

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2014

№ 1(27)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

Глазунов А.А., д-р физ.-мат. наук, проф. (председатель); Гулько С.П., д-р физ.-мат. наук, проф. (зам. председателя); Лазарева Е.Г., канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. секретарь по разделу математики); Александров И.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Берцун В.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.; Биматов В.И., д-р физ.-мат. наук, проф.; Бубенчиков А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Васенин И.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Гришин А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Ищенко А.Н., д-р физ.-мат. наук, проф.; Конев В.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Крайнов А.Ю., д-р физ.-мат. наук; Крылов П.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Панько С.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Пергаменщиков С.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Сипачёва О.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Скрипняк В.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Старченко А.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Г.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Э.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Щербаков Н.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Хайруллина В.Ю. (отв. секретарь по разделу механики); Cauty R., prof.

Научный журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» был выделен в самостоятельное периодическое издание из общенаучного журнала «Вестник Томского государственного университета» в 2007 г. Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия (свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-30658 от 20 декабря 2007 г.), ему присвоен международный стандартный номер сериального издания (ISSN 1998-8621). Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, его подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России».

«Вестник ТГУ. Математика и механика» входит в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе <http://elibrary.ru>, а также в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Кроме того, все номера журнала присутствуют и обрабатываются на общероссийском математическом портале <http://Math-Net.ru>.

Адрес редакции:

634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

Оригинал-макет подготовлен

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 17.02.2014.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 10,16. Уч.-изд. л. 11,38. Тираж 300 экз. Заказ № 4.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Александров А.И., Александрова С.Я. Математические модели многостадийных химических реакций первого порядка.....	5
Богданова Р.А. Классификация двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий ранга 3	11
Малютина А.Н., Елизарова М.А. Об эквивалентности аналитического и геометрического определений отображений с s -усредненной характеристикой	25
Рахмелевич И.В. Об уравнениях математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных	42
Чуруксаева В.В., Михайлов М.Д. Численное моделирование потока жидкости над рельефом дна.....	51

МЕХАНИКА

Бахтеев О.А., Лысиков А.В., Михеев Е.Н. Моделирование роста зерен стехиометрического диоксида урана при изотермической выдержке.....	61
Ершов И.В. Линейная устойчивость невязкого сдвигового течения термически неравновесного молекулярного газа	71
Мутовина Н.В., Климов Ю.И., Смолин А.Ю. Взаимодействие щелевого гидроотрывного рабочего органа с породным целиком	82
Осипенко М.А. Контактная задача об изгибе двухлистовой рессоры с листами переменной толщины	90
Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Нестандартные задачи для однородных элементов конструкций с особенностями в виде клиньев в условиях плоской задачи.....	95
Савкина Н.В., Биматов В.И., Христенко Ю.Ф. Расчет обтекания и аэродинамических характеристик острого конуса на основе решения прямой задачи нелинейной аэробаллистики.....	110
Севастьянов Н.Н. Управление ориентацией космических аппаратов «Ямал-200» с использованием сигналов, ретранслируемых бортовым ретрансляционным комплексом	117
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	125

CONTENTS

MATHEMATICS

Aleksandrov A.I., Aleksandrova S.Ya. Mathematical models of multistage chemical first order reactions.....	5
Bogdanova R.A. Classification of two-metric phenomenologically symmetric two-dimensional geometries of rang 3	11
Malyutina A.N., Elizarova M.A. On equivalence of the analytical and geometrical definitions of mappings with an s-averaged characteristic	25
Rakhmelevich I.V. On equations of mathematical physics containing multi-homogeneous functions of derivatives.....	42
Churuksaeva V.V., Mikhailov M.D. Numerical modelling of the fluid flow above the bottom topography	51

MECHANICS

Bakhteev O.A., Lysikov A.V., Mikheev E.N. Modeling of stoichiometric uranium dioxide grain growth during isothermal sintering	61
Ershov I.V. The linear stability of an inviscid shear flow of a thermally non-equilibrium molecular gas.....	71
Mutovina N.V., Klimov Yu.I., Smolin A.Yu. Interacting of a fissure hydrodetaching working tool with a rock crunch.....	82
Osipenko M.A. The contact problem for bending of a two-leaf spring with variable thicknesses of leaves.....	90
Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Non-standard problems of homogeneous structural elements with wedge shape features in the plane case.....	95
Savkina N.V, Bimatov V.I., Khristenko Yu.F. calculation of the flow and aerodynamic characteristics of a sharp cone based on the direct problem of nonlinear aeroballistics.	110
Sevast'yanov N.N. Yamal-200 spacecrafts attitude control by the signals of onboard repeater complex	117
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	125

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6, 541.124/128

А.И. Александров, С.Я. Александрова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МНОГОСТАДИЙНЫХ
ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассматриваются во взаимной связи статические и динамические математические модели химических реакций первого порядка.

Ключевые слова: *скорость химической реакции, константа скорости, кинетическая матрица, граф химической реакции, оригинал и изображение по Лапласу.*

Обозначим через $x_1(t), \dots, x_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, молярные концентрации веществ $A_1, \dots, A_n$ соответственно в момент времени t в гомогенной изотермической химической реакции, идущей при постоянном объёме. Изменения концентраций $\frac{dx_i(t)}{dt}$, $i = 1, \dots, n$, и концентрации веществ A_i связаны функциональными соотношениями вида

$$F_i \left(x_1, \dots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

которые при известных условиях приводят к системе дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

с определёнными свойствами функций, стоящих в правых частях уравнений и характеризующих тип химической реакции.

Если $f_i(x_1, \dots, x_n)$ – линейная однородная функция, то есть

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n,$$

где a_{ij} – действительные числа, то о реакции говорят, что она имеет первый порядок. Элементы кинетической матрицы

$$K_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

для реальных химических реакций удовлетворяют условиям, связанным с общими свойствами отдельных типов реакций. Числа a_{ij} обычно являются линейной комбинацией констант скоростей $k_{st} \geq 0$, $s, t = 1, \dots, n$, химических реакций.

При $n = 1$ элемент a_{11} отрицателен, поскольку концентрация $x_1(t)$, даваемая формулой $x_1(t) = x_1(0)e^{-a_{11}t}$, $x_1(0) > 0$, по смыслу задачи ограничена. Решение $x_1(t) = x_1(0)e^{-kt}$, $k > 0$, относится, в частности, к процессу радиоактивного распада, а постоянная k – константа скорости реакции – связана с периодом T полу-распада формулой $T = \frac{1}{k} \ln 2$.

При $n = 2$ в матрице K_2 , соответствующей обратимой реакции, элементы a_{11} , a_{22} отрицательны. Примем $x_1(t)$, $x_2(t)$ за оригиналы и обозначим через $X_1(p)$, $X_2(p)$ соответственно их изображения по Лапласу. Системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2,\end{aligned}$$

с начальными условиями $x_1(0) = x_1^0 > 0$, $x_2(0) = x_2^0 \geq 0$, соответствует операторная система

$$\begin{aligned}X_1 p - x_1^0 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2, \\ X_2 p - x_2^0 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2\end{aligned}$$

из двух линейных алгебраических уравнений. Её решение имеет вид

$$X_1 = \frac{x_1^0 p + a_1}{p^2 + 2sp + \Delta}, \quad X_2 = \frac{x_2^0 p + a_2}{p^2 + 2sp + \Delta},$$

где

$$\begin{aligned}\Delta &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \quad 2s = -a_{11} - a_{22}, \\ a_1 &= a_{12}x_2^0 - a_{22}x_1^0, \quad a_2 = a_{21}x_1^0 - a_{11}x_2^0.\end{aligned}$$

Многочлен $p^2 + 2sp + \Delta$ имеет нули $p_{1,2} = -s \pm \sqrt{s^2 - \Delta}$ и, следовательно, будет устойчивым, только если $\Delta > 0$. В противном случае $x_1^2(t) + x_2^2(t)$ будет неограниченно расти при $t \rightarrow +\infty$.

От операторного решения $X_1(p)$, $X_2(p)$ перейдем к записи соответствующих концентраций

$$x_1(t) \doteq X_1(p), \quad x_2(t) \doteq X_2(p).$$

Пусть $s^2 - \Delta > 0$. Разложение $X_k(p)$, $k = 1, 2$, на сумму простейших дробей имеет вид

$$X_k(p) = \frac{x_k^0 p + a_k}{p^2 + 2sp + \Delta} = \frac{A_k}{p - p_1} + \frac{B_k}{p - p_2}, \quad k = 1, 2,$$

где

$$A_k = \frac{x_k^0 p_1 + a_k}{p_1 - p_2}, \quad B_k = \frac{x_k^0 p_2 + a_k}{p_2 - p_1}.$$

Поскольку $\frac{1}{p - p_k} \doteq e^{p_k t}$, то по свойству линейности $x_k(t) = A_k e^{p_k t} + B_k e^{p_2 t}$ и, следовательно, концентрации $x_1(t), x_2(t)$ меняются по закону изменения линейных комбинаций двух экспонент с отрицательными показателями. Обе концентрации при $s > 0$ стремятся к нулю при неограниченном росте времени.

Пусть $s^2 - \Delta < 0$. Корни $p_{1,2} = -s \pm i\omega$, где $\omega = \sqrt{\Delta - s^2} > 0$, комплексно сопряжённые. Многочлен $p^2 + 2sp + \Delta$ можно представить в виде

$$p^2 + 2sp + \Delta = (p + s)^2 + \omega^2,$$

а изображение $X_k(p)$ представить в форме

$$X_k(p) = \frac{x_k^0(p + s) - x_k^0 s + a_k}{(p + s)^2 + \omega^2},$$

показывающей, что оригиналом $x_k(t) \doteq X(p)$ является функция

$$x_k(t) = e^{-st} \left[x_k^0 \sin \omega t + (a_k - x_k^0 s) \cos \omega t \right].$$

Пусть $u_k = \sqrt{x_k^{0^2} + (a_k - x_k^0 s)^2}$. Определим угол α_k , $0 \leq \alpha_k < 2\pi$ как решение системы

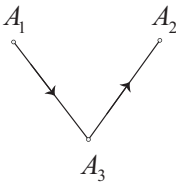
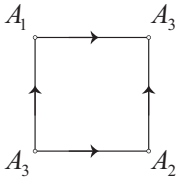
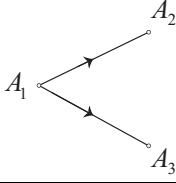
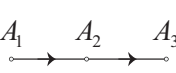
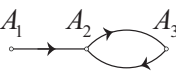
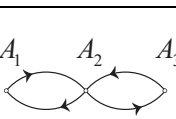
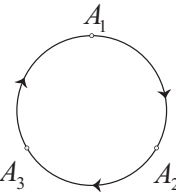
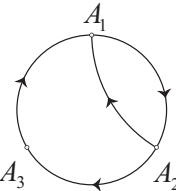
$$\cos \alpha_k = \frac{x_k^0}{u_k}, \quad \sin \alpha_k = \frac{a_k - x_k^0 s}{u_k}.$$

Эти обозначения позволяют представить $x_k(t)$ как гармоническое колебание $x_k(t) = u_k e^{-st} \sin(\omega t + \alpha_k)$ с периодом $2\pi/\omega$ и с амплитудой, убывающей по закону экспоненты. Химическая реакция идёт с осциллирующим изменением концентраций участвующих в ней веществ.

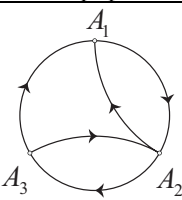
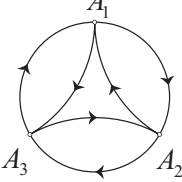
Реакции рассматриваемого типа представимы плоскими графами, каждой вершине которого соответствует одно и только одно участвующее в реакции вещество. Будем обозначать вершину графа, отвечающего веществу A_i , этой же буквой. Непосредственный переход в реакции вещества A_j в A_i на графе изображается проведением стрелки $\overrightarrow{A_j A_i}$, идущей из точки A_j в A_i по ребру, соединяющему их. Поставим в соответствие каждой стрелке $\overrightarrow{A_j A_i}$ константу скорости k_{ji} . Две стрелки не могут иметь общей точки, отличной от вершины графа. Совокупность вершин и стрелок с соответствующими им константами скоростей образует кинетический граф G реакции и вместе с тем даёт статическую математическую модель реакции. Граф может иметь циклы.

В таблице приведены типы реакций первого порядка с участием трёх веществ A_1, A_2, A_3 , графы G этих реакций и их динамические модели, отражающие развитие реакции во времени [1].

Модели трехкомпонентных реакций $\dot{x} = dx/dt$

N	Тип реакции	Граф	Динамическая модель
1	$A_1 + A_2 \xrightarrow{k_1} A_3$		$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1 x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_1 x_2, \\ \dot{x}_3 &= k_1 x_1 x_2.\end{aligned}$
2	$A_1 + A_2 \xrightleftharpoons[k_2]{k_1} A_3$		$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1 x_1 x_2 + k_2 x_3, \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_1 x_2 + k_2 x_3, \\ \dot{x}_3 &= k_1 x_1 x_2 - k_2 x_3.\end{aligned}$
3	$A_1 \xrightarrow{k_1} A_2 + A_3$		$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1 x_1, \\ \dot{x}_2 &= k_1 x_1, \\ \dot{x}_3 &= k_1 x_1.\end{aligned}$
4	$A_1 \xrightarrow{k_{21}} A_2,$ $A_2 \xrightarrow{k_{32}} A_3$		$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_{21} x_1, \\ \dot{x}_2 &= k_{21} x_1 - k_{32} x_2, \\ \dot{x}_3 &= k_{32} x_2.\end{aligned}$
5	$A_1 \xrightarrow{k_{21}} A_2,$ $A_2 \xrightleftharpoons[k_{23}]{k_{32}} A_3$		$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_{21} x_1, \\ \dot{x}_2 &= k_{21} x_1 - k_{32} x_2 + k_{23} x_3, \\ \dot{x}_3 &= k_{32} x_2 - k_{23} x_3.\end{aligned}$
6	$A_1 \xrightleftharpoons[k_{12}]{k_{21}} A_2,$ $A_2 \xrightleftharpoons[k_{23}]{k_{32}} A_3$		$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_{21} x_1 + k_{12} x_2, \\ \dot{x}_2 &= k_{21} x_1 - (k_{32} + k_{12}) x_2 + k_{23} x_3, \\ \dot{x}_3 &= k_{32} x_2 - k_{23} x_3.\end{aligned}$
7	$A_1 \xrightarrow{k_{21}} A_2,$ $A_2 \xrightarrow{k_{32}} A_3,$ $A_3 \xrightarrow{k_{31}} A_1.$		$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_{21} x_1 + k_{13} x_3, \\ \dot{x}_2 &= k_{21} x_1 - k_{32} x_2, \\ \dot{x}_3 &= k_{32} x_2 - k_{13} x_3.\end{aligned}$
8	$A_1 \xrightleftharpoons[k_{12}]{k_{21}} A_2,$ $A_2 \xrightarrow{k_{32}} A_3,$ $A_3 \xrightarrow{k_{13}} A_1.$		$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_{21} x_1 + k_{12} x_2 + k_{13} x_3, \\ \dot{x}_2 &= k_{21} x_1 - (k_{32} + k_{12}) x_2, \\ \dot{x}_3 &= -k_{32} x_2 - k_{12} x_3.\end{aligned}$

Окончание таблицы

N	Тип реакции	Граф	Динамическая модель
9	$A_1 \xrightleftharpoons[k_{12}]{k_{21}} A_2,$ $A_2 \xrightleftharpoons[k_{23}]{k_{32}} A_3,$ $A_3 \xrightleftharpoons[k_{31}]{k_{13}} A_1.$		$\dot{x}_1 = -k_{21}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3,$ $\dot{x}_2 = k_{21}x_1 - (k_{32} + k_{12})x_2 + k_{23}x_3,$ $\dot{x}_3 = k_{32}x_2 - (k_{13} + k_{23})x_3.$
10	$A_1 \xrightleftharpoons[k_{12}]{k_{21}} A_2,$ $A_2 \xrightleftharpoons[k_{23}]{k_{32}} A_3,$ $A_3 \xrightleftharpoons[k_{31}]{k_{13}} A_1.$		$\dot{x}_1 = -(k_{21} + k_{31})x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3,$ $\dot{x}_2 = k_{21}x_1 - (k_{32} + k_{12})x_2 + k_{23}x_3,$ $\dot{x}_3 = k_{31}x_1 + k_{32}x_2 - (k_{13} + k_{23})x_3.$

Решению $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ системы $\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j$, $i = 1, 2, 3$, с начальными условиями $x_i(0) = x_i^0 \geq 0$, принимаемому за оригинал, соответствует решение $X(p) = (X_1(p), X_2(p), X_3(p))$ алгебраической системы уравнений $pX_i - x_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}X_j$ для нахождения изображений по Лапласу $X_i(p) \doteq x_i(t)$, то есть решение системы

$$\begin{aligned} (p - a_{11})X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 &= x_1^0, \\ -a_{21}X_1 + (p - a_{22})X_2 - a_{23}X_3 &= x_2^0, \\ -a_{31}X_1 - a_{32}X_2 + (p - a_{33})X_3 &= x_3^0. \end{aligned}$$

При условии, что все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & p - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & p - a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

третьей степени относительно p лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} p \leq 0$, решение $x(t) \doteq X(p)$ будет ограниченным. Если же хотя бы один корень этого уравнения принадлежит полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, то по крайней мере одна из функций $x_i(t)$ будет неограниченно расти, что противоречит смыслу развития химической реакции. Если уравнение имеет один отрицательный и два комплексно сопряженных корня с отрицательными действительными частями, то концентрации двух веществ будут изменяться по квазигармоническому закону [2].

Для примера реакции типа 10 (таблица) рассмотрим реакцию изомеризации, идущую в разбавленном растворе цимола в толуоле при 0°C , катализируемую хлоридом алюминия.

Установлено [3], что осуществляется обратимый переход орто-цимола в мета-цимол, мета-цимола в пара-цимол, пара-цимола в орто-цимол с относительными по отношению к k_{13} значениями констант скоростей:

$$k_{12} = 1,0, \quad k_{21} = 45,8, \quad k_{23} = 5,5, \quad k_{31} = 19,9, \quad k_{32} = 2,5$$

и поэтому в соответствии с графом 10

$$\begin{aligned} a_{11} &= -k_{21} - k_{31}, & a_{12} &= k_{12}, & a_{13} &= k_{13}, \\ a_{21} &= k_{21}, & a_{22} &= -k_{32} - k_{21}, & a_{23} &= k_{23}, \\ a_{31} &= k_{31}, & a_{32} &= k_{32}, & a_{33} &= -k_{13} - k_{23}. \end{aligned}$$

При начальных данных $x_1(0) = x_1^0 = 1, x_2(0) = x_2^0 = 0, x_3(0) = x_3^0 = 0$ получаем значения концентраций

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0,015 + 0,985e^{-66,6t}, \\ x_2(t) &= 0,678 + 0,010e^{-9t} - 0,688e^{-66,6t}, \\ x_3(t) &= 0,307 - 0,010e^{-9t} - 0,297e^{-66,6t}. \end{aligned}$$

С ростом концентрации $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ стремятся соответственно к 0,015; 0,678; 0,307.

Авторы благодарят И.А. Александрова за внимание к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александрова С.Я., Кучер Р.В. О моделях гомогенных изотермических реакций // Докл. АН УССР. 1972. № 8. С. 717–721.
2. Александров И.А. Операционное исчисление и его применения. Томск: Изд-во ТГУ, 2013.
3. Allen R.H., Alfrey T., Yats D. // J. Amer. Chem. Soc. 1959. V. 81. No. 12.

Статья поступила 23.07.2013 г.

Aleksandrov A.I., Aleksandrova S.Ya., MATHEMATICAL MODELS OF MULTISTAGE CHEMICAL FIRST ORDER REACTIONS. Based on the proposed general method of a geometrical representation of chemical reactions, three-component reactions are classified and their graph and dynamic models are studied using the Laplace transform.

Keywords: chemical reaction rate, rate constant, kinetics matrix, graph of chemical reaction, Laplace transformation pairs.

REFERENCES

1. Aleksandrova S.Ya., Kucher R.V. O modelyakh gomogennykh izotermicheskikh reaktsiy // Dokl. AN USSR. 1972. No. 8. P. 717–721 (in Russian).
2. Aleksandrov I.A. Operatsionnoe ischislenie i ego primeneniya. Tomsk: Izd-vo TGU, 2013 (in Russian).
3. Allen R.H., Alfrey T., Yats D. // J. Amer. Chem. Soc. 1959. V. 81. No. 12.

ALEKSANDROV Aleksandr Igorevich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: aai8@ya.ru

ALEKSANDROVA Svetlana Yakovlevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: alsya@ya.ru

УДК 517.18:514.1

Р.А. Богданова

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУМЕТРИЧЕСКИХ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ДВУМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ РАНГА 3¹

Проведена классификация двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий ранга 3 аналитическим методом.

Ключевые слова: *двуметрическая феноменологически симметричная геометрия, функциональное уравнение.*

В традиционной евклидовой геометрии (и при ориентации на идеи Клейна и при взятии за основу подхода Римана) упорядоченной паре точек сопоставляется некоторый инвариант, который (поскольку наделен свойствами обычного расстояния) кладется в основу мероопределения, позволяющего воспроизводить объекты этой геометрии: длины, углы, площади, объёмы и прочее. Около полувека назад зародилось и активно развивается иное направление в основаниях геометрии (в рамках более широкой концепции физических структур [1]). В идейном плане данное направление (представленное такими авторами, как Ю.И. Кулаков, Г.Г. Михайличенко, В.Х. Лев, В.А. Кыров) опирается на круг представлений, очерченный ещё Германом Гельмгольцем в его знаменитой работе 1868 г. «О фактах, лежащих в основании геометрии» [2] (наличие функциональной связи между координатами точек). Исследователи, придерживающиеся этого направления, сопоставляют паре точек не один инвариант, а несколько. По устоявшейся в среде упомянутых лиц традиции эти инварианты именуют *метриками*², а теорию, описывающую данные инварианты, называют *полиметрической феноменологически симметричной геометрией*.

Предлагаемая работа выполнена в рамках описанной выше концепции, чем и объясняется употребление терминов «метрика» и «метрический» в смысле, характерном для данной концепции, и применяемом только в ней. Это, в частности, позволяет соотносить результаты, полученные автором данной работы с результатами иных исследователей, развивающих указанное направление.

Целью исследования является построение классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий [3, 4] ранга³ 3 аналитическим методом, которая (классификация) ранее была построена Г.Г. Михайличенко групповым методом [3].

¹ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-01-90806.

² При том, что свойства этих инвариантов обычно далеки от свойств метрики в обычном смысле и от свойств квадратичной метрики. Стоит отметить, что широко применяемая в линейной алгебре и в геометрии квадратичная метрика «просто метрикой» не является (она, в частности, может не быть положительно определенной, может быть и вырожденной, то есть двум различным точкам сопоставлять нулевое расстояние). Метрический тензор, для которого $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ не является знакоопределенным, рассматривается, в частности, в [5] (неопределенная риманова метрика).

³ Указанной здесь геометрии присваивается ранг 3 в том смысле, что для построения двукомпонентной метрической функции используются три текущие точки.

Наш подход применения аналитического метода состоит в исследовании функциональных отображений и решении возникающих функционально-дифференциальных уравнений. Перейдем к точным формулировкам, которые приведем по монографии [4].

Пусть имеется множество M_2 , являющееся гладким двумерным многообразием, а также отображение некоторого $G_f \subseteq M_2 \times M_2$ в R^2 , сопоставляющее каждой паре точек $(A, B) \in G_f$ два вещественных числа $f(A, B) = (f^1(A, B), f^2(A, B)) \in R^2$.

Если x, y – локальные координаты двумерного многообразия M_2 , то для отображения $f(A, B)$ можно записать его локальное координатное представление:

$$f(A, B) = (f^1(A, B), f^2(A, B)) = (f^1(x_A, y_A, x_B, y_B), f^2(x_A, y_A, x_B, y_B)), \quad (1)$$

где x_A, y_A, x_B, y_B – локальные координаты текущих точек A и B пары $(A, B) \in G_f$.

Следуя [3], будем точки многообразия M_2 обозначать i, j, k и соответственно их координаты x_i, y_i и т.п.

Здесь и везде далее поскольку $i = (x_i, y_i)$, $j = (x_j, y_j)$, то $f^1(i, j), f^2(i, j)$ есть некоторые функции $f^1(x_i, y_i, x_j, y_j)$, $f^2(x_i, y_i, x_j, y_j)$ и, в частности,

$$\frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_i} = \frac{\partial f^1(x_i, y_i, x_j, y_j)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_i} = \frac{\partial f^2(x_i, y_i, x_j, y_j)}{\partial x_i}. \quad (2)$$

В отношении вектор-функции $f(A, B) = (f^1(A, B), f^2(A, B))$ будем предполагать выполнение следующих аксиом:

A1. Область определения G_f вектор-функции $f(A, B) = (f^1(A, B), f^2(A, B))$ есть открытое и плотное множество в $M_2 \times M_2$.

A2. Вектор-функция f в локальных координатах имеет гладкость того порядка, который достаточен для наших целей.

A3. (Аксиома невырожденности). Для координатного представления вектор-функции $f(A, B) = (f^1(A, B), f^2(A, B))$ выполняются следующие неравенства:

$$\frac{\partial(f^1(i, j), f^2(i, j))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f^1(i, j), f^2(i, j))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0, \quad (3)$$

где x_i, y_i и x_j, y_j – локальные координаты текущих точек i и j пары $(i, j) \in G_f$ (следует учитывать правила обозначений, принятые нами в (2)).

Заметим, что при условии (3) ранг касательного отображения для отображения (1) равен 2, то есть максимален.

Рассмотрим гладкое отображение $F_U: U \rightarrow E \subseteq R^6$, где $U \subseteq M_2 \times M_2 \times M_2$, сопоставляющее тройке $\langle i, j, k \rangle$ точку

$$z = (f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) \in R^6,$$

область определения которого U , очевидно, открыта и плотна в $M_2 \times M_2 \times M_2$.

Далее, пусть имеется ещё одно гладкое отображение $\Phi: E \rightarrow S \subseteq R^2$, где $E \subseteq R^6$, которое сопоставляет точке $z \in R^6$ пару чисел $(\Phi_1(z), \Phi_2(z)) \in R^2$. Данные построения поясняет рис. 1.

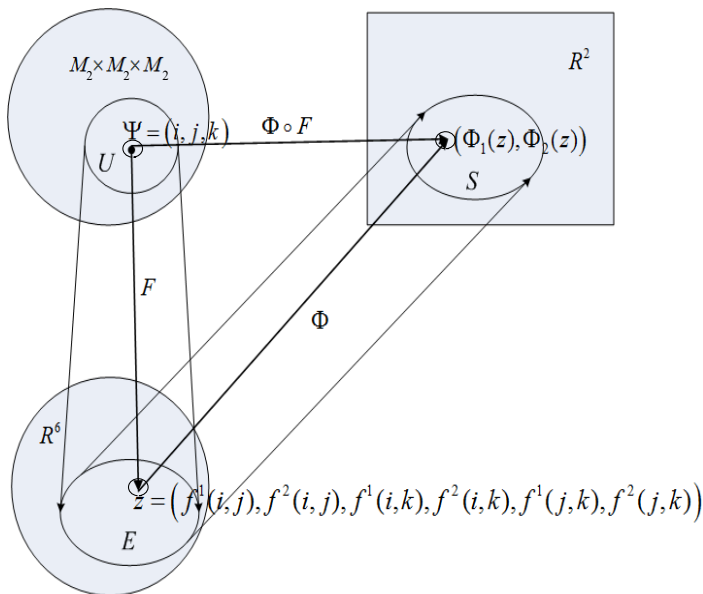


Рис. 1. Диаграмма отображений

Определение. Будем говорить, что вектор-функция $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$ задает на гладком двумерном многообразии M_2 *двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3*, если кроме аксиом **A1**, **A2**, **A3** выполняется аксиома **A4**. Вектор-функция $f(i, j)$ называется метрической функцией [3].

A4. (Аксиома феноменологической симметрии.) Существует плотное в U множество, для каждой точки Ψ которого, то есть для тройки $\langle i, j, k \rangle$ и некоторой ее окрестности $\varepsilon(\langle i, j, k \rangle)$ найдется такое достаточно гладкое отображение $\Phi: E \rightarrow S \subseteq R^2$, определенное в некоторой области $E \subset R^6$, содержащей точку $z = F(\langle i, j, k \rangle)$, что в ней ранг якобиевой матрицы отображения Φ равен 2 и множество $F(\varepsilon(\langle i, j, k \rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ , то есть

$$\Phi_m(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) = 0, \quad (m = 1, 2) \quad (4)$$

для всех троек $\langle i, j, k \rangle$ из $\varepsilon(\langle i, j, k \rangle)$.

Если данная аксиома выполнена для отображения

$$\begin{aligned} & \Phi(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) = \\ & = (\Phi_1(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)), \\ & \Phi_2(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k))), \end{aligned}$$

то на множестве E величины $f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)$ связаны двумя независимыми функциональными соотношениями (4).

Функциональная матрица отображения F_U

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial x_i} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial y_i} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial x_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial y_j} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial y_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial y_j} & \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial y_j} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial x_k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial y_k} \end{pmatrix} \quad (5)$$

имеет 6 строк и 6 столбцов, а ранг этой матрицы есть ранг касательного отображения.

Лемма 1. Если вектор-функция $f(i,j) = (f^1(i,j), f^2(i,j))$ и аналогичные ей удовлетворяют аксиомам **A1**, **A2**, **A3**, то ранг матрицы (5) не менее 4.

Справедливость леммы следует из того, что минор четвертого порядка Δ_4 , занимающий «северо-восточный угол» матрицы, отличен от нуля.

Замечание. Понижение ранга матрицы до четырех равносильно тому, что каждый из двух первых столбцов матрицы есть линейная комбинация базисных столбцов (то есть столбцов с номерами 3,4,5,6). Требование разложимости по базисным столбцам первого столбца налагает ограничения на производные функции $f^1(i,j)$ и аналогичных ей функций. Такое же требование, предъявленное ко второму столбцу, налагает точно те же ограничения на производные функции $f^2(i,j)$ по тем же аргументам. Исследуем следствия из разложимости первого столбца и убедимся в том, что они не только необходимы для выполнения условия $\text{rang}(A) = 4$, но и достаточны. Этот результат – центральный для нашей работы, и оформляем его следующей теоремой:

Теорема 1.

1. Если ранг отображения F_U равен 4 на открытом и плотном в U множестве, то вектор-функция $f(i,j) = (f^1(i,j), f^2(i,j))$, удовлетворяющая аксиомам **A1**, **A2**, **A3**, задает на гладком двумерном многообразии M_2 двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3 (то есть удовлетворяет аксиоме **A4**).

2. Система аксиом **A1**, **A2**, **A3**, **A4** совместна, то есть существует модель соответствующей аксиоматической теории – набор вектор-функций $f(i,j) = (f^1(i,j), f^2(i,j))$, для которых выполнены все четыре аксиомы.

Доказательство пункта 1.

Пусть для тройки $\langle i, j, k \rangle \in U$ ранг отображения F_U равен 4. Из леммы 1 и **Замечания** следует, что для некоторой окрестности тройки (i, j, k) ранг функциональной матрицы (5) не менее 4 и равен для неё этому значению. Согласно теоре-

ме математического анализа о функциональной зависимости [6], для некоторой окрестности $\varepsilon(\langle i, j, k \rangle)$ найдется такое достаточно гладкое отображение $\Phi: E \rightarrow R^2$, определенное в соответствующей области $E \subset R^6$, содержащей точку $z = (f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k))$, в которой $\text{rang}(\Phi) = 2$, что имеет место уравнение (4).

Поскольку ранг матрицы (5) для исходной тройки $\langle i, j, k \rangle$ равен 4 и максимален в окрестности $\varepsilon(\langle i, j, k \rangle)$, из этой же теоремы о функциональной зависимости следует, что найдется такая его окрестность $\varepsilon' \subseteq \varepsilon$ и соответствующая область $E' \subseteq E$, для которых множество значений $F(\varepsilon')$ совпадает с множеством нулей функции Φ в E , являясь гладкой без особых точек поверхностью в R^6 . **Пункт 1 доказан.**

Доказательство пункта 2. По лемме 1 ранг матрицы не менее 4. Докажем, что ранг матрицы (5) не более 4.

Для доказательства продифференцируем уравнение (4) по каждой из 6 координат $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$ точек тройки $\langle i, j, k \rangle$. В результате получим 6 линейных однородных уравнений относительно 6 производных функции Φ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, j)} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, j)} \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, k)} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, k)} \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, j)} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, j)} \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, k)} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, k)} \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, j)} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, j)} \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(j, k)} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(j, k)} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, j)} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial y_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, j)} \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial y_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(j, k)} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial y_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(j, k)} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial y_j} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, k)} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, k)} \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(j, k)} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(j, k)} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, k)} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, k)} \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(j, k)} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial y_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(j, k)} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial y_k} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

($m=1,2$),

матрица которой совпадает с функциональной матрицей (5) с точностью до транспонирования.

Предположим, что ранг матрицы системы (6) равен 5 или 6. Тогда система (6) будет иметь только одно линейно независимое ненулевое решение или ни одного, так как их число равно разности между числом переменных в системе (6) и рангом ее матрицы. Однако уравнения системы (6) имеют, по крайней мере, два таких решения в некоторой окрестности $\varepsilon(\langle i, j, k \rangle)$, так как по аксиоме **A4** $\text{rang } \Phi = 2$ в точке $z = F(\langle i, j, k \rangle)$. Ниже, в ходе анализа систем уравнений, мы убедимся в существовании метрической вектор-функции $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, удовлетворяющей аксиомам **A1, A2, A3, A4**, причем $\text{rang } \Phi = 2$.

Теорема 2. С точностью до гладкого преобразования $\chi(\tilde{f}) \rightarrow f$ и замены локальных координат x, y существуют две и только две невырожденные метрические вектор-функции вида $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, задающие на гладком двумерном многообразии M_2 двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3. Компоненты этих метрических вектор-функций могут быть представлены следующими каноническими [3] выражениями:

$$1. f^1(i, j) = x_i - x_j, \quad f^2(i, j) = y_i - y_j; \quad (7)$$

$$2. f^1(i, j) = (x_i - x_j)y_i, \quad f^2(i, j) = (x_i - x_j)y_j. \quad (8)$$

Доказательство. Учитывая **Замечание**, сделанное нами выше, сводим требование $\text{rang}(A) = 4$ к обращению в нуль миноров пятого порядка, окаймляющих базисный минор четвертого порядка, содержащих элементы первого и второго столбцов. Тогда, применяя для окаймления строки пятую и шестую и приравнявая полученные миноры нулю, приходим к функционально-дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} & A_2^1(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - A_2^2(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\ & + A_2^1(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - A_2^2(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ & A_1^1(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - A_1^2(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\ & + A_1^1(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - A_1^2(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ & (\alpha = 1, 2). \end{aligned} \quad (9)$$

Коэффициенты при произвольных компонент функции $f(i, j)$ в уравнениях системы (9) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_1^1(i, k) &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} \end{vmatrix}}, & A_1^2(i, k) &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} \end{vmatrix}}, \\ A_2^1(i, k) &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} \end{vmatrix}}, & A_2^2(i, k) &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} \end{vmatrix}}, \\ A_0(i, k) &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} \end{vmatrix}} \neq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично определяются $A_1^1(j, k), A_1^2(j, k), A_2^1(j, k), A_2^2(j, k), A_0(j, k)$.

Выпишем матрицу этой системы:

$$\begin{pmatrix} A_1^1(i, k)A_0(j, k) & -A_1^2(i, k)A_0(j, k) & A_1^1(j, k)A_0(i, k) & -A_1^2(j, k)A_0(i, k) \\ A_2^1(i, k)A_0(j, k) & -A_2^2(i, k)A_0(j, k) & A_2^1(j, k)A_0(i, k) & -A_2^2(j, k)A_0(i, k) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Лемма 2. Ранг системы уравнений (9) равен 2.

Доказательство леммы 2.

Заметим, что применив условие (3) к точкам j и k , мы получаем неравенства

$$\frac{\partial(f^1(j, k), f^2(j, k))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0; \quad \frac{\partial(f^1(j, k), f^2(j, k))}{\partial(x_k, y_k)} \neq 0. \quad (12)$$

Выделим в матрице (11) квадратную подматрицу второго порядка, содержащую отличный от нуля определитель $A_0(i, k)$, для определителя которой в силу (12) справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -A_1^1(j, k)A_0(i, k) & A_1^2(j, k)A_0(i, k) \\ -A_2^1(j, k)A_0(i, k) & A_2^2(j, k)A_0(i, k) \end{vmatrix} = \\ & = -(A_0(i, k))^2 \times \left(\frac{\partial f^1(j, k)}{\partial y_j} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_j} - \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial y_j} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_j} \right) \times \\ & \times \left(\frac{\partial f^1(j, k)}{\partial y_k} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_k} - \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial y_k} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_k} \right) \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, ранг системы (9) равен 2.

Заменяя величины $A_\mu^\beta(i, k)$, $A_\mu^\beta(j, k)$, где $\mu, \beta = 1, 2$, в уравнениях (9) на

$$\tilde{A}_\mu^\beta(i, k), \tilde{A}_\mu^\beta(j, k)$$

$$\tilde{A}_1^1(i, k_0) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} \end{array} \right|_{k=k_0}, \quad \tilde{A}_1^2(i, k_0) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} \end{array} \right|_{k=k_0},$$

$$\tilde{A}_2^1(i, k_0) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k} \end{array} \right|_{k=k_0}, \quad \tilde{A}_2^2(i, k_0) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k} \end{array} \right|_{k=k_0},$$

$$\tilde{A}_0(i, k_0) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \end{array} \right|_{k=k_0},$$

получим систему двух независимых дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент метрической вектор-функции $f(i, j)$:

$$\begin{aligned}
& \tilde{A}_2^1(i, k_0) \tilde{A}_0(j, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - \tilde{A}_2^2(i, k_0) \tilde{A}_0(j, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\
& + \tilde{A}_2^1(j, k_0) \tilde{A}_0(i, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - \tilde{A}_2^2(j, k_0) \tilde{A}_0(i, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\
& \tilde{A}_1^1(i, k_0) \tilde{A}_0(j, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - \tilde{A}_1^2(i, k_0) \tilde{A}_0(j, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\
& + \tilde{A}_1^1(j, k_0) \tilde{A}_0(i, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - \tilde{A}_1^2(j, k_0) \tilde{A}_0(i, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\
& (\alpha = 1, 2).
\end{aligned} \tag{13}$$

Поделив почленно уравнения системы (13) на произведение $\tilde{A}_0(i, k_0) \tilde{A}_0(j, k_0) \neq 0$ и вводя новые обозначения коэффициентов, получим более простую ее запись

$$\left. \begin{aligned}
\lambda_1(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \sigma_1(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda_1(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \sigma_1(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \\
\lambda_2(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \sigma_2(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda_2(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \sigma_2(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0,
\end{aligned} \right\}, \tag{14}$$

в которой

$$\begin{aligned}
\lambda_\alpha(x_i, y_i) &= \frac{\tilde{A}_\alpha^1(i, k_0)}{\tilde{A}_0(i, k_0)}, \quad \sigma_\alpha(x_i, y_i) = -\frac{\tilde{A}_\alpha^2(i, k_0)}{\tilde{A}_0(i, k_0)}, \\
\lambda_\alpha(x_j, y_j) &= \frac{\tilde{A}_\alpha^1(j, k_0)}{\tilde{A}_0(j, k_0)}, \quad \sigma_\alpha(x_j, y_j) = -\frac{\tilde{A}_\alpha^2(j, k_0)}{\tilde{A}_0(j, k_0)}
\end{aligned}$$

и $\lambda_\alpha^2(x, y) + \sigma_\alpha^2 \neq 0$ по лемме 2, где $\alpha = 1, 2$.

Рассмотрим функции двух вещественных аргументов, а именно, $\varphi(X, Y) \in C^2$, $\psi(X, Y) \in C^2$, для которых

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(X, Y)} \neq 0. \tag{15}$$

В уравнениях системы (14) произведем локально обратимую гладкую замену координат

$$\zeta_i = \varphi(x_i, y_i), \eta_i = \psi(x_i, y_i), \zeta_j = \varphi(x_j, y_j), \eta_j = \psi(x_j, y_j). \tag{16}$$

Якобиан замены имеет вид

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial x_i} & \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial x_i} & 0 & 0 \\
\frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial y_i} & \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial y_i} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial x_j} & \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial x_j} \\
0 & 0 & \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial y_j} & \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial y_j}
\end{vmatrix}$$

и в силу (15) отличен от нуля. Тогда первое уравнения системы (14) запишется в такой форме:

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_1(x_i, y_i) \frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial x_i} + \sigma_1(x_i, y_i) \frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial y_i} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \zeta_i} + \\ & + \left(\lambda_1(x_i, y_i) \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial x_i} + \sigma_1(x_i, y_i) \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial y_i} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \eta_i} + \\ & + \left(\lambda_1(x_j, y_j) \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma_1(x_j, y_j) \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial y_j} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \zeta_j} + \\ & + \left(\lambda_1(x_j, y_j) \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma_1(x_j, y_j) \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial y_j} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \eta_j} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$(\alpha = 1, 2).$$

Для второго уравнения системы (14) получим аналогичную по виду запись.

Если функции φ и ψ для точек $i(x_i, y_i)$, $j(x_j, y_j)$ соответственно взять из решений дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_1(x_i, y_i) \frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial x_i} + \sigma_1(x_i, y_i) \frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial y_i} &= 1, \\ \lambda_1(x_i, y_i) \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial x_i} + \sigma_1(x_i, y_i) \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial y_i} &= 0, \\ \lambda_1(x_j, y_j) \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma_1(x_j, y_j) \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial y_j} &= 1, \\ \lambda_1(x_j, y_j) \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma_1(x_j, y_j) \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned}$$

где $\lambda_1(x, y)^2 + \sigma_1(x, y)^2 \neq 0$, то для уравнения (17) получим максимально простой его вид

$$\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \zeta_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \zeta_j} = 0.$$

Присваивая новым переменным $\zeta_i, \zeta_j, \eta_i, \eta_j$ соответственно имена x_i, x_j, y_i, y_j , запишем преобразованные уравнения системы (14) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} = 0, \quad \lambda(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \\ & + \sigma(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$(\alpha = 1, 2).$$

Продифференцируем второе уравнение системы (18) вначале по переменной x_i , а затем по x_j . Сложив результаты дифференцирования, получим третье уравнение, которое расширит исходную систему (18):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \lambda(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_i} + \sigma(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial y_i} + \lambda(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_j} + \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial y_j} &= 0, \\ \frac{\partial \lambda(x_i, y_j)}{\partial x_i} \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i} \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial y_i} + \frac{\partial \lambda(x_j, y_j)}{\partial x_j} \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

($\alpha=1,2$),

причем слагаемые со вторыми частными производными в последнем уравнении уничтожаются с учетом первого уравнения.

Лемма 3. Ранг касательного отображения для отображения (1), подчиненного условиям (19), остается максимальным (то есть равным 2) только тогда, когда ранг матрицы системы (19) не более двух.

Доказательство. Для отображения (1) в обозначениях, используемых в формулах (2), (5) и далее, имеем матрицу касательного отображения вида

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial y_j} \\ \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial y_j} \end{pmatrix}.$$

Если ранг системы линейных уравнений (19) на частные производные более двух, то на столбцы матрицы B получаем три независимых линейных уравнения и ранг данной матрицы понижается до 1.

Обратим в нуль все миноры третьего порядка матрицы системы (19). Получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} -\sigma(x_i, y_i) \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i} &= 0; \\ -\lambda(x_j, y_j) \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial \lambda(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \lambda(x_i, y_i) \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} - \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial \lambda(x_i, y_i)}{\partial x_i} &= 0; \\ \sigma(x_i, y_i) \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} - \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i} &= 0; \\ -\sigma(x_i, y_i) \frac{\partial \lambda(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i} \lambda(x_j, y_j) - \lambda(x_i, y_i) \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda(x_i, y_i)}{\partial x_i} \sigma(x_i, y_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Первое (и равносильное ему третье) уравнение, записанное в виде

$$\frac{1}{\sigma(x_j, y_j)} \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} = \frac{1}{\sigma(x_i, y_i)} \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i}, \text{ с учетом произвольности точек } i, j \text{ рав-$$

носильно независимости отношения $\frac{1}{\sigma(A)} \frac{\partial \sigma(A)}{\partial x}$ от выбора точки A , то есть при-

водит к уравнению $\frac{\partial \sigma(x, y)}{\partial x} = a \sigma(x, y)$, где $a = \text{const}$. Второе (как и равносиль-

ное ему четвертое) уравнение, записанное в виде

$$\frac{\partial \lambda(x_i, y_i)}{x_i} - a\lambda(x_i, y_i) = \frac{\partial \lambda(x_j, y_j)}{\partial x_j} - a\lambda(x_j, y_j) = \text{const} = b,$$

приводит к уравнению $\frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} = b + a\lambda(x, y)$, где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$.

