

МАТЕМАТИКА

УДК 519.873

В.Н. Губин, В.В. Травкина

ДВЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО РЕЗЕРВИРОВАНИЯ

Рассмотрены две модели оптимального резервирования на бесконечном промежутке времени по критерию среднего времени безотказной работы.

Ключевые слова: *резервирование, система, надёжность, стратегия, среднее время безотказной работы, модель, сигма-оператор.*

Задача повышения надёжности аппаратуры остаётся актуальной, несмотря на значительный прогресс в технологии изготовления отдельных блоков и усовершенствование структуры различных устройств.

В данной работе анализируются поведение и свойства оптимальных стратегий включения резервных элементов по критерию среднего времени безотказной работы системы на бесконечном промежутке времени для элементов, характеристики которых остаются постоянными. Другой подход к теории резервированных систем рассматривается в [1–3].

Модель 1

Постановка задачи

В работе используется модель системы с управляемым резервом, описанная в работах [4–7]. Пусть система состоит из конечного числа параллельно включенных (в смысле надежности) идентичных элементов. Через фиксированный промежуток времени Δ в моменты $t_0 = 0$, $t_1 = \Delta$, $t_2 = 2\Delta, \dots$ производится проверка исправности включенных в работу элементов. Время на проверку и на включение новых элементов считается пренебрежимо малым и в дальнейшем не учитывается. К моменту начала работы системы имеется r исправных элементов.

Часть элементов находится в холодном резерве. Выход из строя элемента, включенного в работу, не влияет на исправность других элементов. Отказ системы наступает, если в промежутке между проверками выйдут из строя все элементы, включенные в работу.

Обозначим через q вероятность отказа элемента на интервале длиной Δ , через $p = 1 - q$ – вероятность безотказной работы элемента на этом же интервале Δ . Всюду в дальнейшем принимаем $p \geq 0,5$.

Функцию $K(r)$, определённую на множестве натуральных чисел, принимающую натуральные значения и удовлетворяющую неравенству $1 \leq K(r) \leq r$, назовём *стратегией резервирования*. Функция $K(r)$ имеет простой смысл: если в момент проверки имеется в наличии r исправных элементов, то в работу следует включить $K(r)$ элементов.

Требуется найти стратегию резервирования, которая максимизирует среднее время безотказной работы системы. Такую стратегию будем называть оптимальной по критерию среднего времени безотказной работы. В дальнейшем под оптимальной стратегией будем понимать стратегию, оптимальную по критерию среднего времени безотказной работы системы.

Введём обозначения:

K_0 – стратегия, оптимальная по критерию среднего времени безотказной работы;

$K(r)$ – количество элементов, которое следует включить в работу при наличии r исправных элементов при стратегии K ;

$T(r)$ – математическое ожидание времени безотказной работы при оптимальной стратегии, если в начальный момент имеется r исправных элементов.

$T(r, k)$ – математическое ожидание времени безотказной работы при следующей стратегии: имеется r исправных элементов, в начальный момент в работу включается k элементов, в последующие моменты используется оптимальная стратегия.

Пусть в работу включено k элементов. Тогда до момента следующей проверки может произойти одно из k различных событий: $E_1, E_2, \dots, E_k$, где E_i есть событие, состоящее в том, что за время от включения системы до первой проверки выйдет из строя точно i элементов из числа включённых в работу k элементов. Вероятность наступления события E_i равна $C_k^i p^{k-i} q^i$. События $E_0, E_1, E_2, \dots, E_k$ образуют полную группу. Далее, для $0 \leq i \leq k-1$ выполнено $M(T/E_i) = (T(r-i) + 1)$. Наконец, $M(T/E_k) = 1$.

Теперь по формуле полного математического ожидания $M\xi = M[M(\xi/\eta)]$ [8, с. 123, 124], где ξ и η – случайные величины, имеем

$$T(r, k) = \sum_{i=0}^{k-1} M(T/E_i)P(E_i) + M(T/E_k)q^k; \quad (1)$$

$$T(r, k) = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i p^{k-i} q^i (T(r-i) + 1) + q^k = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + 1. \quad (2)$$

Сигма-оператор

Оператор σ [1]. В работе исследуются оптимальные стратегии с помощью линейного оператора σ , который определяется соотношением $\sigma T(r) = T(r-1)$.

