный порошок бора. Для заданного состава топлива показано, что увеличение размеров частиц бора приводит к уменьшению линейной скорости горения смешанного твердого топлива. Показано, что скорость горе-

ния смесового твердого топлива с бидисперсным порошком бора изменяется по сравнению со скоростью горения СТТ, содержащего монодисперсный порошок. Это доказывает последующую необходимость учета дисперсности порошка в решении задачи о горении смесового твердого топлива, содержащего реакционно-способные частицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яновский Л.С., Лемперт Д.Б., Разносчиков В.В., Аверьков И.С., Шаров М.С. Оценка эффективности некоторых металлов и неметаллов в твердых топливах для ракетно-прямоточных двигателей // *Физика горения и взрыва*. 2020. Т. 56. № 1. С. 81–94.
2. Крайнов А.Ю., Крайнов Д.А., Моисеева К.М., Порязов В.А., Хакимов А.А. Математическое моделирование горения газозвеси порошка бора // *Инженерно-физический журнал*. 2021. Т. 94. № 2. С. 360–371.
3. King M.K. Boron Ignition and Combustion in Air-Augmented Rocket Afterburners // *Combustion Science and Technology*. 1972. V. 5. No. 4. P. 155–164.
4. Золотко А.Н., Яковлева Т.А. Потухание дисперсных гетерогенных систем // *Физика горения и взрыва*. 1996. Т. 32. № 6. С. 12–19.
5. Xu H.-X., Pang W.-Q., Guo H.-W., Zhao F.-Q., Wang Y., Sun Z.-H. Combustion characteristics and mechanism of boron-based, fuel-rich propellants with agglomerated boron powder // *Central European Journal of Energetic Materials*. 2014. V. 11. No. 4. P. 575–587.
6. Hermance C.E. A model of composite propellant combustion including surface heterogeneity and heat generation // *AIAA J.* 1966. V. 4. No. 9. P. 1629–1637.
7. Моисеева К.М., Крайнов А.Ю., Дементьев А.А. Определение критических условий искрового зажигания бидисперсного порошка алюминия в воздухе // *Физика горения и взрыва*. 2019. Т. 55. № 4. С. 26–33.
8. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
9. Крайко А.Н. О поверхностях разрыва в среде, лишенной «собственного» давления // *Прикладная математика и механика*. 1979. Т. 43. № 3. С. 500–510.
10. Штейнберг А.С. Быстрые реакции в энергоемких системах: высокотемпературное разложение ракетных топлив и взрывчатых веществ. М.: Физматлит, 2006.
11. Булгаков В.К., Липанов А.М. Теория эрозионного горения твердых ракетных топлив. М.: Наука, 2001.

Статья поступила 20.02.2021

Poryazov V.A., Moiseeva K.M., Krainov A.Yu. (2021) NUMERICAL SIMULATION OF COMBUSTION OF THE COMPOSITE SOLID PROPELLANT CONTAINING BIDISPERSED BORON POWDER. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 131–139

DOI 10.17223/19988621/72/11

Keywords: composite solid propellant, boron, linear burning rate.

A problem of combustion of the composite solid propellants containing various powders of metals and non-metals is relevant in terms of studying the effect of various compositions of powders on the linear rate of propellant combustion. One of the lines of research is to determine the effect of the addition of a boron powder on the burning rate of a composite solid propellant. This work presents the results of numerical simulation of combustion of the composite solid propellant containing bidispersed boron powder. Physical and mathematical formulation of the problem is based on the approaches of the mechanics of two-phase reactive media. To determine the linear burning rate, the Hermance model of combustion of composite solid propellants is used, based on the assumption that the burning rate is determined by mass fluxes of the components outgoing from the propellant surface. The solution is performed numerically using the breakdown of an arbitrary discontinuity algorithm. The dependences of the linear burning rate of the

composite solid propellant on the dispersion of the boron particles and gas pressure above the propellant surface are obtained. It is shown that the burning rate of the composite solid propellant with bidispersed boron powder changes in contrast to that of the composite solid propellant with monodispersed powder. This fact proves that the powder dispersion should be taken into account when solving the problems of combustion of the composite solid propellants containing reactive particles.

Financial support. This work was supported by the Russian Science Foundation under Grant № 19-79-10054.

Aleksey Yu. KRAINOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

Kseniya M. MOISEEVA (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

Vasily A. PORYAZOV (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: poryazov@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Lempert D.B., Kazakov A.I., Nabatova A.V., Dashko D.V., Stepanov A.I., Shilov G.V., Aldoshin S.M. (2020) Thermochemical and energy characteristics of dimers of terfurazanoazepines. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 56(1). pp. 621–628. DOI: 10.1134/S0010508220060015.
2. Krainov A.Y., Krainov D.A., Moiseeva K.M., Poryazov V.A., Khakimov A.A. (2021) Mathematical simulation of combustion of boron powder gas suspension. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 94(2). pp. 345–356. DOI: 10.1007/s10891-021-02304-x.
3. King M.K. (1972) Boron ignition and combustion in air-augmented rocket afterburners. *Combustion Science and Technology*. 5(4). pp. 155–164. DOI: 10.1080/00102207208952516.
4. Zolotko A.N., Yakovleva T.A. (1996) Extinction of dispersed heterogeneous systems. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 32(6). pp. 608–614. DOI: 10.1007/BF02111561.
5. Xu H.-X., Pang W.-Q., Guo H.-W., Zhao F.-Q., Wang Y., Sun Z.-H. (2014) Combustion characteristics and mechanism of boron-based, fuel-rich propellants with agglomerated boron powder. *Central European Journal of Energetic Materials*. 11(4). pp. 575–587.
6. Hermance C.E. (1966) A model of composite propellant combustion including surface heterogeneity and heat generation. *AIAA Journal*. 4(9). pp. 1629–1637. DOI: 10.2514/3.55284.
7. Moiseeva K.M., Krainov A.Yu., Dement'ev A.A. (2019) Critical conditions of spark ignition of a bidisperse aluminum powder in air. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 55(4). pp. 395–401. DOI: 10.1134/S001050821904004X.
8. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov, M.I., Krayko A.N., Prokopov G.P. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution to multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka.
9. Kraiko A.N. (1979) On discontinuity surfaces in a medium devoid of "proper" pressure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 43(3). pp. 539–549. DOI: 10.1016/0021-8928(79)90102-3.
10. Shteynberg A.S. (2006) *Bystrye reaktsii v energoemkikh sistemakh: vysokotemperaturnoe razlozhenie raketnykh topliv i vzryvchatykh veshchestv* [Rapid reactions in energy-intensive systems: high-temperature decomposition of rocket propellant and explosives]. Moscow: Fizmatlit.
11. Bulgakov V.K., Lipanov A.M. (2001) *Teoriya erozionnogo goreniya tverdykh raketnykh topliv* [Theory of erosional combustion of solid rocket propellants]. Moscow: Nauka.

Received: February 20, 2021

УДК 539.4

DOI 10.17223/19988621/72/12

**В.В. Промахов, М.В. Коробенков, Н.А. Шульц, А.С. Жуков, А.В. Олисов,
В.Р. Бахмат, Ф.Ю. Дронов, И.С. Мялковский**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ
И РАЗРУШЕНИЯ КЕРАМИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ $\text{Al}_2\text{O}_3 - \text{ZrO}_2$,
ПОЛУЧЕННЫХ ПО АДДИТИВНЫМ ТЕХНОЛОГИЯМ,
ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ НАГРУЖЕНИИ¹**

Представлены результаты моделирования поведения керамических материалов на основе системы $\text{Al}_2\text{O}_3 - 20\% \text{ZrO}_2$, полученных с применением аддитивных технологий, при динамическом нагружении. Разработанная физико-математическая модель использует многоуровневый подход вычислительной механики материалов для определения закономерностей деформирования и разрушения керамических композитов с трансформационно-упрочненной матрицей. Формирование фронтов накопления повреждений и разрушения конденсированной фазы рассматривается на мезоскопическом уровне с позиции диссипации энергии, связанной с самоорганизацией структурных фрагментов за фронтом волны разрежения и возникновением мартенситных фазовых превращений в объеме упрочняющих частиц.

Ключевые слова: *керамические материалы, структура композиционных материалов, аддитивные технологии, динамическое нагружение, трансформационное упрочнение.*

Функциональные керамические композиционные материалы находят широкое применение в промышленности за счет сочетания высокой прочности, твердости, высокой температуры эксплуатации и химической инертности [1, 2]. Среди наиболее известных видов функциональной керамики – керамические композиты на основе системы $\text{Al}_2\text{O}_3 - 20\% \text{ZrO}_2$. Керамические материалы с эффектом трансформационного упрочнения широко используются в инженерной практике в качестве функциональных и конструкционных материалов [3]. Подавляющее большинство таких керамических материалов было разработано на основе частично стабилизированного в тетрагональной фазе диоксида циркония [4]. Под действием напряжений в области микроконцентраторов (на границах частиц упрочняющих фаз, вершинах трещин и др.) тетрагональная фаза способна испытывать мартенситный фазовый переход в моноклинную фазу. Фазовый переход сопровождается развитием сдвиговых и объемных деформаций, которые обеспечивают релаксацию напряжений и замыкание поверхностей трещин [5–7].