Таким образом, получаем систему из двух дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} = a\lambda(x, y) + b, \quad \frac{\partial \sigma(x, y)}{\partial x} = a\sigma(x, y), \quad (21)$$

где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$.

При интегрировании системы (21) отдельно рассмотрим три случая:

1. $a = 0$, $b = 0$; **2.** $a = 0$, $b \neq 0$; **3.** $a \neq 0$.

В первом случае система (21) будет иметь следующие решения:

$$\lambda(x, y) = \tilde{\lambda}(y), \quad \sigma(x, y) = \tilde{\sigma}(y).$$

В результате подстановки данных решений в (18), получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \tilde{\lambda}(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \tilde{\sigma}(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \tilde{\lambda}(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \tilde{\sigma}(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$(\alpha = 1, 2)$

где $\tilde{\sigma}(y) \neq 0$, как следствие условия (12).

В системе (22) произведем локально обратимую замену координат

$$\tilde{x} = x + \tilde{\varphi}(y), \quad \tilde{y} = \tilde{\psi}(y), \quad (23)$$

где $\tilde{\psi}' \neq 0$. Тогда первое уравнение системы (22) сохранит свой простой вид в новых координатах, а второе – изменит:

$$\begin{aligned} &\left(\tilde{\lambda}(y_i) + \tilde{\sigma}(y_i) \frac{\partial \tilde{\varphi}(y_i)}{\partial y_i} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{x}_i} + \tilde{\sigma}(y_i) \frac{\partial \tilde{\psi}(y_i)}{\partial y_i} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{y}_i} + \\ &+ \left(\tilde{\lambda}(y_j) + \tilde{\sigma}(y_j) \frac{\partial \tilde{\varphi}(y_j)}{\partial y_j} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{x}_j} + \tilde{\sigma}(y_j) \frac{\partial \tilde{\psi}(y_j)}{\partial y_j} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{y}_j} = 0. \end{aligned}$$

Функции $\tilde{\varphi}(y)$ и $\tilde{\psi}(y)$ в замене координат (23) возьмем из решения дифференциальных уравнений $\tilde{\lambda}(y) + \tilde{\sigma}(y) \frac{\partial \tilde{\varphi}(y)}{\partial y} = 0$, $\tilde{\sigma}(y) \frac{\partial \tilde{\psi}(y)}{\partial y} = 1$. После присваивания новым переменным $\tilde{x}_i, \tilde{x}_j, \tilde{y}_i, \tilde{y}_j$ соответственно имен x_i, x_j, y_i, y_j система (22) примет вид

$$\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (24)$$

Решением этой системы уравнений является вектор-функция $f^\alpha(x_i, x_j, y_i, y_j) = \theta^\alpha(x_i - x_j, y_i - y_j)$, где $\alpha = 1, 2$. Взяв наиболее простой базис первых интегралов полученного решения и считая допустимым применение обра-

тимости гладкого преобразования $\chi^\alpha(f^1, f^2) \rightarrow f^\alpha$, в котором $\alpha = 1, 2$, получаем первое каноническое выражение (7).

Во втором случае $a = 0, b \neq 0$ система (21) будет иметь следующие решения:

$$\lambda(x, y) = bx + b\tilde{\lambda}(y), \quad \sigma(x, y) = b\tilde{\sigma}(y),$$

где $\tilde{\sigma}(y) \neq 0$. Тогда система (18) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ (x_i + \tilde{\lambda}(y_i)) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \tilde{\sigma}(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + (x_j + \tilde{\lambda}(y_j)) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \tilde{\sigma}(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\alpha = 1, 2.$$

К уравнениям системы (25) применим локально обратимую замену координат (23) и присвоим новым переменным $\tilde{x}_i, \tilde{x}_j, \tilde{y}_i, \tilde{y}_j$ соответственно имена x_i, x_j, y_i, y_j , после чего система (25) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ x_i \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + x_j \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\alpha = 1, 2.$$

Решением системы дифференциальных уравнений (26) является вектор-функция $f^\alpha(x_i, y_i, x_j, y_j) = \theta^\alpha((x_i - x_j) \exp(-y_i), (y_i - y_j) \exp(-y_j))$, $\alpha = 1, 2$, которая с точностью до гладкого преобразования $\chi^\alpha(f^1, f^2) \rightarrow f^\alpha$ и замены координат $\exp(-y_i) \rightarrow y_i, \exp(-y_j) \rightarrow y_j$ может быть записана во второй канонической форме (8).

Рассмотрим последний случай, когда $a \neq 0$. Дифференциальные уравнения (21) на коэффициенты системы (18) будут иметь следующие решения:

1. В случае, когда $a \neq 0, b = 0$,

$$\lambda(x, y) = e^{ax} \tilde{\lambda}(y), \quad \sigma(x, y) = e^{ax} \tilde{\sigma}(y). \quad (27)$$

2. В случае, когда $a \neq 0, b \neq 0$,

$$\lambda(x, y) = e^{ax} \tilde{\lambda}(y) - \frac{b}{a}, \quad \sigma(x, y) = e^{ax} \tilde{\sigma}(y), \quad (28)$$

в которых $\tilde{\sigma}(y) \neq 0$. После подстановки каждого из решений (27), (28) исходная система (18) будет иметь один и тот же вид, а именно

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ e^{ax_i} \tilde{\lambda}(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + e^{ax_i} \tilde{\sigma}(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + e^{ax_j} \tilde{\lambda}(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + e^{ax_j} \tilde{\sigma}(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\alpha = 1, 2.$$

Произведем в полученной системе локально обратимую замену координат: $\tilde{x} = ax + \tilde{\varphi}(y)$, $\tilde{y} = \tilde{\psi}(y)$. Тогда система (29), с учетом присваивания новым переменным $\tilde{x}_i, \tilde{x}_j, \tilde{y}_i, \tilde{y}_j$ соответственно имен x_i, x_j, y_i, y_j , будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} = 0, \quad e^{ax_i} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + e^{ax_j} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \quad (\alpha = 1, 2) \quad (30)$$

Решением системы уравнений (30) является вектор-функция $f^\alpha(i, j) = \theta^\alpha(x_i - x_j, y_i \exp(-(x_i - x_j)) - y_j)$, которая с точностью до преобразований $\tilde{f}^1 = \chi^1(f^1, f^2) = \exp(f^1) \cdot f^2$, $\tilde{f}^2 = \chi^2(f^1, f^2) = f^2$ и замены координат $\exp(x) \rightarrow \tilde{y}$, $y / \exp(x) \rightarrow \tilde{x}$ (с учетом присваивания новым переменным $\tilde{x}_i, \tilde{x}_j, \tilde{y}_i, \tilde{y}_j$ соответственно имен x_i, x_j, y_i, y_j) совпадает с каноническим выражением (8). Теорема 2 доказана.

Заметим, что двуметрическая феноменологически симметричная геометрия ранга 3 допускает физическую интерпретацию в термодинамике при описании термодинамических состояний [7].

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н., профессору Г.Г. Михайличенко за постановку задачи и полезные обсуждения, а также д.ф.-м.н., профессору С.П. Гулько, к.ф.-м.н., доценту М.С. Бухтяку, к.ф.-м.н., доценту Кырову В.А. за многочисленные полезные замечания и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулаков Ю.И. Теория физических структур. Новосибирск: Альфа Виста, 2004. 851 с.
2. Гельмгольц Г. О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. М., 1956. С. 365–388.
3. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии. Барнаул: Изд-во Барнаульского государственного педагогического университета, 2004. 132 с.
4. Михайличенко Г.Г. Полиметрические геометрии. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2001. 144 с.
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981. 344 с.
6. Зорич В.А. Математический анализ: учебник. Ч. I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997. 554 с.
7. Михайличенко Г.Г. Математические основы и результаты теории физических структур. Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2012. 146 с.

Статья поступила 02.11.2012 г.

Bogdanova R.A. CLASSIFICATION OF TWO-METRIC PHENOMENOLOGICALLY SYMMETRIC TWO-DIMENSIONAL GEOMETRIES OF RANG 3. Two-metric phenomenologically symmetric two-dimensional geometry are set on a two-dimensional variety M_2 by a function of a couple of points $f(i, j)$ which we call the metric function. One of defining properties of this geometry is so-called phenomenological symmetry to which the special attention was paid for the first time by Yu. I. Kulakov who made it the basic principle of his theory of physical structures. The essence of phenomenological symmetry is that, in an sn -dimensional space between all mutual $sm(m-1)/2$ distances (that is used as the metric function) for $m = n + 2$ arbitrary points, there is a functional relation. In the first part of this work, main definitions and axioms used further in the proof of theorems are given. In the second part of work presents a classification of two-metric

phenomenologically symmetric two-dimensional geometries of rank 3 ($s = 2$ and $n = 1$) carried out by the analytical method in which the geometrical meaning of the studied functional and differential relations is used: first of all, a smooth replacement of local coordinates which allows one to reduce solutions of the differential equations to the simplest form. The specified reduction of solutions of the differential equations allows one to compare our solutions with results of other authors.

Keywords: two-metric phenomenologically symmetric geometry, functional equation

REFERENCES

1. Kulakov Yu.I. Teoriya fizicheskikh struktur. Novosibirsk: Al'fa Vista, 2004. 851 p. (in Russian).
2. Gel'mgol'ts G. O faktakh, lezhashchikh v osnovanii geometrii // Ob osnovaniyakh geometrii. Moscow, 1956. P. 365–388 (in Russian).
3. Mikhaylichenko G.G. Dvumernye geometrii. Barnaul: Izd-vo Barnaul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta, 2004. 132 p. (in Russian).
4. Mikhaylichenko G.G. Polimetricheskie geometrii. Novosibirsk: Novosib. gos. un-t, 2001. 144 p. (in Russian).
5. Kobayasi Sh., Nomidzu K. Osnovy differentsial'noy geometrii. V. 1. Moscow: Nauka, 1981. 344 p. (in Russian).
6. Zorich V.A. Matematicheskiy analiz: uchebnik. Ch. I. Izd. 2-e, ispr. i dop. Moscow: FAZIS, 1997. 554 p. (in Russian).
7. Mikhaylichenko G.G. Matematicheskie osnovy i rezul'taty teorii fizicheskikh struktur. Gorno-Altaysk: RIO GAGU, 2012. 146 p. (in Russian).

BOGDANOVA Rada Alexandrovna

(Gorno-Altaysk State University, Gorno-Altaysk, Russian Federation)

E-mail: bog-rada@yandex.ru

УДК 517.54

А.Н. Малютина, М.А. Елизарова¹

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКОГО И ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЙ ОТОБРАЖЕНИЙ С s -УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Продолжается развитие геометрического метода для изучения свойств отображений с s -усредненной характеристикой, основанного на специальном характеристическом законе искажения модулей семейств кривых.

Ключевые слова: пространственные отображения с s -усредненной характеристикой, геометрический метод модулей, эквивалентность, точки ветвления.

Пусть D – область в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, и отображение $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ – открытое, непрерывное, дискретное, $f \in W_{n, \text{loc}}^1(D)$, тогда отображение f обладает п.в. в области D всеми частными производными $\partial_i f_j(x)$ и для него определены величины $K_I(x, f)$, $K_O(x, f)$, $K_I(x, f) = \inf \{K(x)\}$, $K_O(x, f) = \inf \{P(x)\}$, где точная нижняя грань берется соответственно по всем измеримым в D функциям $K(x) \geq 1$, $P(x) \geq 1$, $x \in D$, для которых п.в. в области D выполняются неравенства $|J(x, f)| \leq K(x)l^n(f'(x))$, $|f'(x)|^n \leq P(x)|J(x, f)|$ (см. например, [2, 6]).

Рассмотрим $Q = \{x \in \mathbf{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\}$ – замкнутый n -мерный интервал.

Будем говорить, как и в [1, 2], что отображение $f: Q \rightarrow \mathbf{R}^m$ принадлежит классу ACL (или является абсолютно непрерывным на линиях), если f – абсолютно непрерывно на почти всех линейных сегментах I , параллельных координатным осям. Более точно, пусть $\pi_i(x) = x - x_i e_i$ – ортогональная проекция. Тогда множество E_i всех точек $x \in \pi_i(I)$, таких, что отображение $t \rightarrow f(x - t e_i)$, не абсолютно непрерывное на интервале $[a_i, b_i]$ – имеет меру Лебега $m_{n-1}(E_i) = 0$ для всех $1 \leq i \leq n$.

Если f – локально суммируемое ACL -отображение, тогда почти всюду в D отображение f имеет частные производные df_i/dx_j , $i, j = \overline{1, n}$. Если, кроме того, каждая из этих частных производных принадлежит классу $L_p(D)$, $p > 1$, для любой области $D' \subseteq D$, то $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ называют ACL^p -отображением и пишут $f \in ACL^p(D)$. Известно [1, теоремы 1.4, 1.5], что если $f \in ACL^p(D)$, то $f \in W_{n, \text{loc}}^1(D)$.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (соглашение № 14.В37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями»).

Назовем гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ отображением класса $f \in \widetilde{W}_n^1(D)$, если $f \in W_{n, \text{loc}}^1(D)$, $f^{-1} \in W_{n, \text{loc}}^1(D')$ и обладает N , N^{-1} -свойствами. Можно считать, что якобиан $J(x, f)$ отображения f сохраняет знак почти всюду в D (для определенности возьмем $J(x, f) > 0$).

Пусть $y = f(x)$ – непрерывное отображение области $D \subset \mathbf{R}^n$, $U \subset D$, через $N(y, f, U)$ и $\mu(y, f, U)$, как и в [7], обозначим соответственно кратность и степень отображения f в точке $y \in U$, через ∂U – границу множества U . Напомним, что отображение f сохраняет ориентацию, если для любой подобласти $U, \bar{U} \subset D$, и точки $y \in f(U) \setminus f(\partial U)$ – степень отображения $\mu(y, f, U) > 0$ [1].

Пусть X, Y – два произвольных топологических пространства, $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение. Точка $a \in X$ называется точкой ветвления отображения f , если f не является топологическим ни в какой окрестности точки a . Совокупность точек ветвления обозначим B_f [7, 8]. Известно, что если D – открытая область и $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ – произвольное непрерывное дискретное отображение, тогда множество B_f нигде не плотно, $\dim(B_f) \leq n - 2$ и $m(B_f) = 0$ [8].

Приведем лемму, которая нам потребуется при доказательстве основных результатов работы, используя, как и в [2], следующие обозначения. Пусть $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ – открытое, дискретное отображение, $U \subset D$, $J(D)$ – семейство всех областей U , являющихся компактными подмножествами D . Область $U \subseteq D$ назовем нормальной, если $f(\partial U) = \partial f(U)$. Согласно [2, замечание 2.8], если $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$, $x \in D$ и $r > 0$, то окрестность точки $x \in f^{-1}B^n(f(x), r)$ обозначим $U(x, f, r)$, здесь $B^n(f(x), r)$ – шар в $\mathbf{R}^n$ с центром в точке $f(x)$ и радиусом r .

Лемма 1 [2, лемма 2.9]. Пусть $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ – открытое дискретное отображение. Тогда $\lim_{r \rightarrow 0} d(U(x, f, r)) = 0$ для всех $x \in D$. Если $U(x, f, r) \in J(D)$, тогда $U(x, f, r)$ – нормальная область и $f(U(x, f, r)) = B^n(f(x), r) \in J(f(D))$. Более того, для каждой точки $x \in D$ существует число $\delta_x > 0$, такое, что при $0 < r \leq \delta_x$ выполнены следующие условия:

- (1) Окрестность $U(x, f, r)$ является нормальной окрестностью точки x ;
- (2) $U(x, f, r) = U(x, f, \delta_x) \cap f^{-1}B^n(f(x), r)$;
- (3) $\partial U(x, f, r) = U(x, f, \delta_x) \cap f^{-1}S^{n-1}(f(x), r)$, если $r < \delta_x$;
- (4) $CU(x, f, r)$ – связное множество;
- (5) $C\bar{U}(x, f, r)$ – связное множество;
- (6) Если $0 < r < s \leq \delta_x$, тогда $\bar{U}(x, f, r) \subset U(x, f, s)$ и $U(x, f, s) \setminus \bar{U}(x, f, r)$ – кольцо.

В качестве применяемого в теории квазиконформных гомеоморфизмов обратного отображения будем использовать построенное ниже отображение h_j [9].

Дадим аналитическое определение отображений с s -усредненной характеристикой [10, 11]

Определение 1. Отображение f называется отображением с $K_{O,s}$ -усредненной характеристикой, если

$$1) f \in W_{n,loc}^1(D); f \in \tilde{W}_{n,loc}^1(D).$$

2) Существует постоянная $K_{O,s} \geq 0$, такая, что выполняется неравенство

$$K_{O,s}(f) = \left(\int_D K_O^s(x, f) d\sigma_x \right)^{1/s} \leq K_{O,s}.$$

Определение 2. Отображение f называется отображением с $K_{O,s}^*$ -усредненной характеристикой, если

$$1) f \in W_{n,loc}^1(D); f \in \tilde{W}_{n,loc}^1(D).$$

2) Существует постоянная $K_{O,s}^* \geq 0$, такая, что выполняется неравенство

$$K_{O,s}^*(f) = \left(\int_D K_O^s(x, f) J(x, f) d\sigma_x \right)^{1/s} \leq K_{O,s}^*.$$

Аналогично определяются отображения с $K_{I,s}$ - и с $K_{I,s}^*$ -усредненными характеристиками. Здесь $K_O(x, f), K_I(x, f)$ – соответственно внешняя и внутренняя

дилатация отображения f в точке x , $d\sigma_x = \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}$.

В силу неравенств, связывающих между собой внешнюю и внутреннюю дилатации отображения f [6, 12], отображения с $K_{O,s}$ -, $K_{O,s}^*$ -, $K_{I,s}$ - и с $K_{I,s}^*$ -усредненными характеристиками также будем называть отображениями с s -усредненной характеристикой.

Пусть f – отображение с s -усредненной характеристикой, $f \in \tilde{W}_{n,loc}^1(D)$, $U \subseteq D$ – нормальная область, $x \in U, y \in f(U) \setminus f(B_f \cap U), f^{-1}(y) = \{x_j\}$. Тогда, обобщая [9, лемма 4, часть (b)], получаем, что по лемме 1 существуют $V_j = U(x_j, f, r)$ – окрестности точек x_j , такие, что $f_j = f|_{V_j}$ – гомеоморфизм. Поэтому можно рассматривать отображения $h_j : B^n(y, r) \rightarrow U$, причем $f \circ h_j$ – тождественное отображение. Если $h_j \in W_{n,loc}^1(B^n(y, r))$ и f – отображение с s -усредненной характеристикой, то по лемме 1 и [13] существует такое r , что $h_j = f_j^{-1}$ – квазиконформное в среднем отображение в шаре $B^n(y, r)$.

Множество E точек $y \in f(U) \setminus f(B_f)$, в которых хотя бы одно из h_j не дифференцируемо, содержится в борелевском множестве E_0 , мера Лебега которого $m_n(E_0) = 0$ (см., например, [9]).

Пусть D, D' – области пространства $\mathbf{R}^n$. Отображение $f : D \rightarrow D'$ называется дискретным (изолированным), если для каждого $y \in D'$ прообраз $f^{-1}(y)$ – дискретное множество, то есть состоит из изолированных точек [2].

Пусть ρ – борелевская функция в $\mathbf{R}^n$. Так как по следствию из теоремы 1.6 [6] класс множеств, измеримых по одномерной мере Хаусдорфа (Λ_1 -измеримых), включает в себя класс борелевских множеств, то функция $N(y, \gamma, I)$ и ρ являются Λ_1 -измеримыми. Тогда интеграл по кривой γ от функции ρ определим по формуле (см., например, [14])

$$\int_{\gamma} \rho dl = \int_{\gamma} \frac{\rho(x) N(y, \gamma, I) d\Lambda_1(x)}{1 + |x|^2}, \quad (1)$$

где $N(y, \gamma, I)$ – функция кратности (число точек $t \in I$, таких, что $\gamma(t) = y$). Если γ есть кривая Жордана, то интеграл (1) совпадает с обычным интегралом

$$\int_{\gamma} \rho dl = \int_{\gamma} \rho ds_x = \int_{\gamma} \rho \frac{ds}{1 + |x|^2},$$

определенным посредством длин частичных дуг. Это определение отличается от аналогичного определения в [2, 6] наличием под интегралом множителя $1/(1 + |x|^2)$.

Известно [2], что если $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ – непрерывное, открытое, дискретное отображение и γ – кривая, лежащая в D , то $f(\gamma)$ – тоже кривая, лежащая в $f(D)$, и если Γ – семейство кривых, то $f(\Gamma) = \Gamma'$ – также семейство кривых.

Определение 3. Пусть $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ – некоторое семейство кривых. Функцию $\rho: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1$ будем называть допустимой метрикой для Γ и обозначать $\rho \wedge \Gamma$, если она неотрицательна, измерима по Борелю и $\int_{\gamma} \rho ds_x \geq 1$ для $\forall \gamma \in \Gamma$, где $ds_x = ds/(1 + |x|^2)$.

Определение 4. Для произвольного p , $0 < p < \infty$, определим сферический модуль порядка p семейства кривых Γ как нижнюю грань:

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\mathbf{R}^n} \int \rho^p(x) d\sigma_x, \quad (2)$$

где инфимум берется над классом всевозможных метрик $\rho \wedge \Gamma$. Далее, если требуется, для модуля семейства кривых $M_p(\Gamma)$ также введем обозначение $M_p(\gamma, E, U)$; здесь $\gamma \in \Gamma$, Γ – семейство всевозможных кривых, соединяющих множества E и U , лежащие в области D . Если $p = n$, индекс n часто опускают и пишут $M(\Gamma)$ вместо $M_n(\Gamma)$.

Приведем необходимые свойства модуля семейств кривых:

(1) Если $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, то $M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$;

(2) $M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i)$;

(3) если семейства Γ_i , $i=1, 2, \dots$ отделены, то $M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i)$;

(4) если $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, то $M(\Gamma_1) \geq M(\Gamma_2)$, (см., например, [14]).

В предлагаемой работе, исходя из понятия p -модуля семейства кривых, как и в [11], дадим еще одно определение отображений с s -усредненной характеристикой, которое можно трактовать как геометрическое.

Определение 5. Скажем, что открытое дискретное непрерывное отображение f :

- принадлежит классу $Q_s(D)$, где $1/(n-1) \leq s < \infty$, если для любого p , такого, что $\frac{1}{n-1} \leq p \leq s$, существует Φ_p – неотрицательная ограниченная σ -аддитивная функция борелевских множеств в D , такая, что для любого семейства кривых Γ из D и произвольного борелевского множества $U \subset D$, содержащего все кривые из Γ , выполняется неравенство

$$M_{np/(p+1)}^{p+1}(\Gamma') \leq \Phi_p(U) M_n^p(\Gamma), \quad (3)$$

где $\Gamma' = f(\Gamma)$.

Обозначим $q_s(D)$ – подкласс $q_s(D) \subset Q_s(D)$ отображений, для которых вышеопределенные функции Φ_p являются абсолютно непрерывными функциями борелевских множеств. Очевидно, если $s' \leq s$, то $Q_s(D) \subset Q_{s'}(D)$, $q_s(D) \subset q_{s'}(D)$;

- принадлежит классу $Q_{s'}(D')$, где $(n-1) \leq s' < \infty$, если существует $\Psi_{s'}$ – неотрицательная ограниченная σ -аддитивная функция борелевских множеств в D' , такая, что для любого семейства кривых $\Gamma' \subset D'$ и произвольного борелевского множества $U' \subset D'$, содержащего все кривые из Γ' , выполняется неравенство

$$M_n^s(\Gamma') \leq [\Psi_{s'}(U')]^s \cdot M_{n\beta}^{s/\beta}(\Gamma), \quad (4)$$

где $U' = f(U)$, $\Gamma' = f(\Gamma) = \{f(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$, $\beta = s/(s-1)$;

3) принадлежит классу $Q_{s,s'}(D)$, где $(n-1) \leq s, s' < \infty$, если выполняются оба закона (3), (4) искажения модулей любых семейств кривых $\Gamma \subset D$ и $\Gamma' \subset D'$.

Обозначим соответственно $q_{s'}(D')$, $q_{s,s'}(D)$ – подклассы $q_{s'}(D') \subset Q_{s'}(D')$, $q_{s,s'}(D) \subset Q_{s,s'}(D)$ отображений, для которых функции Φ_p , $\Psi_{s'}$, существование которых доказано в [5] (теоремы 1, 2 и следствия из них), являются абсолютно непрерывными функциями борелевских множеств.

Лемма 2 [14]. Пусть $f : D \rightarrow \mathbf{R}^n$ – отображение с $K_{1,s}$ -усредненной характеристикой, $s > 1/(n-1)$, область $U \subseteq D$, Γ – семейство кривых из U , $\Gamma' = f(\Gamma)$. Тогда для почти всех кривых $\gamma' \in \Gamma'$ кривая $\gamma \in \Gamma$ абсолютно непрерывна.

Приведем одну существенно используемую специальную лемму о покрытиях (см. [3, 15]).

Лемма 3. Пусть U – ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$ и $t > 1$ – число. Тогда существует последовательность $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ шаров B_k с центрами в точках x_k и радиусами $r_k > 0$ так, что она и последовательность $\{B'_k\}_{k=1}^{\infty}$ концентрических шаров B'_k с теми же центрами в точках x_k и радиусами t_{r_k} удовлетворяет следующим условиям:

$$1) U = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B'_k;$$

2) каждая точка множества U , содержится не более чем в ξ шарах из $\{B_k\}$ и в ξ' шарах из $\{B'_k\}$;

3) последовательность $\{B'_k\}$ можно разбить на η семейств непересекающихся шаров;

Постоянные ξ' и η зависят от размерности пространства n и числа t , а постоянная ξ зависит только от n .

Предложение 1. Пусть E, U – ограниченные множества $m(U \setminus E)$ – n -мерная мера Лебега, а $m_{n-1}S$ – $(n-1)$ -мерная мера Лебега C^∞ -многообразия S , являющегося границей $S = \partial A$ ограниченного борелевского множества A , содержащего E и содержащегося вместе со своим замыканием $\bar{A} \subset U$, а точная нижняя грань берется по всем таким S . Тогда справедливо неравенство

$$M_p(\gamma, E, U) \geq \frac{(\inf m_{n-1}S)^p}{(m(U \setminus E))^{p-1}}.$$

Это предложение нетрудно доказать, пользуясь известными соотношениями емкости и модуля [16]. В работе [17] оно содержится в терминах емкости.

Лемма 4. Если $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ – открытое отображение класса $\mathcal{Q}_s(D)$, то существует σ -аддитивная ограниченная функция Φ , заданная на борелевских множествах в D , такая, что для любого открытого множества $U \subset D$ справедливо неравенство

$$mf(U) \leq \Phi(U),$$

где $mf(U)$ – n -мерная мера Лебега множества $f(U)$.

Если же $f \in \mathcal{Q}_\alpha(D)$, то в этом неравенстве функцию Φ можно выбрать абсолютно непрерывной.

Доказательство. Пусть $U \subset D$ – ограниченное произвольное открытое множество. Тогда по лемме 3 существует последовательность $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ шаров B_k с центрами в точках x_k и радиусами $r_k > 0$, такая, что она и последовательность $\{B'_k\}_{k=1}^\infty$ концентрических шаров B'_k с теми же центрами в точках x_k и радиусами $2r_k$ ($t=2$) удовлетворяет следующим условиям 1) – 3).

Поскольку $f \in \mathcal{Q}_{\frac{1}{n-1}}(D)$, то для любых семейств кривых Γ_k , соединяющих множества $\bar{B}_k$ и B'_k и Γ'_k , соединяющих множества $f(\bar{B}_k)$ и $f(B'_k)$, выполнено неравенство

$$M_1(\gamma', f(\bar{B}_k), f(B'_k)) \leq \left(\Phi_{\frac{1}{n-1}}(B'_k) \right)^{(n-1)/n} \cdot M_n^{1/n}(\gamma, \bar{B}_k, B'_k).$$

В силу предложения 1, отсюда имеем

$$\inf m_{n-1}S \leq c \left(\Phi_{1/(n-1)}(B'_k) \right)^{(n-1)/n},$$

где постоянная c зависит только от n , а величина $\inf m_{n-1}S$ – $(n-1)$ -мерная мера Лебега C^∞ – многообразия S , являющегося границей $S = \partial U$ – ограниченного открытого множества U , содержащего E и содержащегося вместе со своим замыканием $\bar{U}$ в D ;

$$M_1(\gamma, E, D) = \inf m_{n-1}S,$$

см. [17, лемма 6].

Оценивая левую часть по известному изопериметрическому неравенству, получим

$$mf(B_k) \leq c_1 \Phi_{1/(n-1)}(B'_k).$$

Суммируя эти неравенства по каждому из η семейств $\{B'_{k_1}\}, \dots, \{B'_{k_\eta}\}$ непересекающихся шаров из $\{B'_k\}$ и пользуясь σ -аддитивностью функции $\Phi_{1/(n-1)}$ для каждого $p = 1, 2, \dots, \eta$, будем иметь

$$\begin{aligned} mf(U) &= mf\left(\bigcup_{k_p} B_{k_p}\right) = \sum_{k_p} mf(B_{k_p}) \leq \\ &\leq \sum_{k_p} \Phi_{1/(n-1)}(B'_{k_p}) = c_1 \Phi_{1/(n-1)}\left(\bigcup_{k_p} B'_{k_p}\right) = c_1 \Phi_{1/(n-1)}(U). \end{aligned}$$

Производя теперь суммирование по $p = 1, 2, \dots, \eta$, получаем

$$mf(U) \leq \sum_{p=1}^{\eta} mf\left(\bigcup_{k_p} B_{k_p}\right) \leq c_1 \eta \Phi_{1/(n-1)}(U),$$

и требуемое в условии леммы неравенство следует отсюда очевидным образом, если положить $\Phi(U) = c_1 \eta \Phi_{1/(n-1)}(U)$. Если функция Φ абсолютно непрерывна, то и функция Φ_p также абсолютно непрерывна.

Предложение 2. Пусть $f \in Q_s(D)$, соответственно $f \in q_s(D)$ тогда и только тогда, когда существует σ -аддитивная (абсолютно непрерывная) ограниченная функция Φ , заданная на борелевских множествах в D , такая, что для любого открытого множества $U \subset D$ имеет место неравенство

$$M_{sn/(n+1)}(f(\Gamma)) \leq \Phi(U) M_n^{s/(s+1)}(\Gamma)$$

для любого семейства кривых $\Gamma \subset U$.

Доказательство. Если $f \in Q_s(D)$ (или $f \in q_s(D)$), то нужное неравенство следует из определения 5-го класса отображений.

Для доказательства обратного утверждения рассмотрим функцию Ψ , заданную на борелевских множествах $U \subset D$, полагая $\Psi(U) = mf(U)$. Применяя неравенство Гельдера, нетрудно видеть, что для любого $1/(n-1) \leq p \leq s$ выполнено

$$M_{\frac{pn}{p+1}}(\Gamma') \leq [\Psi(U)]^{\frac{s-p}{s(p+1)}} \cdot M_{\frac{sn}{s+1}}^{\frac{p(s-p)}{s(p+1)}}(\Gamma).$$

Тогда, вместе с заданным в условии неравенством, получаем

$$M_{\frac{pn}{p+1}}(\Gamma') \leq \left[(\Phi(U))^{\frac{p}{s}} (\Psi(U))^{\frac{s-p}{s}} \right]^{\frac{1}{p+1}} \cdot M_n^{\frac{p}{p+1}}(\Gamma).$$

Остается показать, что $f \in Q_s(D)$ с σ -аддитивной ограниченной функцией $\Phi_p = (\Phi(U))^{\frac{p}{s}} \Psi(U)^{\frac{s-p}{s}}$. Действительно, если последовательность борелевских множеств $\{U_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D$ такова, что $U_i \cap U_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то применяя неравенство Гельдера и пользуясь σ -аддитивностью функций Φ и Ψ , выводим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_p(U_k) &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Phi(U_k) \right)^{\frac{p}{s}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Psi(U_k) \right)^{\frac{s-p}{s}} = \\ &= \left(\Phi \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k \right) \right)^{\frac{p}{s}} \left(\Psi \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k \right) \right)^{\frac{s-p}{s}} = \Phi_p \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k \right). \end{aligned}$$

Если Φ абсолютно непрерывна, то и функция Φ_p абсолютно непрерывна и предположение доказано.

Теорема 1. Открытое отображение $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$, $f \in Q_s(D)$ при $(n-1) \leq s < \infty$, есть ACL^n -отображение, дифференцируемое п.в. в области D , и такое, что конечен интеграл

$$\int_D K_I^s(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x < \infty.$$

Доказательство. Убедимся, что f есть ACL -отображение в области D . Возьмем n -мерный открытый параллелепипед $Q, \bar{Q} \subset D$, с ребрами параллельными координатным осям, и покажем, что f абсолютно непрерывно на п.в. сечениях параллельных оси x_n .

Пусть Q_0 – проекция Q на подпространство $x_n = 0$, J – проекция Q на координатную ось x_n . Тогда $Q = Q_0 \times J$. Пусть Φ_s – σ -аддитивная функция, участвующая в определении $f \in Q_s(D)$, порождает неотрицательную σ -аддитивную конечную функцию борелевских множеств $A \subset Q_0$ по правилу $\Phi_s(A, Q) = \Phi_s(A \times J)$. Известно (см. например [2, 7]), что для почти всех точек $z \in Q_0$ конечна величина

$$\bar{\Phi}'_s(z, Q) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Phi_s(B^{n-1}(z, r), Q)}{m_{n-1}B^{n-1}(z, r)},$$

где $B^{n-1}(z, r)$ – $(n-1)$ -мерный шар с центром в точке z и радиуса $r > 0$, а $m_{n-1}B^{n-1}(z, r)$ – его $(n-1)$ -мерная мера Лебега.

Для открытого множества $U \subset Q_0$ положим $\Psi_n(U, Q) = mf(U \times J)$ и пусть Φ – σ -аддитивная функция, определяемая леммой 4 по заданному отображению $f \in Q_s(D)$. Поскольку $\Psi_n(U, Q) \leq \Phi(U \times J)$, где $\Phi(U, Q) = \Phi(U \times J)$, для всякого открытого множества $U \subset Q_0$, то, учитывая сказанное выше, заключаем, что величина $\bar{\Phi}'(z, Q)$ конечна для п.в. $z \in Q_0$, при этом $\bar{\Psi}'_n(z, Q) \leq \bar{\Phi}'(z, Q)$ и таким образом, величина $\bar{\Psi}'_n(z, Q)$ конечна для п.в. $z \in Q_0$.

Зафиксируем произвольную точку $z \in Q_0$, в которой $\bar{\Phi}'(z, Q)$ и $\bar{\Psi}'_s(z, Q)$ конечны. На сечении $J_z = \{z\} \times J$ параллелепипеда Q возьмем произвольно непересекающиеся интервалы $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ с длинами $b_1, \dots, b_k$ соответственно. Обозначая через U_i множество всех точек, удаленных от Δ_i на расстояние, меньшее, чем заданное $r > 0$, рассмотрим множество $(\gamma; \Delta_i, U_i)$ кривых γ , соединяющих множества Δ_i с U_i . Пусть $r > 0$ выбрано так, что множества U_i не пересекаются, $U_i \in Q$ и $\Omega_n r \leq \omega_{n-1} b_i$, $i = 1, \dots, k$, где Ω_n и ω_{n-1} – объем единичного шара и площадь поверхности единичной сферы в $\mathbf{R}^n$ соответственно. Воспользуемся неравенством, доказанным в работе [2] при $p = n$, при $p < n$ – в [3, предложение 4] в терминах

емкости, для $n-1 \leq p \leq n$, в терминах модуля, – в работе [18]:

$$M_n(\gamma; \Delta_i, U_i) \leq \frac{mU_i}{r^n} \leq 2\omega_{n-1} \frac{b_i}{r}. \quad (5)$$

С другой стороны, поскольку условие $n-1 < s < \infty$ влечет неравенство $n-1 < sn/(s+1) < n$, а тогда, согласно [3, предложение 5], имеем

$$M_{\frac{sn}{s+1}}^{n-1}(f(\gamma); f(\Delta_i), f(U_i)) \geq C \frac{(\text{diam} f(\Delta_i))^{\frac{sn}{s+1}}}{(mf(U_i))^{\frac{s+1-n}{s+1}}}. \quad (6)$$

Из определения 3 и неравенств (5) и (6) получаем

$$\begin{aligned} \text{diam} f(\Delta_i) &\leq C_1 r^{\frac{1-n}{n}} (mf(U_i))^{\frac{s+1-n}{s+1}} (\Phi_s(U_i))^{\frac{n-1}{ns}} b_i^{\frac{n-1}{n}} \leq \\ &\leq C_1 r^{\frac{1-n}{n}} (\Phi(U_i))^{\frac{s+1-n}{sn}} (\Phi_s(U_i))^{\frac{n-1}{sn}} b_i^{\frac{n-1}{n}}, \end{aligned}$$

где функция Φ определена выше. Суммируя по $i = 1, 2, \dots, k$, применяя неравенство Гельдера и σ -аддитивность функций Φ и Φ_s , имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \text{diam} f(\Delta_i) &\leq C_1 r^{\frac{1-n}{n}} \left(\sum_{i=1}^k \Phi(U_i) \right)^{\frac{s+1-n}{sn}} \left(\sum_{i=1}^k \Phi_s(U_i) \right)^{\frac{n-1}{ns}} \left(\sum_{i=1}^k b_i \right)^{\frac{n-1}{n}} = \\ &= C_1 r^{\frac{1-n}{n}} \left(\Phi(B^{n-1}(z, r), Q) \right)^{\frac{s+1-n}{sn}} \left(\Phi_s(B^{n-1}(z, r), Q) \right)^{\frac{n-1}{sn}} \left(\sum_{i=1}^k b_i \right)^{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned}$$

Устремляя $r \rightarrow 0$, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^k \text{diam} f(\Delta_i) \right)^n \leq C_2 (\bar{\Phi}'(z, Q))^{\frac{s+1-n}{s}} (\bar{\Phi}'_s(z, Q))^{\frac{n-1}{s}} \left(\sum_{i=1}^k b_i \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Отсюда имеем, что $f \in ACL(D)$.

Покажем, что $f \in ACL^n(D)$. С каждой точкой $x \in D$ свяжем семейство Γ кривых γ , лежащее в области D и соединяющее множества E_r и U_r , где $E_r = \{y : |x - y| \leq r\}$ и $U_r = \{y : |x - y| \leq 2r\}$.

Хорошо известно (см. например, [17]), что в случае концентрических шаров $U = \{x : |x| \leq R\}$ и $E = \{x : |x| \leq r\}$ справедливо равенство

$$M_n(\gamma; E, U) = \omega_{n-1} \ln^{1-n} \frac{R}{r},$$

а если $1 < p < n$, то

$$M_p(\gamma; E, U) = \omega_{n-1} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^p \left(r^{\frac{p-n}{p-1}} - R^{\frac{p-n}{p-1}} \right)^{1-p}.$$

Так как $M_n(\gamma, E, U) = C$, где постоянная C зависит только от n , тогда, учитывая определение 1, получаем неравенство

$$M_{\frac{sn}{s+1}}(f(\gamma); f(E_r), f(U_r)) \leq C (\Phi_s(U_r))^{\frac{1}{s+1}}.$$

Оценим левую и правую части по неравенству (8) применяя лемму 4

$$\begin{aligned} (\text{diam} f(E_r))^n &\leq C_1 (mf(U_r))^{\frac{s+1-n}{s}} (\Phi_s(U_r))^{\frac{n-1}{s}} \leq \\ &\leq C_1 (\Phi(U_r))^{\frac{s+1-n}{s}} (\Phi_s(U_r))^{\frac{n-1}{s}}. \end{aligned}$$

Разделим обе части последнего неравенства на r^n и устремим $r \rightarrow 0$. Тогда для почти всех $x \in D$ имеем

$$|f'(x)|^n \leq L^n(x, f) \leq C_2 (\bar{\Phi}'(x))^{\frac{s+1-n}{s}} (\bar{\Phi}'_s(x))^{\frac{n-1}{s}},$$

где постоянные C_1 и C_2 зависят только от n , $L(x, f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \max_{|x-y|=r} \frac{|f(x) - f(y)|}{r}$, ве-

личины $\bar{\Phi}'(x) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{\Phi(U_r)}{mU_r}$, $\bar{\Phi}'_s(x) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{\Phi_s(U_r)}{mU_r}$, определяемые по σ -аддитивным функциям Φ и Φ_s конечны п.в. в D и суммируемы [2, 7].

Следовательно, по теореме Степанова (см., например, [1]) отображение f дифференцируемо п.в. в D . Интегрируя последнее соотношение по области D , с учетом неравенства Гельдера, получаем

$$\int_D |f'(x)|^n d\sigma_x \leq C_2 \left(\int_D (\bar{\Phi}'(x)) d\sigma_x \right)^{\frac{s+1-n}{s}} \left(\int_D \bar{\Phi}'_s(x) d\sigma_x \right)^{\frac{n-1}{s}},$$

откуда следует, что $f \in ACL^n(D)$.

Убедимся, что $\int_D K_{I,s}^s(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x < \infty$.

Пусть $x \in D$ — произвольная точка, в которой $J(x, f) \neq 0, \infty$ (так как $J(x, f) \neq \infty$ п.в., то $K_{I,s}(x, f) \neq \infty$ п.в. поскольку $f \in ACL^n(D)$). Рассматривая снова семейство кривых $\{\gamma; E_r, U_r\}$, приходим к неравенству

$$M_{\frac{sn}{s+1}}(f(\gamma); f(E_r), f(U_r)) \leq C_2 (\Phi_s(U_r))^{\frac{1}{s+1}}.$$

Оценивая здесь левую часть по известному изопериметрическому неравенству [17], получаем

$$(\inf m_{n-1} S_r)^{\frac{sn}{s+1}} \leq C_1 (\Phi_s(U_r))^{\frac{1}{s+1}} (mf(U_r))^{\frac{sn-s-1}{s+1}}.$$

При $r \rightarrow 0$ множество $f(E_r)$ с точностью до $o(r)$ представляет собой эллипсоид $f'(E_r)$, являющийся образом шара E_r при линейном отображении f' . Поэтому

$$\begin{aligned} \left(C_2 \frac{|J(x, f)|}{l(f'(x))} r^{n-1} - o(r^{n-1}) \right)^{\frac{sn}{s+1}} &\leq (m_{n-1} \partial f(E_r) - o(r^{n-1}))^{\frac{sn}{s+1}} \leq \\ &(\inf m_{n-1} S_r)^{\frac{sn}{s+1}} \leq C_1 (\Phi_s(U_r))^{\frac{1}{s+1}} (mf(U_r))^{\frac{sn-s-1}{s+1}}, \end{aligned}$$

где постоянная $C_2 > 0$ зависит от n . Разделив неравенство на $r^{\frac{sn-s-1}{s+1}}$ и устремляя $r \rightarrow 0$, будем иметь

$$\frac{|J(x, f)|^n}{l^n(f'(x))} \leq C_3 (\bar{\Phi}'_s(x))^{\frac{1}{s}} \left(\lim_{r \rightarrow 0} \frac{mf(U_r)}{mU_r} \right)^{\frac{sn-s-1}{s+1}}.$$

Отсюда, поскольку $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{mf(U_r)}{mU_r} = |J(x, f)|$ п.в. в D (см. [17]), получаем

$$|J(x, f)| \leq C_3 \left(\frac{\bar{\Phi}'_s(x)}{|J(x, f)|} \right)^{\frac{1}{s}} l^n(f'(x)).$$

Поэтому $K_I^s(x, f)|J(x, f)| \leq C_4 \bar{\Phi}'_s(x)$, если $|J(x, f)| \neq 0$, ∞ ; $K_I^s(x, f)|J(x, f)| = 0$, если $|J(x, f)| = 0$ и, кроме того, $K_I^s(x, f)|J(x, f)|$ вместе с $|J(x, f)|$ конечны п.в. в D .

Следовательно,

$$\int_D K_I^s(x, f)|J(x, f)| d\sigma_x \leq C_4 \int_D \bar{\Phi}'_s(x) d\sigma_x < \infty$$

и теорема доказана.

Замечание 1. Если открытое отображение $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ класса $Q_s(D)$, $1/(n-1) \leq s \leq n-1$, дифференцируемо п.в. в D , то $\int_D K_I^s(x, f)|J(x, f)| d\sigma_x < \infty$.

Действительно, приведенная выше схема доказательства ограниченности этого интеграла при $s > n-1$ проходит и в случае $1/(n-1) \leq s \leq n-1$, если мы покажем,

что $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{mf(U_r)}{mU_r} = |J(x, f)| \neq \infty$ п.в. в D .

В самом деле, из леммы 4 следует, что f есть отображение с ограниченной вариацией в смысле Банаха, и нужное вытекает далее из [7, с. 354–355].

Следствие 1. В условиях теоремы 1 якобиан $J(x, f)$ открытых отображений $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ класса $Q_s(D)$ суммируем по области D .

Из результатов монографии [7] и теоремы 1 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Теорема 2. Если $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ – открытое отображение класса $q_s(D)$, то образ $f(U)$ всякого измеримого множества $U \subset D$ есть измеримое множество.