Используя σ -оператор, для функции $T(r, k)$ получаем равенство

$$T(r, k) = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i p^{k-i} q^i \sigma^i T(r) + 1,$$

$$\text{откуда} \quad T(r, k) = [(p+q)^k - (q\sigma)^k] T(r) + 1. \quad (3)$$

Назовем уравнение, содержащее сигма-оператор, σ -уравнением (сигма-уравнением), а линейную комбинацию степеней σ -оператора с вещественными коэффициентами – σ -многочленом. Так, (3) является примером σ -уравнения, а правая часть этого равенства служит примером σ -многочлена.

Используя σ -оператор, можно получить многие свойства оптимальных стратегий резервирования. Основную роль при этом играет определение знаков сигма-многочленов.

Лемма 1.1 $T(r)$ монотонно возрастает с ростом r .

Лемма 1.2. При фиксированном $k < r$ функция $T(r, k)$ строго монотонно возрастает с ростом r .

Доказательство непосредственно следует из (2).

Теорема 1. При фиксированном r функция $T(r, k)$: 1) выпукла вверх по k в области $1 \leq k \leq k_0(r) + 1$, 2) принимает наибольшее значение не более чем в двух точках, 3) не возрастает при $k_0(r) \leq k \leq r$.

Доказательство. Запишем разность $\Delta = T(r, k+1) - T(r, k) - q[T(r, k) - T(r, k-1)]$, переходя к сигма-соотношениям. Получим

$$\begin{aligned} \Delta &= [(p + q\sigma)^{k+1} - (q\sigma)^{k+1}]T(r) - [(p + q\sigma)^k - (q\sigma)^k]T(r) - \\ &- q\{[(p + q\sigma)^k - (q\sigma)^k]T(r) - [(p + q\sigma)^{k-1} - (q\sigma)^{k-1}]T(r)\} = \\ &= q[(p + q\sigma)^k - (q\sigma)^k](\sigma - 1)T(r) + p(q\sigma)^k T(r) - \\ &- q^2[(p + q\sigma)^{k-1} - (q\sigma)^{k-1}](\sigma - 1)T(r) - qp(q\sigma)^{k-1}T(r). \end{aligned}$$

Раскроем квадратные скобки и добавим и вычтем слагаемое $qp(q\sigma)^{k-1}(\sigma - 1)T(r)$:

$$\begin{aligned} \Delta &= q(p + q\sigma)^k(\sigma - 1)T(r) - q(q\sigma)^k(\sigma - 1)T(r) + p(q\sigma)^k T(r) - \\ &- q^2(p + q\sigma)^{k-1}(\sigma - 1)T(r) + q^2(q\sigma)^{k-1}(\sigma - 1)T(r) - qp(q\sigma)^{k-1}T(r) - \\ &- qp(q\sigma)^{k-1}(\sigma - 1)T(r) + qp(q\sigma)^{k-1}(\sigma - 1)T(r). \end{aligned}$$

Производя несложные преобразования, получим

$$\begin{aligned} q(p - q)[T(r - 1, k - 1) - T(r, k - 1)] + q^2[T(r - 2, k - 1) - T(r - 1, k - 1)] + \\ + 2pq^k[T(r - k) - T(r - k + 1)] \leq 0, \end{aligned}$$

так как по принятому соглашению $q < p$ и $p - q > 0$.

Итак,

$$T(r, k+1) - T(r, k) - q[T(r, k) - T(r, k-1)] < 0. \quad (4)$$

Из этого неравенства следует, что когда $T(r, k) - T(r, k-1) > 0$, то $[T(r, k+1) - T(r, k)] - [T(r, k) - T(r, k-1)] < 0$. Это означает, что $T(r, k)$ выпукла по k при $1 \leq k \leq k_0(r) + 1$, где $k_0(r)$ – значение k , при котором $T(r, k)$ достигает максимума. Из (4) вытекает, что $T(r, k) - T(r, k-1) < 0$ влечёт $T(r, k+1) - T(r, k) < 0$. Таким образом, $T(r, k)$ в области $1 \leq k \leq k_0(r) + 1$ возрастает по k , а в области $k_0(r) \leq k \leq r$ – убывает. Так как $T(r, k)$ как функция от k выпукла на участке $[1, k_0(r)]$, то она принимает максимальное значение не более чем в двух точках.