Традиционные способы изготовления керамики связаны с ограничением формы изделий. При этом последующая механическая обработка керамики весьма проблематична в связи с высокой твердостью этих материалов. Наиболее перспективный метод получения изделий сложной формы из керамики – аддитивные технологии [8, 9]. Внедрение аддитивного производства для изготовления керамических композиционных материалов и изделий из них позволит устранить гео-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 18-79-00153.

метрические ограничения, присущие традиционным методам. В последние годы были получены значимые научные результаты в области керамических и керамических композиционных материалов для аддитивных технологий [10–13].

Композиционные материалы, полученные по аддитивным технологиям, прошедшие процесс спекания, обладают высокой трещиностойкостью и прочностью в условиях статического нагружения [6, 9]. В то же время механические свойства керамических композиционных материалов при высокоэнергетических воздействиях изучены слабо [8]. Описание механического поведения керамических композитов при динамических нагрузках является важной задачей, которая может быть решена методами компьютерного моделирования. Это связано с недостаточным знанием процессов эволюции структуры композитов при динамическом нагружении и отсутствием адекватных моделей механического поведения композитов, которые позволяли бы учитывать особенности протекания деформаций, фазовых превращений, развития повреждений и разрушения материалов.

Целью данной работы явилась разработка подхода с позиций вычислительной мезомеханики для изучения механического поведения композиционных керамических материалов с трансформационно-упрочненной матрицей при динамических воздействиях. Такой подход даст возможность создавать интеллектуальные керамические композиты с использованием аддитивных технологий, работающих в широком диапазоне скоростей нагружения.

Материалы и методы

Благодаря небольшому количеству дополнительных примесей оксидов Y_2O_3 , MgO и CeO , возможно стабилизировать высокотемпературные фазы диоксида циркония (тетрагональную или кубическую) с различными физико-механическими свойствами при низких температурах [3]. Под действием внешней нагрузки в керамической матрице могут происходить мартенситные фазовые превращения, которые сопровождаются не только развитием сдвигов, но и значительным изменением объема материала. Переход от тетрагональной фазы в моноклинную сопровождается увеличением объема фазы (около 4 %) [4, 5].

Локальное возникновение мартенситных ($t \rightarrow m$) превращений в ZrO_2 способствует закрытию краев трещин или разрушению микропор, тем самым уменьшая интенсивность концентраторов напряжений вблизи дефектов. В результате существующие или вновь образовавшиеся микротрещины становятся стабильными при сохранении уровня внешней нагрузки (этот эффект известен как трансформационное упрочнение) [14]. В настоящее время коллектив авторов проводит интенсивные исследования по созданию высокопрочных керамических материалов с использованием аддитивных технологий.

Для прогнозирования механического поведения керамических композитов с трансформационно-упрочняемой матрицей при интенсивных динамических воздействиях в настоящей работе был использован подход из вычислительной механики материалов [15]. Общим инструментом, используемым для детального изучения особенностей динамического поведения материалов, в том числе динамики разрушения, является численное моделирование в Лагранжевых координатах с использованием явных схем интегрирования. Наиболее известным «Лагранжевым» численным методом, используемым для решения таких задач, является метод конечных элементов (МКЭ) [16, 17]. Отметим, что при использовании этого метода для решения динамических задач возникают известные трудности, связан-

ные с моделированием множественного разрушения, сопровождающегося интенсивным массопереносом и перемешиванием. Помимо МКЭ в настоящее время для моделирования динамических процессов многократного разрушения и переноса фрагментов активно используются численные методы дискретного подхода к описанию среды, в частности методы дискретных элементов (МДЕ) [18–20]. Несмотря на известные преимущества в моделировании разрушения, МДЕ имеют ряд ограничений, к которым обычно относят более низкий порядок точности в пространстве по сравнению с традиционно используемыми конечно-элементными реализациями и недостаточное развитие математического формализма, ограниченного использованием квазистатических механических моделей материалов. Неупругое поведение хрупких материалов в основном связано с накоплением микрповреждений (образование пор и трещин различного размера, их рост или заживление, уплотнение, разрушение и др.) [21–23]. Вовлечение дефектов кристаллической решетки в процесс деформирования таких материалов происходит только при высоких давлениях и температурах [24, 25]. Поэтому для описания динамического неупругого поведения хрупких материалов используются модифицированные модели пластичности, учитывающие высокую чувствительность параметров неупругого отклика к значению давления, а также сложный характер взаимосвязи сдвиговых и объемных пластических деформаций (неассоциированные законы течения).

В рамках выбранного подхода может быть построена иерархическая модель структурированной среды, данные оптического, зондового сканирования и электронной микроскопии могут быть использованы для создания реалистичной модели. Модельный репрезентативный объем материала с поперечным сечением $5 \times 5 \times 5$ мкм, содержащего стохастическую систему частиц ZrO_2 , показан на рис. 1, а. Матричные частицы и включения имеют форму, близкую к тетраэдрической с характерным размером ~ 0.5 мкм. Концентрация ZrO_2 в ячейке соответствует средним значениям соответствующей концентрации в макроскопическом образце материала. Данные о структуре композита были получены путем изучения свойств композита, полученного с помощью аддитивных технологий [6, 8, 9].

Эффективные механические параметры определяются представленными следующими уравнениями.

Средняя массовая плотность определяется соотношением, учитывающим распределение локальной массовой плотности матрицы и упрочняющих частиц:

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{V} \iiint_V \rho(x_k) dV; \quad (1)$$

Средняя массовая скорость

$$\langle u_i \rangle = \frac{1}{V} \iiint_V u_i(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3, \quad (2)$$

где u_i – локальная массовая скорость в репрезентативной ячейке; V – объем.

Компоненты эффективных тензоров скорости деформации и скорости изгиба-кручения определяются формулами

$$\langle \dot{\varepsilon}_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right], \quad \langle \dot{\omega}_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right]; \quad (3)$$

а компоненты эффективного тензора напряжений уравнением

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{dE_V}{dt \langle \dot{\epsilon}_{ij} \rangle}. \quad (4)$$

Здесь $E_V = \iiint_V E dV$ – общая удельная внутренняя энергия в репрезентативной клетке.

При изучении закономерностей деформирования и разрушения керамических композитов при интенсивных динамических воздействиях одной из ключевых задач является получение информации, позволяющей построить уравнение для макроскопического уровня. В рамках применяемого подхода варьирование условий воздействия на репрезентативную ячейку композита позволяет получить данные о реакции структурированной среды при различных условиях деформации.

Например, для репрезентативной ячейки, деформируемой во фронте плоской ударной волны, граничные условия могут быть заданы в соответствии с диаграммой на рис. 1, б.

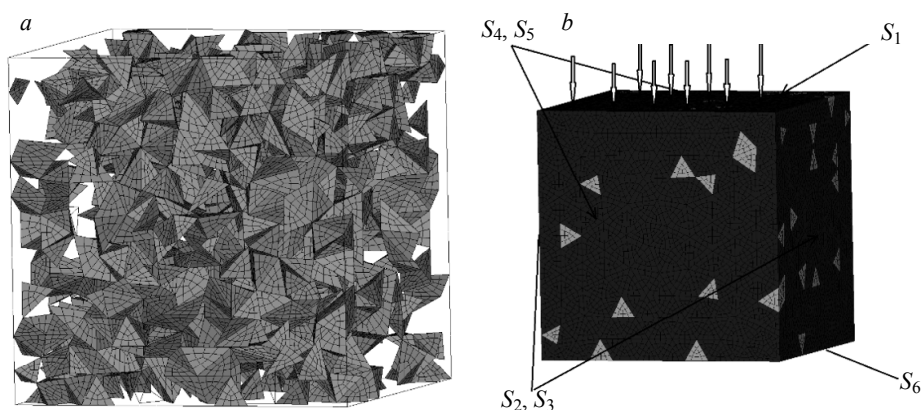


Рис. 1. Репрезентативная ячейка: (а) заполнение частиц ZrO_2 ; (б) элементарный объем структурированной ячейки с граничными условиями
Fig. 1. Representative cell: (a) filling of ZrO_2 particles; (b) an elementary volume of the structured cell with boundary conditions

В начальный момент времени среда расчетной области находится в нормальном состоянии при температуре $T_0 = 293$ К, а деформации и скорость движения частиц конденсированной фазы равны нулю. Вычислительная область нагружается на поверхность S_1 путем задания скорости движения материальных частиц, которые направляются в образец:

$$\begin{aligned} \sigma_n(x_k, t) &= F(x_k, t), \quad x_k \in S_1; \\ u_1(x_k, t) &= 0, \quad x_k \in S_2 \cup S_3; \quad u_2(x_k, t) = 0, \quad x_k \in S_4 \cup S_5; \\ P &= P_{ref} + [u_n(x_k, t) - u_{ref}][\rho C], \quad x_k \in S_6, \end{aligned} \quad (5)$$

где ρ – плотность массы вблизи границы; u_n – массовая скорость в направлении, перпендикулярном границе; значение параметра C уменьшается от продольной скорости звука в упругом предшественнике до C_B , а $F(x_k, t)$ – функция, определяющая форму и длительность импульсного нагружения.