Теорема 3. Для открытого отображения $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ класса $Q_s(D)$ при $s > (n-1)$ справедлива формула

$$\int_D |J(x, f)| d\sigma_x = \int_{\mathbf{R}^n} N(y, f, D) d\sigma_y,$$

а также более общее равенство

$$\int_U h(f(x)) |J(x, f)| d\sigma_x = \int_{\mathbf{R}^n} h(y) N(y, f, D) d\sigma_y,$$

имеющее смысл для любого измеримого множества $U \subset D$ и при условии существования одного из интегралов.

Если $mf(\partial D) = 0$, то справедлива формула

$$\int_D |J(x, f)| d\sigma_x = \int_{R^n} \mu(y, f, D) d\sigma_y$$

$$\text{и} \quad \int_U h(f(x)) |J(x, f)| d\sigma_x = \int_{R^n} h(y) \mu(y, f, D) d\sigma_y,$$

имеющая смысл при условии существования интеграла слева.

Из теоремы 3 следует интегральная ограниченность степени и кратности отображений с s -усредненной характеристикой. Для отображений с ограниченным в среднем искажением степень и кратность, вообще говоря, не ограничены на компактах, есть соответствующий пример [1].

Здесь не учитывается присущее гомеоморфному отображению свойство $f^{-1} \in ACL^n(D')$, поскольку обратное отображение является неоднозначной функцией. Тем не менее все же обсудим условия, при которых эквивалентность геометрического и аналитического определений отображений с s -усредненной характеристикой имеет место. Пойдем в этом направлении, следуя работам [3, 4, 19]. Нами построен пример [20], показывающий, что класс отображений с s -усредненной характеристикой при $s > n-1$ не пуст и обобщает рассматриваемые в этих работах классы отображений.

Далее рассматриваем непрерывное, открытое, дискретное отображение $f: D \rightarrow D'$, $f \in \widetilde{W}_{n, \text{loc}}^1(D \setminus B_f)$, $f \in W_{n, \text{loc}}^1(D)$ и якобиан $J(x, f) > 0$ почти всюду в D .

Пусть отображение f с s -усредненной характеристикой удовлетворяет условиям аналитического определения. Пусть также для отображения f выполнено геометрическое определение $f \in Q_{s, s'}(D)$.

Покажем, что при таком понимании геометрическое и аналитическое определения отображений с s -усредненной характеристикой эквивалентны.

Теорема 4. Пусть $f: D \rightarrow D'$ – непрерывное открытое дискретное отображение, $s, s' > n-1$. Следующие условия эквивалентны:

$$(1) \quad f \text{ – отображение с } K_{I, s} \text{-усредненной характеристикой и} \\ \int_D K_O^s(x, f) d\sigma_x < \infty;$$

$$(2) \quad f \in \widetilde{W}_{n, \text{loc}}^1(D \setminus B_f), f \in W_{n, \text{loc}}^1(D) \text{ – невырожденные в своих областях задания отображения и следующие интегралы конечны} \int_D K_I^s(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x,$$

$$\int_{V^* \setminus (B_f \cap V_f)} K_I^{s'}(y, f_j^{-1}) |J(y, f_j^{-1})| d\sigma_y;$$

$$(3) \quad f \in Q_{s, s'}(D);$$

$$(4) \quad f \in q_{s, s'}(D).$$

Доказательство. Условие (3) вытекает из (4) очевидным образом. Если выполнено (3), то по теореме 1 имеем, что отображение $f \in W_{n, \text{loc}}^1(D)$, дифференцируемо почти всюду в D и интеграл $\int_D K_I^s(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x$ конечен.

Остается показать, что $f_i^{-1} \in \widetilde{W}_{n, \text{loc}}(D \setminus B_f)$.

Пусть область $V \subset D$ и $f(V) = V^*$. Точка $y \in V^* \setminus (B_f \cap V_i)$, $f^{-1}(y) \cap V = \{x_i\}$. Как показано выше, существуют окрестности $V_i = U(x_i, f, r)$ точек x_i такие, что $f_i = f|_{V_i}$ — гомеоморфизм. Поэтому можно рассмотреть отображение $f_i^{-1} : B^n(y, r) \rightarrow V_i$, причем $f \circ f_i^{-1}$ — тождественное отображение. Тогда по теореме 8.3 [1] получаем, что f_i^{-1} является ACL-отображением, невырожденным почти всюду в области своего задания, и интеграл
$$\int_{V^* \setminus f(B_f \cap V_i)} K_I^{s'}(y, f_i^{-1}) |J(y, f_i^{-1})| d\sigma_y$$

конечен, где $s' > n-1$.

Проверим, что условие (2) влечет условие (1). Так как $J(x, f) \neq 0$ и $K_I(x, f) \geq 1$ почти всюду в D , то из конечности интеграла $\int_D K_I^s(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x$ вытекает, что $0 < J(x, f) < \infty$ почти всюду в D . Поэтому характеристики $K_I^{n-1}(x, f) \geq K_O(x, f) \geq 1$ почти всюду в D , и из очевидных неравенств

$$\begin{aligned} \infty &> \int_D K_I^s(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x \geq \int_D K_O^{s/(n-1)}(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x \geq \\ &\geq \int_D K_O(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x \geq \int_D |f'(x)|^n d\sigma_x \end{aligned}$$

закключаем, что $f \in W_{n, \text{loc}}^1(D)$.

Покажем, что $f_i^{-1} \in W_{n, \text{loc}}(D \setminus B_f)$. В самом деле, так как

$$\begin{aligned} \infty &\geq \int_{V^* \setminus f(B_f \cap V_i)} K_I^s(y, f_i^{-1}) |J(y, f_i^{-1})| d\sigma_y \geq \int_{V^* \setminus f(B_f \cap V_i)} K_O^{s/(n-1)}(y, f_i^{-1}) |J(y, f_i^{-1})| d\sigma_y \geq \\ &\geq \int_{V^* \setminus f(B_f \cap V_i)} K_O^s(y, f_i^{-1}) |J(y, f_i^{-1})| d\sigma_y \geq \int_{V^* \setminus f(B_f \cap V_i)} \left| \frac{\partial f_i^{-1}}{\partial y_k} \right|^n d\sigma_y \end{aligned}$$

и отображение f_i^{-1} квазиконформно в среднем, следовательно, $f_i^{-1} \in W_{n, \text{loc}}^1(D \setminus B_f)$.

Поскольку ACLⁿ-гомеоморфизмы обладают N-свойством [7, 12], то f и f_i невырожденно дифференцируемы в своих областях задания [1, 12], и поэтому $K_I(y, f_i^{-1}) = K_O(x, f)$ для почти всех $y = f(x)$.

Производя во втором интеграле замену переменных [7, теорема 3, с. 364], получим

$$\infty > \int_{V^* \setminus f(B_f \cap V)} K_I^s(y, f_i^{-1}) |J(y, f_i^{-1})| d\sigma_y \geq \int_V K_O^{s'}(x, f) d\sigma_x.$$

Для завершения доказательства теоремы остается убедиться, что условие (4) есть следствие условия (1).

Из теоремы 2 [5] вытекает, что в качестве $\Phi_{I, s}^*(U)$ следует взять ограниченную неотрицательную абсолютно непрерывную σ -аддитивную функцию измери-

мых множеств в D , определяемую равенством

$$\Phi_{1,s}^*(U) = \int_U K_I^s(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x.$$

Аналогично из [5, следствие 1 теоремы 2] и в силу известного неравенства, связывающего характеристики отображений между собой, вытекает, что за $\Psi_{s'}(U')$ следует взять функцию, определяемую равенством

$$\Psi_{s'}(U') = \int_{U'} K_I^{s'}(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x.$$

Теорема доказана.

Теоремы 1–4, доказанные для отображений с s -усредненной характеристикой, можно распространить на классы и подклассы отображений с ограниченным интегралом Дирихле, квазирегулярных [1, 2] и др., пользуясь вложениями, доказанными в работе [20].

Для негомеоморфных квазирегулярных отображений эквивалентность аналитического и метрического определений доказана в [2]; для гомеоморфных отображений с искажением, ограниченным в среднем, эквивалентность аналитического и геометрического определений доказана в работе В.И. Кругликова [3], для негомеоморфных отображений с искажением, ограниченным в среднем, – в работе А.Н. Малютиной [4].

Исходя из высокой значимости модульной техники при исследовании геометрических свойств пространственных отображений, профессор О. Мартио предложил следующую общую концепцию – теорию Q -гомеоморфизмов, основы которой были заложены, начиная с работы [22] и др., а в работе [23] концепция Q -гомеоморфизмов была распространена на отображения с ветвлением, так называемые Q -отображения.

Приведем теорему об оценке модуля.

Теорема 5 (об оценке модуля [11, 20]). Пусть $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ – отображение с $K_{1,s}$ -усредненной характеристикой. Тогда выполняется неравенство

$$M(\Gamma') \leq \inf_{\rho \wedge \Gamma} \int_D (\rho(x))^n K_I(x, f) d\sigma_x, \quad (9)$$

где Γ – некоторое семейство кривых, в области D , Γ' – образ семейства Γ при отображении f .

Оценка (9) указывает на непосредственную связь класса отображений с s -усредненной характеристикой с теорией Q -гомеоморфизмов [11, 24–27], интенсивно развивающейся в последние годы (ср. с определением ниже).

Определение 6 [22]. Пусть D – область в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, и пусть $Q: D \rightarrow [1, \infty]$ – измеримая функция. Гомеоморфизм $f: D \rightarrow \overline{\mathbf{R}^n} = \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ называется Q -гомеоморфизмом, если

$$M(f(\Gamma)) \leq \int_D Q(x) \rho^n(x) dm(x)$$

для любого семейства Γ путей в D и любой допустимой функции ρ для Γ . Здесь непрерывность отображений понимается относительно сферической (хордальной) метрики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982. 288 с.
2. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. 1969. No. 448. P. 1–40.
3. Кругликов В.И., Пайков В.И. Некоторые геометрические свойства отображений с искажением, ограниченным в среднем. Донецк: Донецк ун-т, 1982. 43 с. (Деп. в ВИНТИ 06.09.82 № 4747-82 Деп).
4. Малютина А.Н. Об эквивалентности геометрического и аналитического определений отображений с ограниченным в среднем искажением // Экстремальные задачи теории функций 8. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990. С. 64–70.
5. Малютина А.Н., Елизарова М.А. Оценки искажения модулей для отображений с s -усредненной характеристикой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 2(10). С. 5–15.
6. Сычев А.В. Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983. 152 с.
7. Rado T., Reichelderfer R.V. Continuous transformation in analysis. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer-Verlag, 1955. 442 p.
8. Чернавский А.В. Конечнократные открытые отображения многообразий // Мат. сб. 1964. Т. 65. № 3. С. 357–369.
9. Полецкий Е.А. Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Мат. сборник. 1970. Т. 83 (125). № 2 (10). С. 261–273.
10. Малютина А.Н., Елизарова М.А. Теоремы о полунепрерывности снизу отображений с s -усредненной характеристикой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 4(8). С. 46–52.
11. Елизарова М.А., Малютина А.Н. Отображения с s -усредненной характеристикой. Определение и свойства // LAP LAMBERT. Academic Publishing, 2013. С. 121.
12. Väisälä J. Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings. – Lectures and Notes in Math. Berlin – Heidelberg – New-York: Springer-Verlag, 1971. 144 p.
13. Гольдштейн В.М. Емкость и продолжение функций с обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23. № 1. С. 49–59.
14. Малютина А.Н., Кривошеева И.И., Баталова Н.Н. Искажение сферического модуля семейства кривых // Исследования по математическому анализу и алгебре. Вып. 3. Томск: Изд-во ТГУ, 2001. С. 179–195.
15. Гусман М. Дифференцирование интегралов в $\mathbf{R}^n$. М.: Мир, 1978. 200 с.
16. Hesse J. A p -extremal length and p -capacity // Arkiv for Math. 1975. V. 13. No. 1. P. 131–144.
17. Мазья В.Г. О некоторых интегральных неравенствах для функций многих переменных // Проблемы математического анализа. Л.: Изд-во ЛГУ, 1973. Вып. 3. С. 33–68.
18. Малютина А.Н. Устранимость изолированных особенностей для отображений с искажением, ограниченным в s -среднем // Комплексный анализ и математическая физика. Школа-семинар. Материалы докладов. Красноярск, 1987. С. 72.
19. Сычев А.В., Малютина А.Н. Об отображениях с ограниченным в среднем искажением // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 2. С. 317–320.
20. Малютина А.Н., Елизарова М.А. Дифференциальные свойства отображений с s -усредненной характеристикой // Вестник ТГУ. 2007. № 300(1). С. 124–129.
21. Малютина А.Н., Елизарова М.А. О связи классов отображений с s -усредненной характеристикой с некоторыми классами пространственных отображений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 4(12). С. 18–32.
22. Мартио О., Рязанов В., Сребро У., Якубов Э. К теории Q -гомеоморфизмов // Докл. РАН. 2001. Т. 381. № 1. С. 20–22.
23. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., and Yakubov E. Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math 93 (2004). P. 215–236.

24. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., and Yakubov E. Q -homeomorphisms, Contemporary // Math. 2004. V. 364. P. 193–203.
25. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., and Yakubov E. On Q -homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. 2005. V. 30. No. 1. P. 1–21.
26. Ryazanov V. and Sevost'yanov E. Toward the theory of ring Q -homeomorphisms // Israel J. Math. 2008. V. 168. P. 101–118.
27. Рязанов В.И., Севостьянов Е.А. Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q -гомеоморфизмов // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48(6). С. 1361–1376.

Статья поступила 25.12.2012 г.

Malyutina A.N., Elizarova M.A. ON EQUIVALENCE OF THE ANALYTICAL AND GEOMETRICAL DEFINITIONS OF MAPPINGS WITH AN s -AVERAGED CHARACTERISTIC. In this paper we continue to develop the geometric method of studying properties of space mappings with an s -averaged characteristic. The method is based on the characteristic distortion law for modules of families of curves.

In recent decades, the theory of mappings with bounded distortion in the n -dimensional Euclidean space is one of the most meaningful and intensively developed branches of the function theory. These mappings were introduced and systematically studied in works by Yu.G. Reshetnyak, published since 1966. A part of Yu. G. Reshetnyak's results is contained in [1].

The most powerful tools used in the study of space mapping properties are methods that study invariance properties of conformal capacity or the module of families of curves. The equivalence of analytical and geometrical (expressed in terms of the conformal capacity of condensers) definitions of mappings with bounded distortion was introduced by O. Martio, S. Rickman and J. Väisälä [2]. In [3], the equivalence was proved for definitions of homeomorphic mappings with distortion bounded on the average. The equivalence for mappings nonhomeomorphic with distortion bounded on the average was considered in [4].

In the presented paper, we give a geometric definition of mappings with an s -averaged characteristic using the concept of a spherical p -module of a family of curves. This definition can also be interpreted as a generalization of the method of modules for mappings with an s -averaged characteristic. We also study these mappings properties and prove the equivalence of the geometric and analytic definitions using the distortion theorems.

Keywords: space mappings with an s -averaged characteristic, geometrical method of modules, equivalence, branching points.

REFERENCES

1. Reshetnyak Yu.G. Prostranstvennye otobrazheniya s ogranichennym iskazheniem. Novosibirsk: Nauka, 1982. 288 p. (in Russian).
2. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. 1969. No. 448. P. 1–40.
3. Kruglikov V.I., Paykov V.I. Nekotorye geometricheskie svoystva otobrazheniy s iskazheniem, ogranichennym v srednem. Donetsk: Donetsk un-t, 1982. 43 p. (Dep. v VINITI 06.09.82 No. 4747-82 Dep) (in Russian).
4. Malyutina A.N. Ob ekvivalentnosti geometricheskogo i analiticheskogo opredeleniy otobrazheniy s ogranichennym v srednem iskazheniem // Ekstremal'nye zadachi teorii funktsiy 8. Tomsk: Izd-vo Tom. un-ta, 1990. P. 64–70 (in Russian).
5. Malyutina A.N., Elizarova M.A. Otsenki iskazheniya moduley dlya otobrazheniy s s-usrednennoy kharakteristikoy // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2010. No. 2(10). P. 5–15 (in Russian).
6. Sychev A.V. Moduli i prostranstvennye kvazikonformnye otobrazheniya. Novosibirsk: Nauka, 1983. 152 p. (in Russian).
7. Rado T., Reichelderfer R.V. Continuous transformation in analysis. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer-Verlag, 1955. 442 p.

8. Chernavskiy A.V. Konechnokratnye otkrytye otobrazheniya mnogoobraziy // Mat. sb. 1964. V. 65. No. 3. P. 357–369 (in Russian).
9. Poletskiy E.A. Metod moduley dlya negomeomorfnykh kvazikonformnykh otobrazheniy // Mat. sbornik. 1970. V. 83 (125). No. 2 (10). P. 261–273 (in Russian).
10. Malyutina A.N., Elizarova M.A. Teoremy o polunepreryvnosti snizu otobrazheniy s s-usrednennoy kharakteristikoy // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2009. No. 4(8). P. 46–52 (in Russian).
11. Elizarova M.A., Malyutina A.N. Otoprazheniya s s-usrednennoy kharakteristikoy. Opredelenie i svoystva // LAP LAMBERT. Academic Publishing, 2013. P. 121 (in Russian).
12. Väisälä J. Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings. – Lectures and Notes in Math. Berlin – Heidelberg – New-York: Springer-Verlag, 1971. 144 p.
13. Gol'dshteyn V.M. Emkost' i prodolzhenie funktsiy s obobshchennymi proizvodnymi // Sib. mat. zhurn. 1982. V. 23. No. 1. P. 49–59 (in Russian).
14. Malyutina A.N., Krivosheeva I.I., Batalova N.N. Iskazhenie sfericheskogo modulya semeystva krivyykh // Issledovaniya po matematicheskomu analizu i algebre. Vyp. 3. Tomsk: Izd-vo TGU, 2001. P. 179–195 (in Russian).
15. Gusman M. Differentsirovanie integralov v R^n . Moscow: Mir, 1978. 200 p. (in Russian).
16. Hesse J. A p -extremal length and p -capacity // Arkiv for Math. 1975. V. 13. No. 1. P. 131–144.
17. Maz'ya V.G. O nekotorykh integral'nykh neravenstvakh dlya funktsiy mnogikh peremennykh // Problemy matematicheskogo analiza. L.: Izd-vo LGU, 1973. Vyp. 3. P. 33–68 (in Russian).
18. Malyutina A.N. Ustranymost' izolirovannykh osobennosti dlya otobrazheniy s iskazheniem, ogranichenym v s-srednem // Kompleksnyy analiz i matematicheskaya fizika. Shkola-seminar. Materialy dokladov. Krasnoyarsk, 1987. P. 72 (in Russian).
19. Sychev A.V., Malyutina A.N. Ob otobrazheniyakh s ogranichenym v srednem iskazheniem // Dokl. AN SSSR. 1985. V. 283. No. 2. P. 317–320 (in Russian).
20. Malyutina A.N., Elizarova M.A. Differentsial'nye svoystva otobrazheniy s s-usrednennoy kharakteristikoy // Vestnik TGU. 2007. No. 300(1). P. 124–129 (in Russian).
21. Malyutina A.N., Elizarova M.A. O svyazi klassov otobrazheniy s s-usrednennoy kharakteristikoy s nekotorymi klassami prostranstvennykh otobrazheniy // Vestnik Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2010. No. 4(12). P. 18–32 (in Russian).
22. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. K teorii Q -gomeomorfizmov // Dokl. RAN. 2001. V. 381. No. 1. P. 20–22 (in Russian).
23. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., and Yakubov E. Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math 93 (2004). P. 215–236.
24. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., and Yakubov E. Q -homeomorphisms, Contemporary // Math. 2004. V. 364. P. 193–203.
25. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., and Yakubov E. On Q -homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. 2005. V. 30. No. 1. P. 1–21.
26. Ryazanov V. and Sevost'yanov E. Toward the theory of ring Q -homeomorphisms // Israel J. Math. 2008. V. 168. P. 101–118.
27. Ryazanov V.I., Sevost'yanov E.A. Ravnostепенno nepreryvnye klassy kol'tsevykh Q -gomeomorfizmov // Sib. matem. zhurn. 2007. V. 48(6). P. 1361–1376 (in Russian).

MALYUTINA Aleksandra Nikolaevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: nmd@math.tsu.ru

Elizarova Mariya Aleksandrovna (Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: elizarova_m@sibmail.com

УДК 517.9

И.В. Рахмелевич

**ОБ УРАВНЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, СОДЕРЖАЩИХ
МУЛЬТИОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ ПРОИЗВОДНЫХ**

Рассмотрено понятие мультиоднородной функции и сформулированы некоторые их свойства. С помощью метода разделения переменных получены решения некоторых уравнений математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных по пространственным переменным. Выполнен анализ решений для некоторых частных случаев.

Ключевые слова: *уравнение, мультиоднородная функция, метод разделения переменных, частная производная.*

В современной математической физике и ее приложениях одним из важнейших методов является метод разделения переменных (РП), который успешно применяется для решения уравнений в частных производных [1, 2]. В работе [3] с помощью этого метода получены решения некоторых уравнений, содержащих однородные функции от производных по пространственным переменным. Данная работа является логическим продолжением работы [3]. Здесь рассматривается случай, когда в уравнение входит мультиоднородная функция от производных, у которой свойство однородности выполняется для некоторых подмножеств ее множества аргументов.

1. Мультиоднородные функции и некоторые их свойства

Пусть рассматривается функция N переменных $F(p_1, \dots, p_N)$. Предполагаем, что множество значений $I = \{1, \dots, N\}$ индекса i , нумерующего переменные, разбито на $K+1$ непересекающихся подмножеств I_k ($k = 0, 1, \dots, K$). Тогда вектор переменных $P = \{p_1, \dots, p_N\}$ можно разбить на $K+1$ непересекающихся подвекторов $P_k = \{p_i\}_{i \in I_k}$. По определению, функция F называется мультиоднородной относительно подвекторов $P_1, \dots, P_K$, если для произвольных значений $P_1, \dots, P_K$ и произвольного действительного α выполняются соотношения

$$F(P_0, P_1, \dots, \alpha P_k, \dots, P_K) = \alpha^{r_k} F(P_0, P_1, \dots, P_K) \quad (1)$$

Соотношения (1) должны выполняться для всех $k = 1, \dots, K$; показатели однородности r_k являются некоторыми действительными постоянными. Понятие мультиоднородной функции, введенное в работе [5], является обобщением классического понятия однородной функции [4]. Однако здесь, в отличие от работы [5], рассматривается более общий случай, когда имеется подвектор переменных P_0 , по которым функция F не является однородной.

Отметим некоторые свойства мультиоднородных функций, которые будут использованы в дальнейшем.

Свойство 1. При всех $1 \leq k \leq K$, для которых $r_k > 0$,

$$F(P_0, P_1, \dots, P_k, \dots, P_K)|_{P_k=0} = 0. \quad (1a)$$

Это свойство вытекает непосредственно из соотношений (1).

Свойство 2. Пусть множество значений $\Xi = \{1, \dots, K\}$ индекса k разделено произвольно на L ($1 \leq L < K$) непересекающихся подмножеств Ξ_l ($l = 1, \dots, L$). Определим новую систему подвекторов $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_L$ следующим образом: $\tilde{P}_l = \bigcup_{k \in \Xi_l} P_k$. Тогда,

если функция F является мультиоднородной относительно подвекторов $P_1, \dots, P_K$ с показателями однородности r_k , то она является мультиоднородной и относительно подвекторов $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_L$ с показателями однородности $\tilde{r}_l = \sum_{k \in \Xi_l} r_k$. В частности, если функция F является мультиоднородной относительно любой системы подвекторов $P_1, \dots, P_K$, то она является однородной в обычном смысле относительно вектора переменных $\tilde{P} = \bigcup_{k=1}^K P_k$.

Это свойство также можно получить из соотношений (1), применив эти соотношения последовательно для всех значений k , принадлежащих одному и тому же подмножеству Ξ_l .

2. Уравнение, содержащее мультиоднородную функцию

Рассмотрим уравнение относительно неизвестной функции $u(t, x_1, \dots, x_N)$

$$L_t u = F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right). \quad (2)$$

Здесь $L_t \equiv \sum_{m=1}^M a_m(t) \frac{\partial^m}{\partial t^m}$ – линейный дифференциальный оператор по переменной t .

Пусть $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, N$). Далее, предположим, что вектор $P = \{p_1, \dots, p_N\}$

можно разбить на $K+1$ непересекающихся подвекторов $P_0, P_1, \dots, P_K$ таким образом, что функция F является мультиоднородной относительно подвекторов $P_1, \dots, P_K$. Вектор независимых пространственных переменных $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ разбиваем на соответствующие подвекторы $X_k = \{x_i\}_{i \in I_k}$ и введем также соответствующие векторы производных $\frac{\partial}{\partial X_k} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i \in I_k}$ ($k = 0, 1, \dots, K$).

Применяя метод РП к уравнению (2), решение будем искать в виде

$$u(t, X) = T_0(t) + V_0(X_0) + \sum_{k=1}^K T_k(t) V_k(X_k). \quad (3)$$

Подставим выражение (3) в уравнение (2) и, учитывая соотношения мультиоднородности (1), приводим это уравнение к виду

$$\frac{L_t T_0(t)}{S(t)} + \sum_{k=1}^K V_k(X_k) \frac{L_t T_k(t)}{S(t)} = F\left(\frac{\partial V_0}{\partial X_0}, \frac{\partial V_1}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial V_K}{\partial X_K}\right), \quad (4)$$

$$S(t) = \prod_{k=1}^K [T_k(t)]^{r_k}. \quad (4a)$$

Продифференцируем уравнение (4) по X_k ($k=1, \dots, K$), откуда получаем

$$\frac{L_t T_k(t)}{S(t)} \frac{\partial V_k}{\partial X_k} = \frac{\partial}{\partial X_k} F\left(\frac{\partial V_0}{\partial X_0}, \frac{\partial V_1}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial V_K}{\partial X_K}\right). \quad (5)$$

Так как правая часть уравнения (5) не зависит от t , то это уравнение может удовлетворяться только при выполнении условий

$$\frac{L_t T_k(t)}{S(t)} = \lambda_k, \quad (6)$$

где $k=1, \dots, K$.

Подставляя (6) в уравнение (4) и учитывая, что правая часть этого уравнения также не зависит от t , получим

$$\frac{L_t T_0(t)}{S(t)} = \lambda_0. \quad (6a)$$

В итоге уравнение (4) приводится к виду

$$\lambda_0 + \sum_{k=1}^K \lambda_k V_k(X_k) = F\left(\frac{\partial V_0}{\partial X_0}, \frac{\partial V_1}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial V_K}{\partial X_K}\right). \quad (7)$$

Рассмотрим частные случаи, в которых может быть удовлетворено уравнение (7).

Случай 1:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = 0 \quad (k=1, \dots, K).$$

Тогда функции $V_k(X_k)$ должны удовлетворять уравнению

$$F\left(\frac{\partial V_0}{\partial X_0}, \frac{\partial V_1}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial V_K}{\partial X_K}\right) = 0. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) будем искать в виде

$$V_k(X_k) = \Phi_k(z_k) \quad (k=1, \dots, K), \quad V_0(X_0) = z_0, \quad (9)$$

$$z_k = \sum_{i \in I_k} c_i x_i, \quad (9a)$$

где c_i – некоторые постоянные, $\Phi_k(z_k)$ – некоторые неизвестные дифференцируемые функции. Принимая во внимание, что $\left. \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right|_{i \in I_k} = c_i \Phi'_k(z_k)$, уравнение (8)

сводим к следующему:

$$\prod_{k=1}^K [\Phi'_k(z_k)]^{r_k} F(C_0, C_1, \dots, C_K) = 0, \quad (10)$$

где введены постоянные векторы $C_k = \{c_i\}_{i \in I_k}$. Уравнение (10) удовлетворяется в следующих случаях.

$$а) \quad F(C_0, C_1, \dots, C_K) = 0. \quad (11)$$

Тогда решение уравнения (2) в этом случае

$$u(t, X) = T_0(t) + z_0 + \sum_{k=1}^K T_k(t) \Phi_k(z_k). \quad (12)$$

Здесь функции $\Phi_k(z_k)$ являются произвольными, z_k определяются формулой (9а) при $k = 0, 1, \dots, K$, причем постоянные c_i должны удовлетворять соотношению (11), а функции $T_k(t)$ при тех же значениях k должны удовлетворять уравнению

$$L_t T_k(t) = 0. \quad (12а)$$

б) $\Phi'_k(z_k) = 0$ при некотором фиксированном $k = k_0$, удовлетворяющем условию $r_k > 0$. Тогда решение уравнения (2) также определяется формулой (12), причем функция $\Phi_{k_0} = \text{const}$, а остальные функции $\Phi_k(z_k)$ являются произвольными. При этом, в отличие от п. а), постоянные c_i также являются произвольными.

Случай 2:

$$\lambda_0 \neq 0, \quad \lambda_k = 0 \quad (k = 1, \dots, K).$$

В этом случае левая часть уравнения (7) равна λ_0 , т.е. не зависит от пространственных переменных, поэтому $V_k(X_k) = z_k$ и решение уравнения (2) запишется как

$$u(t, X) = T_0(t) + z_0 + \sum_{k=1}^K T_k(t) z_k. \quad (13)$$

Здесь функции $T_k(t)$ определяются из уравнения (12а), после чего функция $T_0(t)$ находится из уравнения (6а). Постоянные c_i , входящие в выражение (9а) для z_k , должны удовлетворять условию

$$F(C_0, C_1, \dots, C_K) = \lambda_0 \quad (13а)$$

Случай 3: $\lambda_k \neq 0$ при некоторых значениях $k \in \Xi$. Множество значений $\Xi = \{1, \dots, K\}$ индекса k разделим на два непересекающихся подмножества Ξ_1, Ξ_2 следующим образом: если $k \in \Xi_1$ ($k \in \Xi_2$), то для данного значения k $\lambda_k \neq 0$ ($\lambda_k = 0$) соответственно. Тогда уравнение (7) запишется следующим образом:

$$\lambda_0 + \sum_{k \in \Xi_1} \lambda_k V_k(X_k) = F\left(\frac{\partial V_0}{\partial X_0}, \frac{\partial V_1}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial V_K}{\partial X_K}\right). \quad (14)$$

Так как левая часть уравнения (14) не зависит от X_k при $k \in \Xi_2, k = 0$, то для этих значений k $V_k(X_k) = z_k$.

Далее, покажем, что уравнение (14) может быть удовлетворено только в том случае, если множество Ξ_1 включает в себя не более одного элемента. Так как левая часть (14) представляет собой сумму функций, зависящих от разных аргументов, то и правая часть этого уравнения должна быть представима в виде суммы функций, зависящих от тех же аргументов:

$$F(P_0, P_1, \dots, P_K) = \sum_{k \in \Xi_1} F_k(P_k). \quad (15)$$

Пусть $l \in \Xi_1$ – некоторое фиксированное значение индекса k . Тогда из соотношений (1) и (15) следует

$$F(P_0, P_1, \dots, \alpha P_l, \dots, P_K) = \alpha^{\eta_l} \sum_{k \in \Xi_1} F_k(P_k). \quad (16)$$

С другой стороны, из (15) непосредственно вытекает

$$F(P_0, P_1, \dots, \alpha P_l, \dots, P_K) = \sum_{k \in \Xi_1} F_k(\tilde{\alpha}_k P_k), \quad (17)$$

где

$$\tilde{\alpha}_k = \begin{cases} \alpha & \text{если } k = l, \\ 1 & \text{если } k \neq l. \end{cases} \quad (17a)$$

Сопоставляя (16) и (17), приходим к соотношению

$$\sum_{k \in \Xi_1} \{ \alpha^{\eta_l} F_k(P_k) - F_k(\tilde{\alpha}_k P_k) \} = 0. \quad (18)$$

Равенство (18) должно удовлетворяться при произвольных α, P_k . Так как слагаемые в левой части (18) зависят от разных аргументов, то (18) эквивалентно следующей системе равенств:

$$(\alpha^{\eta_l} - 1)F_k(P_k) = 0 \quad (k \in \Xi_1, k \neq l), \quad (19a)$$

$$\alpha^{\eta_l} F_l(P_l) - F_l(\alpha P_l) = 0 \quad (19b)$$

Равенства (19a) могут быть удовлетворены при произвольных α, P_k только в том случае, если $F_k(P_k) \equiv 0$ при всех $k \in \Xi_1, k \neq l$. Это означает, что при выбранном значении l $F(P_0, P_1, \dots, P_K) = F_l(P_l)$, т.е. множество Ξ_1 состоит из одного элемента. Поэтому сумма в левой части (14) включает только одно слагаемое, благодаря чему это уравнение можно записать в виде

$$\lambda_0 + \lambda_l V_l(X_l) = F_l \left(\frac{\partial V_l}{\partial X_l} \right). \quad (20)$$

С помощью линейной замены $\tilde{V}_l = V_l + \frac{\lambda_0}{\lambda_l}$ это уравнение сводится к следующему:

$$F_l \left(\frac{\partial \tilde{V}_l}{\partial X_l} \right) - \lambda_l \tilde{V}_l(X_l) = 0. \quad (20a)$$

Уравнение (20a) было рассмотрено в работе [3]. Его решение имеет вид

а) в случае $\beta_l \neq 0$ ($r_l \neq 1$):

$$\tilde{V}_l(X_l) = (\beta_l B_l)^{1/\beta_l} (z_l + d_l)^{1/\beta_l}, \quad z_l = \sum_{x_i \in X_l} c_i x_i; \quad (21a)$$

б) в случае $\beta_l = 0$ ($r_l = 1$):

$$\tilde{V}_l(X_l) = \exp(B_l(z_l + d_l)). \quad (21b)$$

Здесь введены обозначения:

$$\beta_l = (r_l - 1)/r_l, \quad B_l = \left(\frac{\lambda_l}{F_l(C_l)} \right)^{1/r_l}, \quad (21b)$$

c_i, d_l – произвольные постоянные, $C_l = \{c_i\}_{i \in I_l}$. Тогда решение исходного уравнения (2) для рассматриваемого случая можно записать как

$$u(t, X) = T_0(t) + z_0 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^K T_k(t) z_k + T_l(t) V_l(z_l). \quad (23)$$

Здесь функции $T_k(t)$ являются решениями уравнения (12а), функция $T_0(t)$ находится из уравнения (6а), $T_l(t)$ определяется из уравнения (6), в котором необходимо заменить $k \rightarrow l$, $V_l(z_l)$ определяется формулами (21).

Случай 4: $V_k = \text{const}$ при некоторых значениях $k \in \Xi$, причем предполагаем, что для этих значений k $r_k > 0$. Разделим множество Ξ на два непересекающихся подмножества Ξ_1, Ξ_2 следующим образом: если $k \in \Xi_1$ ($k \in \Xi_2$), то для данного значения k $V_k = \text{const}$ ($V_k \neq \text{const}$) соответственно. Из свойства (1а) мультиоднородной функции следует, что в рассматриваемом случае правая часть уравнения (7) тождественно равна 0. Тогда это уравнение можно переписать в виде

$$\tilde{\lambda}_0 + \sum_{k \in \Xi_2} \lambda_k V_k(X_k) = 0, \quad (24)$$

$$\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0 + \sum_{k \in \Xi_1} \lambda_k V_k. \quad (24a)$$

Так как слагаемые под знаком суммы в левой части (24) зависят от разных аргументов и при этом не являются постоянными, то это уравнение может быть удовлетворено в том и только в том случае, если

$$\tilde{\lambda}_0 = 0, \quad \lambda_k = 0$$

для всех $k \in \Xi_2$. Тогда, введя функцию $\tilde{T}_0(t) = T_0(t) + \sum_{k \in \Xi_1} T_k(t) V_k$, решение уравнения (2) для данного случая запишем в виде

$$u(t, X) = \tilde{T}_0(t) + z_0 + \sum_{k \in \Xi_2} T_k(t) V_k(X_k). \quad (25)$$

Здесь функции $\tilde{T}_0(t)$, $T_k(t)$ должны удовлетворять уравнению (12а), а функции $V_k(X_k)$ являются произвольными.

Кроме рассмотренных выше решений уравнение (2) может иметь также дополнительные решения. Это вытекает из свойства 2 мультиоднородных функций, сформулированного в п. 1. Действительно, для каждой из систем подвекторов $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_L$, образованных способом, описанным в п.1, из исходной системы $P_1, \dots, P_K$, проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно получить решения, соответствующие этой системе подвекторов.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_4} \right)^2. \quad (26)$$

Функция в правой части этого уравнения является мультиоднородной относительно подвекторов $P_1 = \{p_1, p_2\}$, $P_2 = \{p_3, p_4\}$, где $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Решая уравнение (26) методом РП, в соответствии с описанными выше результатами, получаем следующие решения:

$$1) u(t, X) = A_0 t + B_0 + \sum_{k=1}^2 (A_k t + B_k) \Phi_k(z_k);$$

$$2) u(t, X) = A_0 t + B_0 + (A_1 t + B_1) V_1(x_1, x_2);$$

$$3) u(t, X) = A_0 t + B_0 + (A_2 t + B_2) V_2(x_3, x_4);$$

$$4) u(t, X) = T_0(t) + \sum_{k=1}^3 (A_k t + B_k) z_k,$$

где
$$T_0(t) = A_0 t + B_0 + \frac{\lambda_0}{A_2^2} \left\{ \frac{\tilde{A}_1}{20} (A_2 t + B_2)^5 + \frac{\tilde{B}_1}{12} (A_2 t + B_2)^4 \right\},$$

$$\tilde{A}_1 = \frac{A_1}{A_2}, \quad \tilde{B}_1 = B_1 - \frac{A_1}{A_2} B_2;$$

$$5) u(t, X) = A_0 t + B_0 + T_1(t) \exp(q_1 z_1) + (A_2 t + B_2) z_2,$$

где $T_1(t) = \sqrt{|\tau|} \left(A_1 I_{1/4} \left(\frac{\tau^2}{2A_2} \right) + B_1 K_{1/4} \left(\frac{\tau^2}{2A_2} \right) \right)$, $\tau = A_2 t + B_2$, $I_{1/4}, K_{1/4}$ – модифицированные функции Бесселя;

$$6) u(t, X) = A_0 t + B_0 + (A_1 t + B_1) z_1 + 4q_2 T_2(t) (z_2 + c_0)^2,$$

где $T_2(t)$ определяется из уравнения $T_2''(t) - \lambda_2 (A_1 t + B_1) T_2^2(t) = 0$;

$$7) u(t, X) = A_0 t + B_0 + \sqrt{q} T(t) \left[\frac{2}{3} (z + c_0) \right]^{3/2},$$

где $T(t)$ определяется из уравнения $T''(t) - \lambda T^3(t) = 0$;

$$8) u(t, X) = A_0 t + B_0 + q_0^{1/3} (At + B)(z + c_0);$$

$$9) u(t, X) = A_0 t + B_0 + (At + B) \Phi(z).$$

Здесь $\Phi(z)$, $\Phi_{1,2}(z_{1,2})$, $V_1(x_1, x_2)$, $V_2(x_3, x_4)$ являются произвольными дифференцируемыми функциями своих аргументов; c_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$), λ, A, B , λ_k, A_k, B_k ($k = 0, 1, 2$) – произвольные постоянные; q, q_k определяются выражениями

$$q = \frac{\lambda}{c_1 c_3^2 + c_2 c_4^2}, \quad q_k = \frac{\lambda_k}{c_1 c_3^2 + c_2 c_4^2} \quad (k = 0, 1, 2); \quad z_k \text{ определяются выражением (9a),}$$

$z = \sum_{i=1}^4 c_i x_i$. Решения 5), 6), 7), 8) применимы при условии $c_1 c_3^2 + c_2 c_4^2 \neq 0$; решения 1), 4), 9) – при условии $c_1 c_3^2 + c_2 c_4^2 = 0$. Уравнения для функций $T(t)$, $T_2(t)$, приведенные выше для решений 6), 7), сводятся к уравнению Эмдена – Фаулера [6]; выражение для $T_1(t)$, входящее в состав решения 5), также получено в [6, с.157].

Заключение

Таким образом, в данной работе методом разделения переменных получены решения уравнения в частных производных, содержащего мультиоднородную функцию от производных первого порядка по пространственным переменным. Проанализирован вид решения для возможных частных случаев и приведен пример применения полученных в работе соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
2. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002.
3. Рахмелевич И.В. О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3(23). С. 37–44.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984.
5. Рахмелевич И.В. О некоторых уравнениях в частных производных, содержащих мультиоднородные функции // Материалы III Международной заочной научно-практической конференции «Научная дискуссия: вопросы физики, математики, информатики». 2012. С. 18–23.
6. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001.

Статья поступила 03.10.2013 г.

Rakhmelevich I.V. ON EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS CONTAINING MULTI-HOMOGENEOUS FUNCTIONS OF DERIVATIVES. We introduce the concept of a multi-homogeneous function for which the homogeneity property holds for some subsets of its set of arguments. Some properties of such functions have been formulated. A class of mathematical physics equations containing a multi-homogeneous function of the first order derivatives with respect to spatial variables and a linear differential operator in time is considered. Using the method of separation of variables, we obtain solutions of equations of this kind in the form of finite sums in which each term depends on the time and spatial variables belonging to one of the above homogeneity subvectors X_k . It is shown that if all the constants of separation of variables are equal to zero, then the solution depends on arbitrary functions of some linear combinations of spatial variables z_k forming subvector X_k . For the cases of non-zero values of constants of separation of variables, we obtained solutions characterized by linear dependence on the values of z_k , solutions with the power and exponential dependence on these variables, and solutions containing arbitrary functions of variables forming subvectors X_k . The obtained results are illustrated by an example of an equation of second order in time with a multi-homogeneous function of four variables.

Keywords: equation, multi-homogeneous function, variables separation method, partial derivative.

REFERENCES

1. *Polyanin A.D., Zaytsev V.F., Zhurov A.I.* Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki. Moscow: Fizmatlit, 2005 (in Russian).
2. *Polyanin A.D., Zaytsev V.F.* Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki: tochnye resheniya. Moscow: Fizmatlit, 2002 (in Russian).
3. *Rakhmelevich I.V.* O primeneniі metoda razdeleniya peremennykh k uravneniyam matematicheskoy fiziki, soderzhashchim odnorodnye funktsii ot proizvodnykh // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2013. No. 3(23). P. 37–44 (in Russian).
4. *Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).
5. *Rakhmelevich I.V.* O nekotorykh uravneniyakh v chastnykh proizvodnykh, soderzhashchikh mul'tiodnorodnye funktsii // Materialy III Mezhdunarodnoy zaochnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Nauchnaya diskussiya: voprosy fiziki, matematiki, informatiki». 2012. P. 18–23.
6. *Zaytsev V.F., Polyanin A.D.* Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam. Moscow: Fizmatlit, 2001 (in Russian).

RAKHMELEVICH Igor Vladimirovich

(Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, Russian Federation)

E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

УДК 519.715

В.В. Чуруксаева, М.Д. Михайлов**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКА ЖИДКОСТИ
НАД РЕЛЬЕФОМ ДНА¹**

Исследуется течение невязкой несжимаемой жидкости на прямолинейном участке канала с негладким дном. Строится несколько математических моделей процесса на основе уравнений мелкой воды. Конструируется математическая модель процесса распространения примеси в потоке. Приводятся результаты их численной реализации.

Ключевые слова: *математическая модель, уравнения мелкой воды, погрешность аппроксимации, устойчивость решения, сглаживание решения.*

Для корректного построения математических моделей и численных методов расчета течений в реках важно знать, каким образом описываются основные процессы, происходящие в водоеме. Для этого строятся более простые модели для течения в каналах, учитывающие, однако, основные характеристики течения в природной среде.

Уравнения мелкой воды (МВ) – широко известное приближение, на основе которого проводится численное моделирование разнообразных задач экологии, течений в реках и водохранилищах, прибрежных зонах морей и океанов.

При выводе данных уравнений предполагается, что среда представляет собой достаточно тонкий слой, глубина которого много меньше его продольного размера, поэтому вертикальной составляющей скорости в слое можно пренебречь и полагать, что продольные скорости постоянны по толщине слоя [1]. Исходя из этого, данное приближение успешно применяется для описания течений, где значительно влияние на поток свободной поверхности и рельефа дна.

Цель данной работы – построение и численная реализация математической модели на основе одномерных уравнений мелкой воды, описывающей течение в канале и учитывающей факторы, оказывающие влияние на характер течения в естественном водоеме.

Одномерным можно считать течение жидкости в канале с плавно изменяющимся поперечным сечением и малой кривизной оси. При этом принимается, что все параметры течения постоянны в поперечном сечении потока. Полученные в рамках такой простейшей модели решения, естественно, носят приближенный характер, но во многих случаях хорошо совпадают с экспериментальными данными.

Физическая постановка задачи

Рассматривается течение идеальной жидкости на участке прямолинейного бесконечного в обе стороны канала со свободной поверхностью и дном переменной высоты.

¹ Работа выполнена по заданию Министерства образования и науки РФ № 8.4859.201 и при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 (соглашение № 14.В37.21.0667).