Следствие 1. Если $T(r, k-1) \leq T(r, k)$, то $k \leq k_0(r)$; если $T(r, k-1) > T(r, k)$, то $k \geq k_0(r)$.

Теорема 2. Если $K_1(r)$ и $K_2(r)$ – две оптимальные стратегии резервирования, то при всех r выполнено $|K_1(r) - K_2(r)| \leq 1$.

Доказательство. Пусть K_1 и K_2 – две оптимальные стратегии резервирования. Если для некоторого r_0 имеем $K_1(r_0) = K_2(r_0)$, то $|K_1(r_0) - K_2(r_0)| \leq 1$. Пусть $K_1(r_0) \neq K_2(r_0)$ и, для определённости, $K_1(r_0) < K_2(r_0)$. Тогда по определению опти-

мальной стратегии $T(K_1(r_0), r_0) = T(K_2(r_0), r_0)$. На промежутке $[1, K_2(r_0)+1]$ функция $T(r, k)$ выпукла. Если бы $|K_1(r_0) - K_2(r_0)| > 1$, то, в силу выпуклости $T(r, k)$, между $K_1(r_0)$ и $K_2(r_0)$ нашлось бы натуральное k_3 , такое, что $T(k_3, r) > T(K_1(r_0), r_0) = T(K_2(r_0), r_0)$ – противоречие. Итак, и в этом случае $|K_1(r_0) - K_2(r_0)| \leq 1$, что и требовалось.

Теорема 3. Имеет место неравенство: $K_0(r) \geq K_0(r+1) - 1$

Доказательство. Убедимся, что разность

$$[T(r+1, k+1) - T(r+1, k)] - q[T(r, k) - T(r, k-1)]$$

отрицательна. Представим это выражение как сигма-многочлен:

$$\begin{aligned} & [T(r+1, k+1) - T(r+1, k)] - q[T(r, k) - T(r, k-1)] = \\ & = [(p+q\sigma)^{k+1} - (q\sigma)^{k+1} - (p+q\sigma)^k + (q\sigma)^k] T(r+1) - \\ & - q\sigma [(p+q\sigma)^k - (q\sigma)^k - (p+q\sigma)^{k-1} + (q\sigma)^{k-1}] T(r+1) = \\ & = [(p+q\sigma)^{k+1} - (p+q\sigma)^k] T(r+1) - q\sigma [(p+q\sigma)^k - (p+q\sigma)^{k-1}] T(r+1) = \\ & = pq(p+q\sigma)^{k-1}(\sigma-1)T(r+1) < 0. \end{aligned}$$

Итак,

$$[T(r+1, k+1) - T(r+1, k)] - q[T(r, k) - T(r, k-1)] < 0. \quad (5)$$

Подставим в (5) $k = K_0(r+1) - 1$. Получим

$$[T(r+1, K_0(r+1)) - T(r+1, K_0(r+1)-1)] - q[T(r, K_0(r+1)-1) - T(r, K_0(r+1)-2)] < 0,$$

отсюда

$$T(r, K_0(r+1)-1) - T(r, K_0(r+1)-2) > 0.$$

Теперь по следствию 1 имеем

$$K_0(r) \geq K_0(r+1) - 1,$$

что и требовалось.

Теорема 4. $K_0(r)$ не убывает с ростом r .

Алгоритм поиска оптимальной стратегии

Пусть выбрана некоторая стратегия управления включением резервных элементов $K(r)$.

Найдем стратегию K_0 , которая максимизирует $T(r, k)$.

Для её нахождения воспользуемся рекуррентным соотношением

$$T(r, k) = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i p^{k-i} q^i T(r-i) + 1. \quad (6)$$

В аналогичных задачах в случае конечного промежутка для отыскания оптимальной стратегии эффективен метод динамического программирования Беллмана [9]. В случае бесконечного промежутка этот метод нуждается в модификации.