На границах матрицы включения задаются следующие условия:

$$\sigma_{ij} n_j^+ = \sigma_{ij} n_j^-; u_i^+ = u_i^-, \quad (6)$$

где n_j^+, n_j^- являются компонентами вектора нормали к внешней и внутренней поверхностям сопряжения.

При нарушении межфазной границы раздела матрицы и включения граничные условия принимают вид

$$\sigma_n^+ = -\sigma_n^-; \quad \sigma_\tau = \eta P; \quad \sigma_\tau^+ = \sigma_\tau^-, \quad (7)$$

где σ_n, σ_τ – нормальные и тангенциальные напряжения в точках на границе раздела фаз, а η – коэффициент трения.

Начальные условия для расчетной области для рассматриваемого случая приняты в виде

$$u_i(x_k) = u_i^{(0)}, \quad u_{ij}(x_k) = 0, \quad \rho(x_k) = \rho^{(0)}(x_k), \quad \varepsilon_{ij}(x_k) = 0, \quad E(x_k) = 0. \quad (8)$$

Эффективный модуль упругости определяется по расчетным продольным скоростям звука C_L и объемным скоростям звука C_B :

$$\langle \mu \rangle = \bar{\rho} C_s^2, \quad \langle K \rangle = \bar{\rho} C_B^2, \quad C_L^2 = C_B^2 + \frac{4}{3} C_s^2, \quad (9)$$

где $\bar{\rho}$ – средняя плотность массы в нагруженной области ячейки за фронтом соответствующей волны.

Динамика структурированной среды в ячейке описывается в Лагранжевой системе отсчета уравнениями сохранения массы, импульса и энергии:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \frac{du_i}{dt} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \rho \frac{dE}{dt} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (10)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора микронапряжения, ρ – массовая плотность, u_i – компоненты вектора перемещений, ε_{ij} – компоненты тензора деформации скорости, а E – местная удельная внутренняя энергия на единицу массы.

Приращения составляющих тензора деформации представляются в виде суммы упругой и неупругой составляющих:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (11)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – компоненты тензора скорости деформации.

Компоненты тензора скорости неупругих деформаций представлены в виде компонентов, связанных с механизмами дислокационной пластичности и механически активированными механизмами мартенситных фазовых превращений

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = [\dot{\varepsilon}_{ij}^p]_S + [\dot{\varepsilon}_{ij}^p]_m. \quad (12)$$

Такое представление учитывает дилатансию, которая обусловлена только приращением объемной неупругой деформации мартенситного превращения, а отклонение скорости неупругой деформации определяется вкладами сдвигов от обеих пластичностей:

$$[\dot{\varepsilon}_{ij}^p]_S = [\dot{\varepsilon}_{ij}^p]_S, \quad [\dot{\varepsilon}_{ij}^p]_m = \left[\frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{kk}^p \right]_m \delta_{ij} + [\dot{\varepsilon}_{ij}^p]_m, \quad (13)$$

где δ_{ij} – это символ Кронекера.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \dot{\epsilon}_u^p \left[\frac{S_{ij}}{\sigma_u} \right], \quad \sigma_u = \sqrt{(3/2) S_{ij} S_{ij}}, \quad \dot{\epsilon}_u^p = \sqrt{(2/3) \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p}, \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = [\dot{\epsilon}_{ij}^p]_s + [\dot{\epsilon}_{ij}^p]_m \quad (14)$$

где S_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений.

Компоненты тензора напряжений Кирхгофа представлены в виде суммы давления p и девиатора S_{ij} :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij}. \quad (15)$$

Давление p в диапазоне до 10 ГПа можно рассчитать с помощью уравнения состояния

$$p = K_1\theta + K_1\theta^2 + K_1\theta^3 + \Gamma\rho_0 E, \quad \text{при сжатии } \theta > 0, \\ p = K_1\theta, \quad \text{при растяжении } \theta \leq 0, \quad (16)$$

где K_1, K_2, K_3 – материальные константы, $\theta = (\rho/\rho_0) - 1$, Γ – коэффициент Грюней-зена.

Значения констант могут быть в первом приближении получены в рамках смешанной модели. Девиатор тензора напряжений вычисляется из решения уравнения релаксации

$$\frac{dS_{ij}}{dt} = 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{ij}^e - \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{kk}^e \delta_{ij} \right), \quad \frac{dS_{ij}}{dt} = \dot{S}_{ij} - S_{ik} \dot{\omega}_{jk} - S_{jk} \dot{\omega}_{ik}, \quad \dot{\epsilon}_{ij}^e = \dot{\epsilon}_{ij} - [\dot{\epsilon}_{ij}^p]_m - [\dot{\epsilon}_{ij}^p]_s. \quad (17)$$

Определяющее уравнение в поврежденной среде можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = (1 - D) [-p\delta_{ij} + S_{ij}], \quad D = \sum_{i=1}^m \frac{[\Delta\epsilon_{eq}^p]}{\epsilon_f}, \quad (18)$$

где $\Delta D_i = [\Delta\epsilon_{eq}^p]_i / \epsilon_f$ – приращения параметра повреждения в течение определенного периода времени Δt ; $\Delta\epsilon_{eq}^p$ – неупругая деформация, а ϵ_f – предельная деформация в момент макроскопического разрушения.

Предельная деформация в момент разрушения для конкретной среды рассматривается как функция давления и температуры. Для ее описания в момент разрушения материальной точки конденсированной среды, имитирующей оксидный керамический материал, было использовано соотношение, предложенное в работе [26]:

$$\epsilon_f = D_1 (P^* + T^*)^{D_2}, \quad (19)$$

где D_1, D_2 – коэффициенты материала; $P^* = P/P_{\text{HEL}}$ и P_{HEL} – давление, соответствующее пределу упругости Гюгониота основной конденсированной фазы керамики; $T^* = (T - T_r)/(T_m - T_r)$, где T – температура материальной точки (репрезентативного объема) в абсолютном масштабе, T_r – температура помещения, а T_m – температура плавления или диссоциации основной конденсированной фазы среды.

Текущее значение прочности на сдвиг поврежденного материала определяется с учетом изменения сопротивления сдвигу конденсированной фазы. Сопротивление сдвигу в материальной точке поврежденной среды определяется соотношениями [26]

$$\sigma_s = \sigma_s^c - D(\sigma_s - \sigma_f), \quad (20)$$

где σ_s – переменная прочности на сдвиг конденсированных фаз с повреждением на более низком уровне.

При решении динамических задач и задач, связанных с термомеханическими воздействиями на керамические структурированные материалы, необходимо учитывать влияние давления, температуры и скорости деформации на эффективную прочность материала на сдвиг. В настоящей работе для моделирования деформации оксидных керамических материалов используются соотношения [26, 27]

$$\sigma_s^c = A_1 \left(P^* + T^* \right)^{m_1} (1 + C_1 \ln \dot{\epsilon}) ; \tag{21}$$

$$\sigma_f = B_2 \left(P^* \right)^{m_2} (1 + C_2 \ln \dot{\epsilon}) , \tag{22}$$

где $A_1, B_2, C_1, C_2, m_1, m_2$ – коэффициенты материала, а $\dot{\epsilon}$ – интенсивность тензора нормализованной скорости деформации.

Численные значения модуля упругости, массовой скорости и коэффициентов уравнений для кристаллических фаз $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3, t\text{-ZrO}_2$ зависят от концентрации химических примесей, наличия наноразмерных включений и дефектов на субмикронном уровне [28–38]. Значения коэффициентов, выбранных для расчетов, представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Модуль упругости и коэффициенты уравнений состояния

Фаза	$\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$	$t\text{-ZrO}_2$
Плотность, кг/м^3	3890	6050
T_m , К	2327	2950
Объемный модуль $K_1 (D_0)$, ГПа	130.95	235
K_2 , ГПа	0	0
K_3 , ГПа	0	0
B_1	4.19	5.2
Модуль сдвига, μ , ГПа	90.16	76
Коэффициент Грюнайзена γ	1	1

Таблица 2

Коэффициенты модели поврежденной среды

Фаза	$\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$	$t\text{-ZrO}_2$
Напряжение σ_{HEL} , ГПа	9.95	8.9
Давление, P_{HEL} , ГПа	14.6	5.66
σ_s , ГПа	1.37	4.86
A_1 , ГПа	0.93	0.9
B_2 , ГПа	0.31	0.8
C_1	0.001	0
C_2	0.002	0
m_1	0.6	0.5
m_2	0.6	0.6
D_1	0.005	0.01
D_2	1	0.7

Для моделирования нагружения ячейки микросекундным импульсом использовался конечно-разностный метод, реализованный в программном комплексе ANSYS-19 / AUTODYN.

Результаты

Изучено влияние скорости нагружения на трещиностойкость и трещиностойкость керамических композитов $\text{Al}_2\text{O}_3 - 20\% \text{ } t\text{-ZrO}_2$ с массовым содержанием субмикронных частиц $t\text{-ZrO}_2$, на высокоскоростное сжатие модельных образцов в ударных волнах и высокоскоростное растяжение в области взаимодействия разгрузочных волн.

На рис. 2 показано распределение в модельном объеме эффективной скорости пластической деформации в композите $\text{Al}_2\text{O}_3 - 20\% \text{ } t\text{-ZrO}_2$ при сжатии в ударном фронте с амплитудой 33 ГПа на последовательных временных интервалах.