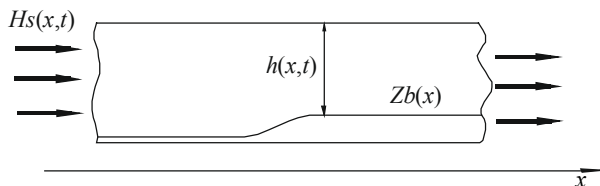


Рис. 1. Рассматриваемая область

Здесь $Hs(x,t)$ – уровень свободной поверхности, $Zb(x)$ – уровень дна, $h(x,t)$ – глубина потока

Математическая постановка задачи

Для одномерных течений уравнения МВ имеют вид ($a < x < b, t > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} &= -gh \frac{\partial h}{\partial x} - gh \frac{dZb}{dx} \end{aligned} \quad (1)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= h_0; \quad u(x, 0) = u_0; \\ \alpha_0 h(\xi, t) + \alpha_1 \frac{\partial h}{\partial x}(\xi, t) &= H; \\ \delta_0 u(\xi, t) + \delta_1 \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, t) &= U; \\ \partial e \quad \xi &= a \text{ или } \xi = b. \end{aligned}$$

Неизвестными величинами в системе (1) являются уровень воды $h(x, t)$, измеряемый от отметки дна, профиль которого задается известной функцией $Zb(x)$, и скорость потока $u(x, t)$. Здесь g – ускорение свободного падения.

Численный метод решения

Дискретизация уравнений проводится на равномерной сетке

$$\bar{\omega}_{s,\tau} = \left\{ (x_i, t^n) \mid x_i = a + is; t^n = n\tau, i = \overline{0, N}, n = \overline{0, M} \right\},$$

где s, τ – шаги по пространству и времени соответственно.

Для численного решения уравнений (1) будем использовать явные по времени разностные схемы первого и второго порядков точности. Первая из них отличается простотой реализации и небольшой трудоемкостью, вторая – более высокой точностью.

Схема 1. Схема с разностями против потока.

Для построения схемы исходные уравнения аппроксимируются с помощью метода конечных объемов.

В центрах ячеек $[x_i, x_{i+1}]$ определим дополнительные точки с координатами $xc_i = x_{i+1/2}$, которые будут являться гранями конечных объемов.

Значение скорости потока u будем определять в полущелых узлах – $x_{i-1/2}$, а глубину h – в x_i (см. рис.2); значения в полущелых (целых) узлах в этом случае вычисляются как среднее арифметическое значений в соседних точках.

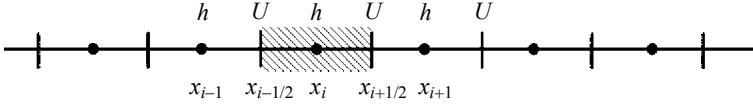


Рис. 2. Разбиение области для построения противопотоковой схемы

Проинтегрируем уравнения системы (1) в соответствующих «конечных объемах» и по временному интервалу $[t^n, t^{n+1}]$ и, подставляя полученные приближенные значения интегралов в уравнения (1), запишем разностную схему в виде

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\tau} + \frac{\max(u_{i+1/2}^n, 0)h_i^n - \max(-u_{i+1/2}^n, 0)h_{i+1}^n - \max(u_{i-1/2}^n, 0)h_{i-1}^n + \max(-u_{i-1/2}^n, 0)h_i^n}{s} = 0;$$

$$\frac{w_{i+1/2}^{n+1} - w_{i+1/2}^n}{\tau} + \frac{-\max\left(-\frac{1}{2}\left(u_{i+3/2}^n + u_{i+1/2}^n\right), 0\right)w_{i+3/2}^n + \max\left(\frac{1}{2}\left(u_{i+3/2}^n + u_{i+1/2}^n\right), 0\right)w_{i+1/2}^n - \max\left(-\frac{1}{2}\left(u_{i+1/2}^n + u_{i-1/2}^n\right), 0\right)w_{i+1/2}^n + \max\left(\frac{1}{2}\left(u_{i+1/2}^n + u_{i-1/2}^n\right), 0\right)w_{i-1/2}^n}{s} - \frac{\frac{g}{2}(h_{i+1}^{n+1}h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}h_i^{n+1}) - \frac{g}{2}(h_i^{n+1} + h_{i+1}^{n+1})(Zb_{i+1} - Zb_i)}{s} = 0, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$w_{i+1/2}^{n+1} = u_{i+1/2}^{n+1} / \left(\frac{1}{2}(h_i^{n+1} + h_{i+1}^{n+1}) \right), \quad i = \overline{0, N-1};$$

$$h_i^0 = h_0; \quad u_i^0 = u_0, \quad i = \overline{0, N};$$

$$h_0^n = H; \quad u_0^n = U, \quad n = \overline{1, M}.$$

В результате исследований получено, что схема имеет погрешность аппроксимации $O(s, \tau)$, а исследование по фон Нейману дает в качестве условия устойчивости метода критерий Куранта $C = \frac{\tau}{s} u \leq 1$ [2].

Схема 2. Двухшаговый метод Лакса – Вендроффа.

Запишем исходную систему (1) в векторном виде:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} = \bar{S},$$

$$\text{где } \bar{U} = \begin{pmatrix} h \\ uh \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} uh \\ hu^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{dZb}{dx} \end{pmatrix}.$$

Начальные и граничные условия для дифференциальной задачи имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{U}(x, 0) &= \bar{U}_0; \\ \lambda_0 \bar{U}(\xi, t) + \lambda_1 \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}(\xi, t) &= \bar{W}, \\ \text{где } \xi &= a \text{ или } \xi = b.\end{aligned}$$

Схема основана на разложениях неизвестных функций в ряд Тейлора по времени и пространству до членов второго порядка включительно и представляет собой метод типа «предиктор – корректор»: на первом шаге вычисления производятся по классической схеме Лакса и значения считаются предварительными, а на втором по схеме «чехарда» вычисляются окончательные значения [3].

Разностная аппроксимация системы (1) схемой Лакса – Вендроффа проводилась на равномерной сетке $\bar{\omega}_{s,\tau} = \{(x_i, t^n) | x_i = a + is; t^n = n\tau, i = \overline{0, N}, n = \overline{0, M}\}$.

Вычислительные формулы метода имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{2}[\bar{U}_{i+1}^n + \bar{U}_{i-1}^n] - \tau \frac{\bar{F}_{i+1}^n - \bar{F}_{i-1}^n}{2s} + \tau \bar{S}_i^n; \\ \bar{U}_i^{n+2} &= \bar{U}_i^n - 2\tau \frac{\bar{F}_{i+1}^{n+1} - \bar{F}_{i-1}^{n+1}}{2s} + 2\tau \bar{S}_i^{n+1}, \\ i &= \overline{1, N-1}, \quad n = \overline{0, M-1}; \\ \bar{U}_i^0 &= \bar{U}_0, \quad i = \overline{0, N}; \\ \bar{U}_0^{n+1} &= \bar{U}^0, \quad \bar{U}_N^{n+1} = \bar{U}_{N-1}^{n+1}, \quad n = \overline{0, M-1}; \\ \bar{U}_0^{n+2} &= \bar{U}^0, \quad \bar{U}_N^{n+2} = \bar{U}_{N-1}^{n+2}, \quad n = \overline{0, M-2}.\end{aligned} \tag{3}$$

Описанный метод устойчив при условии $C = \frac{\tau}{s}u \leq 1$ и имеет второй порядок аппроксимации по пространству и времени $O(s^2, \tau^2)$. Свойством монотонности описанная разностная схема не обладает, что характерно для схем второго порядка в целом.

Приведенная разностная схема имеет незначительную схемную вязкость, но высокие дисперсионные свойства и потому вблизи разрывов решение имеет характерные осцилляции. Для уменьшения их амплитуды в схему, как правило (например, в [1], [2]) добавляется искусственная вязкость, которая, однако, накладывает дополнительные ограничения на величину шага по времени. Оптимальным в этом случае будет применение алгоритма сглаживания, позволяющего уменьшить влияние на численное решение свойств схемы. Такой алгоритм был предложен В.П. Колганом [4].

Сглаживание здесь достигается добавлением к значениям искоемых переменных в узле с индексом i некоторого значения $\bar{\Delta}$:

$$\begin{aligned}\bar{U}^{n+1} &= \bar{U}^{n+1} + \bar{\Delta}^{n+1}; \\ \bar{U}^{n+2} &= \bar{U}^{n+2} + \bar{\Delta}^{n+2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^{n+k} = & \min(0.25 \left| \bar{U}_{i+1}^{n+k} - \bar{U}_i^{n+k} \right|, \frac{1}{16} \left| \bar{U}_{i+2}^{n+k} - 3\bar{U}_{i+1}^{n+k} + 3\bar{U}_i^{n+k} - \bar{U}_{i-1}^{n+k} \right|) \times \\ & \times \operatorname{sgn}(\bar{U}_{i+1}^{n+k} - \bar{U}_i^{n+k}) - \min(0.25 \left| \bar{U}_i^{n+k} - \bar{U}_{i-1}^{n+k} \right|, \\ & \frac{1}{16} \left| \bar{U}_{i+1}^{n+k} - 3\bar{U}_i^{n+k} + 3\bar{U}_{i-1}^{n+k} - \bar{U}_{i-2}^{n+k} \right|) \operatorname{sgn}(\bar{U}_i^{n+k} - \bar{U}_{i-1}^{n+k}), \\ & k = \overline{1, 2}. \end{aligned}$$

Выбор формулы для вычисления $\bar{\Delta}$ определяется порядком схемы, что позволяет сохранить порядок точности аппроксимации исходной дифференциальной задачи неизменным. Этот факт, доказанный В. П. Колганом [4], подтверждается расчетами, проведенными в данной работе.

Для реализации численных методов на ПЭВМ на языке C++ (MS Visual Studio 2010) написан комплекс программ с возможностью распараллеливания для вычислительной системы с общей памятью с помощью технологии OpenMP. Приведем решения некоторых известных тестовых задач, полученные с помощью вышеописанных методов.

Результаты расчетов

Задача 1. Задача о распаде разрыва (задача о разрушении плоской плотины).

Рассматривается плоское одномерное течение жидкости в канале длины L с плоским дном $Zb(x) = \text{const}$. В начальный момент в центре области задается разрыв уровня воды, разделяющий два однородных состояния с высотой уровня $h = h_1$ слева от разрыва и $h = h_2$ — справа. В начальный момент времени справа и слева от разрыва жидкость неподвижна, $u_1 = u_2 = 0$. Далее представлены расчеты, соответствующие данным, взятым из [1]: $L = 2000$ м, $h_1 = 10$ м, $h_2 = 0,1$ м. Граничные условия для данного случая имеют вид

$$\begin{aligned} h(0, t) &= H; \quad u(0, t) = U; \\ \frac{\partial h}{\partial x}(L, t) &= 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0. \end{aligned}$$

Результаты приведены для момента времени $t = 50$ с. Рис. 3 иллюстрирует распространение волны, образовавшейся при распаде разрыва начальных данных.

В целом из рисунка видно, что решения, найденные в данной работе, хорошо согласуются между собой. Можно отметить, что профиль высоты жидкости, полученный с помощью схемы второго порядка, более сглаженный из-за применения алгоритма Колгана.

При сгущении сетки решения, полученные по рассмотренным схемам, становятся практически идентичными и сходятся к аналитическому.

Кроме того, численные решения согласуются также с результатами, полученными в [1] с помощью «явной по времени схемы с аппроксимацией пространственных производных центральными разностями».

Задача 2. Течение над негладким дном.

Данный пример позволяет продемонстрировать влияние на поток профиля дна, что является одним из основных факторов в течениях, описываемых уравнениями мелкой воды.

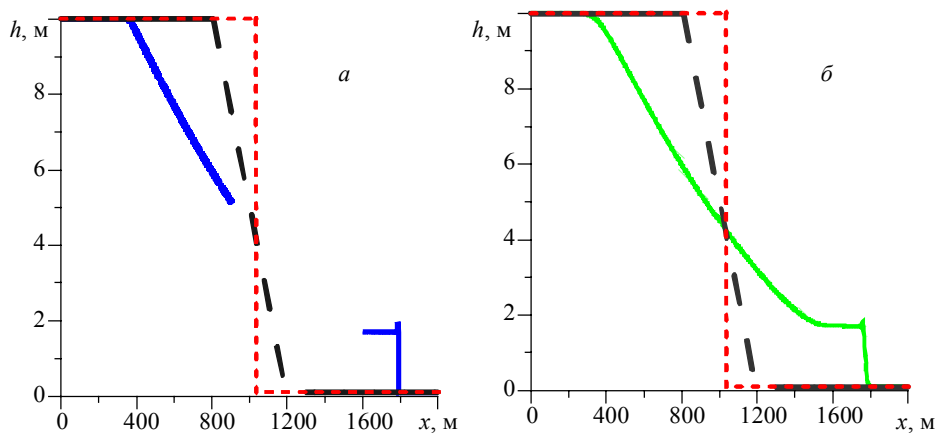


Рис. 3. Сплошные линии – профили высоты жидкости в момент времени $t = 50$ с (a – противопотоковая схема, b – схема Лакса – Вендроффа, ---- аналитическое решение, --- решение на очень мелкой сетке (шаг по пространству $s \approx 0,001$))

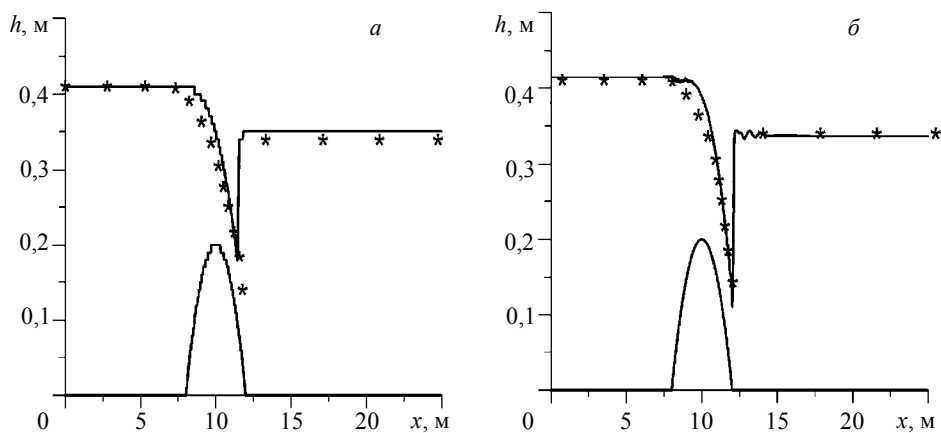


Рис. 4. Решение задачи о течении над неровностями дна – профиль высоты жидкости в момент времени $t = 70$ с (a – противопотоковая схема, b – схема Лакса – Вендроффа, «*» – решение, полученное в [1])

Рассчитывается течение с образованием гидродинамического разрыва, формирование которого определяется выбором начальных и граничных условий.

В соответствии с расчетом, представленным в [1], рассмотрим течение на участке канала длиной $L = 25$ м, форма дна которого описывается функцией $Zb(x) = \max(0, 0,2 - 0,05(x - 10)^2)$. Математическая модель данного процесса представляет собой систему (1) и краевые условия, обуславливающие появление гидродинамического разрыва

$$h(x, 0) = Hbx - Zb(x); \quad Hbx = 0,33 \text{ м}; \quad u(x, 0) = 0 \text{ м/с};$$

$$hu(0, t) = 0,18 \text{ м}^2/\text{с}; \quad \frac{\partial h}{\partial x}(0, t) = 0; \quad h(L, t) = Hbx - Zb(x); \quad u(L, t) = 0.$$

Далее приведены численные решения описанной задачи, полученные с помощью рассмотренных разностных схем. На рис. 4, *a* и *б* изображен профиль высоты жидкости при $t = 70$ с.

Следующий тестовый пример позволяет проиллюстрировать поведение численного решения над резким изменением профиля дна, что может быть характерно для естественных условий.

Задача 3. Рассматривается одномерное нестационарное течение жидкости в канале длины $L = 2000$ м с профилем дна, описываемым функцией

$$Zb(x) = \begin{cases} 0 \text{ м,} & x < L/2; \\ 0,1 \text{ м,} & x \geq L/2. \end{cases}$$

Для решения данной задачи начальные и граничные условия для системы (1) задаются следующим образом:

$$h(x, 0) = 0,2 \text{ м} - Zb(x); \quad u(x, 0) = 1 \text{ м/с};$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0, t) = 0; \quad u(0, t) = 1 \text{ м/с}.$$

Численное решение указанной задачи проводилось с использованием явной противопотоковой схемы первого порядка и схемы Лакса – Вендроффа второго порядка с соответствующими разностными начальными и граничными условиями.

Рис. 5 иллюстрирует профили высоты жидкости, рассчитанные для момента времени $t = 20$ с.

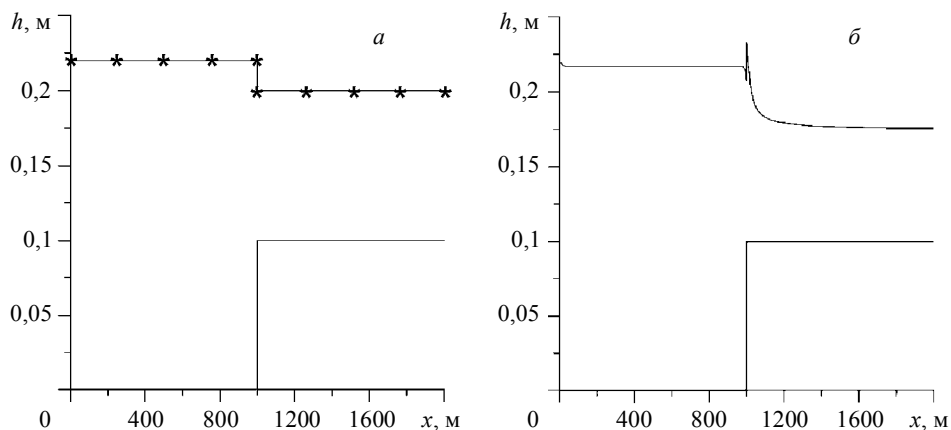


Рис. 5. Решение задачи о течении над неровностями дна – профиль высоты жидкости (*a* – противопотоковая схема, *б* – схема Лакса – Вендроффа, «*» – стационарное решение, взятое из [5])

Важное прикладное значение имеет исследование распространения загрязнений, попадающих в водоем.

Добавив в систему (1) уравнение, описывающее конвективный перенос загрязнения в потоке, а также необходимые начальные и граничные условия, получим математическую модель процесса распространения примеси в потоке в одномерной постановке. Запишем ее в векторном виде:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} = \bar{S},$$

где

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ hc \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} uh \\ hu^2 + \frac{g}{2} h^2 \\ uhc \end{pmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{dZb}{dx} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (4)$$

$$\bar{U}(x, 0) = \bar{U}_0,$$

$$\bar{U}(0, t) = \bar{U}^0. \quad (5)$$

Задача 4. В качестве примера, иллюстрирующего численную реализацию математической модели (4), (5), приведем решение задачи о распространении консервативной примеси из постоянного источника, расположенного в начальной точке области $x = 0$. Рельеф дна описывается функцией

$$Zb(x) = \max(0, 0, 5, 0 \cos\left(\frac{\pi(x-500)}{500}\right)).$$

Характеристики течения, полученные с помощью модели (4), (5) и используемые в качестве начальных данных для расчета распространения примеси, представлены на рис. 6.

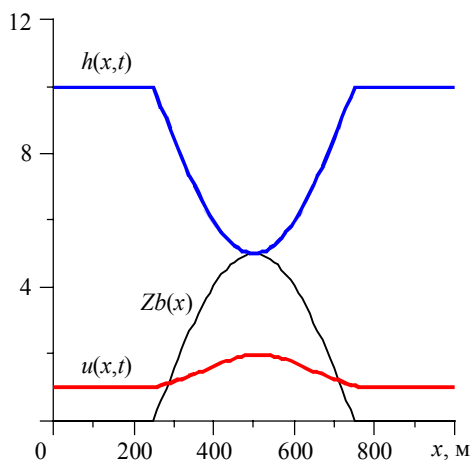


Рис. 6. Характеристики течения при $t = 50$ с: профили скорости $u(x,t)$ и высоты жидкости $h(x,t)$, рельеф дна $Zb(x,t)$

Результаты расчетов с использованием схем первого и второго порядка представлены на графиках (рис. 7, а и б соответственно).

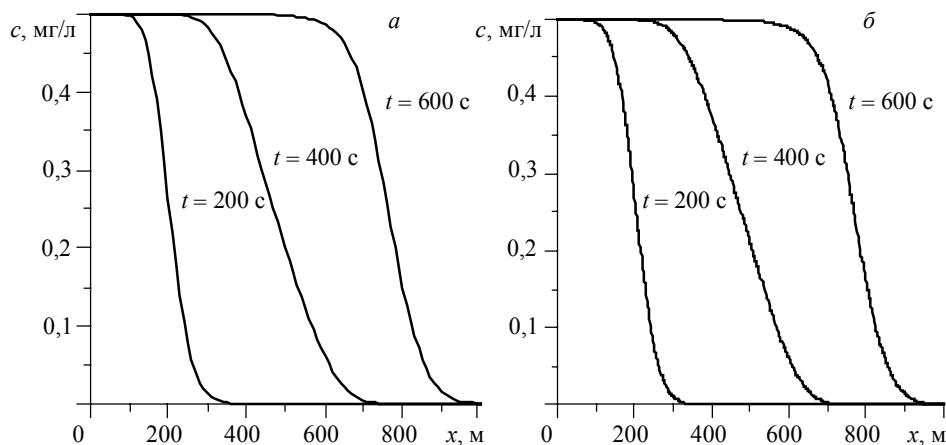


Рис. 7. Распределение загрязняющего вещества в потоке в указанные моменты времени (а – противопотковая схема, б – схема Лакса – Вендроффа)

Из рисунка видно, что на участке канала с негладким дном процесс распространения примеси ускоряется, что связано с увеличением скорости потока при перетекании через преграду. Также можно заметить, что схема первого порядка сильнее сглаживает решение около скачка, в то время как решение, полученное по схеме второго порядка, ближе к аналитическому.

Фоновая концентрация загрязняющего вещества полагалась равной нулю, что не характерно для естественных условий, однако этот факт не оказывает существенного влияния на характер описываемого процесса. Концентрация, задающая поступление примеси, равна 0,5 мг/л, что соответствует измерениям концентрации нефтепродуктов, проводившимся на р. Томь.

Очевидно, что данные примеры являются лишь грубым приближением задачи о распространении загрязнения в естественных условиях, однако их решение позволяет оценить возможность использования уравнений вида (4), (5) для описания данного процесса.

Выводы

Существует множество примеров применения уравнений мелкой воды для описания различных физических явлений в науках о Земле. По этой причине разработка приближенных моделей и вычислительных методов, альтернативных решению исходных трехмерных уравнений гидродинамики, является актуальной проблемой.

В работе были представлены некоторые модельные задачи, являющиеся приближением задачи о течении в реке, а также распространения примеси в речном потоке. В работе использовались разностные схемы различного порядка точности, одна из которых была построена методом конечных объемов, другая – взята из [3].

Результаты численных расчетов представлены в виде графиков изменения глубины и скорости потока (рис. 3–7). Сравнение полученных приближенных решений с результатами из [1, 5] показало совпадение для обоих численных методов, что говорит об адекватности построенных моделей описываемому физическому процессу, о корректности расчетов и делает возможным обобщение простейших моделей на более сложный случай, когда система уравнений мелкой воды позволяет более детально описать течение и учесть множество факторов, определяющих его в естественных условиях.

Дальнейшие исследования в указанном направлении предполагают построение более сложных математических моделей в двумерной постановке, учитывающих эффекты трения, вязкости, а также использование данных о рельефе дна реки Томь, форме ее берегов, а также применение более совершенных численных методов решения такого рода задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булатов О.В., Елизарова Т.Г. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 1. С. 170–184.
2. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.
3. Роч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1976. 612 с.
4. Колган В.П. Применение операторов сглаживания в разностных схемах высокого порядка точности // Вычислительная математика и математическая физика. 1978. Т. 18. № 5. С. 1340–1345.

5. Петросян А.С. Дополнительные главы гидродинамики тяжелой жидкости. М.: ИКИ РАН, 2010. 127 с.
6. Чуруксаева В.В., Михайлов М.Д. Математическое моделирование процессов самоочищения реки // Материалы юбилейной 50-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. С. 289.

Статья поступила 26.09.2013 г.

Churuksaeva V.V., Mikhailov M.D. NUMERICAL MODELLING OF THE FLUID FLOW ABOVE THE BOTTOM TOPOGRAPHY. This paper presents an investigation of an inviscid incompressible fluid flow in a straight section of a channel with an irregular bottom as a closure of river stream model. Mathematically, the problem is written as a boundary-value problem for shallow water equations.

Three test computational examples for a steady and unsteady flow above regular and irregular bottom have been carried out to study the model and possibilities of its applications.

The computed solutions are obtained using the finite-difference method with the first order UPWIND scheme and two-step Lax–Wendroff scheme, which is second-order accurate in both space and time. To suppress dispersion characteristics which are the feature of second-order schemes, Kolgan's surfacing algorithm is used. Numerical solutions obtained by the aforesaid schemes well agree with each other and become equivalent upon mesh clustering.

In addition, a model of the contaminant dispersion in a stream over an irregular bottom is constructed. The computed distribution of the contaminant is in a good agreement with the physical flow pattern.

Keywords: mathematical model, shallow water equations, approximation error, solution stability, solution smoothing.

REFERENCES

1. Bulatov O.V., Elizarova T.G. Regulizirovannyye uravneniya melkoy vody i effektivnyy metod chislennogo modelirovaniya techeniy v neglubokikh vodoemakh // Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki. 2011. V. 51. No. 1. P. 170–184 (in Russian).
2. Rikhtmayer R., Morton K. Raznostnye metody resheniya kraevykh zadach. Moscow: Mir, 1972. 418 p. (in Russian).
3. Rouch P. Vychislitel'naya gidrodinamika. Moscow: Mir, 1976. 612 p. (in Russian).
4. Kolgan V.P. Primenenie operatorov sglazhivaniya v raznostnykh skhemakh vysokogo poriadka tochnosti // Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika. 1978. V. 18. No. 5. P. 1340–1345 (in Russian).
5. Petrosyan A.S. Dopolnitel'nye glavy gidrodinamiki tyazheloy zhidkosti. Moscow: IKI RAN, 2010. 127 p. (in Russian).
6. Churuksaeva V.V., Mikhaylov M.D. Matematicheskoe modelirovanie protsessov samoochishcheniya reki // Materialy yubileynoy 50-y Mezhdunarodnoy nauchnoy studencheskoy konferentsii «Student i nauchno-tekhnicheskyy progress». Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2012. P. 289 (in Russian).

CHURUKSAEVA Vladislava Vasilievna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: chu.vv@mail.ru

MIKHAILOV Mikhail Dmitrievich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: michel@math.tsu.ru

МЕХАНИКА

О.А. Бахтеев, А.В. Лысков, Е.Н. Михеев

МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА ЗЕРЕН СТЕХИОМЕТРИЧЕСКОГО ДИОКСИДА УРАНА ПРИ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ВЫДЕРЖКЕ

Рассмотрен процесс роста зерна стехиометрического диоксида урана при изотермической выдержке. На основе рассмотренных в статье физических представлений разработана трехмерная модель роста зерна UO_2 , которая позволяет оценить влияние пор, увлекаемых мигрирующими границами зёрен, на кинетику роста зерна в стехиометрическом UO_2 , с учетом совокупного массопереноса, как путем поверхностной диффузии, так и за счет испарения – конденсации, исходного распределения по размерам частиц и его эволюции в процессе роста зерна. Использование в модели предложенных аналитических выражений существенно упрощает структуру расчетов. Это позволяет сократить расчетное время, что дает возможность использовать модель для решения таких практически важных задач, как предварительная оценка влияния изменения технологического режима при изготовлении ядерного топлива на средний размер зерна в таблетках, а также для оценки роста среднего размера зерна на горячих участках топлива при облучении ТВЭЛа. Модель роста зерна верифицирована по известным экспериментальным данным.

Ключевые слова: диоксид урана, рост зерен, модель, средний размер зерна, пористость.

В настоящий момент известно значительное количество работ, посвященных кинетике роста зерна в UO_2 , например [1–5]. Результаты, получаемые экспериментально, обычно описываются полуэмпирической формулой типа

$$\bar{a}^n - \bar{a}_0^n = \xi \cdot \exp(-Q/RT) \cdot t, \quad (1)$$

где $\bar{a}_0$ – исходный средний размер зерна; $\bar{a}$ – средний размер зерна, в текущий момент времени; n – показатель степенной зависимости; ξ – константа; Q – энергия активация процесса; R – молярная газовая постоянная; T – температура процесса; t – время.

Однако параметры этой зависимости неоднозначны. В частности, показатель степенной зависимости n по результатам различных экспериментальных работ варьируется от 2,5 до 5.

Наиболее низкое значение показателя n представлено в работе МакИвена и Хаяши (MacEwan, Hayashi) [2]. Компиляция результатов ряда работ, выполненная Олсеном (Olsen) [3], в совокупности с его собственными результатами привела к значению показателя n равному 4. По-видимому, широкий разброс данных по кинетике роста зерна UO_2 стехиометрического состава обусловлен не столько погрешностями измерений, сколько существенным влиянием пористости. Типично высокие значения n (среднее значение 4) также указывают, что поры в образцах,

исследованных экспериментально, существенно сказываются на кинетике роста зерна.

Действительно, теоретические разработки по влиянию пористости, компилированные Николзом (Nichols) [4], показали, что поры, увлекаемые границами зёрен, могут существенно сказываться на кинетике роста зерна. При этом кинетика роста зерна описывается формулой типа (1), в которой показатель n изменяется от 3 до 5 в зависимости от доминирующего механизма миграции пор. Существенное влияние различий в пористости исходных образцов, в частности, убедительно показано в работе [5].

Спечённые таблетки из UO_2 имеют сравнительно высокую пористость (порядка 4–6 %), которая существенно влияет на скорость миграции границ зерен. При этом важен не столько общий объем пористости, сколько объемная доля и размер крупных пор, расположенных на границах зерен. В основном такие поры расположены по вершинам многогранника (рис. 1). Именно этот вид сорт пор может существенно тормозить миграцию границ.

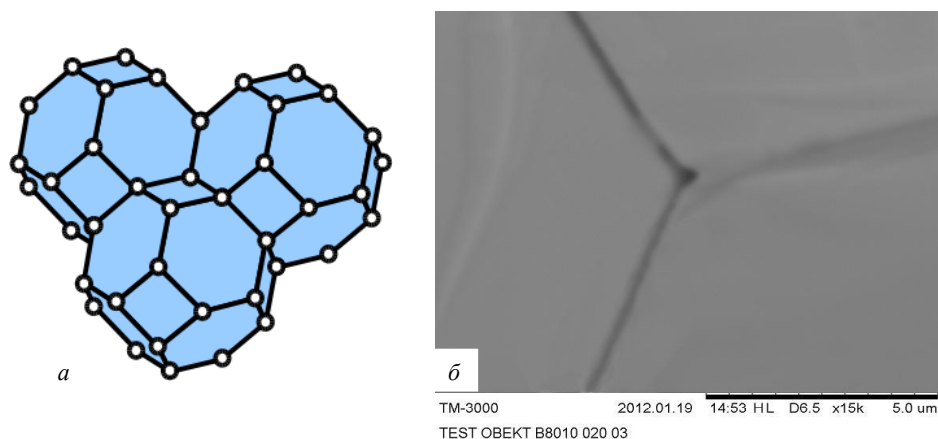


Рис. 1. Распределение пор на вершинах многогранников в упаковке из тетракайдекаэдрических зерен (а); изображение поры (диаметр ~ 200 нм) в месте стыка зерен, полученное с помощью сканирующей электронной микроскопии (б)

В настоящей модели в качестве многогранников, описывающих форму зерна, принимается непрерывный ряд от тетракайдекаэдра (усеченного октаэдра), вслед за работами Бира (Beere), например [1], для зерна максимального размера, до тетраэдра для зерна минимального размера. «Переходные» формы многогранников имеют последовательно уменьшающееся количество вершин и, соответственно, количество пор на их поверхности. При этом в модели допускается, что длины ребер всех этих многогранников равны.

Поры на границах зёрен увлекаются мигрирующими границами. При этом их миграция обусловлена рядом механизмов, описывающих массоперенос с лидирующего («переднего») участка поверхности поры на «задний» участок. Формулы для расчёта подвижности квазисферических пор, увлекаемых мигрирующими границами, компилированы Николзом (Nichols) в работе [4]. Для массопереноса по механизму испарение – конденсация и за счёт поверхностной диффузии соответствующие формулы были уточнены Сюшем (Hsueh) в работах [6, 7], которые

учитывали отклонение формы мигрирующей поры, расположенной на границе зерна, от сферической. Эти формулы приведены ниже.

Максимальная скорость миграции межзеренной поры при массопереносе, определяемом поверхностной диффузией, описывается формулой

$$(v_p)_{\max} = \frac{\Omega \cdot D_s \cdot \delta_s \cdot \gamma_s}{k \cdot T \cdot r^3} \cdot (17,9 - 6,2 \cdot \theta), \quad (2)$$

где θ – диэдрический угол; D_s – коэффициент поверхностной диффузии; δ_s – толщина приповерхностного диффузионного слоя; Ω – объем, приходящийся на одну структурную единицу материала; r – поперечный размер поры; γ_s – удельная энергия поверхности границы; k – постоянная Больцмана; T – температура.

Максимальная скорость миграции межзеренной поры при массопереносе, определяемом процессом испарение – конденсация, описывается формулой

$$(v_p)_{\max} = \frac{2\Omega\gamma_s}{kTr} \cdot \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} \frac{P_0}{\rho} (0,13\theta^2 - 0,85\theta + 1,4), \quad (3)$$

где P_0 – суммарное давление урансодержащих компонентов пара над поверхностью нулевой кривизны; ρ – плотность материала; m – молекулярная масса материала.

Подвижность межзеренных границ определяется целым рядом параметров поликристаллической системы, в том числе диффузионными характеристиками матричного материала и растворенных примесей, наличием примесей, сегрегированных на границах зерен, диффузионными характеристиками, углами смачивания, размерами и характером расположения пор относительно границ зерен.

При отсутствии влияния примесей и пор, подвижность межзеренных границ (так называемую собственную подвижность), согласно [8], можно оценить по формуле

$$M = D_b \cdot \frac{b_b^2}{k \cdot T}, \quad (4)$$

где D_b – коэффициент межзеренной диффузии; b_b – ширина межзеренной границы.

Однако в пористом материале собственная подвижность межзеренных границ не всегда определяет реальную подвижность. Это обусловлено существенным торможением, расположенными на них межзеренными порами. Причем степень торможения границ порами заметно возрастает по мере увеличения размера последних. В то же время подвижность пор существенно возрастает при приближении размера поры к нулю. Таким образом, собственная подвижность границ зерен ограничивает скорость их миграции для случаев отсутствия пор или их весьма малого размера.

В зависимости от линейных размеров системы «пора – граница зерна», результаты их взаимодействия при миграции границ могут быть следующими:

- поры остаются прикрепленными к границам зерен и препятствуют их миграции аналогично дисперсным включениям второй фазы, когда отрыв границы энергетически нецелесообразен в связи с увеличением ее протяженности. Завершению такого рода взаимодействия соответствует уменьшение поры до размера, допускающего миграцию совместно с границами зерен или поглощение растущим зерном;

- поры, оставаясь прикрепленными к границам, мигрируют вместе с ними с равными скоростями, однако, замедляют рост зерен;

- поры отделяются от границ и оказываются внутри растущего зерна (поглощаются). Это происходит, когда скорость движения границ превышает максимально возможную скорость движения пор. Оказавшись внутри зерна, поглощенные поры не оказывают влияния на рост поглотившего их зерна.

Оценки [9] показали, что для UO_2 стехиометрического состава в температурном интервале 700–2000 К массоперенос обеспечивается совместным действием поверхностной диффузии и механизма испарение – конденсация. В настоящей работе подвижность границ находилась суммированием значений для подвижности границ, обеспечиваемых этими двумя механизмами. Однако сверху подвижность границ в любом случае была ограничена их собственной подвижностью.

Алгоритм

Для достоверной оценки изменения размеров зерна требуется обработка значительного количества зерен. Это связано с исчезновением части зерен в процессе массопереноса и требованиями к объему выборки. Для упрощения расчетов зерна поделены на категории, каждая из которых характеризуется средним размером и формой аппроксимирующего многогранника, а также количеством зерен n . В модели принималось, что все зерна каждой категории имеют одинаковые форму, размер и окружение. Кроме того, принималось, что все поры, находящиеся на вершинах зерен каждой категории, имеют одинаковый размер.

Начальное распределение зерен по размеру задавалось распределением Сетра (Saetre) [9], который нашёл аналитическое решение для устойчивого распределения зёрен по размеру, рассматривая случай равносторонних многогранников:

$$P(u) = \frac{\beta u \left(\frac{1 + \sqrt{3}/2}{\sqrt{u^2 - 0,25} - 1 - \sqrt{3}/2} \right)^\beta \exp \left(\frac{\beta(1 + \sqrt{3}/2)}{\sqrt{u^2 - 0,25} - 1 - \sqrt{3}/2} \right) \exp(\beta)}{u^2 - (2 + \sqrt{3})(\sqrt{u^2 - 0,25} - \sqrt{3}/2)} \quad (5)$$

где β – геометрический фактор (для 2D равный 2, для 3D равный 3); u – относительный размер зерна, a/a_0 .

Скорость миграции границы v , вследствие ее ненулевой кривизны, пропорциональна кривизне границы K :

$$v = M\gamma_b K, \quad (6)$$

где M – подвижность межзеренной границы; γ_b – удельная энергия поверхности границы; K – кривизна поверхности границы.

В соответствии с работой Хиллерта (Hillert) [10] среднее изменение размера зерна da/dt данного типа зёрен в области их контакта с зёрнами остальных типов можно представить в виде

$$da/dt = \alpha M\gamma_b \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a} \right), \quad (7)$$

где α – геометрический фактор, приблизительно равный 0,5 для двумерного случая (анализ поведения проволоки или волокон) или равный 1 – для трехмерного случая (анализ поведения квазисферических частиц); a_k – некоторый критический размер, характерный для данного распределения по размерам зерен в материале, ниже которого зёрна в среднем уменьшаются, а выше – растут.

Критический радиус a_k зерна был определён, исходя из уравнения материального баланса растущих и поглощаемых зёрен с учётом формулы (7). При сделанных в модели приближениях он определяется как

$$a_k = \frac{\sum a_i^2 M_i n_i}{\sum a_i M_i n_i}. \quad (8)$$

При проведении расчётов на стадии роста зерен спекание материала не учитывалось, так как из экспериментов по доспеканию известно, что усадка спечённых таблеток из UO_2 весьма мала (менее 0,4 %).

Подвижность определялась максимальной скоростью пор на стыке зерен при данном механизме массопереноса (формулы (2) и (3)) и кривизной мигрирующей границы.

Значения параметров массопереноса для расчета подвижности приведены в таблице.

Параметры массопереноса для вычисления подвижности поры в стехиометрическом UO_2 [11]

Параметр	Обозначение	Значение
Плотность, $кг/м^3$	ρ	10960
Молекулярная масса UO_2 , кг	m	$4,48 \cdot 10^{-25}$
Молекулярный объем UO_2 , $м^3$	Ω	$4,09 \cdot 10^{-29}$
Энергия поверхности поры, Дж/ $м^2$	γ_s	$0,41(0,85 - 1,4 \cdot 10^{-4} T)$, при $0 < T < 2850$ °C
Коэффициент поверхностной диффузии, $м^2/с$	D_s	$50 \cdot \exp(-450000/RT)$
Толщина диффузионного слоя, м	δ_s	$3 \cdot 10^{-10}$
Диэдрический угол (в поре), градусы	θ	$91,5^\circ$
Давление ураносодержащих компонентов пара над UO_2 , атм	$\lg P(UO_2)$	$67,531 + 4,382 \cdot 10^{-3} T - 4,411 \cdot 10^{-7} T^2 -$ $- 37090/T - 19,070 \cdot \lg T$

Скорость движения поры существенно зависит от ее размера. В данной работе предполагается, что на изменение размеров зерна в первую очередь оказывают влияние поры, располагающиеся на стыках зерен и являющиеся геометрическими вершинами зерна. Таким образом, необходимо учитывать количество вершин (пор) на одно зерно в зависимости от размера последнего. Предполагая, что ребра соприкасающихся зерен имеют одинаковую длину, а количество вершин изменяется от 4 (тетраэдр) для зерна минимального размера до 24 (усеченный октаэдр) для зерна максимального размера, построена зависимость количества вершин на одно зерно в зависимости от его объема. Однако для практического использования удобнее использовать зависимость количества пор на зерно от относительного диаметра зерен (равного нулю для зерна минимального размера и единице – для максимального). Полученные для различных многогранников значения количества пор в зависимости от относительного диаметра зерен аппроксимированы параболой:

$$y = 1,7960x^2 + 3,2602x + 1,000, \quad (9)$$

где x – относительный эффективный диаметр; y – количество пор в расчёте на одно зерно.

Средний размер поры на стыке зерен вычислялся из объема данного вида пористости. Суммарный объем пор на стыках зерен изменяется при росте зерна за

счет их спекания и поглощения растущими зёрнами. Уменьшение объема пор на вершинах зерен V_v определялось эмпирической зависимостью

$$V_v = V_p 0,027 a_k^{-1,3} \quad (10)$$

где V_p – суммарный объем пор в образце.

При расчете времени $t_{\min}$, за которое исчезает категория зерен минимального размера, критический размер зерна и подвижность пор принимались неизменными. Время поглощения зёрен для категории зерен минимального размера находилось по формуле

$$t_{\min} = -\frac{a_k^2}{\alpha \mu} \left[\frac{a_{\min}}{a_k} + \ln \left(1 - \frac{a_{\min}}{a_k} \right) \right] \quad (11)$$

Изменение размеров зёрен других категорий за это же время рассчитывали следующим образом:

$$\frac{x}{a_k} + \ln \left(\frac{\frac{x}{a_k} - 1}{\frac{x_0}{a_k} - 1} \right) = \frac{x_0}{a_k} + \frac{\alpha \mu t}{a_k^2}, \quad (12)$$

где x_0 – размер зерна в текущий момент времени; x – размер зерна после выдержки t .

Решение этой трансцендентной зависимости находилось методом касательных Ньютона с погрешностью не более 10^{-10} мкм.

Результаты и обсуждение

На рис. 2–4 представлены расчётные данные в сравнении с экспериментальными при различных температурах. Черными квадратами обозначены экспериментальные данные работы [11], пунктирными линиями нанесены значения, найденные в соответствии со степенной зависимостью, сплошной линией – значения, полученные расчётом по модели; СЭДЗ – средний эффективный диаметр зерна. Для степенной зависимости (1) получены следующие коэффициенты: $n = 3,5$; $\xi = 5,1 \cdot 10^{16}$; $Q = 5,2 \cdot 10^5$. Показатель степенной зависимости является промежуточным относительно результатов работ [1–5].

В процессе спекания изменяется не только средний размер зерен, но и их распределение. В течение времени распределение размывается в сторону уширения и увеличивается доля зерен в левой части распределения (относительно медианы), что объясняется более высокой относительной скоростью изменения размера мелких зерен. После нескольких часов спекания распределение характеризуется распределением Сетра (Saetre), а спустя сотни часов переходит в распределение, представленное на рис. 5. Пунктирной линией обозначено распределение, полученное на основе данных модели, сплошной линией – распределение Сетра для рассчитанного СЭДЗ. Перепады на распределении обусловлены допущениями, принятыми в данной модели, а именно, дискретностью характеристик категорий зерен. В реальном образце, вследствие флуктуаций размеров зерен и их окружения, левый край распределения будет сглаженным и его форма будет близка к форме распределения Сетра. Полученные данные показывают, что распределение Сетра остается устойчивым в процессе роста зерен и сделанный выбор в его пользу при моделировании оправдан.

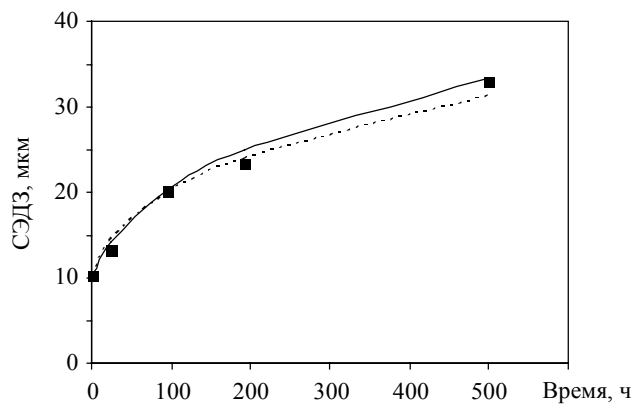


Рис. 2. Изменение размера зерна в процессе изотермической выдержки при 1650 °C

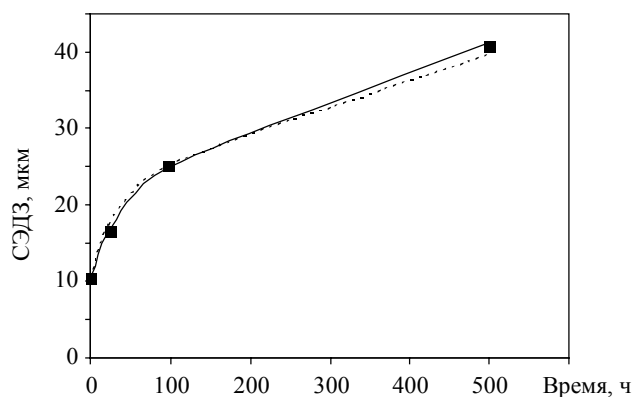


Рис. 3. Изменение размера зерна в процессе изотермической выдержки при 1700 °C

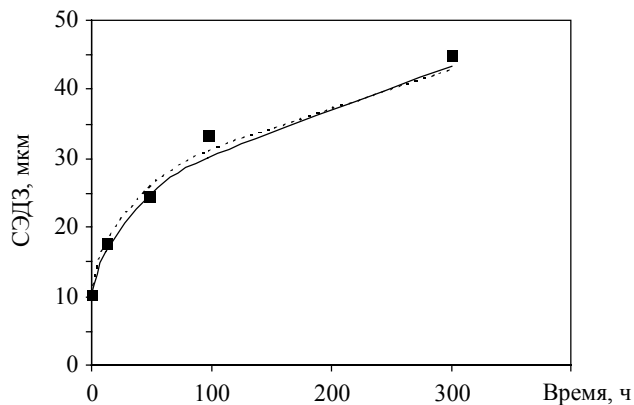


Рис. 4. Изменение размера зерна в процессе изотермической выдержки при 1750 °C

Вычисление среднего эффективного диаметра зерен (СЭДЗ) приводилось в соответствии с измерением СЭДЗ по микрофотографиям, т.е. проводилось преобразование распределения размеров зерен в трехмерном пространстве в распределение в плоскости шлифа.

