УДК 515.12

А.В. Полухина, Т.Е. Хмылёва

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ[1,2]

Рассматривается множество $V(K)$ всех выпуклых вещественнозначных функций, определенных на выпуклых компактах $K \subset \mathbb{R}^n$, и находятся условия, при которых все функции $f \in V(K)$ являются разреженно непрерывными. Показано, что существуют функции $f \in V(K)$, не являющиеся борелевскими, а также для любого ординала $\alpha < \omega_1$ существуют функции $f \in V(K)$, принадлежащие в точности α-му классу Бэра.

Ключевые слова: *выпуклая функция, разреженно непрерывная функция, крайние точки, борелевские множества, ординалы, компакт.*

В статье А.В. Архангельского и Б.М. Бокало [1] введен класс разреженно непрерывных функций, более узкий, чем класс функций первого класса Бэра, но более широкий, чем класс непрерывных функций.

Определение 1. Пусть X, Y – топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется разреженно непрерывным (scattered continuous) или функцией SC, если для любого подмножества $A \subset X, A \neq \varnothing$ функция $f\big|_A$ имеет точку непрерывности.

Характеристика разреженно непрерывных функций приведена в [2].

Теорема 1. Пусть X – полное метрическое пространство и функция $f : X \to \mathbb{R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $f : X \to \mathbb{R}$ – разреженно непрерывная функция;

(2) пространство X имеет счетное замкнутое покрытие $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, такое, что функция $f\big|_{F_i}$ непрерывна для любого $i \in \mathbb{N}$.

Используя данную характеристику, доказываем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть K – выпуклый компакт и $SC(K)$ – пространство всех вещественнозначных разреженно непрерывных функций, заданных на компакте K. Следующие условия эквивалентны:

(1) $V(K) \subset SC(K)$;

(2) множество крайних точек компакта K не более чем счетно.

Доказательство. *Необходимость*. Предположим, что $|\operatorname{extr} K| > \aleph_0$. Тогда существует континуальное совершенное подмножество $K_0 \subset \operatorname{extr} K$. Пусть множество $A \subset K_0$ – счетное и всюду плотное. Рассмотрим на подмножестве K_0 функ-

[1] Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями».

[2] Работа выполнена частично в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

цию $f:K\to\mathbb{R}$, такую, что $f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\in A,\\ 0, \text{ если } x\notin A.\end{cases}$ Ясно, что функция $f\big|K_0$ не имеет точек непрерывности и, значит, функция $f:K\to\mathbb{R}$ не является разреженно непрерывной функцией. Тем не менее, функция f является выпуклой. Действительно, для любых $0<\alpha<1$ и для любых точек $x,y\in K$ точка $\alpha x+(1-\alpha)y\notin K_0\notin \operatorname{extr}K$ и, значит, $f(\alpha x+(1-\alpha)y)=0$. Следовательно, справедливо неравенство $f(\alpha x+(1-\alpha)y)\le \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$. Таким образом, множество $V(K)\not\subset SC(K)$.

Достаточность. По теореме Крейна – Мильмана компакт $K=\overline{co}(\operatorname{extr}K)=$ $=\overline{co}\{k_1,...,k_n,...\}$. Поскольку компакт $K\subset\mathbb{R}^n$, то по теореме Минковского компакт $K=co(\operatorname{extr}K)=co\{k_1,...,k_n,...\}$. Следовательно, любая точка $x\in K$ выражается в виде $x=\lambda_1x_1+...+\lambda_px_p$, где $0\le\lambda_i\le 1$, $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i=1$. Для произвольного конечного подмножества $\sigma\subset\{k_1,...,k_n,...\}\subset K$ пусть $K(\sigma)=co\sigma=co\left\{k_{n_1},...,k_{n_p}\right\}$. Ясно, что $\bigcup\limits_{\sigma\in\operatorname{extr}K}K(\sigma)=K$. Для $p\ge 2$ определим

$$U(\sigma)=\left\{x\in co\sigma; x=\lambda_1k_{n_1}+...+\lambda_pk_{n_p}, 0<\lambda_i<1, \sum_{i=1}^{p}\lambda_i=1\right\}.$$

Тогда
$$\left(\bigcup_{\sigma\subset\operatorname{extr}K}U(\sigma)\right)\cup\{k_1,...,k_n,...\}=K.$$

Каждое $U(\sigma)=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}U_m(\sigma)$, где

$$U_m(\sigma)=\left\{x=\lambda_1k_{n_1}+...+\lambda_pk_{n_p}, \frac{1}{m}\le\lambda_i\le 1-\frac{1}{m}, \sum_{i=1}^{p}\lambda_i=1\right\}$$

– замкнутые подмножества компакта K для любого $m\in\mathbb{N}$ и $\sigma\subset\{k_1,...,k_n,...\}$.

Пусть функция $f\in V(K)$. Покажем, что функция $f\big|_{U_m(\sigma)}$ непрерывна на множестве $U_m(\sigma)$. Для этого достаточно показать, что $f\big|_{U(\sigma)}$ непрерывна на $U(\sigma)$ для любого $\sigma\subset\{k_1,...,k_n,...\}$.