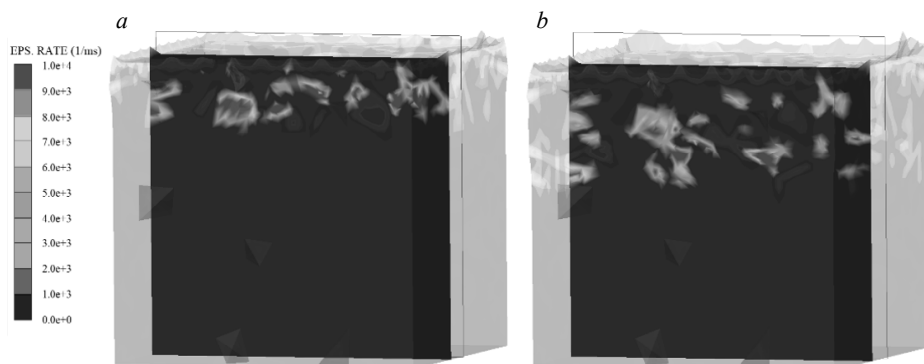


Рис. 2. Эффективная скорость пластической деформации в композите $\text{Al}_2\text{O}_3 - 20\% \text{ } t\text{-ZrO}_2$ при сжатии в ударном фронте с амплитудой 33 ГПа с последовательными интервалами: (a) 0.025 нс; (b) 0.05 нс

Fig. 2. Effective rate of plastic deformation in the composite $\text{Al}_2\text{O}_3 - 20\% \text{ } t\text{-ZrO}_2$ under compression in a shock front with amplitude of 33 GPa at successive time intervals: (a) 0.025 and (b) 0.05 ns

Результаты моделирования показывают, что увеличение эффективной скорости пластической деформации локализуется на мезоскопическом уровне в области армирующих субмикронных частиц и слабо зависит от формы и размера этих частиц (в исследуемом диапазоне изменения). В этом случае области с пластической скоростью течения не наблюдаются за волновым фронтом упругого предшественника, что указывает на хрупкое поведение репрезентативной ячейки.

На рис. 3 показано распределение удельной работы разрушения в модельном объеме композита $\text{Al}_2\text{O}_3 - 20\% \text{ } t\text{-ZrO}_2$ при сжатии в ударном фронте с амплитудой 33 ГПа на последовательных временных интервалах. Из результатов моделирования видно, что удельная работа разрушения реализуется за фронтом упругого предшественника и локализуется на мезоскопическом уровне в области армирующих частиц, при этом не превышая максимального значения 8.5 кДж/кг. Динамическая вязкость разрушения изменяется слабо во всем диапазоне скоростей нагружения.

На рис. 4 показано распределение параметров повреждения в модельном объеме в композите $\text{Al}_2\text{O}_3 - 20\% \text{ } t\text{-ZrO}_2$ при сжатии в ударном фронте с амплитудой 33 ГПа на последовательных временных интервалах.

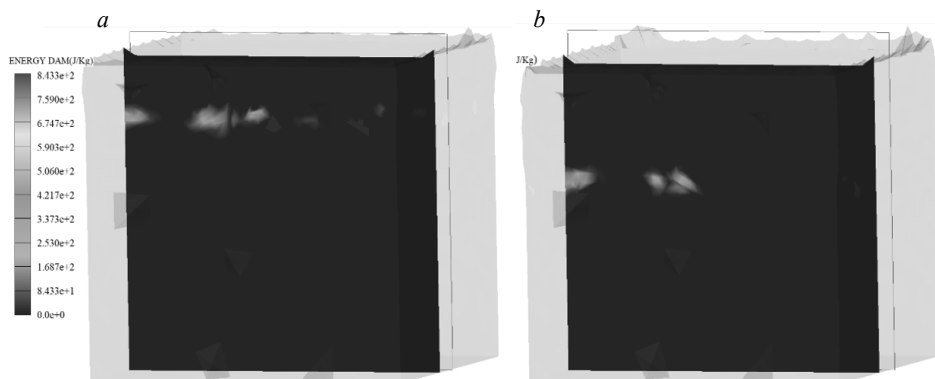


Рис. 3. Удельная работа разрушения в композите $\text{Al}_2\text{O}_3 - 20\% t\text{-ZrO}_2$ при сжатии в ударном фронте с амплитудой 33 ГПа на последовательных временных интервалах: (a) 0.025 нс; (b) 0.05 нс

Fig. 3. Specific fracture work in the composite $\text{Al}_2\text{O}_3 - 20\% t\text{-ZrO}_2$ under compression in a shock front with amplitude of 33 GPa at successive time intervals: (a) 0.025 and (b) 0.05 ns

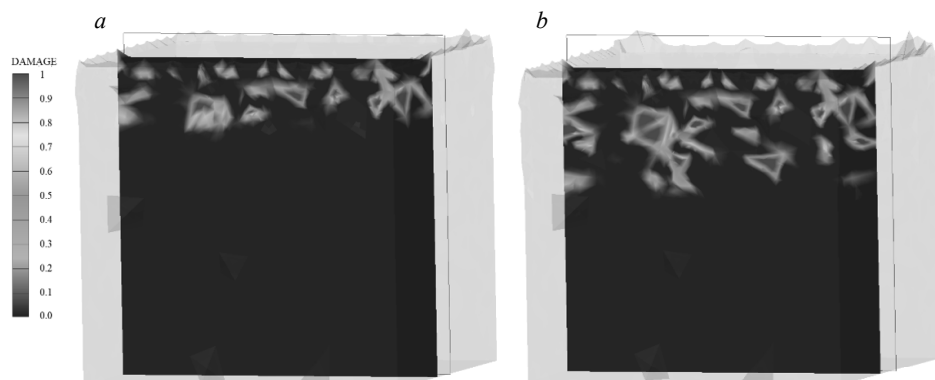


Рис. 4. Параметры повреждения в модельном объеме композита $\text{Al}_2\text{O}_3 - 20\% t\text{-ZrO}_2$ при сжатии в ударном фронте с амплитудой 33 ГПа на последовательных временных интервалах: (a) 0.025 нс; (b) 0.05 нс

Fig. 4. Damage parameters in a model volume of the composite $\text{Al}_2\text{O}_3 - 20\% t\text{-ZrO}_2$ under compression in a shock front with amplitude of 33 GPa at successive time intervals: (a) 0.025 and (b) 0.05 ns

Результаты, представленные на рис. 4 для последовательных временных интервалов, свидетельствуют о формировании локальных повреждений керамической матрицы в зоне ударного перехода. После увеличения времени гидростатического сжатия фронтом ударной волны существенных изменений размеров и конфигурации локальных зон повреждения обнаружено не было. Микроповреждения локализируются на мезоскопическом уровне в областях армирующих частиц. В области за пределами упругого предшественника наблюдаются области развития микротрещин в керамической матрице. Однако керамическая матрица сохраняет свою целостность вплоть до волны пластического разрежения, в то время как твердеющие частицы полностью разрушаются.

На рис. 5 представлены результаты моделирования нагружения различными скоростями. Показаны профили скоростей свободной поверхности и скорости рассеянной энергии. Скорость рассеивания энергии увеличивается с увеличением скорости загрузки. Однако при скоростях выше 1000 м/с наблюдается резкое изменение характера кривых диссипации, вместо монотонного увеличения кривая делится на 2 части. Этот эффект является следствием инерционности образцов, которая начинает играть значительную роль в высокоскоростном деформировании материала. Для решения этой задачи необходимо ввести в расчетную схему дополнительные параметры, учитывающие высокие скорости деформации в зависимости от времени релаксации. В идеальном случае эта информация должна быть получена на основе синтеза экспериментов по динамическому деформированию образцов рассматриваемого материала в требуемом масштабе с использованием различных типов напряженного состояния. Определение этих параметров может быть реализовано в динамических схемах нагружения с использованием расщепленных стержней Хопкинсона. Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными показало хорошее совпадение в скорости движения свободной поверхности [8].

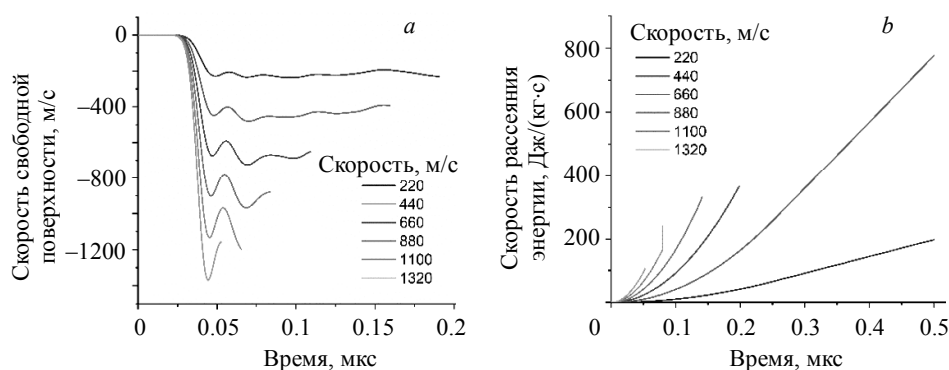


Рис. 5. Результаты моделирования нагружения с использованием различных скоростей:

(a) профили скоростей свободной поверхности; (b) скорость рассеяния энергии

Fig. 5. Results of loading simulation using different velocities:

(a) free surface velocity profiles and (b) energy dissipation rate

На рис. 6 приведены результаты моделирования удельной работы трещины, перешедшей в диссипацию энергии, при различных скоростях нагружения. Результаты моделирования показывают, что с увеличением скорости нагружения вклад мартенситного фазового перехода в динамическую вязкость постепенно возрастает. Когда скорость нагружения превышает 1000 м/с, вязкость разрушения возрастает с увеличением концентрации твердеющих частиц диоксида циркония. Анализ кривых работы разрушения показал, что для алюминиевой матрицы наблюдается чисто хрупкая картина разрушения с классическим упругим предшествующим и следующей за ним волной разрушения. При низких скоростях нагружения вклад армирующих частиц в общую работу разрушения незначителен, но наблюдается незначительное увеличение прочности образцов. С увеличением скорости нагружения увеличивается вклад армирующих частиц в общую работу разрушения. Более того, характер накопления энергии нагружения имеет аналогичный характер, причем удельное время составляет около 20 нс.