Из сравнения представленных данных видно, что расчёт по представленной модели даёт значения близкие к экспериментальным. Значения достоверности аппроксимации экспериментальных данных с помощью формулы типа (1) и данных, полученных моделированием, составляют соответственно: а) 0,9860 и 0,9903 при температуре 1650 °С; б) 0,9954 и 0,9993 – при температуре 1700 °С; в) 0,9971 и 0,9965 при температуре 1750 °С. Таким образом, данные, полученные в результате моделирования, характеризуются более высокой степенью достоверности.

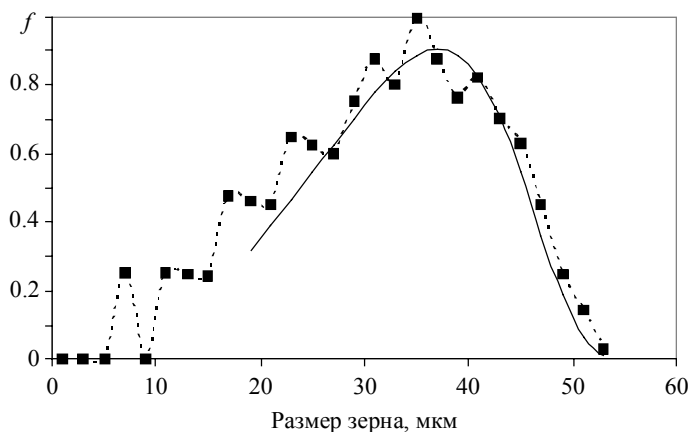


Рис. 5. Распределение зерен по размеру после 500 ч спекания при температуре 1700 °С

График изменения размера пор в точке стыка четырех зерен представлен на рис. 6. Размер поры в точке стыка является критическим параметром, в существенной степени определяющим рост зерна.

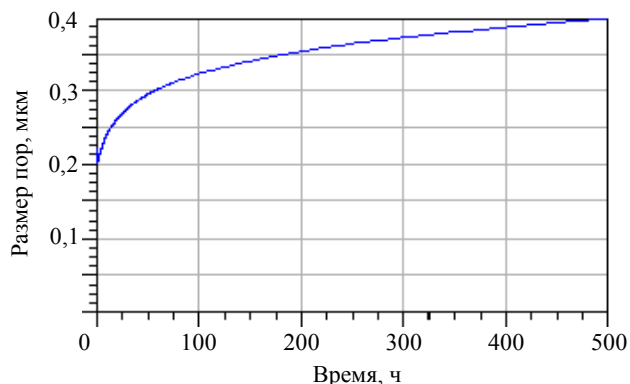


Рис. 6. Изменение размера поры в точке стыка зерен, мкм

Заключение

В работе рассмотрен процесс роста зерна стехиометрического диоксида урана при изотермической выдержке. Особое внимание уделено влиянию пор на кинетику роста. Представлена трехмерная модель, которая позволяет оценивать влияние пор, увлекаемых мигрирующими границами зерен, на кинетику роста зерна в стехиометрическом UO_2 , с учетом совокупного массопереноса, как путем поверхностной диффузии, так и за счет испарения – конденсации, исходного распределения по размерам частиц и его эволюции в процессе роста зерна. Сравнение полученных данных по изменению размера зерна с известными экспериментальными данными показали высокую достоверность результатов. Данные, полученные с помощью моделирования, позволили сделать предположение о характере изменения размера межзеренных пор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beere W. The sintering and morphology of interconnected porosity in UO_2 powder compacts // J. Mater. Sci. 1973. V. 8. No. 12. P. 1717–1724.
2. MacEwan J.R., Hayashi J. Grain growth in UO_2 , III. Some factors influencing equiaxed grain growth // Proc. st B. Cer. Soc. 1967.
3. Olsen C.S. UO_2 pore migration and grain growth kinetics // Transactions of the 5th. Intern. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology. V. C, Rep. C1/9, 1979.
4. Nichols F.A. Theory of grain growth in porous compacts // J. Appl. Phys. 1966. V. 37. No. 13. P. 4599–4602.
5. Kingery W.D., Francois B. Grain growth in porous compacts // J. Amer. Ceram. Soc. 1965. V. 48. No. 10. P. 546–547.
6. Hsueh C.H., Evans A.G., Coble R.E. Microstructure development during final/intermediate stage sintering. I. Pore/grain boundary separation // Acta Metall. 1982. V. 30. No. 7. P. 1269–1279.
7. Hsueh C.H., Evans A.G. Microstructure evolution during sintering: the role of evaporation/condensation // Acta Metall. 1983. V. 31. No. 1. P. 189–198.
8. Estrin Y., Lücke K. Theory of vacancy – controlled grain boundary motion // Acta Metall. 1982. V. 30. No. 5. P. 983–998.
9. Saetre T.O. On the theory of normal grain growth in two dimensions // Acta Materialia. 2002. V. 50. P. 1539–1546.
10. Hillert M. On the theory of normal and abnormal grain growth // Acta Metall. 1965. V. 13. No. 3. P. 227–238.
11. Bourgeois L., Dehault Ph., Lemaignan C., Fredric J.P. Pore migration in UO_2 and grain growth kinetics // J. Nucl. Mat. 2001. V. 295. P. 73–82.

Статья поступила 07.11.2013 г.

Bakhteev O. A., Lysikov A. V., Mikheev E. N. MODELING OF STOICHIOMETRIC URANIUM DIOXIDE GRAIN GROWTH DURING ISOTHERMAL SINTERING. The process of stoichiometric uranium dioxide grain growth during isothermal sintering is considered. A three-dimensional UO_2 grain growth model based on physical concepts described in the article was developed. This model allows one to estimate the influence of pores carried by grain boundaries on uranium dioxide grain growth kinetic by taking into account the mass transfer caused by surface diffusion, evaporation, condensation, initial particle size distribution, and its evolution. Analytical equations used in this model allow one to simplify the calculation structure. This simplification reduces the calculation time and provides an ability to solve such practical problems as influence of the processing method on evolution of the average grain size in a pellet. The grain growth model was verified according to available experimental data.

Keywords: uranium dioxide, grain growth, model, average grain size, porosity.

REFERENCES

1. *Beere W.* The sintering and morphology of interconnected porosity in UO_2 powder compacts // *J. Mater. Sci.* 1973. V. 8. No. 12. P. 1717–1724.
2. *MacEwan J.R., Hayashi J.* Grain growth in UO_2 , III. Some factors influencing equiaxed grain growth // *Proc. st B. Cer. Soc.* 1967.
3. *Olsen C.S.* UO_2 pore migration and grain growth kinetics // *Transactions of the 5th. Intern. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology.* V. C, Rep. C1/9, 1979.
4. *Nichols F.A.* Theory of grain growth in porous compacts // *J. Appl. Phys.* 1966. V. 37. No. 13. P. 4599–4602.
5. *Kingery W.D., Francois B.* Grain growth in porous compacts // *J. Amer. Ceram. Soc.* 1965. V. 48. No. 10. P. 546–547.
6. *Hsueh C.H., Evans A.G., Coble R.E.* Microstructure development during final/intermediate stage sintering. I. Pore/grain boundary separation // *Acta Metall.* 1982. V. 30. No. 7. P. 269–1279.
7. *Hsueh C.H., Evans A.G.* Microstructure evolution during sintering: the role of evaporation/condensation // *Acta Metall.* 1983. V. 31. No. 1. P. 189–198.
8. *Estrin Y., Lücke K.* Theory of vacancy – controlled grain boundary motion // *Acta Metall.* 1982. V. 30. No. 5. P. 983–998.
9. *Saetre T.O.* On the theory of normal grain growth in two dimensions // *Acta Materialia.* 2002. V. 50. P. 1539–1546.
10. *Hillert M.* On the theory of normal and abnormal grain growth // *Acta Metall.* 1965. V. 13. No. 3. P. 227–238.
11. *Bourgeois L., Dehaudt Ph., Lemaignan C., Fredric J.P.* Pore migration in UO_2 and grain growth kinetics // *J. Nucl. Mat.* 2001. V. 295. P. 73–82.

BAKHTEEV Oleg Alexandrovich (JSC "Academician A.A. Bochvar High-Tech Research Institute of Inorganic Materials", Moscow, Russian Federation)

LYSIKOV Alexander Vladimirovich (JSC "Academician A.A. Bochvar High-Tech Research Institute of Inorganic Materials", Moscow, Russian Federation)

E-mail: lysikov@bochvar.ru

MIKHEEV Evgeniy Nikolaevich (JSC "Academician A.A. Bochvar High-Tech Research Institute of Inorganic Materials", Moscow, Russian Federation)

УДК 532.5:532.517.4

И.В. Ершов

**ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕВЯЗКОГО СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ
ТЕРМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНОГО МОЛЕКУЛЯРНОГО ГАЗА¹**

В рамках модели двухтемпературной газовой динамики исследуется задача линейной устойчивости плоскопараллельных сдвиговых течений колебательно-возбужденного молекулярного газа. Проведено обобщение условий Рэлея и теоремы о полукруге (теорема Ховарда) на случай термически неравновесного газа. Показано, что для развития неустойчивости в сдвиговом течении термически неравновесного газа необходимо выполнение первого условия Рэлея в той же форме, что и для случаев однородной и стратифицированной несжимаемой жидкости и идеального газа. Однако более жесткое условие на комплексную фазовую скорость, известное как теорема о полукруге, удается получить лишь при некоторых дополнительных условиях. Также для случая колебательно-неравновесного газа получено обобщенное условие о необходимости существования точки перегиба на неустойчивом профиле скорости (второе условие Рэлея).

Ключевые слова: *линейная теория устойчивости, условия Рэлея, теорема о полукруге (теорема Ховарда), колебательная релаксация, уравнения двухтемпературной газовой динамики.*

Классические результаты по линейной устойчивости плоскопараллельных течений, полученные Гельмгольцем, Кельвином и Рэлеем, рассмотревшими случай идеальной несжимаемой жидкости, были распространены на задачи о течениях идеального газа неоднородной стратифицированной и проводящей жидкостей в полях различных массовых сил [1]. В последние годы в связи с проблемами управления потоками химически реагирующих, частично ионизированных, оптически возбужденных сред возник интерес к устойчивости термически неравновесных течений молекулярных газов. Обзор результатов исследований в этой области можно найти в монографии [2].

В работах [3–6] рассматривалась диссипация крупной вихревой структуры в сдвиговом потоке слабо неравновесного и колебательно-возбужденного газов. Изучалось воздействие релаксации колебательной моды на вихревую дорожку Кармана за цилиндром [7]. На основе энергетической теории устойчивости получены оценки влияния релаксационного процесса на критическое число Рейнольдса в течении Куэтта [8–11]. Результаты всех этих работ позволяют заключить, что термическая неравновесность может существенно влиять на процессы эволюции возмущений различных пространственно-временных масштабов, ускоряя их диссипацию.

В данной работе цитированные выше результаты по устойчивости плоскопараллельных течений обобщаются на течения колебательно-возбужденного сжимаемого газа.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00064).

Основные уравнения

В координатной плоскости (x, y) рассматривается плоскопараллельное сдвиговое течение, в котором основной (несущий) поток плотности $\rho_S(y)$ и температуры $T_S(y)$ направлен вдоль оси абсцисс x и имеет профиль скорости $U_S = U_S(y)$. Возмущенное течение описывается системой уравнений двухтемпературной газовой динамики [2, 12]. Используя в качестве масштабирующих величин некоторые характерные длину L , скорость U_0 , плотность ρ_0 , температуру T_0 и образованные из них время $\tau_0 = L/U_0$ и давление $p_0 = \rho_0 U_0^2$, получим, что в безразмерных переменных эта система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} &= 0, \quad \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \\ \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + (\gamma - 1) \rho T \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= \frac{\gamma_{\text{vib}} \rho (T_{\text{vib}} - T)}{\tau_{\text{VT}} (1 - \gamma_{\text{vib}})}, \\ \frac{\partial T_{\text{vib}}}{\partial t} + u_i \frac{\partial T_{\text{vib}}}{\partial x_i} + \frac{(T_{\text{vib}} - T)}{\tau_{\text{VT}}} &= 0, \quad \gamma M^2 p = \rho T, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ , u_i , p , T , T_{vib} , τ_{VT} – плотность, компоненты вектора скорости, давление, статическая и колебательные температуры газа и время колебательной релаксации соответственно, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Параметры, входящие в уравнения системы (1), определяются следующим образом. Параметр $\gamma_{\text{vib}} = c_{\text{vib}} / (c_{\text{tr}} + c_{\text{rot}} + c_{\text{vib}})$ определяет долю внутренней энергии газа, приходящуюся на колебательные моды молекул, и в каком-то смысле характеризует степень неравновесности последних; $M = U_0 / \sqrt{\gamma R T_0}$ – число Маха, $\gamma = (c_{\text{tr}} + c_{\text{rot}} + R) / (c_{\text{tr}} + c_{\text{rot}})$ – показатель адиабаты, R – газовая постоянная и c_{tr} , c_{rot} , c_{vib} – удельные теплоемкости при постоянном объеме, определяющие соответственно энергоемкость поступательных, вращательных и колебательной мод молекул газа. Все определенные здесь теплоемкости предполагаются постоянными.

Система (1) описывает распространенную в аэродинамике ситуацию, когда характерные времена микроскопических процессов энергообмена между различными степенями свободы молекул газа оцениваются системой неравенств [2, 12]: $\tau_{\text{TT}} \sim \tau_{\text{RT}} \ll \tau_{\text{VV}} \ll \tau_{\text{VT}} \sim \tau_0$. Причем в этом случае поступательные и вращательные степени свободы молекул с малыми соизмеримыми временами релаксации $\tau_{\text{TT}} \sim \tau_{\text{RT}}$ на временах порядка характерного времени течения τ_0 образуют квазиравновесный термостат с температурой потока T . В подсистеме же колебательных уровней энергии по истечению времени τ_{VT} устанавливается квазиравновесное распределение с колебательной температурой T_{vib} . Обмен энергией между колебательной модой и квазиравновесными степенями свободы молекул газа описывается релаксационным уравнением Ландау – Теллера с характерным временем τ_{VT} .

Нижний предел $\gamma_{\text{vib}} = 0$ соответствует случаю невозбуждения колебательной моды молекул. С другой стороны, равнораспределение энергии по степеням свободы молекул не является здесь верхним пределом для параметра γ_{vib} , поскольку закон равнораспределения энергии неприменим в неравновесной ситуации, опи-

сываемой системой уравнений (1), когда разрыв между статической температурой потока T и колебательной температурой T_{vib} может быть достаточно велик. В [12] показано, что при $T = 300$ К неравновесная теплоемкость $c_{\text{vib}} \approx 1,8R$. Используя равномерное распределение энергии в состоянии термодинамического квазиравновесия по поступательным и вращательным модам молекул, получаем, что параметр $\gamma_{\text{vib}} \approx 0,42$. С ростом разрыва между температурами T_{vib} и T значение γ_{vib} увеличивается, приближаясь в пределе к единице, когда энергия колебательной моды молекул существенно превышает температуру квазиравновесного термостата, определяемого поступательными и вращательными степенями свободы молекул. Таким образом, параметр γ_{vib} может изменяться в пределах $0 \leq \gamma_{\text{vib}} \leq 1$.

Мгновенные значения полей возмущенного течения представим как суммы стационарных величин несущего потока и малых пульсаций, зависящих от времени и координат:

$$\begin{aligned} u_x &= U_S(y) + \hat{u}_x, \quad u_y = \hat{u}_y, \quad \rho = \rho_S(y) + \hat{\rho}, \\ T &= T_S(y) + \hat{T}, \quad T_{\text{vib}} = T_S(y) + \hat{T}_{\text{vib}}, \quad p = \frac{1}{\gamma M^2} + \hat{p}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подстановка (3) в систему (1) и ее линеаризация относительно стационарного решения приводит к системе уравнений для малых возмущений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + U_S \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \rho_S \left(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} \right) + \hat{u}_y \frac{\partial \rho_S}{\partial y} &= 0, \\ \rho_S \left(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial t} + U_S \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial U_S}{\partial y} \right) + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} &= 0, \\ \rho_S \left(\frac{\partial \hat{u}_y}{\partial t} + U_S \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} &= 0, \\ \rho_S \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + U_S \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial T_S}{\partial y} \right) + (\gamma - 1) \left(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} \right) - \frac{\gamma_{\text{vib}} \rho_S (\hat{T}_{\text{vib}} - \hat{T})}{\tau_{\text{VT}} (1 - \gamma_{\text{vib}})} &= 0, \\ \frac{\partial \hat{T}_{\text{vib}}}{\partial t} + U_S \frac{\partial \hat{T}_{\text{vib}}}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial T_{\text{vib},S}}{\partial y} + \frac{(\hat{T}_{\text{vib}} - \hat{T})}{\tau_{\text{VT}}} &= 0, \quad \gamma M^2 \hat{p} = \rho_S \hat{T} + \hat{p} T_S. \end{aligned} \quad (4)$$

Принимается, что при $y = y_1$ и $y = y_2$ все возмущения обращаются в нуль и периодичны по продольной координате x .

Характеристики устойчивости

Периодические по x возмущения рассматривались в виде бегущих плоских волн

$$q(x, y, t) = q_0(y) \exp[i\alpha(x - ct)],$$

$$q(x, y, t) = (\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{p}, \hat{T}, \hat{T}_{\text{vib}}, \hat{p}), \quad q_0(y) = (u, \alpha, \rho, \theta, \theta_v, p), \quad (5)$$

где α – волновое число вдоль периодической переменной x , $c = c_r + ic_i$ – комплексная фазовая скорость, i – мнимая единица. Подставляя (5) в уравнения системы (4), получаем, что компоненты вектора амплитуд $q_0(y)$ будут удовлетво-

пять следующим уравнениям:

$$D\rho + \alpha \rho'_S v + \rho_S \sigma = 0, \quad \rho_S Du + \alpha \rho_S v U'_S + i\alpha p = 0, \quad \alpha \rho_S Dv + p' = 0,$$

$$\rho_S D\theta + \alpha \rho_S v T'_S + (\gamma - 1)\sigma - \frac{\gamma_{\text{vib}} \rho_S}{\tau_{\text{VT}} (1 - \gamma_{\text{vib}})} (\theta_v - \theta) = 0,$$

$$D\theta_v + \alpha v T'_S + \frac{(\theta_v - \theta)}{\tau_{\text{VT}}} = 0, \quad \gamma M^2 p = \rho_S \theta + \rho T_S, \quad (6)$$

где $D = i\alpha(U_S - c)$, $\sigma = \alpha(v' + iu)$, а штрихи у функций здесь и далее обозначают дифференцирование по переменной y . Система (6) вместе с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} u|_{y=y_1} = v|_{y=y_1} = p|_{y=y_1} = \theta|_{y=y_1} = \theta_v|_{y=y_1} = 0, \\ u|_{y=y_2} = v|_{y=y_2} = p|_{y=y_2} = \theta|_{y=y_2} = \theta_v|_{y=y_2} = 0 \end{aligned}$$

определяет спектральную задачу, в которой собственными значениями являются комплексные фазовые скорости возмущений $c = c_r + ic_i$, а число Маха M и вещественное волновое число α служат параметрами.

После исключения части зависимых переменных система (6) сводится к двум уравнениям для амплитудных функций возмущений поперечной скорости и давления:

$$v' - \frac{U'_S v}{W} - i p \left[\frac{T_S - M^{*2} W^2}{W} \right] = 0, \quad p' + \frac{i\alpha^2 W}{T_S} v = 0, \quad (7)$$

$$v|_{y=y_1} = v|_{y=y_2} = 0, \quad p|_{y=y_1} = p|_{y=y_2} = 0,$$

где

$$M^{*2} = M^2 m^2, \quad m^2 = m_r^2 + i m_i^2,$$

$$m_r^2 = \frac{R_1(1 + \gamma_v + \alpha \tau_{\text{VT}} c_i) + \Delta^2}{R_1^2 + \Delta^2}, \quad m_i^2 = -\frac{\gamma_v}{\gamma} \frac{(\gamma - 1)\Delta}{R_1^2 + \Delta^2},$$

$$\gamma_v = \gamma_{\text{vib}} / (1 - \gamma_{\text{vib}}), \quad R_1 = 1 + \gamma_v / \gamma + \alpha \tau_{\text{VT}} c_i, \quad \Delta = \alpha \tau_{\text{VT}} W_r,$$

$$W = W_r + iW_i, \quad W_r = U_S - c_r, \quad W_i = -c_i.$$

Из (7) путем дифференцирования получаются замкнутые уравнения для v и p .

В самосопряженной форме уравнение для амплитудной функции возмущения давления записывается следующим образом:

$$\left(\frac{T_S}{W^2} p' \right)' - \alpha^2 \left(\frac{T_S}{W^2} - M^{*2} \right) p = 0. \quad (8)$$

Для дальнейшего необходимо рассмотреть для (8) квадратичную форму, которая получается умножением уравнения на комплексно-сопряженную функцию $\bar{p}$ и интегрированием по y в интервале от y_1 до y_2 с граничными условиями (7).

После интегрирования по частям квадратичная форма принимает вид

$$A \equiv \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{T_S}{W^2} |p'|^2 + \alpha^2 \left(\frac{T_S}{W^2} - M^{*2} \right) |p|^2 \right] dy = 0. \quad (9)$$

Действительная часть квадратичной формы A

$$\operatorname{Re}(A) = A_r = \int_{y_1}^{y_2} [W_r^2 - c_i^2] Q dy - K = 0, \quad K = \alpha^2 M^2 \int_{y_1}^{y_2} m_r^2 |p|^2 dy > 0, \quad (10)$$

а мнимая часть соответственно дается выражением

$$\operatorname{Im}(A) = A_i = \int_{y_1}^{y_2} W_r [2c_i Q + \alpha^2 M^2 Q_1 |p|^2] dy = 0, \quad (11)$$

$$Q = \frac{T_s}{|W|^4} (|p'|^2 + \alpha^2 |p|^2) > 0, \quad Q_1 = \frac{\gamma_v(\gamma-1)}{\gamma} \frac{\alpha \tau_{VT}}{(R_1^2 + \Delta^2)} > 0.$$

Для проверки первого условия Рэлея достаточно заметить, что выражение в квадратных скобках под интегралом в (11) неотрицательно. Поэтому для нарастающих возмущений при $c_i > 0$ мнимая часть $A_i = 0$ тогда и только тогда, когда разность $W_r = U_S - c_r$ меняет знак в поле течения. Следовательно, для развития неустойчивости в рассматриваемом течении термически неравновесного газа необходимо выполнение первого условия Рэлея в той же форме, что и для случаев однородной и стратифицированной несжимаемой жидкости [1, 13] и идеального газа [14]:

$$\min U_S \equiv u < c_r < U \equiv \max U_S. \quad (12)$$

Из (12) следует, что для любого нарастающего невязкого возмущения комплексная фазовая скорость $c = c_r + ic_i$ должна лежать в верхней полуплоскости $c_i > 0$ в полуполосе, ширина которой определяется условием (12).

Однако более жесткое условие на фазовую скорость $c = c_r + ic_i$, известное как теорема о полукруге (Howards's semicircle theorem [1, 13]), здесь удастся получить лишь при некоторых дополнительных условиях (см. условие (14)).

При доказательстве теоремы о полукруге в качестве исходного соотношения рассматривается неравенство [1, 13]

$$\int_{y_1}^{y_2} (U_S - u)(U_S - U) Q dy = I_2 - (U + u)I_1 + uU I_0 \leq 0, \quad (13)$$

где
$$I_0 = \int_{y_1}^{y_2} Q dy, \quad I_1 = \int_{y_1}^{y_2} U_S Q dy, \quad I_2 = \int_{y_1}^{y_2} U_S^2 Q dy.$$

Используя выражения (10) и (11), перепишем интегралы I_k ($k = 1, 2$) следующим образом:

$$I_1 = c_r I_0 - \frac{J}{2c_i}, \quad I_2 = 2c_r I_1 - (c_r^2 - c_i^2) I_0 + K, \quad J = \alpha^2 M^2 \int_{y_1}^{y_2} W_r Q_1 |p|^2 dy.$$

Подстановка этих выражений в неравенство (13) позволяет преобразовать его к виду

$$\left[\left(c_r - \frac{u+U}{2} \right)^2 + c_i^2 - \frac{(U-u)^2}{4} \right] I_0 + \frac{J}{c_i} \left(\frac{u+U}{2} - c_r \right) + K \leq 0.$$

При выполнении условия

$$J\left(\frac{u+U}{2}-c_r\right)+c_i K \geq 0 \quad (14)$$

имеет место неравенство

$$\left(c_r - \frac{u+U}{2}\right)^2 + c_i^2 \leq \frac{(U-u)^2}{4},$$

и тогда справедлива теорема о полукруге [1, 13]: « Для любой неустойчивой моды при $c_i > 0$ значения комплексной фазовой скорости $c = c_r + ic_i$ лежат в верхней полуплоскости в полукруге радиуса $r_0 = |U-u|/2$ с центром в точке $c_r = (U+u)/2$ ». Таким образом, условие (14) является достаточным для справедливости теоремы о полукруге.

Для идеального газа (т.е. когда $\gamma_{\text{vib}}=0$) получаем, что $J \rightarrow 0$ и для нарастающих возмущений при $c_i > 0$ из (10) следует неравенство $c_i K > 0$. В результате достаточное условие (14) выполняется и имеет место теорема о полукруге. В силу отмеченной непрерывности перехода к случаю идеального газа неравенство (14) и теорема о полукруге будут справедливы и при малых, но конечных уровнях возбуждения, пока незнакоопределенное слагаемое в неравенстве (14) не меняет знак всего выражения. В общем же случае для произвольного уровня возбуждения выполнение неравенства (14) надо проверять при конкретных значениях входящих в него параметров.

В качестве примера проведем проверку условия (14) для плоского сжимаемого течения Кутта колебательно-возбужденного молекулярного газа с параболическим профилем статической температуры потока:

$$U_S(y) = y, \quad T_S(y) = 1 + \frac{(\gamma-1)\text{Pr} M^2}{2}(1-y^2), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (15)$$

где Pr – число Прандтля несущего потока. Отметим, что подобные профили несущего потока использовались в работах [15–17] при исследовании устойчивости сжимаемого течения Куэтта идеального газа по отношению к малым возмущениям гидродинамических переменных.

Из условия (12) следует, что первое условие Рэлея для (15) примет вид

$$0 < c_r < 1. \quad (16)$$

Тогда условие (14) следует рассмотреть отдельно для интервалов $0 < c_r < 1/2$ и $1/2 \leq c_r < 1$. При $0 < c_r < 1/2$ из развернутой записи (14) следует оценка снизу:

$$\begin{aligned} J\left(\frac{1}{2}-c_r\right)+c_i K &= \left(\frac{1}{2}-c_r\right) \alpha^2 M^2 \int_0^1 \left[\frac{\gamma_v (\gamma-1) \alpha \tau_{\text{VT}}}{\gamma (R_1^2 + \Delta^2)} \right] (y-c_r) |p|^2 dy + \\ &+ \alpha^2 M^2 c_i \int_0^1 \left[\frac{R_1 (1 + \gamma_v + \alpha \tau_{\text{VT}} c_i) + \Delta^2}{(R_1^2 + \Delta^2)} \right] |p|^2 dy \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{2}-c_r\right) \alpha^4 M^2 \tau_{\text{VT}}^2 c_i \int_0^1 \frac{|p|^2}{(R_1^2 + \Delta^2)} (y^2 + 2ry + q) dy, \end{aligned}$$

где $r = \frac{\gamma_v (\gamma-1)}{2 \gamma \alpha \tau_{\text{VT}}} - \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{4} - \frac{\gamma_v (\gamma-1)}{2 \gamma \alpha \tau_{\text{VT}}} + \frac{R_1 c_i}{\alpha \tau_{\text{VT}}}, \quad \gamma_v = \frac{\gamma_{\text{vib}}}{1 - \gamma_{\text{vib}}}.$

Из последнего интеграла видно, что неравенство (14) будет выполнено, если квадратный трехчлен в подынтегральном выражении не будет иметь действительных корней на интервале интегрирования $y \in [0, 1]$. В свою очередь, для этого достаточно, чтобы $y^2 + 2ry + q \geq 0$ на интервале $0 \leq y \leq 1$. Условие комплексной сопряженности (кратности) корней выражается неравенствами

$$\frac{\gamma_{\text{vib}} (\gamma - 1)}{\gamma \alpha \tau_{\text{VT}} (1 - \gamma_{\text{vib}})} < 1, \quad \frac{R_1}{\alpha \tau_{\text{VT}}} < 1. \quad (17)$$

После исключения из (17) комплекса $\alpha \tau_{\text{VT}}$ получается неравенство

$$\gamma_{\text{vib}} < \frac{\gamma}{2(1 - \gamma)},$$

которое при рассматриваемых уровнях возбуждения $0 \leq \gamma_{\text{vib}} < 1$ всегда выполнено.

При $1/2 \leq c_r < 1$ для (14) оценка снизу получается в виде

$$\begin{aligned} J \left(\frac{1}{2} - c_r \right) + c_i K &= \left(\frac{1}{2} - c_r \right) \alpha^2 M^2 \int_0^1 \left[\frac{\gamma_v (\gamma - 1) \alpha \tau_{\text{VT}}}{\gamma (R_1^2 + \Delta^2)} \right] (y - c_r) |p|^2 dy + \\ &+ \alpha^2 M^2 c_i \int_0^1 \left[\frac{R_1 (1 + \gamma_v + \alpha \tau_{\text{VT}} c_i) + \Delta^2}{(R_1^2 + \Delta^2)} \right] |p|^2 dy \geq \\ &\geq \left(c_r - \frac{1}{2} \right) \alpha^4 M^2 \tau_{\text{VT}}^2 c_i \int_0^1 \frac{|p|^2}{(R_1^2 + \Delta^2)} \left[(y - c_r)^2 - (y - c_r) \frac{\gamma_v (\gamma - 1)}{\gamma \alpha \tau_{\text{VT}}} + \frac{R_1 c_i}{\alpha \tau_{\text{VT}}} \right] dy. \end{aligned}$$

В данном случае для выполнения неравенства (14) достаточно, чтобы выделенный в подынтегральном выражении квадратный трехчлен не обращался в нуль на интервале интегрирования $y \in [0, 1]$. Анализ соответствующего условия комплексной сопряженности (кратности) его корней также приводит к неравенствам (17), которые не являются ограничительными для комплекса $\alpha \tau_{\text{VT}}$, так как при $\alpha \tau_{\text{VT}} \rightarrow 0$ неравенство (14) будет выполнено. Одновременно, как было отмечено, из (14) не следует ограничения на глубину возбуждения γ_{vib} .

Таким образом, получаем, что для плоского течения Кутта колебательно-возбужденного молекулярного газа достаточное условие (14) выполняется и имеет место теорема о полукруге.

Далее рассмотрим второе условие Рэлея (обобщенное условие точки перегиба [1, 13]). Будем исходить из уравнения для амплитуды возмущения продольной скорости v (7), которое в самосопряженной форме имеет вид

$$\left(\frac{v'}{\chi} \right)' - \left[\frac{\alpha^2}{T_S} + \frac{1}{W} \left(\frac{U'_S}{\chi} \right)' \right] v = 0, \quad v|_{y=0} = v|_{y=1} = 0, \quad (18)$$

где $\chi = T_S - M^2 m^2 W^2$. Введем новую переменную $v = H \sqrt{\chi}$. После ее подстановки в уравнение (18) последнее примет вид

$$H'' - \chi^{1/2} (\chi^{-1/2})'' H - \left[\frac{\alpha^2}{T_S} + \frac{1}{W} \left(\frac{U'_S}{\chi} \right)' \right] \chi H = 0, \quad H|_{y=0} = H|_{y=1} = 0. \quad (19)$$

Помножим уравнение (19) на комплексно-сопряженную функцию $\bar{H}$ и полученное равенство проинтегрируем по y в интервале от y_1 до y_2 с учетом однородных граничных условий. В результате получим следующую квадратичную форму:

$$F = \int_{y_1}^{y_2} \left[|H'|^2 + \left(\frac{\alpha^2 \chi}{T_S} + \frac{\chi}{W} \left(\frac{U'_S}{\chi} \right)' + \chi^{1/2} \left(\chi^{-1/2} \right)'' \right) |H|^2 \right] dy = 0. \quad (20)$$

Представим $\chi^{\pm 1/2}$ в виде

$$\chi^{\pm 1/2} = |\chi|^{\pm 1/2} e^{\pm i\varphi} = |\chi|^{\pm 1/2} [\cos \varphi \pm i \sin \varphi], \quad \varphi = \arctg \left(\frac{\chi_i}{\chi_r} \right), \quad (21)$$

где

$$\chi_r = T_S - M^2 (m_r^2 \varepsilon_r^2 - m_i^2 \varepsilon_i^2), \quad \chi_i = -M^2 (m_r^2 \varepsilon_i^2 + m_i^2 \varepsilon_r^2), \\ \varepsilon_r^2 = W_r^2 - W_i^2, \quad \varepsilon_i^2 = 2W_r W_i.$$

Используя равенства (21), выделим из квадратичной формы (20) ее мнимую часть F_i . В результате получим, что F_i запишется следующим образом:

$$F_i = \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\alpha^2 \chi_i}{T_S} |W|^2 + (\chi_i W_r - \chi_r W_i) K'_r - (\chi_r W_r + \chi_i W_i) K'_i + \right. \\ \left. + |\chi|^{1/2} |W|^2 \left[\left(|\chi|^{-1/2} \cos \varphi \right)'' \sin \varphi - \left(|\chi|^{-1/2} \sin \varphi \right)'' \cos \varphi \right] \right) \frac{|H|^2}{|W|^2} dy = 0, \quad (22)$$

где

$$K_r = \frac{\chi_r U'_S}{|\chi|^2}, \quad K_i = \frac{\chi_i U'_S}{|\chi|^2}.$$

При $c_t \rightarrow 0$ (или $W_t \rightarrow 0$) можно считать, что

$$m_r^2 \approx \tilde{m}_r^2 = \frac{(1 + \gamma_v)(1 + \gamma_v / \gamma) + \alpha^2 \tau_{vT}^2 W_r^2}{(1 + \gamma_v / \gamma)^2 + \alpha^2 \tau_{vT}^2 W_r^2}, \quad m_i^2 \approx \tilde{m}_i^2 = -\frac{\gamma_v (\gamma - 1) \alpha \tau_{vT} W_r}{\gamma [(1 + \gamma_v / \gamma)^2 + \alpha^2 \tau_{vT}^2 W_r^2]},$$

$$\chi_r \approx \tilde{\chi}_r = T_S - \tilde{m}_r^2 M^2 W_r^2, \quad \chi_i \approx \tilde{\chi}_i = -\tilde{m}_i^2 M^2 W_r^2, \quad \varphi \approx \tilde{\varphi} = \arctg (\tilde{\chi}_i / \tilde{\chi}_r),$$

$$K_r \approx \tilde{K}_r = \frac{\tilde{\chi}_r U'_S}{|\tilde{\chi}|^2}, \quad K_i \approx \tilde{K}_i = \frac{\tilde{\chi}_i U'_S}{|\tilde{\chi}|^2}, \quad \gamma_v = \frac{\gamma_{vib}}{1 - \gamma_{vib}},$$

а квадратичную форму (22) записать в виде

$$F_i \approx \tilde{F}_i = \int_{y_1}^{y_2} \tilde{f}(y) \frac{|H|^2}{|W|^2} dy. \quad (23)$$

Здесь функция $\tilde{f}(y)$ определяется следующим образом:

$$\tilde{f}(y) = \frac{\alpha^2 W_r^2 \tilde{\chi}_i}{T_S} + (\tilde{\chi}_i W_r - \tilde{\chi}_r W_i) \tilde{K}'_r - (\tilde{\chi}_r W_r + \tilde{\chi}_i W_i) \tilde{K}'_i + \\ + |\tilde{\chi}|^{1/2} W_r^2 \left[\left(|\tilde{\chi}|^{-1/2} \cos \tilde{\varphi} \right)'' \sin \tilde{\varphi} - \left(|\tilde{\chi}|^{-1/2} \sin \tilde{\varphi} \right)'' \cos \tilde{\varphi} \right]. \quad (24)$$

Поскольку всегда $|H|^2/|W|^2 > 0$, то квадратичная форма $\tilde{F}_i$ (23) равна нулю тогда и только тогда, когда найдутся такие точки (или точка) y_p , в которых функция $\tilde{f}$ (24) будет обращаться в нуль:

$$\tilde{f}(y)\big|_{y=y_p} = 0. \quad (25)$$

Условие (25) обобщает на случай колебательно-неравновесного газа условие Рэлея о необходимости существования точки перегиба на неустойчивом профиле скорости [1, 13].

В случае идеального газа (т.е. когда $\gamma_{\text{vib}} = 0$ или $\gamma_v = 0$) имеем $\tilde{m}_r^2 = 1$, $\tilde{m}_i^2 = 0$. Тогда можно считать, что $\tilde{\chi}_r \approx T_S - M^2 W_r^2$, $\tilde{\chi}_i = 0$, $\tilde{K}_r \approx U'_S / \tilde{\chi}_r$, $\tilde{K}_i = 0$, $\tilde{\phi} = 0$. В результате из (23) и (24) получаем следующее равенство:

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{U''_S \tilde{\chi}_r - U'_S \tilde{\chi}'_r}{\tilde{\chi}_r} \right] \frac{|H|^2}{|W|^2} dy = 0,$$

которое имеет место только тогда, когда выполняется условие

$$\left[\frac{U''_S \tilde{\chi}_r - U'_S \tilde{\chi}'_r}{\tilde{\chi}_r} \right] \bigg|_{y=y_p} = 0. \quad (26)$$

Например, если рассматривается плоское течение Куэтта с параболическим профилем температуры (15), то из условия (26) следует, что обобщенная точка перегиба

$$y_p = c_r \left[1 + \frac{(\gamma - 1) \text{Pr}}{2} \right]^{-1}$$

и с учетом первого условия Рэлея на c_r (16) лежит внутри интервала $0 \leq y \leq 1$.

Заключение

В рамках модели двухтемпературной газовой динамики исследована задача линейной устойчивости плоскопараллельных сдвиговых течений термически неравновесного молекулярного газа. В результате было проведено обобщение условий Рэлея и теоремы о полукруге (теорема Ховарда) для таких течений [1, 13].

Показано, что для развития неустойчивости в сдвиговом течении термически неравновесного газа необходимо выполнение первого условия Рэлея (12) в той же форме, что для случаев однородной и стратифицированной несжимаемой жидкости [1, 13] и идеального газа [14]. Однако более жесткое условие на комплексную фазовую скорость, известное как теорема о полукруге [1, 13], удается получить лишь при некоторых дополнительных условиях, которые определяются неравенством (14). Рассмотрен пример проверки достаточного условия (14) теоремы Ховарда для плоского течения Куэтта колебательно-возбужденного молекулярного газа с параболическим профилем статической температуры потока (15).

Для случая колебательно-неравновесного газа получено обобщенное условие о необходимости существования точки перегиба на неустойчивом профиле скорости (второе условие Рэлея), которое определяется равенствами (24), (25).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Drazin P.G., Howard L.N.* Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid // *Adv. Appl. Mech.* N.Y.: Acad. Press, 1966. V. 9. P. 1–89.
2. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Устойчивость течений релаксирующих молекулярных газов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2012. 230 с.
3. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Подавление вихревых возмущений релаксационным процессом в молекулярном газе // *ПМТФ.* 2003. Т. 44. № 4. С. 22–34.
4. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В., Еришова Е.Е.* Влияние колебательной релаксации на пульсационную активность в течениях возбужденного двухатомного газа // *ПМТФ.* 2004. Т. 45. № 3. С. 15–23.
5. *Ершов И.В., Зырянов К.И.* Диссипация волн Кельвина – Гельмгольца в колебательно неравновесном двухатомном газе // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2012. № 1(17). С. 68–80.
6. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Диссипация вихревых возмущений в колебательно неравновесном газе // *Теплофиз. и аэромех.* 2012. Т. 19. № 3. С. 291–300.
7. *Винниченко Н.А., Никитин Н.В., Уваров А.В.* Вихревая дорожка Кармана в колебательно-неравновесном газе // *Изв. РАН. МЖГ.* 2005. № 5. С. 107–114.
8. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Влияние объемной вязкости на неустойчивость Кельвина – Гельмгольца // *ПМТФ.* 2008. Т. 49. № 3. С. 73–84.
9. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Энергетическая оценка критических чисел Рейнольдса в сжимаемом течении Куэтта. Влияние объемной вязкости // *ПМТФ.* 2010. Т. 51. № 5. С. 59–67.
10. *Ершов И.В.* Энергетическая оценка критических чисел Рейнольдса в течении Куэтта колебательно-неравновесного молекулярного газа // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2012. № 2(18). С. 99–112.
11. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Критические числа Рейнольдса в течении Куэтта колебательно возбужденного двухатомного газа. Энергетический подход // *ПМТФ.* 2012. Т. 53. № 4. С. 57–73.
12. *Нагнибеда Е. А., Кустова Е.В.* Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. 272 с.
13. *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 288 с.
14. *Blumen W.* Shear layer instability of an inviscid compressible fluid // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 40. Part 4. P. 769–781.
15. *Duck P.W., Erlebacher G., Hussaini M.Y.* On the linear stability of compressible plane Couette flow // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 258. P. 131–165.
16. *Hu S., Zhong X.* Linear stability of viscous supersonic plane Couette flow // *Phys. Fluids.* 1998. Vol. 10. No. 3. P. 709–729.
17. *Malik M., Dey J., Alam M.* Linear stability, transient energy growth, and the role of viscosity stratification in compressible plane Couette flow // *Physical Rev. E.* 2008. V. 77. Issue 3. P. 036322-1–036322-15.

Статья поступила 20.05.2013 г.

Ershov I.V. THE LINEAR STABILITY OF AN INVISCID SHEAR FLOW OF A THERMALLY NON-EQUILIBRIUM MOLECULAR GAS. The problem of the linear stability of plane-parallel shear flows of a vibrationally excited molecular gas is investigated using a two-temperature gas dynamics model. The Rayleigh conditions and the semicircle theorem (Howard's semicircle theorem) are generalized to the case of a thermally non-equilibrium gas. It is shown that the instability in a shear flow is necessarily developed under the first Rayleigh condition stated in the same form as for a homogeneous and stratified incompressible liquid and ideal gas. However, a more rigid restriction (known as the semicircle theorem) on the complex phase speed can be obtained only under some additional conditions. In addition, a generalized condition about

the necessity of existence of an inflection point on an unstable speed profile (the second Rayleigh condition) is obtained.

Keywords: linear stability theory, Rayleigh conditions, semicircle theorem (Howard's semicircle theorem), vibrational relaxation, equations of two-temperature gas dynamics.