Зафиксируем значение r и обозначим $K_0(r) = k_0$. Имеем

$$T(r) = T(k_0, r) = \sum_{i=0}^{k_0-1} C_{k_0}^i p^{k_0-i} q^i T(r-i) + 1.$$

Выделим из суммы слагаемое при $i=0$:

$$T(r) = \sum_{i=1}^{k_0-1} C_{k_0}^i p^{k_0-i} q^i T(r-i) + p^{k_0} T(r) + 1, \quad (7)$$

отсюда

$$T(r) = \frac{1}{(1-p^{k_0})} \sum_{i=1}^{k_0-1} C_{k_0}^i p^{k_0-i} q^i T(r-i) + 1. \quad (8)$$

Теперь зададим **алгоритм вычисления оптимальных стратегий**.

а) Очевидно, что $K_0(1) = 1$, поэтому $T(1) = pq + 2p^2q + \dots + np^nq + \dots = \frac{p}{q}$.

б) Пусть уже вычислены $T(1), T(2), \dots, T(r-1)$. Ищем максимум правой части формулы (8) по всем натуральным $k_0 \leq r$, и этот максимум есть значение $T(r)$. То значение k_0 , $k_0 \leq r$, которое доставляет максимум правой части (8), есть $K_0(r)$.

Модель 2

Постановка задачи. Пусть задана система, в которой через фиксированный промежуток времени Δ в моменты $t = 0, \Delta, 2\Delta, \dots$ производится проверка исправности включённых в работу блоков. Часть блоков находится в холодном резерве. В моменты проверок некоторые блоки из резерва могут быть включены в работу, а блоки, включённые в работу, могут быть переведены в резерв. Элементы, находящиеся в холодном резерве, не меняют своих характеристик, иначе говоря, не расходуют своего резерва. Имеется r резервных исправных элементов, в работу может быть включено не более $(k+1)$ исправных элементов. Система функционирует, если в работу включено не менее k исправных элементов. Вероятность безотказной работы включённого в работу исправного элемента за один шаг равна p ($p > 0,5$), вероятность отказа исправного элемента за один шаг равна $q = 1 - p$. Эту модель резервирования обозначим $\mathcal{S}_{k+1}$.

Требуется: 1) найти стратегию управления резервом, оптимальную по критерию среднего времени безотказной работы системы; 2) получить оценку времени безотказной работы системы при оптимальной стратегии управления резервом.

Рассмотрим следующие две стратегии управления резервом в модели $\mathcal{S}_{k+1}$.

Стратегия 1: на первом шаге включаем $(k+1)$ исправный элемент, а на следующем шаге переходим к стратегии, оптимальной по критерию среднего времени безотказной работы. Обозначим математическое ожидание времени безотказной работы системы при стратегии 1 через $T(k+1, r)$.

Стратегия 2: на первом шаге включаем k элементов, а затем переходим к оптимальной стратегии. Обозначим математическое ожидание времени безотказной работы системы при стратегии 2 через $T(k, r)$.

Через $T(r)$ обозначим математическое ожидание времени безотказной работы системы при оптимальной по среднему времени стратегии, если в наличии имеется r исправных элементов.

Вычислим среднее время $T(k+1, r)$ работы системы $\mathcal{S}_{k+1}$ при стратегии 1.

Воспользуемся формулой полного математического ожидания [6]:

$$\begin{aligned} T(k+1, r) &= \sum_{i=0}^1 C_{k+1}^i p^{k+1-i} q^i (T(r-i) + 1) + C_{k+1}^2 p^{k-1} q^2 + C_{k+1}^3 p^{k-2} q^3 + \dots + q^{k+1} = \\ &= p^{k+1} T(r) + (k+1) p^k q T(r-1) + 1. \end{aligned}$$

Найдём среднее время работы системы в модели 2 при стратегии 2.

$$T(k, r) = p^k (T(r) + 1) + C_k^1 p^{k-1} q + C_k^2 p^{k-2} q^2 + \dots + q^k,$$

$$T(k, r) = p^k T(r) + 1$$

Теорема: Для всех k и r , таких, что $k+1 \leq r$, выполнено

$$T(k+1, r) > T(k, r)$$

Доказательство проведём от противного.