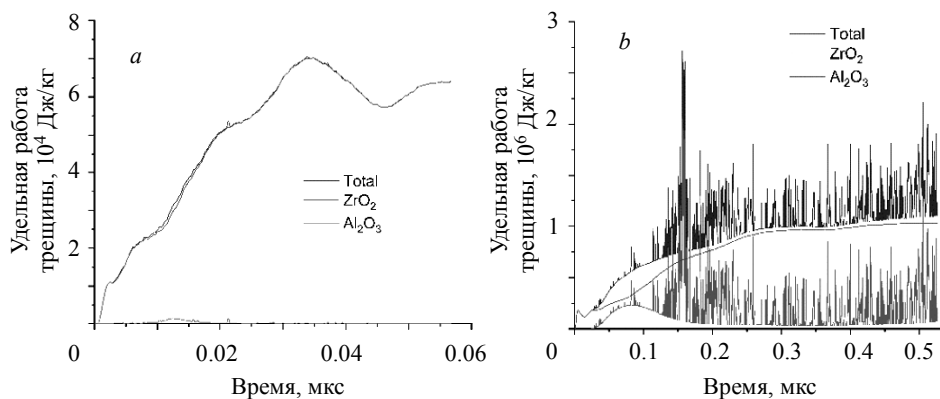


Рис. 6. Результаты моделирования удельной работы трещины, перешедшей в диссипацию энергии, при различных скоростях нагружения: (а) 220 м/с; (б) 1320 м/с

Fig. 6. Simulation results for the specific work of a crack which transforms into energy dissipation at different loading rates: (a) 220 and (b) 1320 m/s

Обсуждение результатов

Анализ результатов моделирования композиционных керамических материалов показал, что объемное содержание трансформационно-упрочняющих частиц приводит к образованию неоднородного фронта и влияет на ширину перехода. Величина скорости нагружения для рассматриваемых композитов влияет на скорость деформации в области ударного перехода. В этом случае основная энергия деформации рассеивается в области упрочняющих частиц.

Анализ результатов моделирования показал, что зависимость прочностных характеристик керамического композита от скорости деформации сильно нелинейна. Это в целом соответствует данным моделирования, полученным на аналогичном классе хрупких материалов [39]. Увеличение скорости нагружения приводит к увеличению скорости диссипации энергии, которая реализуется в накоплении микрповреждений на фронте упругого предшественника. Кроме того, для композитов, рассмотренных выше относительно фронта упругого предвестника, разрушенные области продолжают иметь сдерживающее значение в развитии дальнейших повреждений композитной матрицы. Если в структуре композита присутствуют поры, то повреждение в первую очередь возникает именно на границах между порой и зерном [40]. В данном моделировании мы использовали непористую среду, поэтому эффект наличия пор не учитывался.

Матрица оксида алюминия не претерпевает пластических течений, и наблюдается чисто хрупкая картина разрушения. При низких скоростях нагружения реализуется чисто хрупкий эффект разрушения, главным образом с помощью матрицы из оксида алюминия. В этом случае вклад упрочняющих частиц в прочностные характеристики минимален. Однако при высоких скоростях нагружения наблюдаются явные скачки энергии, связанные с эффектом изменения объема частиц ZrO_2 при фазовом переходе либо от тетрагональной к моноклинной фазе. Полученные результаты показывают качественную зависимость характера диссипации энергии от скорости нагружения при динамическом моделировании хрупких сред [41].

Примечательно, что величина упрочняющего эффекта от заполнения наноструктурированной оксидно-алюминиевой матрицы субмикронными включениями $t\text{-ZrO}_2$ зависит от размера частиц. Для частиц размером менее 400 нм возникновение механически активированных мартенситных фазовых переходов $t \rightarrow m$ затруднительно. В результате при интенсивном деформировании в зоне зарождения и распространения трещины дисперсные частицы $t\text{-ZrO}_2$ не претерпевают фазовых превращений, но играют роль слабдеформируемых частиц.

В рамках модельных концепций, использованных в настоящем исследовании, снижение трещиностойкости обусловлено интенсивным зарождением микротрещин как в объеме армирующих включений, так и в объеме наноструктурированной матрицы. Характер разрушения в этих условиях связан не с увеличением размеров мезоскопических трещин, а, скорее, со слиянием многочисленных субмикронных трещин, образующихся в объеме композита. Повреждение возникает как в наноструктурированной матрице, так и в субмикронных армирующих частицах. Однако значительная часть энергии тратится на фазовые переходы, за счет которых возникает эффект усиления. Кроме того, некоторые исследования дают количественное сравнение энергии разрушения и вязкости разрушения композитов [42]. В данной работе мы отошли от этого формализма и использовали понятие специфической работы разрушения, причем был показан вклад работы разрушения каждого компонента композита. Такой подход является оригинальным и позволяет оценить вклад каждого компонента композита в работу по разрушению в широком диапазоне скоростей нагружения. Он позволит на этапе проектирования керамических композитов прогнозировать динамические характеристики материала и создавать «умные» материалы для широкого спектра применений.

В рамках представленной модели можно сказать, что повышение трещиностойкости композиционных материалов, получаемое с помощью аддитивных технологий, может быть достигнуто как за счет уменьшения размера зерен матрицы ниже 500 нм, так и за счет заполнения оксидной матрицы армирующими частицами с размерами менее 500 нм.

Выводы

Результаты моделирования показывают, что нелинейные эффекты механического поведения керамических композитов $\text{ZrO}_2 - \text{Al}_2\text{O}_3$ с трансформационно-упрочненной матрицей, полученных с помощью аддитивных технологий, проявляются при амплитудах ударного нагружения, близких или превышающих предел упругости Гюгониота σ_{HEL} .

Нелинейные эффекты при интенсивных динамических воздействиях на рассматриваемые композиты связаны с процессами самоорганизации деформационных режимов на мезоскопическом уровне (формирование блочных подструктур), а также с возникновением мартенситных фазовых превращений в объемах матрицы, прилегающих к упрочняющим частицам.

Наличие субмикронных армирующих частиц приводит к изменению формы локальной зоны повреждения, в то время как увеличение относительного количества поврежденных частиц можно определить как образование сдвиговых мезокрекин в объеме композита.

Представленный в данной работе подход моделирования может быть использован для определения динамических характеристик керамических композитов до ударных нагрузок 1000 м/с. При увеличении скорости нагружения, для достиже-