REFERENCES

1. *Drazin P.G., Howard L.N.* Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid // *Adv. Appl. Mech.* N.Y.: Acad. Press, 1966. V. 9. P. 1–89.
2. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Ustoychivost' techeniy relaksiruyushchikh molekulyarnykh gazov. Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2012. 230 p. (in Russian).
3. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Podavlenie vikhrevykh vozmushcheniy relaksatsionnym protsessom v molekulyarnom gaze // *PMTF.* 2003. V. 44. No. 4. P. 22–34 (in Russian).
4. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V., Ershova E.E.* Vliyanie kolebatel'noy relaksatsii na pul'satsionnuyu aktivnost' v techeniyakh vozbuzhdennoogo dvukhatomnogo gaza // *PMTF.* 2004. V. 45. No. 3. P. 15–23 (in Russian).
5. *Ershov I.V., Zyryanov K.I.* Dissipatsiya voln Kel'vina – Gel'mgol'tsa v kolebatel'no neravnovesnom dvukhatomnom gaze // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika.* 2012. No. 1(17). P. 68–80 (in Russian).
6. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Dissipatsiya vikhrevykh vozmushcheniy v kolebatel'no neravnovesnom gaze // *Teplofiz. i aeromekh.* 2012. V. 19. No. 3. P. 291–300 (in Russian).
7. *Vinnichenko N.A., Nikitin N.V., Uvarov A.V.* Vikhrevaya dorozhka Karmana v kolebatel'no-neravnovesnom gaze // *Izv. RAN. MZhG.* 2005. No. 5. P. 107–114 (in Russian).
8. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Vliyanie ob'emnoy vyazkosti na neustoychivost' Kel'vina – Gel'mgol'tsa // *PMTF.* 2008. V. 49. No. 3. P. 73–84 (in Russian).
9. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Energeticheskaya otsenka kriticheskikh chisel Reynol'dsa v szhimaemom techenii Kuetta. Vliyanie ob'emnoy vyazkosti // *PMTF.* 2010. V. 51. No. 5. P. 59–67 (in Russian).
10. *Ershov I.V.* Energeticheskaya otsenka kriticheskikh chisel Reynol'dsa v techenii Kuetta kolebatel'no-neravnovesnogo molekulyarnogo gaza // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika.* 2012. No. 2(18). P. 99–112 (in Russian).
11. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Kriticheskie chisla Reynol'dsa v techenii Kuetta kolebatel'no vozbuzhdennoogo dvukhatomnogo gaza. Energeticheskiy podkhod // *PMTF.* 2012. V. 53. No. 4. P. 57–73 (in Russian).
12. *Nagnibeda E.A., Kustova E.V.* Kineticheskaya teoriya protsessov perenosa i relaksatsii v potokakh neravnovesnykh reagiruyushchikh gazov. Spb.: Izd-vo S.-Peterburskogo un-ta, 2003. 272 p. (in Russian).
13. *Drazin F.* Vvedenie v teoriyu gidrodinamicheskoy ustoychivosti. Moscow: Fizmatlit, 2005. 288 p. (in Russian).
14. *Blumen W.* Shear layer instability of an inviscid compressible fluid // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 40. Part 4. P. 769–781.
15. *Duck P.W., Erlebacher G., Hussaini M.Y.* On the linear stability of compressible plane Couette flow // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 258. P. 131–165.
16. *Hu S., Zhong X.* Linear stability of viscous supersonic plane Couette flow // *Phys. Fluids.* 1998. Vol. 10. No. 3. P. 709–729.
17. *Malik M., Dey J., Alam M.* Linear stability, transient energy growth, and the role of viscosity stratification in compressible plane Couette flow // *Physical Rev. E.* 2008. V. 77. Issue 3. P. 036322-1–036322-15.

ERSHOV Igor Valer'evich

(Novosibirsk State Agrarian University, Novosibirsk, Russian Federation)

E-mail: i_ershov@ngs.ru

УДК 622.232.001.12.542

Н.В. Мутовина, Ю.И. Климов, А.Ю. Смолин

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЩЕЛЕВОГО ГИДРООТРЫВНОГО РАБОЧЕГО ОРГАНА С ПОРОДНЫМ ЦЕЛИКОМ¹

Представлены результаты моделирования гидроотрывника с подрезанным целиком породы. Получены картины распределения максимальных касательных напряжений в массиве. Определены поля напряжений и деформаций целика и прилегающего к нему массива, установлены зоны растяжения и сжатия целика, найдены максимальные значения эквивалентных напряжений в зоне растяжения.

Ключевые слова: *моделирование, щелевой гидроотрывной рабочий орган горного комбайна, комбинированные способы разрушения целика, напряженно-деформированное состояние.*

Необходимость снижения удельных энергозатрат на разрушение, улучшения сортности добываемых полезных ископаемых и уменьшения запыленности призабойного пространства привели исследователей и конструкторов к разработке комбинированных способов разрушения, где наряду с традиционным резанием используется малоэнергоемкое разрушение горных пород, в частности разрушение отрывом.

Исследования работы насосного привода гидроотрывника показали, что он является простым и надежным в эксплуатации, однако имеет один существенный недостаток, а именно, для него характерна потеря продольной устойчивости комбайна при отрыве больших целиков породы [1]. Это происходит вследствие того, что усилия отрыва, необходимые для отделения целика от массива, оказываются больше силы трения ходовой части комбайна о почву выработки. В результате подтягивания комбайна на забой в процессе отрыва породного целика происходит прижатие режущего диска к забою и, как следствие, резкое увеличение потребляемой мощности вплоть до «опрокидывания» электродвигателя [2].

В качестве альтернативы предложен насосно-аккумуляторный (импульсный) привод гидроотрывника, который впервые был реализован в комбайне «Алмаз-1И», созданном на базе проходческого комбайна ПК-9р [3]. Основным элементом такого привода является пульсатор давления, или генератор импульсов, который представляет собой цилиндр, разделенный поршнем на жидкостную и газовую камеры и снабженный импульсным клапаном.

После формирования надщелевого породного целика рабочая жидкость, находящаяся в жидкостной камере пульсатора под давлением сжатого газа, открывает импульсный клапан и устремляется в рабочую полость гидроотрывника. Происходит рабочий ход последнего. Поскольку объем жидкостной камеры пульсатора давления в 1,5 раза превышает объем рабочей полости гидроцилиндра отрывника, практически пульсатор давления является источником давления с бесконечно большим расходом [4]. Это обстоятельство предопределяет более высокие скоро-

¹ Работа проведена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-08-90905 мол_ин_нр.

сти движения гидроотрывного рабочего органа с импульсным приводом нежели с насосным. Таким образом, импульсный привод гидроотрывника позволяет формировать рабочее давление в гидроцилиндре до начала движения отрывника и поддерживать его на протяжении всего рабочего хода.

Для обеспечения эффективной работы импульсного привода отрывника необходимо проведение дальнейших исследований по выбору и обоснованию его параметров, а также по взаимодействию рабочего элемента отрывника с породным целиком при различных скоростях приложения нагрузки. При этом наиболее сложной и трудоемкой задачей является определение напряженно-деформированного состояния породного целика серповидной формы и усилия, необходимого на отделение последнего от массива [5].

Предметом настоящего исследования является процесс взаимодействия щелевого гидроотрывного рабочего органа горного комбайна с породным целиком при его отделении от массива. Исследование проводилось с помощью численного моделирования. При этом рабочий ход гидроотрывника в соответствии с условиями работы реального рабочего органа разделен на три характерных этапа: первый – этап приближения тарелки отрывника к целику; второй – этап деформации и отрыва целика от массива; третий – этап транспортирования оторванного целика из зоны щели, торможения и остановки шток-поршня гидроотрывника. Для численного решения этих задач используются программы GRAPH-PA [6] и ANSYS [7]. Отметим, что система GRAPH-PA представляет собой средство автоматизации проектирования динамических объектов различной физической природы (механической, гидравлической и др.) и предназначена для анализа динамических процессов в объектах, математические модели которых описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Система ANSYS предназначена для численного решения различных задач механики методом конечных элементов и в данной работе использована для определения напряженно-деформированного состояния целика и прилегающего к нему горного массива.

На рис. 1 приведена гидрокинематическая схема щелевого гидроотрывного рабочего органа горного комбайна. В исходном положении тарелка 2 рабочего органа, встроенная в режущий диск 1, находится в щели на некотором расстоянии от породного целика 3. При подаче рабочей жидкости в напорную полость А гидроцилиндра тарелка отрывника со шток-поршнем перемещается вправо по рисунку, входит в контакт с целиком и деформирует его.

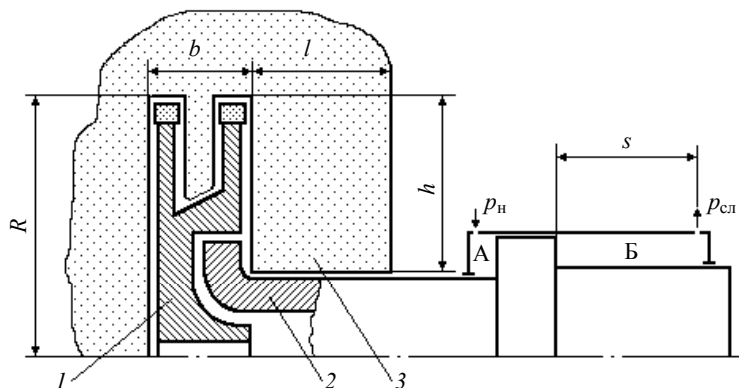


Рис. 1. Гидрокинематическая схема щелевого гидроотрывного рабочего органа

После отделения целика от массива шток-поршень с тарелкой, продолжая движение вплоть до остановки, выносит оторванный целик из зоны разрушения. Дополнительные обозначения на рисунке следующие: R – радиус диска; b – ширина щели; l и h – толщина и высота породного целика; p_n и $p_{сл}$ – напорное и сливное давления рабочей жидкости соответственно.

Полная картина напряженно-деформированного состояния целика и прилегающего к нему массива получена при математическом моделировании взаимодействия тарелки отрывника с породным целиком с использованием программы ANSYS, основанной на методе конечных элементов. Данная программа позволила построить точные геометрические модели целиков сложной серповидной формы без их предварительного упрощения.

Конечноэлементные модели породного массива с целиком серповидной формы представлены на рис. 2, *а* и *б*. Модель представляет собой вырезанную из массива область, причем размеры этой области достаточно велики, что позволяет исключить влияние граничных условий на напряженно-деформированное состояние целика и прилегающей к нему части массива.

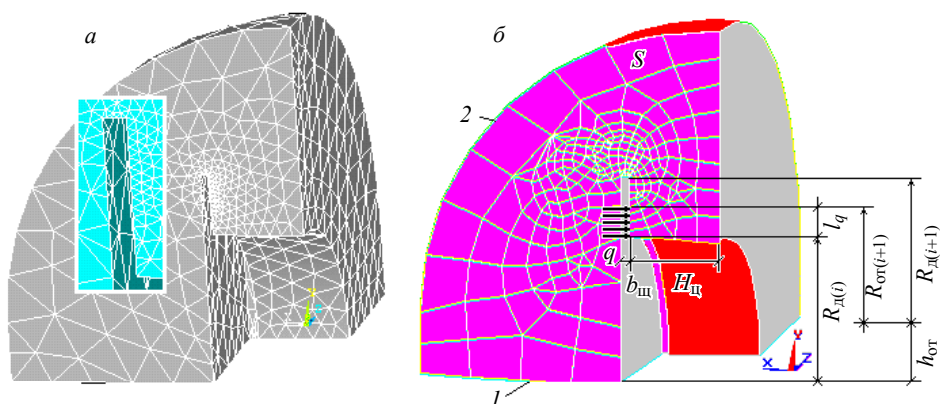


Рис. 2. Расчетная схема породного массива при щелевом отрыве: *а* – модель с объемными конечными элементами типа 3D; *б* – модель с осесимметричными плоскими конечными элементами типа 2D

В силу симметрии геометрической формы целика и приложенных к нему нагрузок рассматривается четверть вырезанной области. Моделирование выполнялось как с использованием объемных конечных элементов типа 3D в форме тетраэдров согласно рис. 2, *а*, так и осесимметричных плоских элементов типа 2D в форме четырехугольников согласно рис. 2, *б*.

В последнем случае элементы располагаются в плоскости меридианного сечения выделенной области. Сетка разбиения областей на конечные элементы неравномерная – у концентратора напряжений, каковым является угол прорезаемой диском щели, она сгущается, а к периферии области разрежается.

Из расчетной схемы согласно рис. 2, *б* видно, что режущий диск диаметром R_d образует параллельно свободной поверхности забоя щель шириной $b_{щ}$. Высота породного целика, или шаг отрыва $h_{от}$, определяется расстоянием между положениями режущего диска на предыдущем (i) и последующем ($i+1$) шагах, а толщина целика равна $H_{ц}$.

С внутренней поверхности на целик, имеющий серповидную форму, воздействует тарельчатый отрывник радиусом $R_{от}$, создавая равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q на длине l_q . Сечение S делит выделенный объем массива вместе с породным целиком на две равные части относительно оси Y , т.е. находится в плоскости симметрии.

Входные параметры, принятые для расчета в модели, показанной на рис. 2, б, были следующими: $R_d = 0,5$ м; $R_{от} = 0,4$ м; $b_{щ} = 0,03$ м; $H_{щ} = 0,3$ м; $h_{от} = 0,2$ м; $q = 10^7$ Н/м; $l_q = 0,1$ м. Разрушаемый массив представлен песчаником с временным сопротивлением растяжению $\sigma_p = 6 \cdot 10^6$ Па; модулем упругости $E = 6 \cdot 10^7$ Па и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$. Условием разрушения является соотношение между максимальным растягивающим эквивалентным напряжением $\sigma_{экв}$ и временным сопротивлением растяжению σ_p , т.е. $\sigma_{экв} \geq \sigma_p$.

В результате решения задачи получены картины распределения трех главных нормальных σ_I , σ_{II} , σ_{III} (рис. 3, а, б, в), касательного σ_{xy} (рис. 3, г) и эквивалентного $\sigma_{экв}$ (рис. 3, д) напряжений в рассматриваемом сечении, а также узловых перемещений элементов целика δ_x вдоль оси X под действием приложенной нагрузки (рис. 3, е). Как видно из рис. 3, все три главных напряжения у угла щели, примыкающего к целику, являются напряжениями растяжения и имеют максимальную величину.

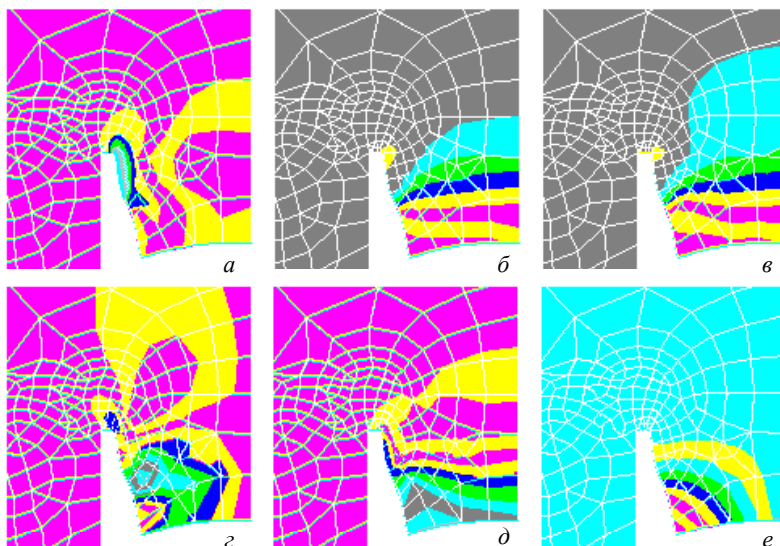


Рис. 3. Распределение напряжений и перемещений в породном массиве при отрыве целика (пояснение в тексте)

По мере удаления от угла щели, являющегося концентратором напряжений, растягивающие напряжения уменьшаются по величине и переходят в сжимающие, причем картина распределения первого главного напряжения значительно отличается от двух других.

Из распределения эквивалентных напряжений в рассматриваемом сечении (рис. 3, д) видно, что наибольшие по величине напряжения $\sigma_{экв}$ возникают в зоне сжатия у вершины породного целика, однако образование трещины и разрушение

последнего вызывают напряжения в зоне растяжения в окрестности концентратора напряжений.

В процессе отрыва целик деформируется, причем наибольшее смещение вдоль оси X получают точки у вершины целика (рис. 3, e).

На рис. 4 представлены зависимости напряжений и деформаций в теле целика вдоль линии L_1 , проходящей параллельно оси X от вершины щели до свободной поверхности.

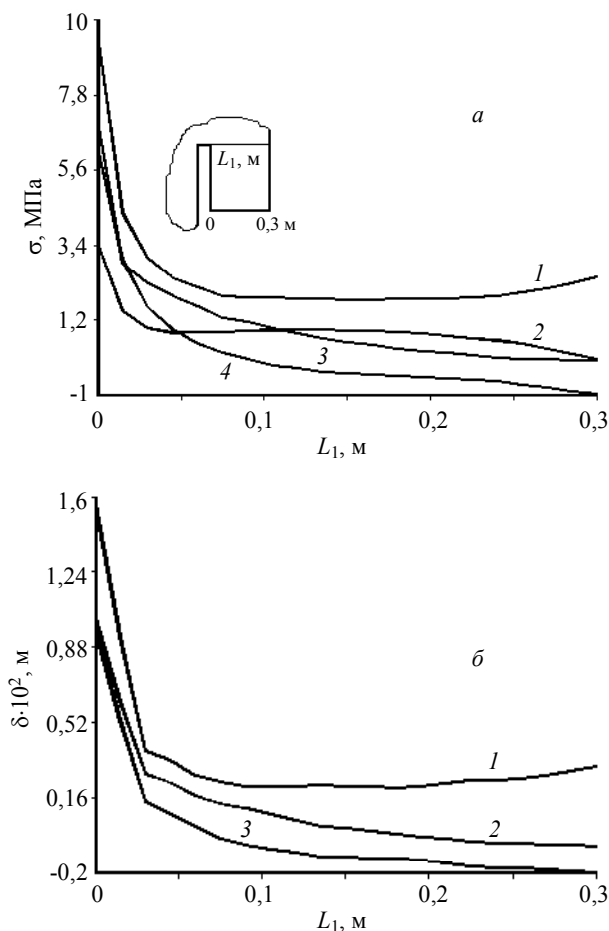


Рис. 4. Изменение напряжений (a , здесь 1, 2, 3, 4 – $\sigma_{\text{экв}}$, σ_{xy} , σ_y , σ_x) и перемещений (b , здесь 1, 2, 3 – $\delta_{\text{экв}}$, δ_y , δ_x) в породном целике вдоль линии L_1

Как видно из представленных зависимостей, наибольшее значение эквивалентного напряжения $\sigma_{\text{экв}}$, определяющего условие возникновения трещины разрушения, имеет место у основания целика в углу щели, являющемся концентратором напряжений, и составляет 9,6 МПа (рис. 4, a). Другие составляющие поля напряжений в этой точке равны соответственно: $\sigma_{xy} = 3,46$ МПа; $\sigma_y = 6,30$ МПа; $\sigma_x = 7,07$ МПа. По мере перемещения вдоль линии L_1 с выходом на свободную поверхность массива напряжение $\sigma_{\text{экв}}$ снижается до величины 4,36 МПа, σ_y перехо-

дит из растягивающего напряжения в сжимающее и принимает значение $-0,96$ МПа, а σ_{xy} и σ_x приближаются к нулевому значению. Аналогично ведут себя перемещения δ_y и δ_x на этом пути (рис. 4, б), значения которых изменяются соответственно от $0,0105$ м до $-0,0016$ м и от $0,0118$ м до 0 м.

Результаты моделирования процесса функционирования гидромеханической системы «щелевой гидроотрывник – породный целик», выполненного с использованием программы GRAPH-PA, приведены на рис. 5. Как видно из рисунка, на первом этапе происходит разгон и приближение тарелки отрывника к целику. При этом скорость движения тарелки к моменту встречи с породным целиком достигает величины около $0,5$ м/с, усилие возрастает до $0,7 \cdot 10^5$ Н, а ускорение снижается с величины 300 до 100 м/с². Продолжительность этапа составила $0,08$ с.

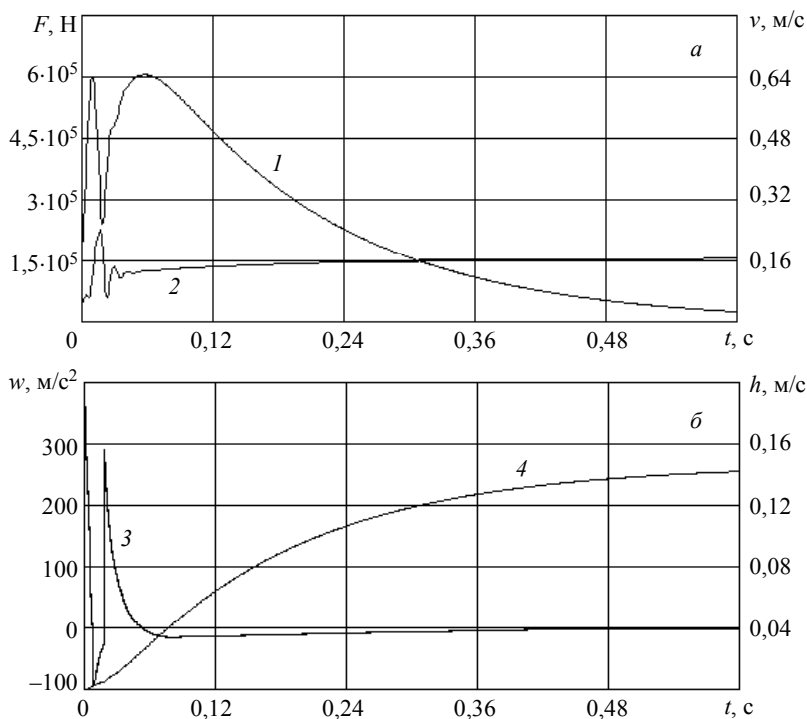


Рис. 5. Зависимости усилия на шток-поршне гидроотрывника (кр. 2), скорости, ускорения и пройденного им пути (кр. 1, 3 и 4, соответственно) от времени в период рабочего хода

На втором этапе движения отрывника происходит деформация и отделение породного целика от массива. При этом время второго этапа зависит от жесткости породного целика и при жесткости, равной $1 \cdot 10^8$ Н/м, составило $0,012$ с. С увеличением жесткости целика время второго этапа уменьшается. Скорость движения шток-поршня на втором этапе вначале возрастает, достигает максимума равного $0,64$ м/с (продолжается разгон рабочего органа, хотя ускорение снижается), а затем, при достижении усилием некоторого значения резко падает до величины около $0,25$ м/с в конце этапа. Ускорение в момент начала снижения скорости движения отрывника достигает наибольшего по абсолютной величине отрица-

тельного значения равного -100 м/с^2 , а к концу этапа несколько увеличивается. Усилие в момент отрыва породного целика достигает своего максимального значения и равно $2,7 \cdot 10^5 \text{ Н}$.

Следует отметить, что с увеличением жесткости породного целика значение скорости движения тарелки отрывника в конце второго этапа будет уменьшаться вплоть до нуля, при этом усилие на шток-поршне будет иметь наибольшее значение. Однако, если жесткость породного целика окажется слишком большой (высокая прочность породы или большая толщина целика), то максимального значения усилия, возникающего на шток-поршне при остановке последнего, может оказаться недостаточно для отрыва такого целика от массива.

Начало третьего этапа аналогично первому. Отличие состоит в том, что в начале третьего этапа скорость движения и усилие на шток-поршне отличны от нуля. Кроме того, в период третьего этапа шток-поршень испытывает дополнительное сопротивление постоянной величины, обусловленное транспортированием оторванного породного целика из зоны разрушения.

Таким образом, проведенные исследования взаимодействия режуще-отрывного рабочего органа с породным целиком дали возможность определить напряженно-деформированное состояние разрушаемого массива и установить значение максимального усилия отрыва, развиваемого гидроприводом рабочего органа с учетом динамической его составляющей, появляющейся в результате торможения тарелки отрывника при отделении породного целика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Климов Ю.И. Устойчивость проходческого комбайна с комбинированным режуще-отрывным исполнительным органом // Изв. вузов. Горный журнал. 1984. № 10. С. 72–77.
2. Климов Ю.И., Бердалин Б.С., Мукушева Г.М. Результаты исследования устойчивости комбайна при разрушении вязко-пластических горных пород // Активные рабочие органы строительных и дорожных машин: тематич. сб. Караганда: КарПТИ, 1983. С. 38–40.
3. Шахтные испытания экспериментального проходческого комбайна с алмазным диском и гидравлическим отрывником / В.Д. Ярема, Ю.И. Климов, В.Ф. Атаманов и др. // Совершенствование методов разработки и создание средств комплексной механизации выемки угольных пластов. Караганда: КарПТИ, 1972. С. 148–150.
4. Генератор импульсов / Ю.И.Климов, С.В.Серебряков, Ю.В.Морозов и др. // Авт. свид. СССР № 1128006. Б.И. № 45, 1984.
5. Климов Ю.И., Бакиров Ж.Б., Мукушева Г.М. Напряженное состояние породного массива при щелевом отрыве целика // Наука и образование – ведущий фактор стратегии «Казахстан-2030»: Тр. Межд. научн. конф. Караганда: КарГТУ, 1998. С. 453–456.
6. Системы автоматизированного проектирования: в 9 кн. Кн.4. Математические модели технических объектов: учеб. пособие для вузов / В.А. Трудоношин, Н.В. Пивоварова: под ред. И.П. Норенкова. М.: Высш. шк., 1986. 160 с.
7. Типичные анализы. ANSYS 5.0 // Руководство пользователя: пер. с англ. И.Р. Идрисова. Снежинск, 1977. 19 с.

Статья поступила 17.11.2013 г.

Mutovina N.V., Klimov Yu.I., Smolin A.Yu. INTERACTING OF A FISSURE HYDRODE-TACHING WORKING TOOL WITH A ROCK CRANCH. Results of modeling a hydroseparator with a cropped cranch are presented. The research was performed by use of numerical modelling. The working stroke of the hydroseparator is divided into three characteristic stages according to working conditions of a real tool: the first stage of approach of the separator plate to the pillar; the second stage of deformation and brake-off of the pillar from a massif; and the third stage of transportation of the torn off pillar from a zone of the slot, a retardation and stop of the hydroseparator

stock-piston. The problems are solved using the GRAPH-PA and ANSYS programs. Distribution patterns of the maximum tangential stresses in a massif are obtained. Stress and deformation fields in the cranch and adjacent massif are determined, zones of extension and compression of the cranch are exposed, and the maximum values of equivalent strains are found in the extension zone.

Keywords: modeling, fissure hydrodetaching working tool of a mining machine, combined ways of destruction of a cranch, stress field.

REFERENCES

1. *Klimov Yu.I.* Ustoychivost' prokhodcheskogo kombayna s kombinirovannym rezhushche-otryvnym ispolnitel'nym organom // *Izv. vuzov. Gornyy zhurnal*. 1984. No. 10. P. 72–77 (in Russian).
2. *Klimov Yu.I., Berdalin B.S., Mukusheva G.M.* Rezul'taty issledovaniya ustoychivosti kombayna pri razrushenii vyazko-plasticheskikh gornykh porod // *Aktivnye rabochie organy stroitel'nykh i dorozhnykh mashin: tematic. sb.* Karaganda: KarPTI, 1983. P. 38–40 (in Russian).
3. *Shakhtnye ispytaniya eksperimental'nogo prokhodcheskogo kombayna s almaznym diskom i gidravlicheskim otrivnikom* / V.D. Yarema, Yu.I. Klimov, V.F. Atamanov., et al. // *Sovershenstvovanie metodov razrabotki i sozдание sredstv kompleksnoy mekhanizatsii vyemki ugol'nykh plastov*. Karaganda: KarPTI, 1972. P. 148–150 (in Russian).
4. *Generator impul'sov* / Yu.I. Klimov, S.V. Serebryakov, Yu.V. Morozov., et al. // *Avt. svid. SSSR* No. 1128006. B.I. No. 45, 1984 (in Russian).
5. *Klimov Yu.I., Bakirov Zh.B., Mukusheva G.M.* Napryazhennoe sostoyanie porodnogo massiva pri shchelevom otrывe tselika // *Nauka i obrazovanie – vedushchiy faktor strategii «Kazakhstan-2030»*: Tr. Mezhd. nauchn. konf. Karaganda: KarGTU, 1998. P. 453–456 (in Russian).
6. *Sistemy avtomatizirovannogo proektirovaniya: v 9 kn. Kn. 4. Matematicheskie modeli tekhnicheskikh ob"ektov: ucheb. posobie dlya vtuzov* / V.A. Trudonoshin, N.V. Pivovarova: pod red. I.P. Norenkova. Moscow: Vyssh. shk., 1986. 160 p. (in Russian).
7. *Tipichnye analizy. ANSYS 5.0* // *Rukovodstvo pol'zovatelya: per. s angl.* I.R. Idrisova. Snezhinsk, 1977. 19 p. (in Russian).

MUTOVINA Natalya Victorovna

(Karaganda State Technical University, Karaganda, Kazakhstan Republic)

E-mail: mutovina_natalya@mail.ru

KLIMOV Yuriy Ivanovich

(Karaganda State Technical University, Karaganda, Kazakhstan Republic)

E-mail: klimov_y68@rambler.ru

SMOLIN Alexey Yurievich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: asmolin@ispms.tsc.ru

М.А. Осипенко

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ ДВУХЛИСТОВОЙ РЕССОРЫ С ЛИСТАМИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Рассмотрена контактная задача об изгибе двухлистовой рессоры с односторонним контактом листов переменной толщины. Сформулирована строгая постановка задачи, установлена единственность решения и построены аналитические решения в некоторых частных случаях. Показано, что соприкосновение листов может происходить как в одной точке, так и на отрезке.

Ключевые слова: двухлистовая рессора, балка, переменная толщина, изгиб, контактная задача, аналитическое решение.

Контактная задача об изгибе двухлистовой рессоры заключается в отыскании контактных сил в системе двух консольных балок (листов) различной длины под заданной нагрузкой (рис. 1). В отсутствие этой нагрузки балки прямолинейны и плотно прилегают друг к другу. Сечения балок являются прямоугольниками одинаковой ширины, но различной переменной

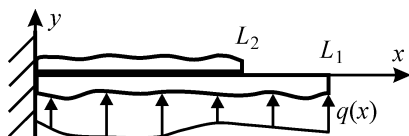


Рис. 1. Модель двухлистовой рессоры с листами переменной толщины

толщины. Под нагрузкой балки испытывают слабый совместный изгиб с возможным отставанием. Трение между балками отсутствует; изгиб каждой балки описывается моделью Бернулли – Эйлера [1]. Строгая постановка рассматриваемой контактной задачи сформулирована в [2]; там же доказана единственность решения. Аналитическое решение задачи имеется для следующих частных случаев: 1) постоянные толщины [2, 3]; 2) отношение переменных толщин меньшей и большей балок – неубывающая функция, а нагрузка – одна сила, сосредоточенная на краю большей балки [4]; 3) длины балок одинаковы, а переменные толщины и нагрузка таковы, что балки соприкасаются по всей длине [4]. Заметим, что в «технической» теории листовых рессор [5–7] решение для случая (1) известно только для нагрузки в виде силы, сосредоточенной на краю большого листа, а решения для случаев (2) и (3) являются неизвестными.

Целью настоящей работы является расширение и некоторое упорядочение набора частных случаев, для которых можно построить аналитическое решение. Этим построением одновременно доказывается существование решения.

Постановка контактной задачи

Балки испытывают слабый (линейный) изгиб в одной плоскости; $L_1 > L_2 > 0$ – длины балок. Согласно теории Бернулли – Эйлера [1], линии изгиба балок $y_1(x)$, $y_2(x)$ имеют вид

$$y_1(x) = \frac{12}{Ew} \int_0^x \int_0^s \frac{1}{h_1^3(t)} \left(\int_t^{L_1} (\tau - t) q(\tau) d\tau - \int_t^{L_2} (\tau - t) f(\tau) d\tau \right) dt ds, \quad (1)$$

$$y_2(x) = \frac{12}{Ew} \int_0^x \int_0^s \frac{1}{h_2^3(t)} \int_t^{L_2} (\tau - t) f(\tau) d\tau dt ds, \quad (2)$$

где E – модуль Юнга; w – ширина сечения; $h_1(x) > 0$, $h_2(x) > 0$ – переменные толщины сечений (геометрически – при определении функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ – толщины считаются равными нулю); $q(x)$ – заданная нагрузка; $f(x)$ – плотность сил взаимодействия балок. Задача заключается в отыскании $f(x)$. Будем считать, что эта функция имеет вид

$$p(x) + \sum_i P_i \delta(x - x_i), \quad (3)$$

где $p(x) \geq 0$ – кусочно-непрерывна, непрерывна слева при $0 < x \leq L_2$ и непрерывна справа при $x = 0$; $P_i \geq 0$; $x_i > 0$ (все x_i различны); сумма конечна; δ – дельта-функция Дирака. Обозначим $r(x) = y_2(x) - y_1(x)$ (расстояние между балками). Из (1), (2) следует, что

$$r(x) = \int_0^x \int_0^s a(t) \left(\int_t^{L_2} (\tau - t) f(\tau) d\tau - k(t) \right) dt ds, \quad (4)$$

где
$$a(x) = \frac{12}{Ew} \left(\frac{1}{h_1^3(x)} + \frac{1}{h_2^3(x)} \right), \quad k(x) = \frac{1}{1 + h_1^3(x)/h_2^3(x)} \int_x^{L_1} (s - x) q(s) ds.$$

Будем считать, что $q(x) \geq 0$ непрерывна при $0 \leq x \leq L_1$, а $h_1(x)$ и $h_2(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы при $0 \leq x \leq L_2$; тогда $k(x) \geq 0$ дважды непрерывно дифференцируема при $0 \leq x \leq L_2$. Условие контакта балок состоит, помимо неотрицательности плотности сил взаимодействия, в том, что расстояние между балками неотрицательно, а в тех точках, где плотность сил взаимодействия положительна, – равно нулю. Окончательно приходим к следующей математической постановке задачи.

Задача. Найти функцию $f(x)$ вида (3), такую, что при $0 \leq x \leq L_2$

$$r(x) \begin{cases} = 0 & (f(x) > 0), \\ \geq 0 & (f(x) = 0), \end{cases} \quad (5)$$

где $r(x)$ выражается формулой (4), в которой $a(x) > 0$ непрерывна при $0 \leq x \leq L_2$, $k(x) \geq 0$ дважды непрерывно дифференцируема при $0 \leq x \leq L_2$.

Утверждение 1. Поставленная задача может иметь только одно решение.

Доказательство проведено в [2] (с использованием несколько иного представления функций (1), (2)).

Аналитическое решение задачи в некоторых частных случаях

Утверждение 2. Если $k''(x) < 0$ при $0 \leq x \leq L_2$, то решение поставленной задачи имеет вид

$$f(x) = F \delta(x - L_2) \quad (6)$$

(соприкосновение в одной точке, рис. 2, а; здесь и далее соприкосновение в точке заземления не упоминается), где

$$F = \int_0^{L_2} (L_2 - x) a(x) k(x) dx \Big/ \int_0^{L_2} (L_2 - x)^2 a(x) dx. \quad (7)$$

Доказательство. Очевидно, что $f(x)$ имеет вид (3). Подставляя (6) в (4) и учитывая (7), найдем, что $r(L_2) = 0$, а при $0 \leq x < L_2$

$$r(x) = \int_0^x \int_0^s a(t)(L_2 - t)(F - b(t)) dt ds, \quad (8)$$

где

$$b(x) = k(x)/(L_2 - x), \quad b'(x) = c(x)/(L_2 - x)^2,$$

$$c(x) = k(x) + k'(x)(L_2 - x), \quad c'(x) = k''(x)(L_2 - x).$$

Так как $c'(x) < 0$ при $0 \leq x < L_2$ и $c(L_2) = k(L_2) \geq 0$, то $c(x) > 0$; следовательно, $b(x)$ возрастает при $0 \leq x < L_2$. Тогда из (8) следует, что $F \geq b(0)$ (иначе $r(L_2) < 0$). Так как $b(L_2 - 0) = +\infty$ (из неравенства $k''(x) < 0$ следует, что $k(L_2) > 0$), то существует $0 \leq t_* < L_2$, такое, что $F - b(t) \geq 0$ при $0 \leq t \leq t_*$ и $F - b(t) \leq 0$ при $t_* \leq t < L_2$. Отсюда, с учетом (8) и равенства $r(L_2) = 0$, нетрудно получить, что существует $0 \leq x_* \leq L_2$ такое, что $r(x)$ не убывает при $0 \leq x \leq x_*$ и не возрастает при $x_* \leq x \leq L_2$. Тогда из равенств $r(0) = 0$, $r(L_2) = 0$ вытекает неравенство $r(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq L_2$. Далее, $f(x)$ может быть положительна только при $x = L_2$, а $r(L_2) = 0$; таким образом, (5) выполнено.

Утверждение 3. Если $k''(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq L_2$ и $k(L_2) = 0$, то решение поставленной задачи имеет вид

$$f(x) = k''(x) \quad (9)$$

(соприкосновение по всему отрезку $0 \leq x \leq L_2$, рис. 2 б).

Доказательство. Очевидно, что $f(x)$ имеет вид (3). Заметим, что если $k(L_2) = 0$, то $k'(L_2) = 0$. Тогда, подставляя (9) в (4), найдем, что $r(x) = 0$ при $0 \leq x \leq L_2$; таким образом, (5) выполнено.

Утверждение 4. Если $k''(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq L_2$ и $k(L_2) > 0$, то решение поставленной задачи имеет следующий вид:

а) Если $\Phi(0) \leq 0$, то

$$f(x) = F\delta(x - L_2) \quad (10)$$

(соприкосновение в одной точке, рис. 2, а).

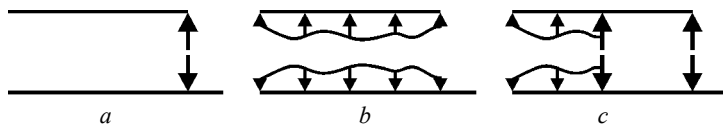


Рис. 2. Варианты сил взаимодействия листов

б) Если $\Phi(0) > 0$, то

$$f(x) = b(\lambda)\delta(x - L_2) - \frac{c(\lambda)}{L_2 - \lambda}\delta(x - \lambda) + \begin{cases} k''(x) & (0 \leq x \leq \lambda), \\ 0 & (\lambda < x \leq L_2) \end{cases} \quad (11)$$

(соприкосновение по части отрезка $0 \leq x \leq L_2$ и в точке; рис. 2, с), где

$$\Phi(\lambda) = \int_{\lambda}^{L_2} a(x)(L_2 - x)^2 (b(\lambda) - b(x)) dx, \quad (12)$$

$$0 < \lambda < L_2 - \text{корень уравнения } \Phi(\lambda) = 0. \quad (13)$$

Доказательство.

а) Очевидно, что $f(x)$ имеет вид (3). Подставляя (10) в (4), найдем для $r(x)$ выражение (8). Теперь $c'(x) \geq 0$ при $0 \leq x < L_2$. Так как $c(L_2) = k(L_2) \geq 0$, то либо $b(x)$

неубывает при $0 \leq x < L_2$, либо существует $0 \leq x^{**} < L_2$ такое, что $b(x)$ невозрастает при $0 \leq x \leq x^{**}$ и неубывает при $x^{**} \leq x < L_2$. Из (7, 12) и неравенства $\Phi(0) \leq 0$ следует, что $F \geq b(0)$. Далее рассуждения аналогичны проведенным при доказательстве утверждения 2.

б) Существование корня $0 < \lambda < L_2$ следует из непрерывности $\Phi(\Lambda)$ при $0 \leq \Lambda < L_2$ и значений

$$\Phi(0) > 0, \quad \lim_{\Lambda \rightarrow L_2-0} \Phi(\Lambda) = 0, \quad \lim_{\Lambda \rightarrow L_2-0} \Phi'(\Lambda) = 0,$$

$$\lim_{\Lambda \rightarrow L_2-0} \Phi''(\Lambda) = -a(L_2)k(L_2)/3 < 0.$$

Единственность корня следует из утверждения 1. При доказательстве пункта (а) было установлено, что (независимо от знака $\Phi(0)$) либо $b(x)$ неубывает при $0 \leq x < L_2$, либо существует $0 \leq x^{**} < L_2$ такое, что $b(x)$ невозрастает при $0 \leq x \leq x^{**}$ и неубывает при $x^{**} \leq x < L_2$ (причем $b(L_2 - 0) = +\infty$). Из (12) следует, что в первом случае $\Phi(\lambda) < 0$, что противоречит (13). Поэтому имеет место второй случай; тогда из (12) вытекает, что $\lambda \leq x^{**}$ (иначе $\Phi(\lambda) < 0$), следовательно, $b'(\lambda) \leq 0$ и $c(\lambda) \leq 0$. Тогда, учитывая неравенство $b(\lambda) > 0$, получаем, что (11) имеет вид (3). Подставляя (11) в (4), найдем

$$r(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq \lambda), \\ \int_{\lambda}^x \int_{\lambda}^s a(t)(L_2 - t)(b(\lambda) - b(t)) dt ds & (\lambda \leq x < L_2); \end{cases} \quad (14)$$

с учетом (12, 13) также получим $r(L_2) = 0$. Из установленных выше свойств функции $b(x)$ следует, что существует $x^{**} \leq t^{**} < L_2$ такое, что $b(\lambda) - b(t) \geq 0$ при $\lambda \leq t \leq t^{**}$ и $b(\lambda) - b(t) \leq 0$ при $t^{**} \leq t < L_2$. Отсюда, так же как при доказательстве утверждения 2, заключаем из (14), что $r(x) \geq 0$ при $\lambda \leq x < L_2$ и, следовательно, при $0 \leq x \leq L_2$. Далее, $f(x)$ может быть положительна только при $0 \leq x \leq \lambda$ и при $x = L_2$, а $r(x) = 0$ для этих значений x ; таким образом, (5) выполнено.

Некоторые замечания к полученным результатам и выводы

Если толщины листов постоянны, то утверждение 4 приводит к результатам [2, 3]. Теорема, эквивалентная утверждению 3, упомянута в [4] без доказательства. В [4] также без доказательства приведено решение контактной задачи для случая, в котором $h_2(x)/h_1(x)$ – неубывающая функция и $q(x) = P\delta(x - L_1)$. Этот случай утверждениями 2–4 не охватывается. Таким образом, в настоящей работе результаты [2–4] частично обобщены и частично дополнены.

Можно показать, что утверждения 1–4 остаются справедливыми и при заметном ослаблении требований на гладкость функции $k(x)$. Эту функцию можно считать лишь непрерывной и кусочно дважды непрерывно дифференцируемой, если понимать $k''(x)$ в “обобщенном смысле”: в точках излома $k(x)$ доопределять $k'(x)$ по непрерывности слева, а в точках разрыва $k'(x)$ (первого рода) добавлять к $k''(x)$ соответствующую δ -функцию.

Использованный в настоящей работе подход к решению контактной задачи для двух балок переменной толщины показывает, что структура решения определяется знаком функции $k''(x)$. Этот подход может быть применен как для дальнейшего исследования данной задачи (случаи, когда $k''(x)$ меняет знак), так и для решения близких контактных задач (например, для других вариантов закрепления концов балок).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 711 с.
2. *Osipenko M.A., Nyashin Yu.I., Rudakov R.N.* A contact problem in the theory of leaf spring bending // *Int. J. Solids and Structures*. 2003. No. 40. P. 3129–3136.
3. *Няшин Ю.И., Осипенко М.А., Рудаков Р.Н.* К теории изгиба листовой рессоры // *Изв. РАН, МТТ*. 2002. № 6. С. 134–143.
4. *Osipenko M.A., Nyashin Y.I., Rudakov R.N., et al.* Mathematical modelling of the foot prosthesis elastic element under bending // *Russ. J. Biomechanics*. 2001. V. 5. No. 2. P. 18–29.
5. *Глух Б.А., Бидерман В.Л.* Рессоры листовые / *Машиностроение. Энциклопедический справочник*. Т. 2. М.: Машгиз, 1948. С. 723–739.
6. *Пономарев С.Д. и др.* Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 1. М.: Машгиз, 1956. 884 с.
7. *Пархиловский И.Г.* Автомобильные листовые рессоры. М.: Машиностроение, 1978. 232 с.

Статья поступила 02.10.2013 г.

Osipenko M.A. THE CONTACT PROBLEM FOR BENDING OF A TWO-LEAF SPRING WITH VARIABLE THICKNESSES OF LEAVES. The unbonded contact problem for bending of a two-leaf spring under arbitrary loading is considered. The thickness of each leaf is variable. In the absence of loading, the leaves are right-lined and fit each other closely. The leaves are modeled as Bernoulli–Euler cantilever beams. The problem is reduced to finding the density of the leaves' interaction forces. This density consists of a piecewise continuous part and concentrated forces. A rigorous problem statement is formulated, the uniqueness of solution is established, and analytical solutions of the problem for some special cases are constructed. It is established that the classification of particular cases is determined by the sign of some function that depends on the given loading and variable thicknesses of the leaves. It is shown that the leaves may contact at one point on the tip of the short leaf, over the whole short leaf, or over a part of the short leaf and at its tip.

Keywords: two-leaf spring, beam, variable thickness, bending, contact problem, analytical solution.

REFERENCES

1. *Rabotnov Yu.N.* Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela. Moscow: Nauka, 1988. 711 p. (in Russian).
2. *Osipenko M.A., Nyashin Yu.I., Rudakov R.N.* A contact problem in the theory of leaf spring bending // *Int. J. Solids and Structures*. 2003. No. 40. P. 3129–3136.
3. *Nyashin Yu.I., Osipenko M.A., Rudakov R.N.* K teorii izgiba listovoy resory // *Izv. RAN, MTT*. 2002. No. 6. P. 134–143 (in Russian).
4. *Osipenko M.A., Nyashin Y.I., Rudakov R.N., et al.* Mathematical modelling of the foot prosthesis elastic element under bending // *Russ. J. Biomechanics*. 2001. V. 5. No. 2. P. 18–29.
5. *Glukh B.A., Biderman V.L.* Ressory listovye / *Mashinostroenie. Entsiklopedicheskiy spravochnik*. V. 2. Moscow: Mashgiz, 1948. P. 723–739 (in Russian).
6. *Ponomarev S.D., et al.* Raschety na prochnost' v mashinostroenii. V. 1. Moscow: Mashgiz, 1956. 884 p. (in Russian).
7. *Parkhilovskiy I.G.* Avtomobil'nye listovye resory. Moscow: Mashinostroenie, 1978. 232 p. (in Russian).