Пусть $x\in U(\sigma)$, т.е.

$$x=\lambda_1k_{n_1}+...+\lambda_pk_{n_p},\ 0<\lambda_i<1,\ i=1,...,p,\ \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i=1.$$

Рассмотрим конечномерное подпространство

$$L=sp\left\{k_{n_1}-k_{n_p},...,k_{n_{p-1}}-k_{n_p}\right\}.$$

Ясно, что $\dim L\le p-1$ и точка

$$x - k_{n_p} = \lambda_1 \left(k_{n_1} - k_{n_p}\right) + \ldots + \lambda_{p-1}\left(k_{n_{p-1}} - k_{n_p}\right) + \lambda_p \cdot 0 \in L,$$

причем $\lambda_p \neq 0$.

Определим линейный оператор $T : \mathbb{R}^{p-1} \to L$ по формуле

$$T\left(t_1, \ldots, t_{p-1}\right) = t_1\left(k_{n_1} - k_{n_p}\right) + \ldots + t_{p-1}\left(k_{n_{p-1}} - k_{n_p}\right).$$

Оператор T является непрерывной линейной сюръекцией пространства $\mathbb{R}^{p-1}$ на пространство L. Применяя принцип открытости отображения, получаем, что T – открытое отображение. Следовательно, T отображает открытое множество

$$\left\{\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}\right) : 0 < \lambda_i < 1,\ i = 1, \ldots, p-1, \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i < 1\right\} \subset \mathbb{R}^{p-1}$$

на открытое множество $U(\sigma) - k_{n_p}$.

Функция $f\left(x + k_{n_p}\right)$ определена на открытом выпуклом множестве $U(\sigma) - k_{n_p} \subset L$ и является выпуклой на множестве $U(\sigma) - k_{n_p}$. Так как выпуклые функции непрерывны во всех внутренних точках множества, на котором они определены [3, с. 67], функция $f\left(x + k_{n_p}\right)$ непрерывна на множестве $U(\sigma) - k_{n_p}$. Отсюда следует, что функция $f(x)$ непрерывна на множестве $U(\sigma)$ и, значит, для любого $m \in \mathbb{N}$ функция $f\big|_{U_m(\sigma)}$ непрерывна на множестве $U_m(\sigma)$.

Итак, компакт K представлен в виде счетного объединения замкнутых множеств

$$K = \bigcup_{\sigma} \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m(\sigma) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \{k_i\},$$

и функции $f\big|_{U_m(\sigma)}$ и $f\big|_{\{k_i\}}$ непрерывны. Учитывая теорему 1, получаем, что $V(K) \subset SC(K)$. Теорема доказана. ■

Теорема 3. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт, множество крайних точек которого несчетно. Тогда для любого ординала $\alpha < \omega_1$ существует выпуклая функция $f \in V(K)$, принадлежащая в точности α-му классу Бэра.

Доказательство. Известно [4, с. 15], что множество крайних точек метризуемого компакта K есть множество типа G_δ и, следовательно, является борелевским множеством. Любое несчетное борелевское множество топологически содержит канторово множество, которое, в свою очередь, топологически содержит множество иррациональных чисел J [5, с. 295]. Далее, для любого ординала $\alpha < \omega_1$ существует измеримая по Борелю функция $g : J \to (0,1)$, принадлежащая классу α, но не принадлежащая классам β при $\beta < \alpha$ [5, с. 382]. Тогда функция $f : K \to \mathbb{R}$,

$$f(k)=\begin{cases}0, & k\notin J,\\ g(k), & k\in J,\end{cases}$$

также является функцией в точности α-го класса и, следовательно, функцией α-го (или $\alpha+1$-го, если α конечно) класса Бэра [5, с. 403]. Нетрудно проверить, что функция f выпукла. Теорема доказана. ■

Теорема 4. Пусть $K\subset\mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт, множество крайних точек которого несчетно. Тогда существует выпуклая функция $f\in V(K)$, неизмеримая по Борелю.

Доказательство. Рассмотрим канторово множество $C\subset \operatorname{extr} K$, определенное в доказательстве предыдущей теоремы. Известно, что в канторовом множестве C существует подмножество A, неизмеримое по Борелю [5, с. 355]. Тогда функция $f=\chi_A$ неизмерима по Борелю и выпукла. Теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arkhangelskii A*., *Bokalo B*. Tangency of topologies and tangential properties of topological spaces // Topology. 1992. V. 54. P. 160–185.
2. *Taras Banakh and Bogdan Bokalo.* On scatteredly continuous maps between topological spaces // Topology and its Applications 157, 2010.
3. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 416 с.
4. *Фелпс Р.* Лекции о теоремах Шоке: пер. с англ. М.: Мир, 1968. 112 с.
5. *Куратовский К.* Топология. Том 1. М.: Мир, 1966. 594 с.

Статья поступила 25.07.2013 г.

Polukhina A.V., *Khmyleva T.E.* CONTINUITY OF CONVEX FUNCTIONS. In this paper, we consider the set $V(K)$ of all convex real-valued functions defined on convex compacts $K\subset\mathbb{R}^n$ and find conditions under which all functions $f\in V(K)$ are scattered continuous. It is shown that there exist functions $f\in V(K)$ that are not Borel, and, for any ordinal $\alpha<\omega_1$, there are functions $f\in V(K)$ that exactly belong to the α th Baire class.

Keywords: convex function, scattered continuous functions, extreme points, Borel sets, ordinals, compact.

POLUKHINA Anastasiya Valer'evna (Tomsk State University)
spongik@yandex.ru

Khmyleva Tatiana Evgenievna (Tomsk State University)
E-mail: TEX2150@yandex.ru