ния адекватной работы расчетной схемы, необходимо ввести дополнительные уравнения релаксации, учитывающие образование и накопление повреждений с течением времени. Эта нетривиальная задача требует дополнительных теоретических и экспериментальных исследований композитов, полученных с помощью аддитивных технологий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yin Q., Zhu B., Zeng H. Microstructure, Property and Processing of Functional Ceramics. Metallurgical Industry Press, and Springer: Shanghai, China, 2009.
2. Promakhov V.V., Zhukov I.A., Vorozhtsov S.A., Zhukov A.S., Vorozhtsov A.B. Thermal shock-resistant ceramic composites based on zirconium dioxide // *Refractories and Industrial Ceramics*. 2016. V. 56. No. 6. P. 610–614. DOI: 10.1007/s11148-016-9898-5.
3. Korobnikov M.V., Kulkov S.N. Structure and properties of ZTA composites for joint replacement // *AIP Conf. Proc.* 2017. V. 1882. No. 020035. DOI: 10.1063/1.5001614.
4. Evans A.G., Cannon R.M. Overview no. 48: Toughening of brittle solids by martensitic transformations // *Acta Metall.* 1986. V. 34. No. 5. P. 761–800.
5. Hannink R.H.J., Kelly P.M., Muddle B.C. Transformation toughening in zirconia-containing ceramics // *J. Am. Ceram. Soc.* 2000. V. 83. No. 3. P. 461–487. DOI: 10.1111/j.1151-2916.2000.tb01221.x.
6. Промахов В.В., Жуков А.С., Ворожцов А.Б., Шульц Н.А., Ковальчук С.В., Кожевников С.В., Олисов А.В., Клименко В.А. Особенности структуры и механических свойств керамики, полученной по аддитивной технологии // *Изв. вузов. Физика*. 2019. Т. 62. № 5. С. 132–137. DOI: 10.17223/00213411/62/5/132.
7. Diaz O.G., Luna G.G., Liao Z., Axinte D. The new challenges of machining ceramic matrix composites (CMCs): Review of surface integrity // *Int. J. Mach. Tools Manuf.* 2019. V. 139. P. 24–36. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2019.01.003.
8. Промахов В.В., Савиных А.С., Дубкова Я.А., Шульц Н.А., Жуков А.С., Разоренов С.В. Динамическая прочность керамических материалов на основе ZrO_2 , полученных по аддитивной технологии // *Письма в журнал технической физики*. 2019. Т. 45. № 19. С. 28–32. DOI: 10.21883/PJTF.2019.19.48314.17926.
9. Promakhov V., Zhukov A., Dubkova Y., Zhukov I., Kovalchuk S., Zhukova T., Olishov A., Klimenko V., Savkina N. Structure and properties of ZrO_2 -20% Al_2O_3 ceramic composites obtained using additive technologies // *Materials*. 2018. V. 11. 2361. DOI: 10.3390/ma1122361.
10. Cui H., Hensleigh R., Chen H., Zheng X. Additive manufacturing and size-dependent mechanical properties of three-dimensional microarchitected, high-temperature ceramic metamaterial // *J. Mater. Res.* 2018. V. 33. P. 350–371. DOI: 10.1557/jmr.2018.11.
11. Chen Z., Song X., Lei L., Chen X., Fei C., Chiu C.T., Qian X., Ma T., Yang Y., Shung K., et al. 3D printing of piezoelectric element for energy focusing and ultrasonic sensing // *Nano Energy*. 2016. V. 27. P. 78–86. DOI: 10.1016/j.nanoen.2016.06.048.
12. Babaee S., Shim J., Weaver J.C., Chen E.R., Patel N., Bertoldi K. 3D soft metamaterials with negative Poisson's ratio // *Adv. Mater.* 2013. V. 25. P. 5044–5049. DOI: 10.1002/adma.201301986.
13. Cox S.C., Thornby J.A., Gibbons G.J., Williams M.A., Mallick K.K. 3D printing of porous hydroxyapatite scaffolds intended for use in bone tissue engineering applications // *Mater. Sci. Eng.* 2015. V. 47. P. 237–247. DOI: 10.1016/j.msec.2014.11.024.
14. Basu B., Vleugels J., Van Der Biest O. Transformation behavior of tetragonal zirconia: role of dopant content and distribution // *Mater. Sci. and Eng. A*. 2004. V. 366. P. 338–347. DOI: 10.1016/j.msea.2003.08.063.
15. Skripnyak V. Mechanical behavior of nanostructured and ultrafine-grained materials under shock wave loadings. experimental data and results of computer simulation // *AIP Conf. Proc.* 2012. V. 1426. P. 965–970. DOI: 10.1063/1.3686438.

16. *Tai Y.S., Tang C.C.* Numerical simulation: The dynamic behavior of reinforced concrete plates under normal impact // *Theor. Appl. Fract. Mec.* 2006. V. 45. No. 2. P. 117–127. DOI: 10.1016/j.tafmec.2006.02.007.
17. *Panteki E., Máca P., Häussler-Combe U.* Finite element analysis of dynamic concrete-to-rebar bond ex-periments in the push-in configuration // *Int. J. Impact. Eng.* 2017. V. 106. P. 155–170. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2017.03.016
18. *Potyondy D.O., Cundall P.A.* A bonded-particle model for rock // *Int. J. Rock Mech Min Sci.* 2004. V. 41. P. 1329–1364. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2004.09.011.
19. *Jing L., Stephansson O.* Fundamentals of discrete element method for rock engineering: theory and applications. Elsevier, 2007. 562 p.
20. *Kuznetsov V.P., Tarasov S.Yu., Dmitriev A.I.* Nanostructuring burnishing and subsurface shear instability // *Journal of Materials Processing Technology.* 2015. V. 217. P. 327–335. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2014.11.023.
21. *Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М.* Модель хрупкого разрушения материалов при сжатии // *Вестник Пермского государственного технического университета. Механика.* 2009. № 17. С. 45–57.
22. *Wong T.-f., David C., Zhu W.* The transition from brittle faulting to cataclastic flow in porous sandstones // *J. Geophys. Res.* 1997. V. 102. P. 3009–3025. DOI: 10.1029/96jb03281.
23. *Wong T.-f., Baud P.* The brittle-ductile transition in porous rock: A review // *J. Struct. Geol.* 2012. V. 44. P. 25–53. DOI: 10.1016/j.jsg.2012.07.010.
24. *Стефанов Ю.П.* Моделирование поведения консолидированных и высокопористых геологических сред в условиях сжатия // *Вестник Пермского государственного технического университета. Математическое моделирование систем и процессов.* 2007. № 15. С. 156–169.
25. *Walton G., Hedayat A., Kim E., et al.* Post-yield strength and dilatancy evolution across the brittle-ductile transition in indiana limestone // *Rock Mech Rock Eng.* 2017. V. 50. P. 1–20. DOI: 10.1007/s00603-017-1195-1.
26. *Johnson G.R., Holmquist T.J.* An improved computational constitutive model for brittle materials // *High Pressure Science and Technology. AIP Conference Proceedings.* 1993. V. 309. P. 981–984. DOI: 10.1063/1.46199.
27. *Cronin D.S., Bui K., Kaufman. C.* Implementation and validation of the Johnson-Holmquist ceramic material model in LS-DYNA // *4th European LS-DYNA Users conference. D-I-47-60, Ulm, Germany,* 2003.
28. *Guimaraes F.A.T., Silva K.L., Trombini V., et. al.* Correlation between microstructure and mechanical properties of $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ nanocomposites // *Ceramic International.* 2009. V. 35. P. 741–745. DOI: 10.1016/j.ceramint.2008.02.002
29. *Tuan W.H., Chen R.Z., Wang T.C., et. al.* Mechanical properties of $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ composites // *J. European Ceramic Society.* 2002. V. 22. P. 2827–2833. DOI: 10.1016/s0955-2219(02)00043-2.
30. *Gust W.H., Royce E.B.* Dynamic yield strengths of B_4C , BeO and Al_2O_3 ceramics // *J. Appl. Phys.* 1971. V. 42. P. 276–295. DOI: 10.1063/1.1659584.
31. *Gust W.H., Holt A.C., Royce E.B.* Dynamic yield, compressional, and elastic parameters for several lightweight intermetallic compounds // *J. Appl. Phys.* 1973. V. 44. P. 550–560. DOI: 10.1063/1.1662224.
32. *Batsanov S.S.* Effects of explosions on materials: Modification and synthesis under high-pressure shock compression. N.Y.: Springer, 1994.
33. *Fried L.E., Howard W.M., Souers P.C.* A new equation of state library for high pressure thermochemistry // *Twelfth Symposium (International) on Detonation. Office of Naval Research. San Diego,* 2002. P. 567–575.
34. *Жуков И.А., Гаркушкин Г.В., Ворожцов С.А., Хрусталеv А.П., Разоренов С.В., Кветинская А.В., Промахов В.В., Жуков А.С.* Особенности механических характеристик композитов $\text{Al-Al}_2\text{O}_3$, полученных взрывом, при ударно-волновом деформировании // *Изв. вузов. Физика.* 2015. Т. 58. № 9. С. 141–144.
35. *Casellas D., Nagl M.M., Llanes L., Anglada M.* Fracture toughness of alumina and ZTA ceramics; microstructural coarsening effect // *Journal of Materials Processing Technology.* 2003. V. 143. P. 148–152. DOI: 10.1016/s0924-0136(03)00396-0.

36. Tuan W.H., Chen R.Z., Wang T.C., et. al. Mechanical properties of $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ composites // Journal of European Ceramic Society. 2002. V. 22. P. 2827–2833. DOI: 10.1016/s0955-2219(02)00043-2.
37. Korobnikov M.V., Kulkov S.N. Simulation of fracture of the bone implant with the porous structure // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1760. No. 020033. DOI: 10.1063/1.4960252.
38. Rao P.G., Iwasa M., Tanaka T., et. al. Preparation and mechanical properties of Al_2O_3 -15% ZrO_2 composites // Scripta Materialia. 2003. V. 48. P. 437–441. DOI: 10.1016/s1359-6462(02)00440-2.
39. Grigoriev A.S., Shilko E.V., Skripnyak V.A., Smolin A.Yu., Psakhie S.G., Bragov A.M., Lomunov A.K., Igumnov L.A. The numerical study of fracture and strength characteristics of heterogeneous brittle materials under dynamic loading // AIP Conf. Proc. 2014. V. 1623. P. 175–178. DOI: 10.1063/1.4898911.
40. Korobnikov M.V., Kulkov S.N., Nayamark O.B., Khorechko U.V., Rochina A.V. Deformation and Damage Accumulation in a Ceramic Composite under Dynamic Loading // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. V. 112. No. 012044. DOI: 10.1088/1757-899x/112/1/012044.
41. Lloberas-Valls, O., Huespe A.E., Oliver J., Dias I.F. Strain injection techniques in dynamic fracture modelling // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2016. V. 308. P. 499–534. DOI: 10.1016/j.cma.2016.05.023.
42. Yue K., Lee H.P., Olson J.E., Schultz R.A. Apparent fracture toughness for LEFM applications in hydraulic fracture modelling // Engineering Fracture Mechanics. 2020. V. 230. No. 106984. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2020.106984.