OSIPENKO Michael Anatol'evich

(Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation)

E-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru

УДК 539.3

В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, Л.В. Ландик

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ В ВИДЕ КЛИНЬЕВ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ

Выявляется новый тип задач механики твердого деформируемого тела – нестандартные задачи, отличительной особенностью которых является избыточность, хотя бы в одной точке границы тела, задаваемых ограничений на его параметры состояния. Приводятся примеры конструкций, находящихся в условиях плоской нестандартной задачи. Предлагается метод исследования рассматриваемого типа задач.

Ключевые слова: нестандартные задачи, особые точки, плоская задача, концентрация напряжений.

Понятие нестандартной задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ) не является общепринятым. Оно впервые вводится в настоящей статье. Под нестандартными мы понимаем задачи МДТТ, в которых количество ограничений, вытекающих из сути задачи, оказывается избыточным. Например, в плоской задаче при задании усилий на контуре в каждой точке стандартно задается вектор напряжений, определяемый двумя параметрами (в частности, нормальным и касательным напряжением). Если на контуре имеется точка, в которой заданы не два, а три или более условий для напряжений, задача становится нестандартной. Нестандартные задачи характерны для однородных тел, на границе которых касательные к образующим претерпевают разрывы первого рода; для составных тел, например слоистых; для конструкций, полученных путем пайки, сварки или склеивания; в контактных задачах при наличии и отсутствии сухого трения и т.п. Во всех этих случаях возникают точки концентрации напряжений, способствующие разрушению конструкции, поэтому изучению рассматриваемых задач уделяется достаточно большое внимание исследователей [1–17]. При этом обычно авторы нестандартную задачу заменяют стандартной. Для этого используется два подхода. Первый состоит в исключении из рассмотрения точки, в которой заданы избыточные условия [1, 3–7 и др.]. Решение в этом случае может быть лишь асимптотическим и оно, как правило, не удовлетворяет всем ограничениям, накладываемым на параметры состояния в особой точке. Другой прием перехода от нестандартной задачи к стандартной основан на изменении заданной геометрии конструкции – окрестность точки, в которой имеется скачок касательной, изменяется таким образом, чтобы избавиться от этого скачка [17]. Такой прием, очевидно, приводит к совершенно другой задаче.

В настоящей статье предлагается способ выявления избыточно заданных независимых ограничений на параметры состояния в вершинах клиньев, являющихся конструктивными элементами однородных конструкций в условиях плоской задачи. Способ основан на использовании факта независимости компонент тензора напряжений или деформаций. Приводится пример исследования нестандартной задачи.

1. Клины, образующие которого свободны от нагрузок

Рассматривается элемент конструкции, имеющий особенность в виде клина. По биссектрисе угла 2α при вершине A клина направим ось x_1 декартовой ортонормированной системы координат x_1, x_2 .

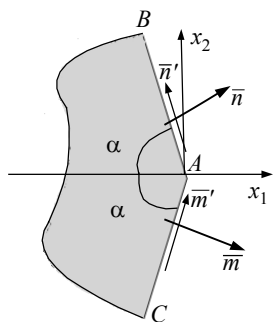


Рис. 1. Элемент конструкции в виде клина

Внешние нормали к образующим клина обозначим через $\vec{n}$, $\vec{m}$. Через $\vec{n}'$, $\vec{m}'$ обозначим соответственно перпендикулярные им орты (рис. 1).

Для компонент тензора напряжений принимаются обозначения σ_{ij} , для нормальных напряжений – σ_m, σ_n , для касательных – $\tau_{m'}, \tau_{n'}$. Векторы напряжений на образующих клина AB и AC равны нулю, поэтому граничные условия в рассматриваемой задаче вблизи вершины записываются равенствами

$$\sigma_n = 0, \tau_{n'} = 0, \sigma_m = 0, \tau_{m'} = 0. \quad (1)$$

В точке A эти равенства представляют собой систему четырех линейных однородных уравнений относительно трех неизвестных напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= 0, \\ -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \sigma_{11} \sin^2 \alpha - 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= 0, \\ \sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Из матрицы системы уравнений (2) можно построить четыре различных определителя третьего порядка Δ_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Эти определители выражаются равенствами

$$\Delta_1 = \Delta_2 = -4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \quad \Delta_3 = -\Delta_4 = \cos 2\alpha \sin 2\alpha. \quad (3)$$

Приравнявая нулю определители (3), находим условия, при которых ранг матрицы системы уравнений (2) оказывается меньшим трех:

$$\alpha = \pi/2, \quad \alpha = \pi. \quad (4)$$

Следовательно, для решений уравнений (2) возможны три случая

1) $\alpha \neq \pi/2, \alpha \neq \pi$. Матрица системы уравнений (2) имеет ранг равный трем. Поэтому решение будет тривиальным $\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{22} = 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае напряженное состояние в точке A полностью известно и не зависит ни от материальных свойств конструкции, ни от способа ее нагружения. Оно обусловлено заданными граничными условиями в точке A . Здесь число заданных независимых условий оказывается избыточным, равным трем, что и свидетельствует о нестандартности данной задачи МДТТ.

2) $\alpha = \pi/2$. Граница тела не имеет угловой точки. Из уравнений (2) определяются напряжения $\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0$. Компонента σ_{22} из системы уравнений не определяются, она должна находиться из решения задачи о расчете рассматриваемо-

го элемента конструкции в соответствии с его нагружением. Число граничных условий в точке A равно двум, задача МДТТ оказывается стандартной.

3) $\alpha = \pi$. Точка A в этом случае оказывается вершиной трещины. Из уравнений (2) определяются напряжения $\sigma_{22} = 0$, $\sigma_{12} = 0$. Компонента σ_{11} должна найдется из решения задачи о расчете рассматриваемого элемента конструкции. Задача МДТТ является стандартной.

2. Кли́н с жестко заделанными образующими

Пусть образующие клина AB и AC (рис.1) жестко заделаны, точки этих образующих неподвижны в процессе деформирования элемента конструкции. Из этого следует, что в точке A относительное удлинение линейных элементов в направлении ортов $\vec{n}'$, $-\vec{m}'$, а также сдвиги между ними, обращаются в нуль. Эти условия выражаются равенствами

$$\varepsilon_{ij}n'_i n'_j = 0, \varepsilon_{ij}m'_i m'_j = 0, \varepsilon_{ij}n'_i m'_j = 0. \quad (5)$$

Через ε_{ij} обозначены компоненты тензора деформаций. Третье из равенств (5) получено с использованием формулы

$$\varphi \sin \beta = [2\varepsilon_{rp} - (\eta_k + \eta_l)\delta_{rp}]k_r l_p, \quad (6)$$

определяющей сдвиг φ в произвольной точке сплошной среды между линейными элементами с направлениями $\vec{k}$, $\vec{l}$ и углом β между ними. В формуле (6) обозначено η_k, η_l – относительные удлинения в точке сплошной среды в направлении ортов $\vec{k}$, $\vec{l}$ соответственно, δ_{rp} – координаты метрического тензора.

Равенства (5) в результате подстановки координат ортов $\vec{n}'$, $\vec{m}'$ приводятся к системе линейных однородных уравнений относительно деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} \cos^2 \alpha - 2\varepsilon_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha &= 0, \\ \varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + 2\varepsilon_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha &= 0, \\ -\varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Определитель Δ матрицы системы уравнений (7) $\Delta = 8\cos^3 \alpha \sin^3 \alpha$ в промежутке $0 < \alpha \leq \pi$ обращается в нуль при $\alpha = \pi/2$ и $\alpha = \pi$, поэтому возможны такие три случая решения системы (7):

1) $\alpha \neq \pi/2$, $\alpha \neq \pi$. Ранг матрицы системы уравнений (7) равен трем. Ее решение $\varepsilon_{11} = 0$, $\varepsilon_{12} = 0$, $\varepsilon_{22} = 0$. Напряжения в вершине клина в отсутствие температурного нагружения ($\Delta T = 0$) также обращаются в нуль $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{12} = 0$, $\sigma_{22} = 0$.

Если элемент конструкции подвергается температурному нагружению ($\Delta T \neq 0$), в вершине клина возникают нормальные напряжения (в случае плоско напряженного состояния для линейно упругого материала)

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\frac{\omega \Delta T E}{1 - \nu}, \quad \sigma_{12} = 0.$$

Обозначено: ω – коэффициент линейной температурной деформации, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. Заданные условия на контуре в точке A формулируются тремя независимыми равенствами, задача является нестандартной.

2) $\alpha = \pi/2$. Из уравнений (7) определяются деформации $\varepsilon_{22} = 0$. Деформации ε_{11} , ε_{12} из уравнений (7) не определяются, они находятся из решения задачи о напряженно деформированном состоянии рассматриваемого тела. В отсутствие температурного нагружения из уравнений (7) с использованием физических соотношений следует зависимость между напряжениями (случай плосконапряженного состояния) $\sigma_{22} = \nu\sigma_{11}$.

При температурном нагружении эта зависимость принимает вид $\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} = -\omega\Delta TE$. Избыточных граничных условий в рассматриваемом случае нет.

3) $\alpha = \pi$. Аналогично предыдущему случаю из уравнений (7) определяется деформация $\varepsilon_{11} = 0$.

В отсутствие температурного нагружения напряжения связаны равенством $\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} = 0$. При температурном нагружении $\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} = -\omega\Delta TE$. Как и в предыдущем случае, задача является стандартной.

3. Клинь, одна из сторон которого жестко закреплена, а другая свободна от нагрузки

Пусть образующая AB свободна от нагрузки, а образующая AC жестко закреплена. Тогда в вершине клина на площадке, ориентируемой ортом $\vec{n}$, обращаются в нуль нормальные и касательные напряжения, а на площадке, ориентируемой ортом $\vec{m}$, обращается в нуль относительное удлинение в направлении орта $-\vec{m}'$. Эти условия записываются системой уравнений (плоское напряженное состояние, линейно упругое тело)

$$\begin{aligned}\sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= 0, \\ -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \sigma_{11} (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) + 2(1+\nu)\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} (\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha) &= -\omega E \Delta T.\end{aligned}\quad (8)$$

Определитель Δ матрицы системы уравнений (8) $\Delta = 1 - (1+\nu)\sin^2 2\alpha$ в промежутке $0 < \alpha \leq \pi$ обращается в нуль при значениях $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, определяемых равенствами

$$\begin{aligned}\sin \alpha_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}, & \cos \alpha_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}; \\ \sin \alpha_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}, & \cos \alpha_2 &= -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}; \\ \sin \alpha_3 &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}, & \cos \alpha_3 &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}; \\ \sin \alpha_4 &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}, & \cos \alpha_4 &= -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{1+\nu}}}.\end{aligned}\quad (9)$$

Если угол α не удовлетворяет условиям (9), ранг матрицы системы уравнений (8) равен трем. В этом случае в отсутствие температурного нагружения ($\Delta T = 0$) все напряжения в точке A обращаются в нуль $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$. При температурном нагружении ($\Delta T \neq 0$) рассматриваемая система уравнений имеет единственное решение

$$\sigma_{11} = -\frac{\omega E \Delta T \cos^2 \alpha}{1 - (1 + \nu) \sin^2 2\alpha}; \sigma_{12} = \frac{\omega E \Delta T \sin \alpha \cos \alpha}{1 - (1 + \nu) \sin^2 2\alpha}; \sigma_{22} = -\frac{\omega E \Delta T \sin^2 \alpha}{1 - (1 + \nu) \sin^2 2\alpha}.$$

Из приведенных решений следует, что в рассматриваемом случае в точке A задаются три независимых условия, поэтому задача является нестандартной. В случае, когда выполняется какое-либо из условий (9), ранг матрицы системы уравнений (8) будет равен двум. В отсутствие температурного нагружения ($\Delta T = 0$) два напряжения могут быть выражены через третье:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad \sigma_{12} = -\sigma_{22} \operatorname{ctg} \alpha, \\ \alpha = \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Данная задача оказывается стандартной.

При наличии температурного нагружения ($\Delta T \neq 0$) и при выполнении какого-либо из условий (9) ранг расширенной матрицы системы уравнений (8) равен трем, поэтому решения задачи в плоской постановке не существует.

4. Кли́н, одна из сторон которого жестко заделана, а другая проскальзывает без трения вдоль жесткой стенки

Пусть жестко заделанной является образующая клина AC , тогда на параметры состояния в точке A накладываются такие ограничения

- а) на стороне клина AB обращаются в нуль касательные напряжения;
- б) в направлении вектора $-\vec{m}'$ относительное удлинение линейного элемента обращается в нуль;
- в) сдвиг между направлениями $\vec{n}'$ и $-\vec{m}'$ обращается в нуль.

Эти условия выражаются уравнениями относительно напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ (плоско напряженное состояние, линейно упругое тело):

$$-\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha = 0, \\ \sigma_{11} (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) + 2(1 + \nu) \sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} (\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha) = -\omega E \Delta T, \\ \sigma_{11} (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) + (1 + \nu) \sigma_{12} \sin 2\alpha \cos 2\alpha - \sigma_{22} (\sin^2 \alpha + \nu \cos^2 \alpha) = -\omega E \Delta T \cos 2\alpha.$$

Определитель Δ матрицы этой системы $\Delta = \frac{\nu^2 - 1}{2} \sin^2 2\alpha \cos 2\alpha$ на промежутке $0 < \alpha \leq \pi$ обращается в нуль в точках $\alpha = \pi/4, \alpha = \pi/2, \alpha = 3\pi/4, \alpha = \pi$.

Поэтому возможны следующие случаи для напряжений в точке A :

- 1) $\alpha \neq \pi/4, \alpha \neq \pi/2, \alpha \neq 3\pi/4, \alpha \neq \pi$.

Ранг матрицы системы уравнений (10) равен трем. В отсутствие температурного нагружения она имеет нулевое решение: $\sigma_{11} = 0, \sigma_{22} = 0, \sigma_{12} = 0$.

При температурном нагружении уравнения (10) имеют единственное решение $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{\omega E \Delta T}{\nu - 1}$, $\sigma_{12} = 0$. В рассматриваемом случае в точке A задаются три независимых условия, задача о расчете элемента конструкции, содержащей такую особую точку, является нестандартной.

2) $\alpha = \pi/4$. Ранг матрицы системы (10) равен двум. В отсутствие температурного нагружения напряжения σ_{11} и σ_{12} можно выразить через σ_{22} : $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, $\sigma_{12} = \frac{\nu - 1}{\nu + 1} \sigma_{22}$.

При температурном нагружении ранг расширенной матрицы также равен двум, система уравнений (10) совместна, два напряжения выражаются через третье:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22}, \quad \sigma_{12} = -\frac{[\omega E \Delta T + \sigma_{22}(1 - \nu)]}{\nu + 1}.$$

В точке A в рассматриваемом случае нет избыточных ограничений, задача является стандартной.

3) $\alpha = \pi/2$. Ранг матрицы системы уравнений (10) и ранг ее расширенной матрицы одинаковы и равны двум, система совместна. Между напряжениями имеются зависимости $\sigma_{22} = \nu \sigma_{11} - \omega E \Delta T$, $\sigma_{12} = 0$. Задача является стандартной.

4) $\alpha = 3\pi/4$. Случай аналогичен рассмотренному в п.2. Задача является стандартной, напряжения в точке A связаны равенствами

$$\sigma_{11} = \sigma_{22}, \quad \sigma_{12} = \frac{[\omega E \Delta T + \sigma_{22}(1 - \nu)]}{\nu + 1}.$$

5) $\alpha = \pi$. В данном случае также задача является стандартной. Напряжения в точке A связаны соотношениями $\sigma_{11} = \nu \sigma_{22} - \omega E \Delta T$, $\sigma_{12} = 0$.

5. Клинь, одна из сторон которого свободна от напряжений, а другая скользит без трения вдоль жесткой поверхности

Примем, что на образующей AB обращаются в нуль нормальные и касательные напряжения, а на образующей AC в нуль обращаются касательные напряжения. Эти условия выражаются уравнениями в точке A :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= 0, \\ -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Матрица этой системы имеет определитель $\Delta = \sin 2\alpha \cos 2\alpha$, обращающийся в нуль на промежутке $0 < \alpha \leq \pi$ в точках $\alpha = \pi/4$, $\alpha = \pi/2$, $\alpha = 3\pi/4$, $\alpha = \pi$. Поэтому возможны следующие случаи решения уравнений (11):

1) $\alpha \neq \pi/4$, $\alpha \neq \pi/2$, $\alpha \neq 3\pi/4$, $\alpha \neq \pi$. Ранг матрицы системы уравнений (11) равен трем, поэтому она имеет лишь тривиальное решение $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{22} = 0$, $\sigma_{12} = 0$. Количество независимых задаваемых условий в точке A элемента конст-

рукции, имеющего такую особую точку, является избыточным, задача о расчете является нестандартной.

2) $\alpha = \pi/4$. Ранг матрицы системы уравнений (11) равен двум, между напряжениями в точке A имеются зависимости $\sigma_{11} = \sigma_{22}$; $\sigma_{12} = -\sigma_{22}$. Задача о расчете элемента конструкции с такой особой точкой является стандартной.

3) $\alpha = \pi/2$. Из уравнений (11) определяются два напряжения $\sigma_{11} = 0$; $\sigma_{12} = 0$. Задача является стандартной.

4) $\alpha = 3\pi/4$. Из уравнений (11) следуют зависимости $\sigma_{11} = \sigma_{22}$; $\sigma_{12} = \sigma_{22}$. Задача о расчете элемента конструкции является стандартной.

5) $\alpha = \pi$. Из уравнений (11) определяются компоненты напряжений $\sigma_{22} = 0$; $\sigma_{12} = 0$.

Избыточные условия в точке A отсутствуют. Задача является стандартной.

6. Клин, образующие которого нагружены поверхностными усилиями

В данной задаче напряжения на образующих AB и AC равны заданным нормальным и касательным усилиям

$$\sigma_n = p_n; \quad \tau_n = \tau_n; \quad \sigma_m = p_m; \quad \tau_m = \tau_m.$$

В точке A эти равенства запишутся системой четырех уравнений относительно трех напряжений σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= p_n, \\ -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= \tau_n, \\ \sigma_{11} \sin^2 \alpha - 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= p_m, \\ \sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= \tau_m. \end{aligned} \quad (12)$$

Четыре различных определителя матрицы системы уравнений (12) имеют значения (3) и одновременно обращаются в нуль при условиях (4): $\alpha = \pi/2$, $\alpha = \pi$. Поэтому возможны такие три случая поведения решений уравнений (12):

1) $\alpha \neq \pi/2$, $\alpha \neq \pi$. Ранг матрицы системы уравнений (12) равен трем. Для того чтобы в этом случае существовало решение, ранг расширенной матрицы системы тоже должен равняться трем. Это условие приводит к ограничению на приложенные нагрузки:

$$(p_n - p_m) \cos 2\alpha + (\tau_n + \tau_m) \sin 2\alpha = 0. \quad (13)$$

Ограничение (13) требует, чтобы заданные усилия на образующих клина в точке A находились в соответствии с условием симметричности тензора напряжений. Ограничение (13) выражает равенство в точке A проекции вектора напряжений на площадке, ориентированной вектором $\vec{n}$, на направление $\vec{m}$ проекции вектора напряжений на площадке, ориентированной вектором $\vec{m}$, на направление $\vec{n}$ ($\vec{P}_n \cdot \vec{m} = \vec{P}_m \cdot \vec{n}$). При невыполнении ограничения (13) симметричная теория упругости не описывает напряженное состояние в окрестности вершины клина. Если приложенные нагрузки удовлетворяют условию (13), уравнение (12) имеет единственное решение

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{1}{2}(p_n + p_m) + \frac{1}{2}(\tau_m - \tau_n) \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{12} = \frac{1}{2}(\tau_m + \tau_n) + \frac{1}{2}(p_n - p_m) \operatorname{ctg} \alpha, \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{2}(p_n + p_m) + \frac{1}{2}(\tau_n - \tau_m) \operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}\quad (14)$$

Заметим, что данное решение может быть найдено и другим способом – путем составления уравнения равновесия бесконечно малого элемента, примыкающего к вершине клина. Как следует из равенств (14), в данном случае в точке A задаются три независимых условия, задача оказывается нестандартной.

2) $\alpha = \pi/2$. Ранг матрицы системы уравнений (12) равен двум. Для того чтобы существовало решение этих уравнений, ранг расширенной матрицы также должен быть равен двум. Это условие приводит к ограничениям в точке A на прикладываемую нагрузку

$$p_n = p_m, \quad \tau_n = \tau_m. \quad (15)$$

Ограничения (15) обусловлены требованием к нагрузке соответствовать симметричности тензора напряжений. При выполнении условия (15) из уравнений (12) получаем $\sigma_{11} = p_m$, $\sigma_{12} = \tau_n$.

Избыточных условий на параметры состояния в точке A не накладывается, задача является стандартной.

3) $\alpha = \pi$. Данный случай аналогичен предыдущему. Система уравнений (12) совместна при выполнении ограничений (15), ее решение $\sigma_{22} = p_n$, $\sigma_{12} = -\tau_n$. Задача является стандартной.

7. Клин, одна из сторон которого жестко закреплена, а другая нагружена поверхностными усилиями

Пусть образующая AB клина нагружена нормальным напряжением p_n и касательным τ_n , а образующая AC жестко закреплена, поэтому относительное удлинение в направлении орта $-m'$ в точке A обращается в нуль. Указанные ограничения записываются системой уравнений относительно компонент напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= p_n, \\ -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= \tau_n, \\ \sigma_{11}(\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) + 2(1 + \nu)\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22}(\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha) &= 0.\end{aligned}\quad (16)$$

Определитель матрицы системы уравнений (16) $\Delta = 1 - (1 + \nu) \sin^2 2\alpha$ в промежутке $0 < \alpha \leq \pi$ обращается в нуль при значениях α_i ($i = 1, 2, 3, 4$), определяемых равенствами (9). Если угол α не равен α_i ($i = 1, 2, 3, 4$), ранг системы уравнений (16) равен трем и она имеет единственное решение

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{p_n[\sin^2 \alpha + \nu \cos^2 \alpha - (1 + \nu) \sin^2 2\alpha] - \tau_n \sin 2\alpha[1 - (1 + \nu) \cos^2 \alpha]}{1 - (1 + \nu) \sin^2 2\alpha}, \\ \sigma_{12} &= \frac{p_n(1 - \nu) \sin \alpha \cos \alpha - \tau_n \cos 2\alpha}{1 - (1 + \nu) \sin^2 2\alpha},\end{aligned}$$

$$\sigma_{22} = \frac{p_n [\cos^2 \alpha + v \sin^2 \alpha - (1+v) \sin^2 2\alpha] - \tau_n \sin 2\alpha [2(1+v) \sin^2 \alpha - 1]}{1 - (1+v) \sin^2 2\alpha}.$$

В точке A количество заданных независимых условий оказывается избыточным, поэтому рассматриваемый случай описывается нестандартной задачей.

Если угол α совпадает с каким-либо из углов (9), ранг системы уравнений (16) становится равным двум. Для того чтобы вычислить ранг расширенной матрицы, построим три определителя, получающиеся путем последовательной замены столбцов матрицы системы (16) столбцом свободных членов. Получим

$$\Delta_i = p_n f_i(v) + \tau_n \varphi_i(v), \quad (i=1, 2, 3). \quad (17)$$

Здесь введены обозначения

$$f_1(v) = \cos^2 \alpha + v \sin^2 \alpha - (1+v) \sin^2 2\alpha, \quad \varphi_1(v) = \sin 2\alpha [\cos^2 \alpha - (1+2v) \sin^2 \alpha],$$

$$f_2(v) = (1-v) \sin \alpha \cos \alpha, \quad \varphi_2(v) = -\cos 2\alpha,$$

$$f_3(v) = \sin^2 \alpha + v \cos^2 \alpha - (1+v) \sin^2 2\alpha, \quad \varphi_3(v) = \sin 2\alpha [2(1+v) \cos^2 \alpha - 1].$$

Приравнявая определители (17) нулю, получим систему уравнений относительно параметров нагружения p_n, τ_n . Ранг матрицы этой системы уравнений в точках α_i ($i=1, 2, 3, 4$) оказывается равным единице. Это означает, что уравнения (16) будут совместны при выполнении условий

$$\begin{aligned} p_n(v-1) - 2\tau_n \sqrt{v} &= 0, \quad \text{для } \alpha_1, \alpha_4; \\ p_n(v-1) + 2\tau_n \sqrt{v} &= 0, \quad \text{для } \alpha_2, \alpha_3. \end{aligned} \quad (18)$$

В этом случае ранг матрицы системы уравнений (16) и ранг расширенной матрицы совпадают, два компонента напряжений выражаются через третий и приложенную нагрузку:

$$\sigma_{11} = p_n(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) + \sigma_{22} \operatorname{tg}^2 \alpha - 2\tau_n \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\sigma_{12} = (p_n - \sigma_{22}) \operatorname{ctg} \alpha + \tau_n, \quad \alpha = \alpha_i \quad (i=1, 2, 3, 4).$$

Задача с рассматриваемой особенностью является стандартной. Если приложенная нагрузка не удовлетворяет ограничениям (18) в точках α_i ($i=1, 2, 3, 4$), решение уравнений (16) не существует.

8. Клинь, одна из сторон которого скользит без трения по жесткой поверхности, а другая нагружена

Примем, что образующая клина AB нагружена нормальными и касательными усилиями p_n, τ_n , а образующая клина AC скользит без трения по жесткой поверхности. В этом примере параметры состояния в точке A подчинены ограничениям $\sigma_n = p_n, \tau'_n = \tau_n, \tau'_m = 0$, что описывается равенствами

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= p_n, \\ -\sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= \tau_n, \\ \sigma_{11} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

представляющими собой систему уравнений для напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$. Определитель матрицы этой системы $\Delta = \cos 2\alpha \sin 2\alpha$ обращается в нуль в точках $\alpha_1 = \pi/4, \alpha_2 = \pi/2, \alpha_3 = 3\pi/4, \alpha_4 = \pi$. Поэтому возможны такие варианты решения системы уравнений (19):

1) $\alpha \neq \pi/4, \alpha \neq \pi/2, \alpha \neq 3\pi/4, \alpha \neq \pi$. Ранг матрицы системы уравнений равен трем, она имеет единственное решение:

$$\sigma_{11} = p_n + \tau_n \frac{\sin^2 2\alpha - \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha \sin 2\alpha}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\tau_n}{2 \cos 2\alpha}, \quad \sigma_{22} = p_n + \tau_n \frac{\sin^2 2\alpha - \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha \sin 2\alpha}.$$

В точке A конструкции задаются три независимых компонента тензора напряжений, задача оказывается нестандартной.

2) $\alpha = \pi/4$. Ранг матрицы системы уравнений (19) равен двум, условием совместности этих уравнений служит равенство

$$\tau_n = 0. \quad (20)$$

В этом случае ранг расширенной матрицы оказывается равен рангу матрицы системы, зависимости между напряжениями записываются соотношениями $\sigma_{11} = \sigma_{22}, \sigma_{12} = p_n - \sigma_{22}$. Задача о расчете элемента конструкции является стандартной. Если условие (20) не выполняется, решение системы (19) не существует.

3) $\alpha = \pi/2$. Условием совместности уравнений (19) служит равенство (20). Решение имеет вид $\sigma_{11} = p_n, \sigma_{12} = 0$. Задача оказывается стандартной.

4) $\alpha = 3\pi/4$. Условием совместности уравнений (19) также служит равенство (20). Решение записывается зависимостями между напряжениями $\sigma_{11} = \sigma_{22}, \sigma_{12} = \sigma_{22} - p_n$. Задача является стандартной.

5) $\alpha = \pi$. Аналогично предыдущим случаям условие совместности системы (19) записывается равенством (20), решение имеет вид $\sigma_{22} = p_n, \sigma_{12} = 0$. Задача о расчете элемента конструкции решается стандартными методами.

9. Пример решения нестандартной задачи

Рассматривается задача о растяжении пластинки с особенностью в виде клина с образующими, свободными от нагрузок (п. 1). Принимается, что угол α при вершине клина A находится в промежутке $\pi/2 < \alpha < \pi$. В этом случае задача является нестандартной. Условия для напряжений в точке A запишутся равенствами

$$\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{22} = 0. \quad (21)$$

Геометрические и материальные параметры в расчетах имели значения (рис. 2) $l = 1$ см, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,3$, угол α принимался равным 93, 99 и 105°.

Нагружение осуществляется напряжениями $\sigma_0 = 1 \cdot 10^8$ Па. Для построения решения применяется итерационный численно-аналитический подход, предложенный в работах [18, 19]. При этом на каждом шаге применяется метод конечных элементов, разрешающие уравнения ко-

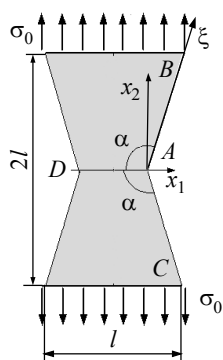


Рис. 2. Расчетная схема

торого строятся как условия стационарности функционала [20]

$$J_{u\varepsilon} = \int_V \left[(Lu)^T D(\varepsilon - \varepsilon^0) - \frac{1}{2} \varepsilon^T D \varepsilon \right] dV + W, \quad (22)$$

где независимыми параметрами являются перемещения u и деформации ε . Обозначено: L – матрица дифференциальных операторов в равенстве $Lu = \varepsilon$; D – матрица упругих модулей материала; W – потенциальная энергия заданных сил; ε_0 – вектор начальных (в частности, температурных) деформаций. Использование смешанного функционала позволяет определять параметры состояния (напряжения, деформации) без применения операции дифференцирования приближенного решения. Этапы построения решения:

1) Устанавливаются условия, которым должны удовлетворять напряжения в точке A (21) и на образующих, кроме точки A (2).

2) Нулевое приближение разыскивается путем решения стандартной задачи, то есть считается, что граничные условия заданы равенствами (2) во всех точках образующих, включая точку A .

3) Узлы КЭ-сетки, в которых должны выполняться равенства (21) и (2), объявляются основными. В этих узлах проверяется выполнение равенств (21) и (2). Отклонение от нуля полученных значений образует вектор невязок.

4) Равенства (21) и (2), записанные через перемещения, рассматриваются как система уравнений для основных перемещений (остальным перемещениям присваиваются значения нулевого приближения). Число таких уравнений в нестандартной задаче оказывается большим, чем число неизвестных (матрица системы уравнений оказывается прямоугольной), поэтому строится обобщенное (псевдо) решение этих уравнений. Полученное решение используется в качестве граничных условий в основных узлах при построении первого приближения.

Далее процесс повторяется. Сходимость итерационного процесса контролируется среднеквадратическим отклонением величины вектора невязок от заданного значения.

Вычисления проводились на сгущающейся к особой точке сетке с минимальным размером элемента 0,53 мкм. Рис. 3 демонстрирует сходимость итерационного процесса.

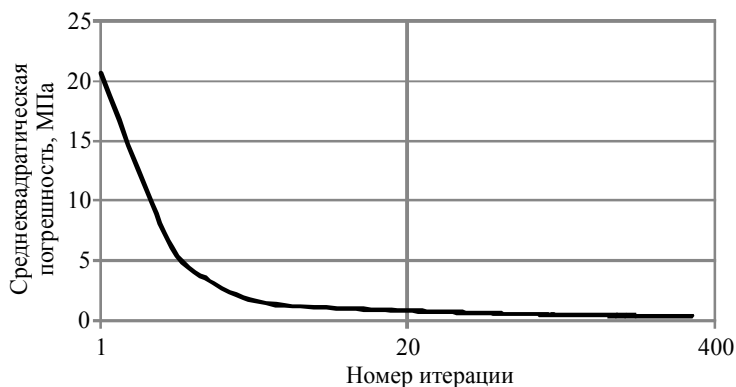


Рис. 3. Зависимость среднеквадратического отклонения величины вектора невязок от количества итераций

На рис. 4 и 5 приводятся графики, иллюстрирующие концентрацию напряжений σ_{22}/σ_0 в малой окрестности особой точки. Примечательно, что наибольшего значения концентрация напряжений достигает не в точках оси x_1 . На рис. 5 приводятся относительные нормальные напряжения $\sigma_{\xi\xi}/\sigma_0$ на образующей AB . Максимальные значения этих напряжений оказываются большими, чем на оси x_1 . С ростом угла α , как и следовало ожидать, концентрация напряжений в окрестности особой точки возрастает.

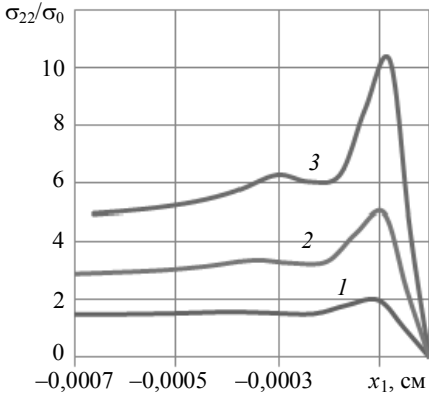


Рис. 4. Зависимость напряжений σ_{22}/σ_0 от x_1 (линия AD) при различных α : 1 – $\alpha = 93^\circ$; 2 – $\alpha = 99^\circ$; 3 – $\alpha = 105^\circ$

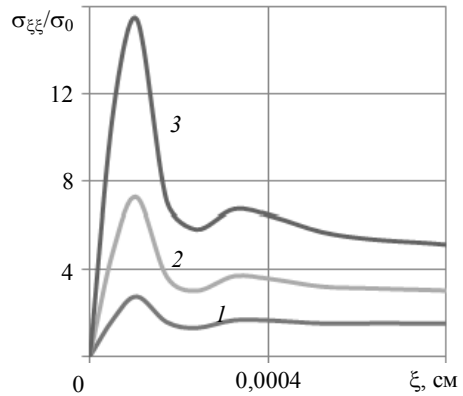


Рис. 5. Зависимость напряжений σ_{22}/σ_0 от ξ (линия AB) при различных α : 1 – $\alpha = 93^\circ$; 2 – $\alpha = 99^\circ$; 3 – $\alpha = 105^\circ$

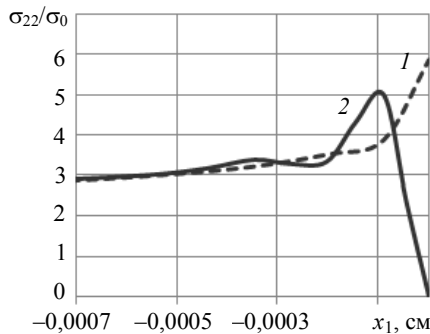


Рис. 6. Сравнение решений нестандартной задачи, построенных стандартным методом (1) и итерационным (2). $\alpha = 99^\circ$

На рис. 6 приводятся решение данной задачи с использованием пакета ANSYS (штриховая линия) и решение предлагаемым итерационным методом (сплошная линия). В обоих случаях использовалась одна КЭ-сетка, угол α принимался 99° . Решение, полученное в ANSYS, совпадает с нулевым приближением итерационного решения. Нулевое приближение не согласуется с заданными условиями (21) в особой точке. При уточнении решения методом последовательных приближений граничные условия вблизи точки A задаются в перемещениях, которые изменяются от шага к шагу так, чтобы улучшить выполнение всех заданных условий. Видно, что кривые на рис.6 отличаются лишь в малой окрестности точки A .

Заключение

Предлагаемый в работе способ анализа ограничений на параметры состояния вблизи особой точки позволяет выявить заданные независимые условия и, исходя из их количества, определить тип рассматриваемой задачи, правильно выбрать метод решения. Оказывается, что основными задачами элементов конструкций с особыми точками являются нестандартные задачи. Стандартные задачи составляют исключения. Они отвечают лишь определенному сочетанию материальных и геометрических параметров элементов конструкций. Дальнейшее изучение нестандартных задач МДТТ предполагается вести посредством развития методов их решения, изучения пространственных и составных тел с различными механическими свойствами.

Расчеты проводились на суперкомпьютере ТЕСЛА-ПГУ научно-образовательного центра параллельных и распределенных вычислений Пермского государственного национального исследовательского университета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension // *J. Appl. Mech.* 1952. V. 19. P. 526–528.
2. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1967. 402 с.
3. *Bogy D.B.* Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading // *J. Appl. Mechanics.* 1968. V. 35. P. 460–466.
4. *Bogy D.B.* Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions // *Trans. ASME. Ser. E.* 1971. V. 38. No. 2. P. 87–96.
5. *Аксентян О.К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // *Прикладная математика и механика.* 1967. № 1. С. 178–186.
6. *Аксентян О.К., Луцик О.Н.* Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* 1978. № 5. С. 102–108.
7. *Аксентян О.К., Луцик О.Н.* Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины стыкового соединения // *Прикладная механика.* 1982. Т. 18. № 7. С. 66–73.
8. *Задоян М.А.* Прочность соединения составных плит // *Механика твердого тела.* 2003. № 1. С. 111–122.
9. *Матвеев В.П.* Метод численного анализа сингулярности напряжений в угловых точках трехмерных тел // *Изв. РАН МТТ.* 1995. № 5. С. 71–77.
10. *Матвеев В.П., Накарякова Т.О., Севодина Н.В., Шардаков И.Н.* Сингулярность напряжений в вершине однородных и составных конусов при разных граничных условиях // *Прикладная математика и механика.* 2008. Т. 72. Вып. 3. С. 477–484.
11. *Матвеев В.П., Федоров А.Ю.* Оптимизация геометрии составных упругих тел как основа совершенствования методик испытаний на прочность клеевых соединений // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2011. Т. 4. № 4. С. 63–70.
12. *Sinclear G.B.* Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation and analysis // *App. Mech. Rev.* 2004. V. 57. No. 4. P. 251–297.
13. *Sinclear G.B.* Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // *App. Mech. Rev.* 2004. V. 57. No. 4. P. 385–439.
14. *Чобанян К.С.* Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
15. *Barut A., Guven I., Madenci E.* Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading // *Int. J. Solid and Structures.* 2001. V. 38. No. 50–51. P. 9077–9109.
16. *Борзенков С.М., Матвеев В.П.* Полуаналитические сингулярные элементы для плоских и пространственных задач теории упругости // *Изв. РАН МТТ.* 1995. № 6. С. 48–61.

17. Adams R.D., Atkins R.W., Harris J.A., Kinloch A.J. Stress analysis and failure properties of carbon-fibre-reinforced-plastic steel double-lap joints // J. Adhesion. 1986. V. 20. P. 29–53.
18. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Напряженное состояние вблизи особой точки составной конструкции в плоской задаче // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 4(24). С. 78–87.
19. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В., Степина Е.В. Температурное нагружение составной конструкции в условиях плоской задачи // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2013. № 3(22). С. 66–71.
20. Пестренин В.М., Пестренина И.В. Механика композитных материалов и элементов конструкций. Пермь: Перм. ун-т, 2005. 364 с.

Статья поступила 04.11.2013 г.

Pestrenin V. M., Pestrenina I. V., Landik L. V. NON-STANDARD PROBLEMS OF HOMOGENEOUS STRUCTURAL ELEMENTS WITH WEDGE SHAPE FEATURES IN THE PLANE CASE. A new type of solid mechanics problems – non-standard ones – is distinguished. Their distinctive feature is the redundancy of restrictions on status parameters at at least one point on the body boundary. It is shown that the use of standard methods in solving non-standard problems does not guarantee the fulfillment of all specified conditions. The most important cases of non-standard restrictions in flat homogeneous structural elements with singularities in the form of wedges are presented. Wedge side loading is studied in the following cases: free from stress, rigidly clamped, sliding without friction along a rigid surface, and surface power loaded. An iterative converging numerical-analytical method for studying problems of this type is proposed. At each step of the iterative process converging to the solution of the non-standard problem, the inverse problem in displacements is solved. An illustrative example shows the essential difference between the standard and iterative solutions of the non-standard problem in a vicinity of the wedge tip.

Keywords: non-standard problems, singular points, plane problem, stress concentration

REFERENCES

1. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners in extension // J. App. Mech. 1952. V. 19. P. 526–528.
2. Uflyand Ya.S. Integral'nye preobrazovaniya v zadachakh teorii uprugosti. M.-L.: Izd-vo AN SSSR, 1967. 402 p. (in Russian).
3. Bogy D.B. Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading // J. Appl. Mechanics. 1968. V. 35. P. 460–466.
4. Bogy D.B. Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions // Trans. ASME. Ser. E. 1971. V. 38. No. 2. P. 87–96.
5. Aksentyan O.K. Osobennosti napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya plity v okrestnosti rebra // Prikladnaya matematika i mekhanika. 1967. No. 1. P. 178–186 (in Russian).
6. Aksentyan O.K., Lushchik O.N. Ob usloviyakh ogranichenosti napryazheniy u rebra sostavnogo klina // Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela. 1978. No. 5. P. 102–108 (in Russian).
7. Aksentyan O.K., Lushchik O.N. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie v okrestnosti vershiny stykovogo soedineniya // Prikladnaya mekhanika. 1982. V. 18. No. 7. P. 66–73 (in Russian).
8. Zadoyan M.A. Prochnost' soedineniya sostavnykh plit // Mekhanika tverdogo tela. 2003. No. 1. P. 111–122 (in Russian).
9. Matveenko V.P. Metod chislennogo analiza singulyarnosti napryazheniy v uglovykh tochkakh trekhmernykh tel // Izv. RAN MTT. 1995. No. 5. P. 71–77 (in Russian).
10. Matveenko V.P., Nakaryakova T.O., Sevodina N.V., Shardakov I.N. Singulyarnost' napryazheniy v vershine odnorodnykh i sostavnykh konusov pri raznykh granichnykh usloviyakh // Prikladnaya matematika i mekhanika. 2008. V. 72. Vyp. 3. P. 477–484 (in Russian).

11. *Matveenko V.P., Fedorov A.Yu.* Optimizatsiya geometrii sostavnykh uprugikh tel kak osnova sovershenstvovaniya metodik ispytaniy na prochnost' kleevykh soedineniy // *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred.* 2011. V. 4. No. 4. P. 63–70 (in Russian).
12. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation and analysis // *App. Mech. Rev.* 2004. V. 57. No. 4. P. 251–297.
13. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // *App. Mech. Rev.* 2004. V. 57. No. 4. P. 385–439.
14. *Chobanyan K.S.* Napryazheniya v sostavnykh uprugikh telakh. Erevan: Izd-vo AN ArmSSR, 1987. 338 p. (in Russian).
15. *Barut A., Guven I., Madenci E.* Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading // *Int. J. Solid and Structures.* 2001. V. 38. No. 50–51. P. 9077–9109.
16. *Borzenkov S.M., Matveenko V.P.* Poluanaliticheskie singulyarnye elementy dlya ploskikh i prostranstvennykh zadach teorii uprugosti // *Izv. RAN MTT.* 1995. No. 6. P. 48–61 (in Russian).
17. *Adams R.D., Atkins R.W., Harris J.A., Kinloch A.J.* Stress analysis and failure properties of carbon-fibre-reinforced-plastic steel double-lap joints // *J. Adhesion.* 1986. V. 20. P. 29–53.
18. *Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V.* Napryazhennoe sostoyanie vblizi osoboy tochki sostavnoy konstruksii v ploskoy zadache // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika.* 2013. No. 4(24). P. 78–87 (in Russian).
19. *Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V., Stepina E.V.* Temperaturnoe nagruzhenie sostavnoy konstruksii v usloviyakh ploskoy zadachi // *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika.* 2013. No. 3(22). P. 66–71 (in Russian).
20. *Pestrenin V.M., Pestrenina I.V.* Mekhanika kompozitnykh materialov i elementov konstruksiy. Perm': Perm. un-t, 2005. 364 p. (in Russian).

PESTRENIN Valery Mihailovich (Perm State University, Perm, Russian Federation)

E-mail: pestreninVM@mail.ru

PESTRENINA Irena Vladimirovna (Perm State University, Perm, Russian Federation)

E-mail: IPestrenina@gmail.com

LANDIK Lidia Vladimirovna (Perm State University, Perm, Russian Federation)

E-mail: LidiaLandik@gmail.com

УДК 531.554

Н.В. Савкина, В.И. Биматов, Ю.Ф. Христенко

**РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ И АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
ОСТРОГО КОНУСА НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ
НЕЛИНЕЙНОЙ АЭРОБАЛЛИСТИКИ¹**

Рассмотрена задача расчета нелинейных аэродинамических характеристик острого конуса на основе решения уравнений Навье–Стокса с применением гипотезы турбулентной вязкости и диффузии. Приведены сравнения полученных расчетов с результатами, полученными при проведении экспериментов на баллистической трассе ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН при числах Маха $M=1,5$.

Ключевые слова: *сверхзвуковое обтекание, турбулентный поток, сжимаемая вязкая жидкость, коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы.*

Интенсивное развитие ракетной и космической техники поставило ряд качественно новых проблем, для решения которых оказалось целесообразным наряду с другими привлечь и методы численного моделирования. Можно сказать, что одной из характерных черт современных исследований стало интенсивное применение методов математического моделирования. Особенно наглядно это проявилось при исследовании задач авиационно-космической техники, где наиболее остро стоит проблема получения с высокой точностью полей обтекания летательных аппаратов и определения их аэродинамических характеристик. Для многих режимов движения лабораторный эксперимент здесь трудно осуществим, так как требует для полного моделирования практически натуральных условий. Многомерность и сильная нелинейность указанных явлений таковы, что численные подходы представляют практически важнейшее средство для их достаточно полного теоретического исследования. Стремительное развитие вычислительной техники в последнее десятилетие позволяет эффективно реализовать численные методы решения практических задач и внедрять их в практику экспериментальных исследований. Наиболее полной среди численных моделей является модель, описываемая уравнениями Навье – Стокса, позволяющая учесть эффекты сжимаемости, вязкости и теплопроводности газа.