Предположим, что оптимальное время работы системы достигается при стратегии 2. Имеем

$$T(k, r) = T(r) = p^k T(r) + 1 \Rightarrow T(r) = \frac{1}{1 - p^k}.$$

Пусть $r \geq k+2$. Так как $K_0(r-1) \leq K_0(r)$, то $K_0(r-1) = k$.

Аналогично предыдущему получим

$$T(k, r-1) = T(r-1) = p^k T(r-1) + 1 \Rightarrow T(r-1) = \frac{1}{1 - p^k}.$$

Таким образом, $T(r-1) = T(r)$ для произвольного r , что неверно. Значит, предположение о том, что $K_0(r) = k$ неверно. Итак, $K_0(r) = k+1$, следовательно, $T(k+1, r) > T(k, r)$.

Таким образом, стратегия, при которой в начальный момент включено в работу $(k+1)$ элементов, предпочтительнее. Следовательно, оптимальная стратегия для модели S_{k+1} следующая: если имеется не меньше чем $(k+1)$ исправных элементов, то включаем в работу $(k+1)$ элемент, если в данный момент имеется только k исправных элементов, то все они включаются в работу.

Запишем рекуррентную формулу для $T(r)$. Имеем

$$T(r) = p^{k+1} T(r) + (k+1) p^k q T(r-1) + 1,$$

откуда

$$T(r) = \frac{(k+1) p^k q}{1 - p^{k+1}} T(r-1) + \frac{1}{1 - p^{k+1}}.$$

Обозначим

$$a = \frac{(k+1) p^k q}{1 - p^{k+1}}; \quad b = \frac{1}{1 - p^{k+1}},$$

тогда

$$T(r) = a T(r-1) + b.$$

Индукцией по r теперь легко доказать формулу

$$T(r) = a^{r-1} \frac{p}{q} + b \frac{1 - a^{r-1}}{1 - a}.$$

Подставляя значения a и b , получим

$$T(r) = \left(\frac{(k+1) p^k q}{1 - p^{k+1}} \right)^{r-1} \left(\frac{p}{q} + \frac{1}{(kq+1) p^k - 1} \right) + \frac{1}{1 - (kq-1) p^k}.$$

Легко видеть, что

$$0 < \frac{(k+1)p^k q}{1-p^{k+1}} < 1.$$

С учётом полученного результата, получим предельное значение времени.

Итак, при $r \rightarrow \infty$ значение среднего времени безотказной работы системы S_{k+1} , монотонно возрастаая, стремится к величине $\frac{1}{1-(kq-1)p^k}$ и не превышает ее даже при сколь угодно большом резерве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Конев В.В. Об оптимальном включении резервных элементов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. № 4. С. 75–83.
2. Конев В.В. Об оптимальном программном включении резервных элементов // Там же. 1975. № 3. С. 109–117.
3. Конев В.В., Овчинников А.В. Оптимальное резервирование группы однотипных элементов // Там же. 1976. № 4. С. 75–84.
4. Пестов Г.Г., Ушакова Л.В. Исследование оптимальных стратегий в задаче динамического резервирования // Там же. 1973. № 5.
5. Герцбах И.Б. Об оптимальном управлении включением резервных элементов // Там же. 1966. № 5.
6. Томиленко В.А. Об одной задаче динамического резервирования // Там же. 1975. № 4.
7. Райкин А.Л. Элементы теории надёжности технических систем. М.: Сов. радио, 1978.
8. Renyi A. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1966.
9. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965. 458 с.

Статья поступила 08.04.2013 г.

Gubin V.N., Travkina V.V. TWO PROBLEMS OF DYNAMIC REDUNDANCY. In this paper, two models of dynamic redundancy are considered on an infinite time interval in terms of the criterion of the by mean time to system failure.

Keywords: Redundancy, system, reliability, strategy, mean time to system failure, model, sigma-operator.

GUBIN Vladimir Nikolaevich (Tomsk State University)

Email: vovantus@sibmail.com

TRAVKINA Violetta Valer'evna (Sberbank of Novosibirsk)