Статья поступила 24.02.2020

Promakhov V.V., Korobnikov M.V., Schultz N.A., Zhukov A.S., Olisov A.V., Bakhmat V.R., Dronov F.Yu., Myalkovskiy I.S. (2021) MODELING THE ACCUMULATION OF DAMAGES AND THE FAILURE OF CERAMIC COMPOSITES Al_2O_3 - ZrO_2 , OBTAINED BY ADDITIVE TECHNOLOGIES, UNDER HIGH-SPEED LOADING. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 140–157

DOI 10.17223/19988621/72/12

Keywords: ceramic materials, structure of composite materials, additive technology, dynamic loading, transformation hardening.

Functional ceramic composite materials are widely used in industry due to their high strength, hardness, high operating temperature, and chemical inertness. Among the most famous types of functional ceramics are the ceramic composites based on the Al_2O_3 -20% ZrO_2 system. In this work, the effect of the loading rate on the crack resistance is studied as well as the effect of the crack resistance of ceramic composites Al_2O_3 -20% t-ZrO_2 with a mass content of submicron t-ZrO_2 particles on the high-speed compression of model specimens in shock waves and on the high-speed tension in the region of interaction of unloading waves. It is established that nonlinear effects of the mechanical behavior of ceramic composites ZrO_2 - Al_2O_3 with a transformation-hardened matrix obtained by additive technologies are manifested at shock loading amplitudes close to or exceeding the Hugoniot elastic limit. Nonlinear effects under intense dynamic impacts on the considered composites are associated with the processes of self-organization of deformation regimes at a mesoscopic level, as well as with the occurrence of martensitic phase transformations in the matrix volumes, which are adjacent to strengthening particles. The modeling approach presented in this work can be used to determine the dynamic characteristics of ceramic composites up to shock loads of 1000 m/s.

Financial support. This work was performed with the financial support of a grant from the Russian Science Foundation (Project No. 18-79-00153).

Vladimir V. PROMAKHOV (Candidate of Technical Sciences, Vice Director of the Scientific and Educational Center "Additive Technologies", Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vvpromakhov@mail.ru

Maksim V. KOROBEKOV (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of the Scientific and Educational Center "Additive Technologies", Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

Nikita A. SCHULZ (Research Engineer of the Scientific and Educational Center "Additive Technologies", Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

Andrey V. OLISOV (Director of Scientific and Educational Center "Additive Technologies", Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

Aleksandr S. ZHUKOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

Vladislav R. BAKHMAT (Laboratory Assistant of the Scientific and Educational Center "Additive Technologies", Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

Filipp Yu. DRONOV (Laboratory Assistant of the Scientific and Educational Center "Additive Technologies", Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

Igor' S. MYALKOVSKIY (Laboratory Assistant of the Scientific and Educational Center "Additive Technologies", Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

REFERENCES

1. Yin Q., Zhu B., Zeng H. (2009) *Microstructure, Property and Processing of Functional Ceramics*. Shanghai: Metallurgical Industry Press; Springer.
2. Promakhov V.V., Zhukov I.A., Vorozhtsov S.A., Zhukov A.S., Vorozhtsov A.B. (2016) Thermal shock-resistant ceramic composites based on zirconium dioxide. *Refractories and Industrial Ceramics*. 56(6). pp. 610–614. DOI: 10.1007/s11148-016-9898-5.
3. Korobekov M.V., Kulkov S.N. (2017) Structure and properties of ZTA composites for joint replacement. *AIP Conference Proceedings*. 1882. Article 020035. DOI: 10.1063/1.5001614.
4. Evans A.G., Cannon R.M. (1986) Overview no. 48: Toughening of brittle solids by martensitic transformations. *Acta Metallurgica*. 34(5). pp. 761–800. DOI: 10.1016/0001-6160(86)90052-0.
5. Hannink R.H.J., Kelly P.M., Muddle B.C. (2000) Transformation toughening in zirconia-containing ceramics. *Journal of the American Ceramic Society*. 83(3). pp. 461–487. DOI: 10.1111/j.1151-2916.2000.tb01221.x.
6. Promakhov V.V., Zhukov A.S., Vorozhtsov A.B., Schults N.A., Kovalchuk S.V., Kozhevnikov S.V., Olisov A.V., Klimenko V.A. (2019) Structure and mechanical properties of 3D-printed ceramic specimens. *Russian Physics Journal*. 62. pp. 876–881. DOI: 10.1007/s11182-019-01790-0.
7. Diaz O.G., Luna G.G., Liao Z., Axinte D. (2019) The new challenges of machining ceramic matrix composites (CMCs): Review of surface integrity. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. 139. pp. 24–36. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2019.01.003.
8. Promakhov V.V., Savinykh A.S., Dubkova Y.A., Shul'ts N.A., Zhukov A.S., Razorenov S.V. (2019) The dynamic strength of zro2-based ceramic materials manufactured by additive technology. *Technical Physics Letters*. 45(10). pp. 984–988. DOI: 10.21883/PJTF.2019.19.48314.17926.
9. Promakhov V., Zhukov A., Dubkova Y., Zhukov I., Kovalchuk S., Zhukova T., Olisov A., Klimenko V., Savkina N. (2018) Structure and properties of ZrO_2 –20% Al_2O_3 ceramic composites obtained using additive technologies. *Materials*. 11. Article 2361. DOI: 10.3390/ma1122361.

10. Cui H., Hensleigh R., Chen H., Zheng X. (2018) Additive manufacturing and size-dependent mechanical properties of three-dimensional microarchitected, high-temperature ceramic metamaterial. *Journal of Materials Research*. 33. pp. 350–371. DOI: 10.1557/jmr.2018.11.
11. Chen Z., Song X., Lei L., Chen X., Fei C., Chiu C.T., Qian X., Ma T., Yang Y., Shung K., Chen Y., Zhou Q. (2016) 3D printing of piezoelectric element for energy focusing and ultrasonic sensing. *Nano Energy*. 27. pp. 78–86. DOI: 10.1016/j.nanoen.2016.06.048.
12. Babae S., Shim J., Weaver J.C., Chen E.R., Patel N., Bertoldi K. (2013) 3D soft metamaterials with negative Poisson's ratio. *Advanced Materials*. 25. pp. 5044–5049. DOI: 10.1002/adma.201301986.
13. Cox S.C., Thornby J.A., Gibbons G.J., Williams M.A., Mallick K.K. (2015) 3D printing of porous hydroxyapatite scaffolds intended for use in bone tissue engineering applications. *Materials Science and Engineering: A*. 47. pp. 237–247. DOI: 10.1016/j.msec.2014.11.024.
14. Basu B., Vleugels J., Van Der Biest O. (2004) Transformation behavior of tetragonal zirconia: role of dopant content and distribution. *Materials Science and Engineering: A*. 366. pp. 338–347. DOI: 10.1016/j.msea.2003.08.063.
15. Skripnyak V. (2012) Mechanical behavior of nanostructured and ultrafine-grained materials under shock wave loadings. experimental data and results of computer simulation. *AIP Conference Proceedings*. 1426. pp. 965–970. DOI: 10.1063/1.3686438.
16. Tai Y.S., Tang C.C. (2006) Numerical simulation: the dynamic behavior of reinforced concrete plates under normal impact. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 45(2). pp. 117–127. DOI: 10.1016/j.tafmec.2006.02.007.
17. Panteki E., Máca P., Häussler-Combe U. (2017) Finite element analysis of dynamic concrete-to-rebar bond ex-periments in the push-in configuration. *International Journal of Impact Engineering*. 106. pp. 155–170. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2017.03.016.
18. Potyondy D.O., Cundall P.A. (2004) A bonded-particle model for rock. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 41. pp. 1329–1364. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2004.09.011.
19. Jing L., Stephansson O. (2007) *Fundamentals of Discrete Element Method for Rock Engineering: Theory and Applications*. Elsevier.
20. Kuznetsov V.P., Tarasov S.Yu., Dmitriev A.I. (2015) Nanostructuring burnishing and subsurface shear instability. *Journal of Materials Processing Technology*. 217. pp. 327–335. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2014.11.023.
21. Goldstein R.V., Osipenko N.M. (2009) Model' khрупкого razrusheniya pri szhati [Compression brittle fracture model]. *Vestnik Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 17. pp. 45–57.
22. Wong T.-f., David C., Zhu W. (1997) The transition from brittle faulting to cataclastic flow in porous sandstones. *Journal of Geophysical Research*. 102. pp. 3009–3025. DOI: 10.1029/96jb03281.
23. Wong T.-f., Baud P. (2012) The brittle-ductile transition in porous rock: a review. *Journal of Structural Geology*. 44. pp. 25–53. DOI: 10.1016/j.jsg.2012.07.010.
24. Stefanov Yu.P. (2007) Modelirovanie povedeniya konsolidirovannykh i vysokoporiistyykh geologicheskikh sred v usloviyakh szhatiya [Modeling the behavior of consolidated and highly porous geological media under compression]. *Vestnik Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Matematicheskoye modelirovaniye sistem i protsessov – PNRPU Mechanics Bulletin*. 15. pp. 156–169.
25. Walton G., Hedayat A., Kim E., Labrie D. (2017) Post-yield strength and dilatancy evolution across the brittle-ductile transition in indian limestone. *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 50. pp. 1–20. DOI: 10.1007/s00603-017-1195-1.
26. Johnson G.R., Holmquist T.J. (1993) An improved computational constitutive model for brittle materials high pressure science and technology. *AIP Conference Proceedings*. 309. pp. 981–984. DOI: 10.1063/1.46199.
27. Cronin D.S., Bui K., Kaufman C. (2003) Implementation and validation of the Johnson-Holmquist ceramic material model in LS-Dyna. *Proceedings of the 4th European LS-DYNA Users Conference. D-I-47-60, Ulm, Germany*.