Создание надежных методик расчета аэродинамических характеристик летательных аппаратов с учетом того, что их зависимость от параметров движения носит существенно нелинейный, а подчас и неоднозначный характер, представляет интерес как в плане развития нестационарной сверхзвуковой аэродинамики, так и для решения ряда практических задач управления движением исследуемых тел.

В настоящей работе представлено решение задачи обтекания и расчета аэродинамических характеристик тела канонической формы с помощью пакета Ansys CFX.

¹ Работа выполнена в рамках реализации гранта РФФИ № 12-08-00297-а.

Постановка задачи

Рассматривается установившееся обтекание воздухом острого конуса с углом при вершине $2\theta_k = 30^\circ$, форма которого представлена на рис. 1. Угол атаки изменялся в диапазоне $0-40^\circ$, скорость $V_\infty = 478$ м/с.

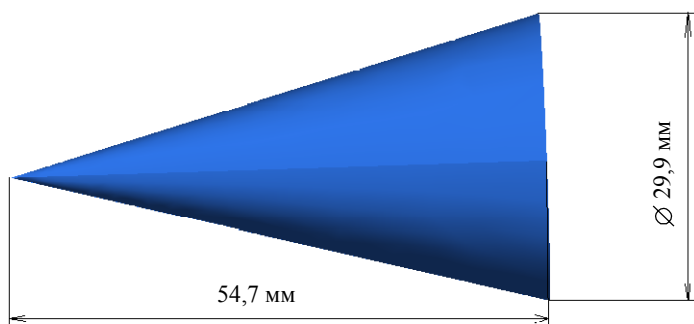


Рис. 1. Геометрия обтекаемого тела.

Течение газа описывается системой осредненных уравнений Навье – Стокса. Последующая задача будет решаться при следующих допущениях:

1. Режим течения воздуха турбулентный.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0.$$

Для описания турбулентного характера движения воздуха используются осредненные уравнения сжимаемой вязкой жидкости и гипотеза вихревой вязкости.

2. Пренебрегаем массовыми силами.

Уравнение неразрывности имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0. \quad (1)$$

Уравнение сохранения импульса (уравнение движения):

$$\frac{\partial (\rho U)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U \otimes U) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau, \quad (2)$$

где τ – тензор вязких напряжений:

$$\tau = \mu \left(\nabla U + (\nabla U)^T - \frac{2}{3} \delta \nabla \cdot U \right),$$

p – давление.

Уравнение сохранения энергии:

$$\frac{\partial (\rho h_{\text{tot}})}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U h_{\text{tot}}) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (U \cdot \tau), \quad (3)$$

где h_{tot} – полная энтальпия $h_{\text{tot}} = h + \frac{1}{2} U^2$, h – энтальпия $h = C_p T$, ρ – плотность газа; U – вектор скорости; T – температура.

Исходная форма уравнения состояния имеет вид

$$\rho = \frac{p_{op} + P}{\frac{R}{M_w} T}, \quad (4)$$

где p_{op} – рабочее давление; M_w – молекулярная масса; R – универсальная газовая постоянная.

В k - ε -модели используется формула Колмогорова – Прандтля для расчёта турбулентной вязкости [1], а для k и ε определяют уравнения переноса. Уравнение для k получено из уравнений Навье – Стокса и Рейнольдса с небольшим числом допущений (гипотеза турбулентной вязкости и моделирование слагаемого, описывающего турбулентную диффузию) [1, 2] и представлено там в виде (2.109). Уравнение переноса для ε представлено как

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \varepsilon; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon), \quad (6)$$

где $\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$ – турбулентная вязкость.

Структура уравнения (5) опирается на используемые допущения: градиентная диффузия, механизм генерации ε , идентичный соответствующему механизму для k , моделирование диссипации ε как релаксации к асимптотическому нулевому значению с характерным временем $\tau_t = k / \varepsilon$ [1].

Для k - ε -модели определился стандартный рекомендуемый набор эмпирических констант (6), который обычно принимается по умолчанию в вычислительных пакетах [3, 4]:

$$C_\mu = 0,09, C_{\varepsilon 1} = 1,44, C_{\varepsilon 2} = 1,92, \sigma_k = 1,0, \sigma_\varepsilon = 1,3.$$

Расчетная сетка

Размеры расчетной области выбираются относительно большими, чтобы дальние граничные условия не смогли исказить поле течения вблизи самого тела. Она представляет собой пространство в виде цилиндра, где находится модель (рис. 2).

Условия на входной границе: величина и направление скорости набегающего потока: $U = U_0 \cos(\alpha)$; $V = 0$; $W = U_0 \sin(\alpha)$; турбулентная интенсивность: $I = 5\%$; статические температура и давление $T = 20^\circ\text{C}$; $P = 1 \text{ атм.}$;

$k_{\text{Inlet}} = \frac{3}{2} I^2 U^2$; $\varepsilon_{\text{Inlet}} = \rho C_\mu \frac{k^2}{\mu_t}$, где $\mu_t = 1000 \mu$. На выходной границе задавалась

среднее статическое давление: по всему выходу – $P_{\text{из}} = 0$, если $M < 1$, т.е. равенство избыточного давления воздуха равно нулю. По этому условию воздух может

только выходить из расчетной области через указанную грань ($\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n^2} = 0, \frac{\partial^2 k}{\partial n^2} = 0$).

Если $M > 1$, то граничные условия на выходе не задаются. На боковой границе задается граничное условие равенства нулю избыточного давления $p = 0$, при этом через эту грань допускается вход-выход воздуха в расчетную область. При расчете аэродинамических характеристик нами рассматривается $\frac{1}{2}$ конуса. На диаметральной плоскости выставляются граничные условия симметрии: $W = 0, \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \phi = \{P, U, W, \rho, k, \varepsilon\}$.

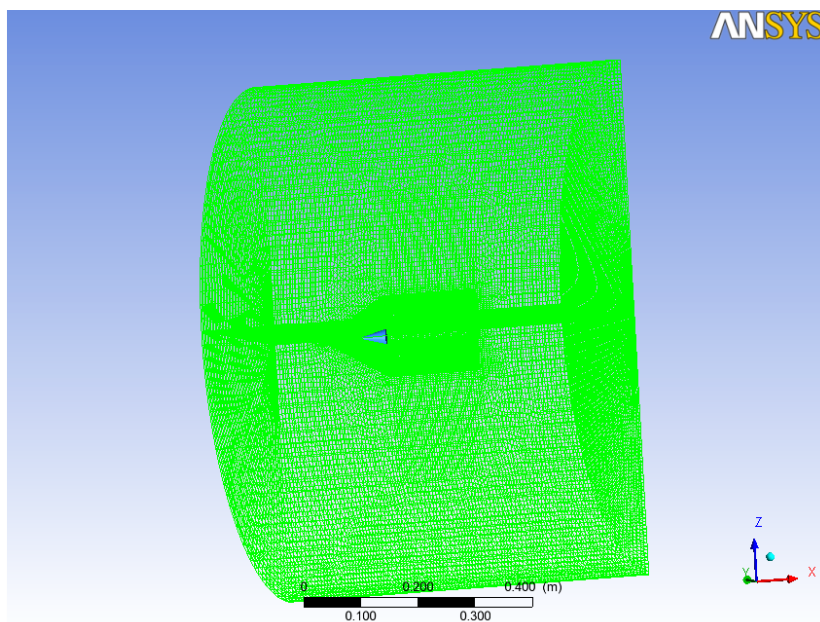


Рис. 2. Вид расчетной сетки для острого конуса

Результаты расчета полей обтекания и аэродинамических характеристик

На рис. 3 представлены поля скоростей (в числах Маха), распределение давления и линии тока в плоскости симметрии для углов атаки 0 и 40° для скорости набегающего потока $M_\infty = 1,5$.

Отчетливо виден головной криволинейный скачок, отсоединенный от обтекаемого тела. За телом образуется область возвратно-циркуляционного течения. Как было отмечено О.М. Белоцерковским [5], отмечается существование внутреннего и внешнего следов при сверхзвуковом обтекании тела вязким газом. Внутренний вязкий след образован вязким пограничным слоем на теле, внешний след – криволинейным головным скачком уплотнения. С увеличением угла атаки происходит искривление этих следов в связи с образованием на наветренной стороне обтекаемого тела зоны отрыва.

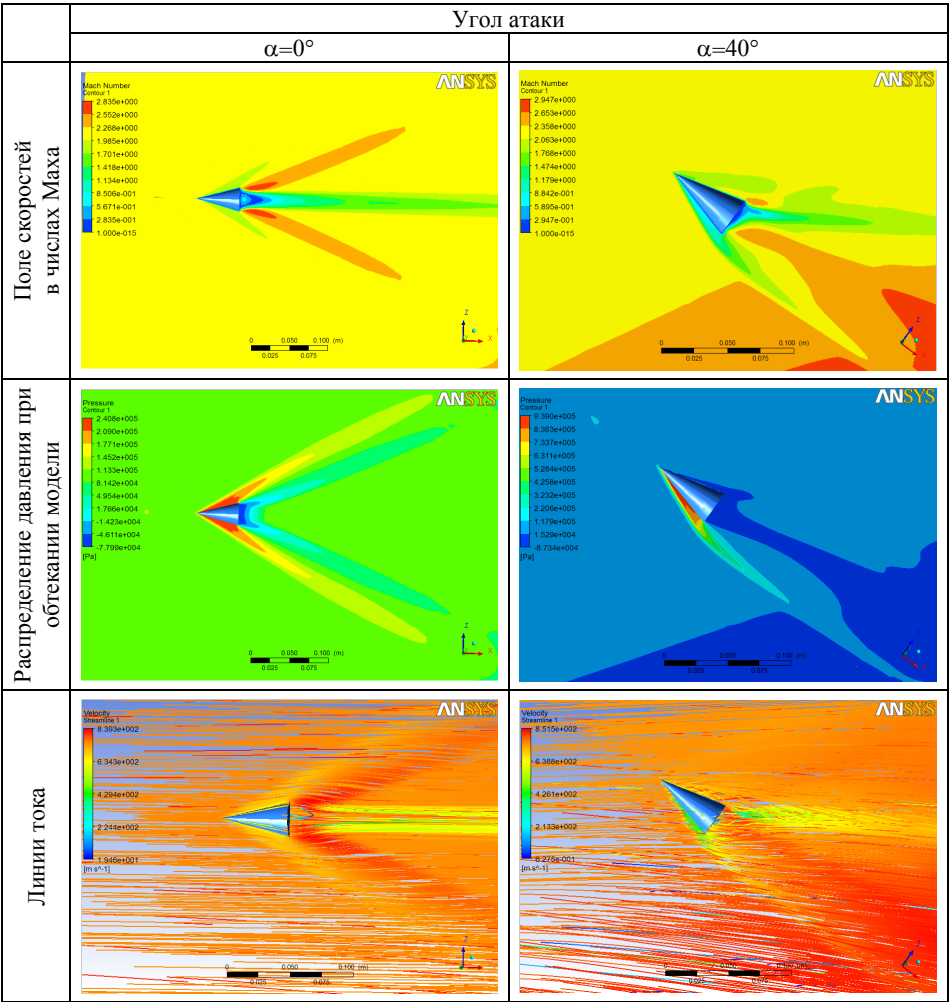


Рис. 3. Поля скоростей (в числах Маха), распределение давления и линии тока в плоскости симметрии для углов атаки 0° и 40° ($M_\infty = 1,5$)

На рис. 4 и 5 представлены зависимости коэффициентов подъемной силы C_y и лобового сопротивления C_x от угла атаки. Сплошными линиями представлены результаты, полученные опытным путем, пунктирными линиями – результаты, полученные при численном моделировании. Суммарное относительное рассогласование не превысило 4–6 %.

Приведённые сравнения расчетов $C_x(\alpha)$, $C_y(\alpha)$ острого конуса, полученных по приведенной выше методике с результатами расчетов, полученных при проведении экспериментов на баллистической трассе ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН [6], показали вполне удовлетворительное согласование данных аэробаллистического эксперимента с результатами газодинамического расчета.

Результаты исследований и их анализ, изложенные в работе, расширяют возможности баллистического эксперимента по определению линейных и нелинейных аэродинамических характеристик летательных аппаратов разнообразных

форм и удлинений, повышают точность и надежность получаемых результатов и могут быть использованы при опытно-конструкторских разработках.

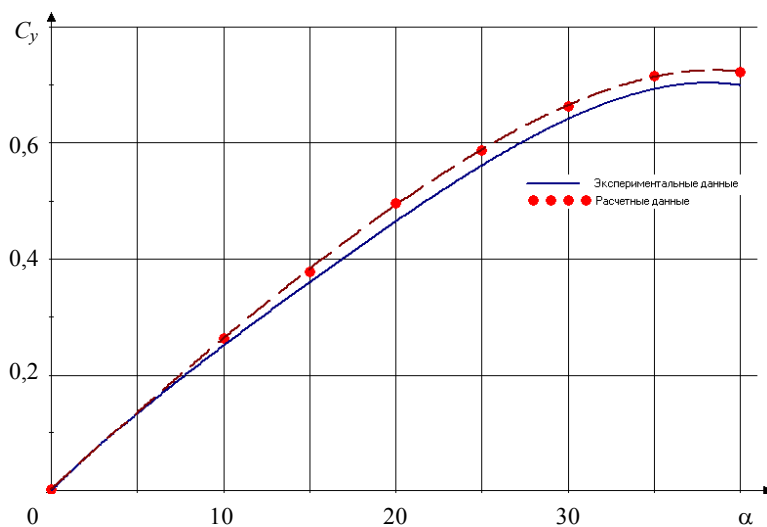


Рис. 4. Зависимость C_y от угла атаки для острого конуса

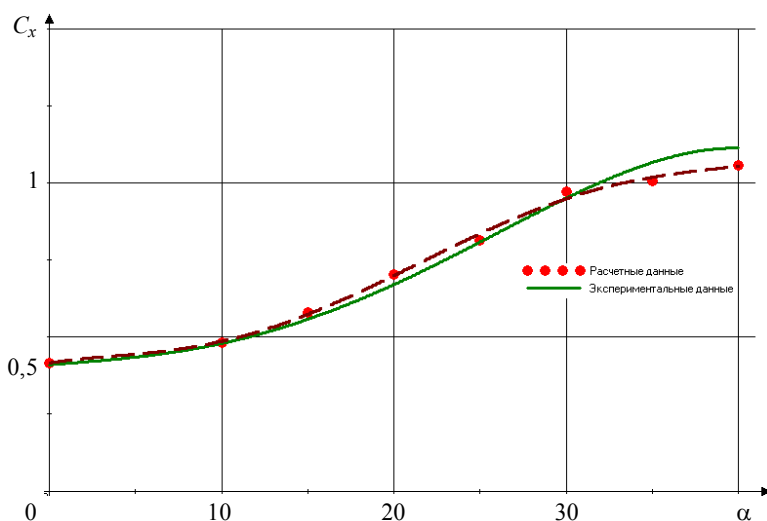


Рис. 5. Зависимость C_x от угла атаки для острого конуса

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Снегирёв А.Ю. Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 143 с.
2. Фарапонов В.В., Савкина Н.В., Дьячковский А.С., Чупашев А.В. Расчет аэродинамического коэффициента лобового сопротивления тела в дозвуковых и трансзвуковых режимах движения с помощью пакета ANSYS Fluent // Компьютерные исследования и моде-

- лирование. Ижевск: Автономная некоммерческая организация Ижевский институт компьютерных исследований, 2012. Т. 4. № 4. С. 845–855.
3. ANSYS FLUENT 13.0 Documentation. Ansys Inc., 2011.
 4. ANSYS CFX, Release 13.0. Ansys Inc., 2011.
 5. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982. 392 с.
 6. Менде Н.П. Обратная задача нелинейной баллистики. I. Плоское движение // Препринт 1326 ФТИ АН ССР, Ленинград, 1989. 44 с.

Статья поступила 03.10.2013 г.

Savkina N. V., Bimatov V. I., Khristenko Yu.F. CALCULATION OF THE FLOW AND AERODYNAMIC CHARACTERISTICS OF A SHARP CONE BASED ON THE DIRECT PROBLEM OF NONLINEAR AEROBALLISTICS. Creation of reliable methods for calculating aerodynamic characteristics of aircrafts with allowance for the fact that their dependence on the parameters of motion is essentially nonlinear and sometimes even controversial is of interest, in the context of both developing nonstationary supersonic aerodynamics and solving a number of practical problems of control for motion of investigated bodies. In this paper, the problem of calculating nonlinear aerodynamic characteristics of a sharp cone is considered. Among numerical models, the most complete one is a model described by the Navier–Stokes equations; it allows one to take into account effects of compressibility, viscosity, and thermal conductivity of the gas with the use of the hypothesis of turbulent viscosity and diffusion. The results of calculations are compared with the data obtained in experiments on the ballistic track of the Ioffe Physico-Technical Institute at Mach numbers $M = 1,5$.

Keywords: supersonic flow, turbulent flow, compressible viscous fluid, coefficients of drag and lift.

REFERENCES

1. Snegirev A.Yu. Vysokoproizvoditel'nye vychisleniya v tekhnicheskoy fizike. Chislennoe modelirovanie turbulentnykh techeniy: ucheb. posobie. SPb.: Izd-vo Politekh. un-ta, 2009. 143 p. (in Russian).
2. Faraponov V.V., Savkina N.V., D'yachkovskiy A.S., Chupashev A.V. Raschet aerodinamicheskogo koefitsienta lbovogo soprotivleniya tela v dozvukovykh i tranzvukovykh rezhimakh dvizheniya s pomoshch'yu paketa ANSYS Fluent // Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie. Izhevsk: Avtonomnaya nekommercheskaya organizatsiya Izhevskiy institut komp'yuternykh issledovaniy, 2012. V. 4. No. 4. P. 845–855 (in Russian).
3. ANSYS FLUENT 13.0 Documentation. Ansys Inc., 2011.
4. ANSYS CFX, Release 13.0. Ansys Inc., 2011.
5. Belotserkovskiy O.M., Davydov Yu.M. Metod krupnykh chastits v gazovoy dinamike. Moscow: Nauka, 1982. 392 p. (in Russian).
6. Mende N.P. Obratnaya zadacha nelineynoy ballistiki. I. Ploskoe dvizhenie // Preprint 1326 FTI AN SSR, Leningrad, 1989. 44 p. (in Russian).

BIMATOV Vladimir Ismagilovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: vbimatov@mail.ru

SAVKINA Nadezhda Valer'evna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: pantera@ftf.tsu.ru

Khristenko Uriy Fedorovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: pantera@ftf.tsu.ru

УДК 629.78.001

Н.Н. Севастьянов**УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ
«ЯМАЛ-200» С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИГНАЛОВ, РЕТРАНСЛИРУЕМЫХ
БОРТОВЫМ РЕТРАНСЛЯЦИОННЫМ КОМПЛЕКСОМ**

На основе разработанных ранее режимов ориентации космических аппаратов (КА) «Ямал-200» с использованием модели инерциальных измерителей построен режим, в котором угловые параметры получаются в результате обработки сигналов бортового ретрансляционного комплекса. Предложена схема формирования угловых параметров, структура и схема программно-аппаратного комплекса оценки углов ориентации. Приведены данные по реализации работы этой системы на реальном изделии.

Ключевые слова: *режим ориентации, анализ изменения мощности, надёжность управления, анализатор спектра сигналов, амплитуда сигнала.*

Управление ориентацией космических аппаратов (КА) «Ямал-200» построено на базе бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), использующей данные гироскопических измерителей вектора угловой скорости [1, 2]. В процессе эксплуатации спутников в рамках программы повышения надёжности управления было создано несколько резервных режимов управления ориентацией [3–5]. Эти резервные режимы позволили восстановить два контура управления: «быстрый» контур стабилизации, выполняемый по инерциальной информации (или её модели) и медленный контур корректирования положения. На основе созданных режимов оказалось возможным построить ещё один режим ориентации, описание которого приводится в настоящей статье.

Формирование управляющих воздействий в этом режиме осуществляется с использованием получаемых в результате обработки сигналов бортового ретрансляционного комплекса (БРК). Для реализации этого режима была создана радиотехническая система оценки ориентации (СОО) КА, основными элементами которой являются:

- передающие станции;
- БРК КА;
- приёмная станция;
- программно-аппаратный комплекс, предназначенный для обработки принятых станцией сигналов и расчёта кинематических параметров КА.

В качестве передающих станций используются штатные станции потребителей радиочастотного ресурса КА, поднимающие на спутник сигнал. Доработка станций, изменение характеристик сигнала не требуется. Единственное условие – отсутствие автоматической регулировки мощности сигнала.

Приёмная станция – это станция контрольно измерительного комплекса, сигналы принятые антенной системой которой передаются в программно-аппаратный комплекс, разработанный специально для реализации СОО. Основным элементом программно-аппаратного комплекса является анализатор, который, работая по сформированному для него заданию, выбирает из всего спектра

сигналов, ретранслируемых БРК, требуемые и передаёт их характеристики на сервер, где осуществляется окончательная обработка сигналов, их архивирование и передача величин мощности каждого сигнала на автоматизированное рабочее место для расчётов кинематических параметров.

Определение ориентации спутника выполняется по анализу изменения мощности принимаемых сигналов. Выбирались сигналы передающих станций, которые удовлетворяют следующим требованиям:

- стабильность – на больших временных интервалах сигнал меняется несущественно при штатной ориентации спутника или его изменение предсказуемо и, следовательно, может быть описано с помощью каких-либо математических функций;

- изменение сигнала, вызванное разворотом КА, можно описать линейной функцией (по крайней мере при разворотах в пределах $0,5^\circ$, что более чем достаточно, учитывая требования по точности ориентации $0,3^\circ$);

- сигналы, выбираемые для оценки углов ориентации, должны меняться больше при развороте по крену и в меньшей степени по тангажу и рысканию. Аналогично сигналы, выбираемые для оценки угла тангажа, должны меняться больше при развороте по тангажу и в меньшей степени по крену и рысканию и т.п.

Для поиска сигналов, удовлетворяющих перечисленным выше требованиям, были выполнены развороты КА по каналам крена, тангажа и рыскания. По результатам разворотов для выбранных сигналов были определены функциональные зависимости, описывающие их изменение в зависимости от углов ориентации спутника:

$$dP_i = a_{i1}\lambda_x + a_{i2}\lambda_y + a_{i3}\lambda_z, \quad (1)$$

где i – номер сигнала, a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} – коэффициенты, характеризующие изменение i -го сигнала при развороте КА вокруг осей рыскания, крена, тангажа соответственно; $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ – углы разворота спутника вокруг осей рыскания, крена, тангажа, соответственно. В общем случае коэффициенты a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} имеют разные значения при развороте КА в положительном и отрицательном направлении и являются функциями углов разворота. Поэтому первый шаг решения – определение наиболее вероятного направления разворота по каждому из каналов управления. Таким образом, выполняется определение области поиска решения и определяются коэффициенты уравнения (1), которые являются функциями углов, но при малых углах разворота их можно считать константами.

В матричном виде система уравнений, описывающих изменение сигналов при развороте спутника, примет вид

$$A\Lambda = dP, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ \dots\dots\dots \\ a_{N1}a_{N2}a_{N3} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = (\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)^T, \quad dP = (dp_1, dp_2, \dots, dp_N)^T, \quad (2)$$

где A – матрица коэффициентов системы уравнений, Λ – искомый вектор углов разворота спутника, N – количество сигналов, dP – вектор изменения сигналов БРК, элементы которого получаются из сравнения текущего значения мощности сигнала с его эталонным значением, которое было определено в начале оценки

как осреднённое значение мощности каждого сигнала при штатной ориентации спутника (значения углов ориентации близки к нулю).

При решении задачи вводятся следующие ограничения:

- ориентация спутника в начале решения задачи оценки углов крена и тангажа соответствует штатной ориентации;

- управление ориентацией строится таким образом, чтобы обеспечить величины углов менее $0,4^\circ$, что позволит оставаться в линейной части зависимости изменения мощности от углов разворота спутника и, тем самым, повысить точность получаемых оценок.

В процессе исследований была выявлена зависимость мощности сигналов от положения КА на орбите. Степень зависимости для разных сигналов различна, но некоторые довольно чувствительны даже к небольшому движению спутника относительно рабочей точки (не более $0,05^\circ$). На рис. 1 представлено изменение одного из сигналов (верхний рисунок) при поддержании штатной ориентации с погрешностью не более $0,1^\circ$ и движение спутника по широте (нижний рисунок). Просматривается зависимость мощности сигнала от широты спутника. Средняя амплитуда колебаний составляет 0,35 дБм, что для этого сигнала соответствует развороту КА на $0,3^\circ$. Для исключения ошибки определения ориентации спутника, вызванной изменением сигнала в результате орбитального движения, формируются функции, учитывающие это изменение. Приближение к сигналам БРК производится для гармонической функции:

$$\text{func} = \text{am} \cos(\omega t + \varphi) + h, \quad (3)$$

где am – амплитуда сигнала; ω – круговая частота; φ – начальная фаза; h – смещение сигнала; $\omega = 2\pi/\text{Per}$, где Per – период, определяемый по баллистической информации, $\pi = 3,1415926$.

Определяемые параметры: am , φ , h .

Функция (3) эквивалентна следующей функции:

$$\text{Func} = a1 \cos(\omega t) + a2 \sin(\omega t) + h, \quad (4)$$

В отличие от (3) определяемые параметры (h , $a1$, $a2$) входят в (4) линейно, поэтому функциональное приближение выполняется для (4), и затем определяются параметры am и φ :

$$\text{am} = (a1^2 + a2^2)^{0,5}, \cos(\varphi) = a1/\text{am}, \sin(\varphi) = -a2/\text{am}.$$

Поиск параметров осуществляется по методу наименьших квадратов, для чего минимизируется невязка:

$$\delta(h, a1, a2) = \sum (\text{Func}_i - S_i)^2, \quad (5)$$

где S_i – сигнал БРК в момент времени t_i , $\text{Func}_i = \text{Func}(t_i)$.

Раскрытие (5) приводит к системе из трех уравнений, линейных относительно определяемых параметров:

$$\begin{pmatrix} N & \sum \cos(\omega t_i) & \sum \sin(\omega t_i) \\ \sum \cos(\omega t_i) & \sum \cos^2(\omega t_i) & \sum \cos(\omega t_i) * \sin(\omega t_i) \\ \sum \sin(\omega t_i) & \sum \cos(\omega t_i) * \sin(\omega t_i) & \sum \sin^2(\omega t_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ a1 \\ a2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum S_i \\ \sum S_i * \cos(\omega t_i) \\ \sum S_i * \sin(\omega t_i) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где N – количество обрабатываемых S_i .

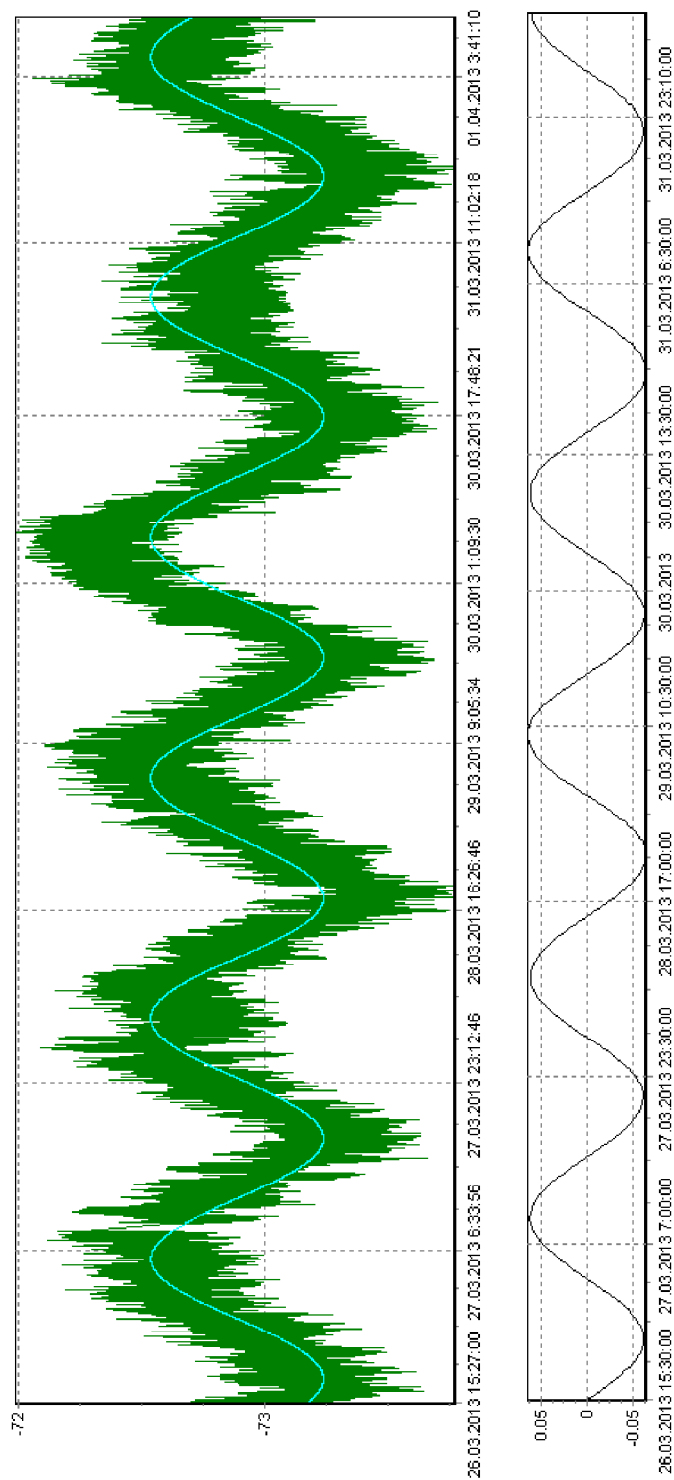


Рис. 1

В (6) под знак $\sum$ входят только те S_i , t_i , которые прошли через процедуру отбраковки:

$$|Func_i - S_i| < 3\sigma,$$

где σ – среднеквадратичное отклонение измерений, $\sigma^2 = \sum (Func_i - S_i)^2 / N$.

Анализ графиков (рис. 1) позволяет сделать вывод, что для получения в любой момент времени величины изменения сигнала, вызванной орбитальным движением КА, можно это изменение рассчитывать от времени прохождения восходящего узла орбиты, т.е. отсчитывать от восходящего узла фазу φ . Поэтому везде в тексте подразумевается, что t_i – это $t_i - t_0$, где t_0 – время прохождения восходящего узла орбиты.

Полученное описанным способом решение представлено на рис. 1 в виде кривой голубого цвета. Расчётные величины равны: $am = 0,3489$, $\varphi = -0,6178$, $h = -72,8866$, $СКО = 0,1857$, период = 23,98 ч.

Для учёта указанного изменения сигнала необходимо в (1) вместо dP использовать $dP - func$, полагая $h = 0$.

Результаты расчёта ориентации спутника приведены на рис. 2 и 3 маркерами тёмно-зелёного цвета.

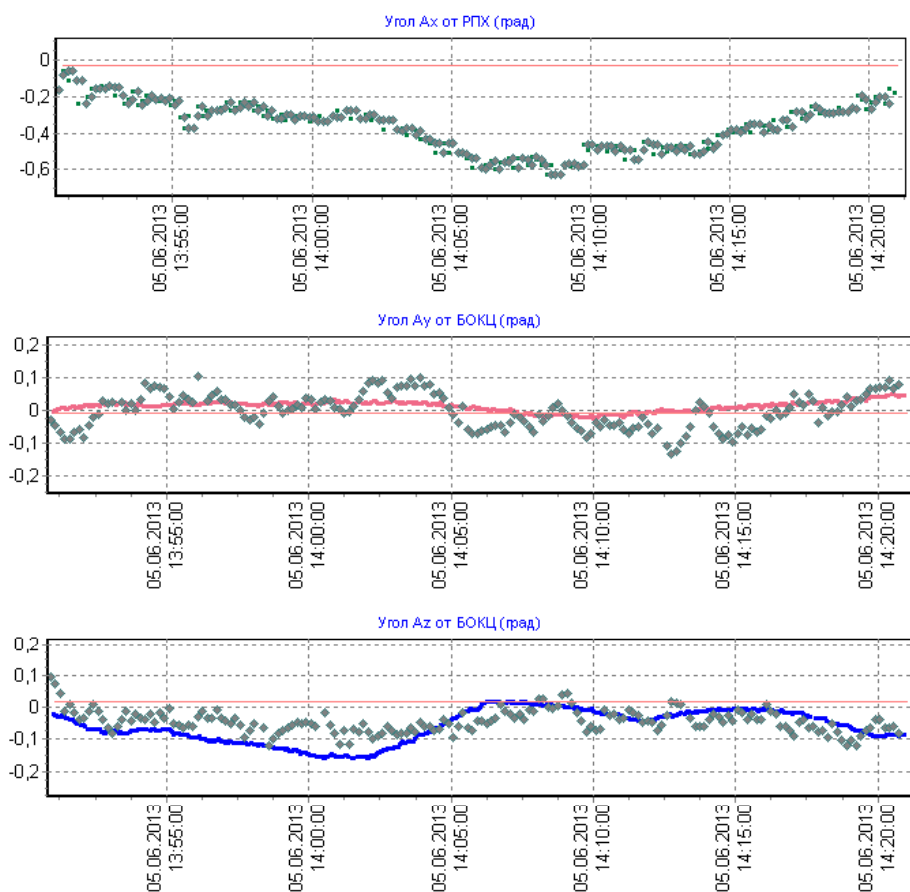


Рис. 2

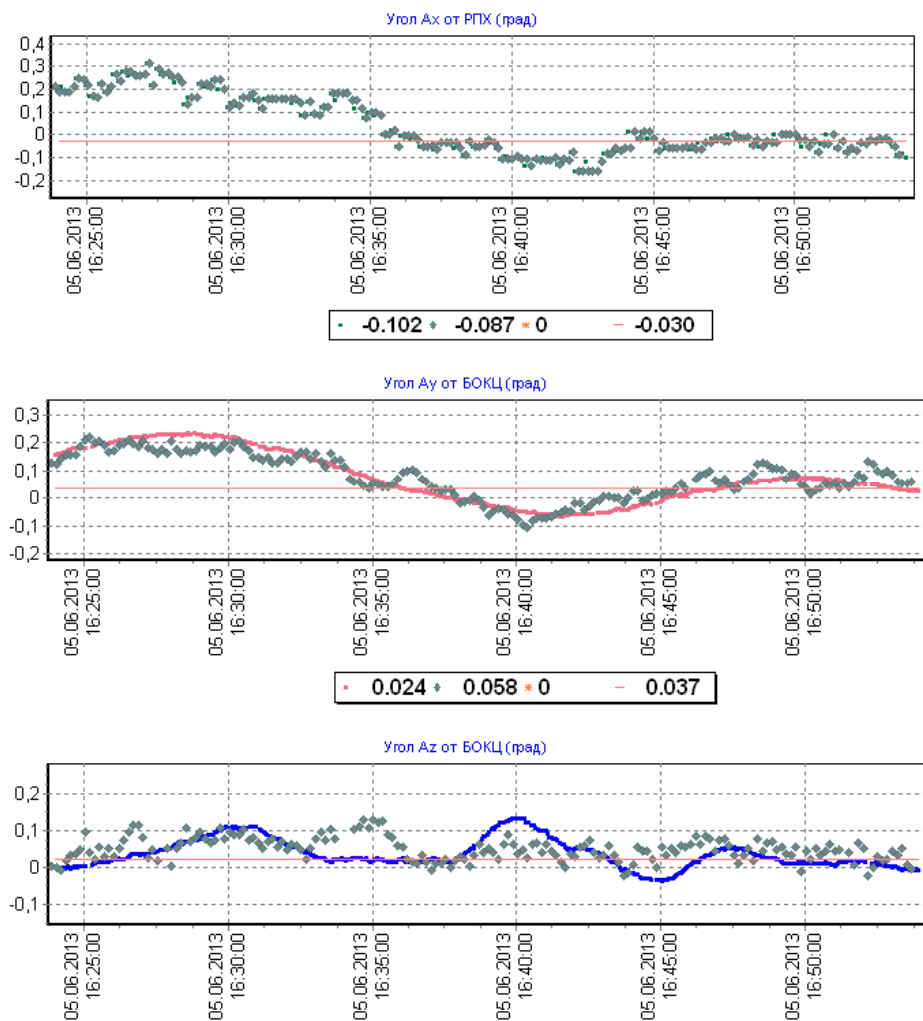


Рис. 3

Маркеры зелёного, красного и синего цвета отображают углы ориентации, измеренные датчиком Земли и рассчитанные по сигналам радиопеленгатора. Как правило, среднее значение углов СОО отличается от указанных на величину, не превышающую $0,1^\circ$. Большие отличия могут быть при возникновении на пути сигнала помехи, например сильного дождя. Если помехи действуют на пути сигнала к спутнику, то с помощью разработанных фильтров такой сигнал отбраковывается и в расчётах углов не участвует. Несколько сложнее задача при возникновении помехи на пути сигналов от КА к приёмной станции. В этом случае изменение всех сигналов имеет один знак и близкие амплитуды, что позволяет построить фильтр и вовремя прекратить управление ориентацией по углам СОО.

Управление ориентацией КА реализовано двумя способами. В первом способе расчёт управляющих моментов выполняется на автоматизированном рабочем месте СОО, после чего они по штатным каналам наземного контура управления

передаются в бортовой комплекс управления (БКУ), который формирует управление исполнительными органами – маховиками, создающими требуемый момент. Во втором способе рассчитанные СОО углы передаются в БКУ, который самостоятельно выполняет расчёт требуемых управляющих моментов и формирует соответствующие команды для маховиков.

В первом случае управление ориентацией КА выполняется в режиме «Прогноз» [3–5]. Для начала использования СОО в целях коррекции необходимы достоверные измерения углов ориентации, полученные от каких-либо датчиков, например звёздных. По этим углам выполняется начальная выставка режима СОО. В рассмотренном случае использовались углы крена и тангажа, полученные от блока определения координат центра Земли (БОКЦ), и углы рыскания, рассчитанные по сигналам бортового радиомаяка. На рис. 2 и 3 значения начальных углов ориентации спутника обозначены горизонтальной линией красного цвета. На этот же момент времени определяются значения мощности каждого сигнала, используемого для оценки ориентации. После начальной выставки СОО больше не использует внешней информации об ориентации спутника.

Во втором случае начальная выставка СОО выполняется так же, как и в первом. Управление ориентацией КА осуществляется в специально разработанном режиме системы управления движением (СУД) спутника, использующем для коррекции углы СОО. Перевод в этот режим допустим после начальной выставки СОО из любого режима СУД, использующего показания датчиков ориентации, по команде наземного комплекса управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Севастьянов Н.Н.* Концепция построения системы ориентации и управления движением спутника связи «Ямал». Штатная схема функционирования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 2(22). С. 85–96.
2. *Бранец В.Н., Севастьянов Н.Н., Федулов Р.В.* Лекции по теории систем ориентации, управления движением и навигации космических аппаратов: учеб. пособие. Томск: ТГУ, 2013. 308 с.
3. *Севастьянов Н.Н., Таюрский Г.И., Банит Ю.Р. и др.* Управление ориентацией космических аппаратов «Ямал-200» по прогнозу изменения кинетического момента // Труды XLVI чтений, посвящённых разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского. Калуга, 13–15 сентября 2011 г.
4. *Севастьянов Н.Н.* Построение режимов ориентации без датчиков угловой скорости на СС «Ямал-200» // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3(23). С. 104–110.
5. *Севастьянов Н.Н.* Повышение точности режима инерциального управления «прогноз» // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 6(26). С. 88–95.

Статья поступила 17.11.2013 г.

Sevast'yanov N.N. YAMAL-200 SPACECRAFTS ATTITUDE CONTROL BY THE SIGNALS OF ONBOARD REPEATER COMPLEX. On the basis of previously developed attitude control modes of Yamal-200 spacecrafts using inertial meters model, a mode was built that derives angular parameters from onboard repeater complex (ORC) signal processing. This paper proposes angular parameters generating circuit, structure and diagram of software & hardware package for the estimate of attitude control angles. This paper provides data on the implementation of this system in an actual product.

Keywords: orientation mode, analysis of changes in capacity, control reliability, signal spectrum analyzer, signal amplitude.

REFERENCES

1. *Sevast'yanov N.N.* Kontseptsiya postroeniya sistemy orientatsii i upravleniya dvizheniem sputnika svyazi «Yamal». Shtatnaya skhema funktsionirovaniya // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2013. No. 2(22). P. 85–96 (in Russian).
2. *Branets V.N., Sevast'yanov N.N., Fedulov R.V.* Lektsii po teorii sistem orientatsii, upravleniya dvizheniem i navigatsii kosmicheskikh apparatov: ucheb. posobie. Tomsk: TGU, 2013. 308 p. (in Russian).
3. *Sevast'yanov N.N., Tayurskiy G.I., Banit Yu.R., et al.* Upravlenie orientatsiey kosmicheskikh apparatov «Yamal-200» po prognozu izmeneniya kineticheskogo momenta // Trudy XLVI chteniy, posvyashchennykh razrabotke nauchnogo naslediya i razvitiyu idey K.E. Tsiolkovskogo. Kaluga, 13–15 sentyabrya 2011 (in Russian).
4. *Sevast'yanov N.N.* Postroenie rezhimov orientatsii bez datchikov uglovoy skorosti na SS «Yamal-200» // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2013. No. 3(23). P. 104–110 (in Russian).
5. *Sevast'yanov N.N.* Povyshenie tochnosti rezhima inertsiyal'nogo upravleniya «prognoz» // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2013. No. 6(26). P. 88–95 (in Russian).

SEVASTYANOV Nikolay Nikolaevich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: sevastyanov@gascom.ru

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЛЕКСАНДРОВ Александр Игоревич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории математического анализа научно-исследовательской части Томского государственного университета. E-mail: aai8@ya.ru

АЛЕКСАНДРОВА Светлана Яковлевна – кандидат химических наук, доцент кафедры физической и коллоидной химии химического факультета Томского государственного университета. E-mail: alsya@ya.ru

БАХТЕЕВ Олег Александрович – научный сотрудник ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: lysikov@bochvar.ru

БИМАТОВ Владимир Исмагилович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой динамики полета физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: vbimатов@mail.ru

БОГДАНОВА Рада Александровна – старший преподаватель кафедры математики и информатики Горно-Алтайского государственного университета. E-mail: bog-rada@yandex.ru

ЕЛИЗАРОВА Мария Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математической физики Физико-технического института Томского политехнического университета. E-mail: elizarova_m@sibmail.com

ЕРШОВ Игорь Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики Новосибирского государственного аграрного университета. E-mail: i_erшов@ngs.ru

КЛИМОВ Юрий Иванович – доктор технических наук, профессор кафедры систем автоматизированного проектирования Института компьютерных технологий и системотехники Карагандинского государственного технического университета. E-mail: klimov_y68@rambler.ru

ЛАНДИК Лидия Владимировна – заведующая лабораторией Пермского государственного университета. E-mail: LidiaLandik@gmail.com

ЛЫСИКОВ Александр Владимирович – кандидат технических наук, заместитель начальника отдела ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: lysikov@bochvar.ru

МАЛЮТИНА Александра Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и лаборатории математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: nmd@math.tsu.ru

МИХАЙЛОВ Михаил Дмитриевич – старший преподаватель кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: michel@math.tsu.ru

МИХЕЕВ Евгений Николаевич – кандидат технических наук, начальник отдела ОАО «Высокотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов имени академика А.А. Бочвара». E-mail: lysikov@bochvar.ru

МУТОВИНА Наталья Викторовна – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры систем автоматизированного проектирования Института компьютерных технологий и системотехники Карагандинского государственного технического университета. E-mail: mutovina_natalya@mail.ru

ОСИПЕНКО Михаил Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Пермского национального исследовательского политехнического университета. E-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru

ПЕСТРЕНИН Валерий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий механико-математического факультета Пермского государственного университета. E-mail: PestreninVM@mail.ru

ПЕСТРЕНИНА Ирина Владимировна – кандидат технических наук, доцент кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий механико-математического факультета Пермского государственного университета. E-mail: IPestrenina@gmail.com

РАХМЕЛЕВИЧ Игорь Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий в предпринимательской деятельности Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

САВКИНА Надежда Валерьевна – аспирантка кафедры динамики полета физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: pantera256@mail.ru

СЕВАСТЬЯНОВ Николай Николаевич – заведующий кафедрой промышленных и космических систем физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: sevastiyanov@gascom.ru

СМОЛИН Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук, профессор Томского государственного университета. E-mail: asmolin@ispms.tsc.ru

ХРИСТЕНКО Юрий Федорович – доктор технических наук, доцент кафедры динамики полета физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: pantera256@mail.ru

ЧУРУКСАЕВА Владислава Васильевна – аспирантка кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: chu.vv@mail.ru