28. Guimaraes F.A.T., Silva K.L., Trombini V., Pierri J.J., Rodrigues J.A., Tomasi R., Pallone E.M. (2009) Correlation between microstructure and mechanical properties of $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ nanocomposites. *Ceramic International*. 35. pp. 741–745. DOI: 10.1016/j.ceramint.2008.02.002.
29. Tuan W.H., Chen R.Z., Wang T.C., Cheng C.H., Kuo P.S. (2002) Mechanical properties of $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ composites. *Journal European Ceramic Society*. 22. pp. 2827–2833. DOI: 10.1016/S0955-2219(02)00043-2.
30. Gust W.H., Royce E.B. (1971) Dynamic yield strengths of B_4C , BeO and Al_2O_3 ceramics. *Journal of Applied Physics*. 42. pp. 276–295. DOI: 10.1063/1.1659584.
31. Gust W.H., Holt A.C., Royce E.B. Dynamic (1973) Yield, compressional, and elastic parameters for several lightweight intermetallic compounds. *Journal of Applied Physics*. 44. pp. 550–560. DOI: 10.1063/1.1662224.
32. Batsanov S.S. (1994) *Effects of Explosions on Materials: Modification and Synthesis under High-Pressure Shock Compression*. New York: Springer.
33. Fried L.E., Howard W.M., Souers P.C. (2002) A new equation of state library for high pressure thermochemistry. *Proceedings of the 12th Symposium (International) on Detonation. Office of Naval Research, San Diego*. pp. 567–575.
34. Zhukov I.A., Garkushin G.V., Vorozhtsov S.A., Khrustalyov A.P., Razorenov S.V., Kvetinskaya A.V., Zhukov A.S. (2016) Special features of the mechanical characteristics of Al– Al_2O_3 composites produced by explosive compaction of powders under shock-wave deformation. *Russian Physics Journal*. 58(9). pp. 1358–1361. DOI: 10.1007/s11182-016-0655-5.
35. Casellas D., Nagl M.M., Llanes L., Anglada M. (2003) Fracture toughness of alumina and ZTA ceramics; microstructural coarsening effect. *Journal of Materials Processing Technology*. 143. pp. 148–152. DOI: 10.1016/S0924-0136(03)00396-0.
36. Tuan W.H., Chen R.Z., Wang T.C., Cheng C.H., Kuo P.S. (2002) Mechanical properties of $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ composites. *Journal of European Ceramic Society*. 22. pp. 2827–2833. DOI: 10.1016/S0955-2219(02)00043-2.
37. Korobnikov M.V., Kulkov S.N. (2016) Simulation of fracture of the bone implant with the porous structure. *AIP Conference Proceedings*. 1760. Article 020033. DOI: 10.1063/1.4960252.
38. Rao P.G., Iwasa M., Tanaka T., Komdoh I., Inoue T. (2003) Preparation and mechanical properties of Al_2O_3 -15% ZrO_2 composites. *Scripta Materialia*. 48. pp. 437–441. DOI: 10.1016/S1359-6462(02)00440-2.
39. Grigoriev A.S., Shilko E.V., Skripnyak V.A., Smolin A.Yu., Psakhie S.G., Bragov A.M., Lomunov A.K., Igumnov L.A. (2014) The numerical study of fracture and strength characteristics of heterogeneous brittle materials under dynamic loading. *AIP Conference Proceedings*. 1623. pp. 175–178. DOI: 10.1016/S1359-6462(02)00440-2.
40. Korobnikov M.V., Kulkov S.N., Nayamark O.B., Khorechko U.V., Rochina A.V. (2016) Deformation and damage accumulation in a ceramic composite under dynamic loading. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 112. Article 012044. DOI: 10.1088/1757-899X/112/1/012044.
41. Lloberas-Valls O., Huespe A.E., Oliver J., Dias I.F. (2016) Strain injection techniques in dynamic fracture modelling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 308. pp. 499–534. DOI: 10.1016/j.cma.2016.05.023.
42. Yue K., Lee H.P., Olson J.E., Schultz R.A. (2020) Apparent fracture toughness for LEFM applications in hydraulic fracture modelling. *Engineering Fracture Mechanics*. 230. Article 106984. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2020.106984.

Received: December 24, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АККЕРМАН Вячеслав Борисович – кандидат физико-математических наук, профессор отделения машиностроения и аэрокосмической техники (Department of Mechanical and Aerospace Engineering) Университета Западной Вирджинии (West Virginia University), Моргантаун, Соединенные Штаты Америки. E-mail: Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu

АЛБАГАЧИЕВ Али Юсупович – доктор технических наук, профессор, зав. отделом ИМАШ РАН им. А.А.Благодирова, г. Москва, Россия. E-mail: albagachiev@yandex.ru

БАХМАТ Владислав Романович – студент физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: schulznikita97@gmail.com

ВОРОПАЕВА Ирина Георгиевна – аспирантка кафедры математической физики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: irgev@yandex.ru

ГАМЗАЕВ Ханлар Мехвали – доктор технических наук, профессор кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности, г. Баку, Азербайджан. E-mail: xan.h@rambler.ru

ДАНЕЙКО Ольга Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Томского государственного архитектурно-строительного университета, старший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории высокоэнергетических и специальных материалов Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: olya_dan@mail.ru

ДРОНОВ Филипп Юрьевич – студент физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: schulznikita97@gmail.com

ЕВСЕЕВ Николай Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: evseevns@gmail.com

ЖУКОВ Александр Степанович – кандидат физико-математических наук, профессор физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: schulznikita97@gmail.com

ЖУКОВ Илья Александрович – кандидат технических наук, заведующий лабораторией нанотехнологий металлургии Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: gofra930@gmail.com

ЗАЙЦЕВ Максим Леонидович – помощник ИП по грузоперевозкам, г. Москва, Россия. E-mail: mlzaytsev@gmail.com, mlzaytsev@mail.ru

ЗЕРНОВ Евгений Владимирович – кандидат технических наук, доцент Российского технологического университета РТУ-МИРЭА, г. Москва, Россия. E-mail: zernov1935@mail.ru

ИВАНОВ Дмитрий Юрьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Академии базовой подготовки Российского университета транспорта, г. Москва, Россия. E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

КОВАЛЕВСКАЯ Татьяна Андреевна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики Томского государственного архитектурно-строительного университета, старший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории высокоэнергетических и специальных материалов Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: takov47@mail.ru

КОЗУЛИН Александр Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: kozulyn@ftf.tsu.ru

КОРОБЕНКОВ Максим Викторович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научно-образовательного центра «Аддитивные технологии» Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: schulznikita97@gmail.com

КРАЙНОВ Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической физики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

ЛИПАНОВ Алексей Матвеевич – доктор технических наук, академик РАН, главный научный сотрудник Института прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия. E-mail: aml35@yandex.ru

ЛУТЪЯНОВ Александр Владимирович – кандидат технических наук, доцент Российского технологического университета РТУ-МИРЭА, г. Москва, Россия. E-mail: alou99@mail.ru

МАДАЛИЕВ Муродил Эркинжанович – научный сотрудник лаборатории жидкости и газа Института механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: madaliev.me2019@mail.ru

МАЛИКОВ Зафар Маматкулович – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории жидкости и газа Института механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: malikov.z62@mail.ru

МАТВИЕНКО Олег Викторович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики Томского государственного архитектурно-строительного университета, профессор кафедры физической и вычислительной механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: matvolegv@mail.ru

МИНЬКОВ Леонид Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

МОИСЕЕВА Ксения Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

МОИСЕЕНКО Анатолий Михайлович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин Орловского филиала Воронежского экономико-правового института, г. Орел, Россия. E-mail: puare54@yandex.ru

ОЛИСОВ Андрей Витальевич – директор научно-образовательного центра «Аддитивные технологии» Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: schulznikita97@gmail.com

ПОПОВ Игорь Павлович – старший преподаватель кафедры технологии машиностроения, металлорежущих станков и инструментов Курганского государственного университета, г. Курган, Россия. E-mail: ip.popov@yandex.ru

ПОРЯЗОВ Василий Андреевич – доцент кафедры математической физики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: porjazov@mail.ru

ПРОМАХОВ Владимир Васильевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник научно-образовательного центра «Аддитивные технологии» Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: vvpromakhov@mail.ru

ШРАГЕР Эрнст Рафаилович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: sher@ftf.tsu.ru

ШУЛЬЦ Никита Александрович – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: schulznikita97@gmail.com

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634034, г. Томск, ул. Студенческая, 4

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 24.08.2021. Выпуск в свет 30.08.2021.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 12.9. Уч.-изд. л. 14.45. Тираж 250 экз. Заказ № 15. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 4765.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru