

УДК 515.12

Н.Н. Трофименко, Т.Е. Хмылева

О ГОМЕОМОРФИЗМАХ ПРОСТРАНСТВ $I \times [1, \alpha]$ С ТОПОЛОГИЕЙ ЗОРГЕНФРЕЯ^{1,2}

Проводится топологическая классификация пространств $I \times [1, \alpha]$, где α – произвольный ординал, а полуинтервал $I = (0, 1]$ наделен топологией Зоргенфрея. Доказывается, что пространство $I \times [1, \alpha]$ гомеоморфно $I \times [1, \beta]$ тогда и только тогда, когда $\alpha \leq \beta < \alpha \cdot \omega$.

Ключевые слова: *прямая Зоргенфрея, непрерывные функции, линейные гомеоморфизмы, отрезок ординалов.*

В статье используются следующие обозначения: полуинтервал $I = (0, 1]$ рассматривается в топологии Зоргенфрея, т.е. базу окрестностей точки x образуют множества вида $(x - \varepsilon, x]$, $\varepsilon > 0$. Для произвольного ординала α интервал $[1, \alpha]$ наделяется порядковой топологией. Хорошо известно, что отрезок ординалов $[1, \alpha]$ является компактом.

Теорема 1. Пусть γ – произвольный ординал и $n \in \mathbb{N}$. Тогда пространства $I \times [1, \omega^\gamma]$ и $I \times [1, \omega^\gamma \cdot n]$ являются гомеоморфными.

Доказательство. Представим пространство $I \times [1, \omega^\gamma]$ следующим образом:

$$I \times [1, \omega^\gamma] = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \times [1, \omega^\gamma] \sim (I \amalg \dots \amalg I) \times [1, \omega^\gamma] \sim \\ \sim (I \times [1, \omega^\gamma]) \amalg (I \times [1, \omega^\gamma]) \amalg \dots \amalg (I \times [1, \omega^\gamma]).$$

Нетрудно видеть, что пространство $(I \times [1, \omega^\gamma]) \amalg (I \times [1, \omega^\gamma]) \amalg \dots \amalg (I \times [1, \omega^\gamma])$ гомеоморфно пространству $I \times [1, \omega^\gamma \cdot n]$. Теорема доказана. ■

Лемма 2. Любое открыто-замкнутое подмножество V в отрезке можно представить как

$$V = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,$$

где $I_i = (a_i, b_i]$.

Доказательство. Для каждой точки $x \in V$ обозначим через

$$x - \varepsilon_x = \inf \{ x - \varepsilon : (x - \varepsilon, x] \subset V \} \text{ и } x + \delta_x = \sup \{ x + \delta : (x - \varepsilon_x, x + \delta] \subset V \}.$$

¹ Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями».

² Работа выполнена частично в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

Нетрудно видеть, что точка $x - \varepsilon_x \notin V$, поскольку интервал $(x - \varepsilon_x, x + \delta_x]$ – наибольший, входящий в V , а точка $x + \delta_x \in V$ в силу его замкнутости. Положим $V_x = (x - \varepsilon_x, x + \delta_x]$. Ясно, что $V_x \subset V$. Заметим, что если $x \neq x'$, то $V_x = V_{x'}$ либо $V_x \cap V_{x'} = \emptyset$. Действительно, если $V_x \cap V_{x'} \neq \emptyset$ и $V_x \neq V_{x'}$, то $V_x \cup V_{x'}$ содержит точки x и x' одновременно, а это противоречит тому, что интервалы V_x наибольший, входящий в V .

Очевидно, что $V = \bigcup_{x \in I} V_x$. Семейство $\{V_x\}_{x \in I}$ содержит только счетное число непересекающихся интервалов, так как отрезок I является сепарабельным пространством. ■

Теорема 3. Пространства I и $I \times [1, \omega]$ не являются гомеоморфными.

Доказательство. Предположим, что существует гомеоморфизм

$$\varphi: I \times [1, \omega] \xrightarrow{\text{на}} I.$$

Так как $I \times \{n\}$ – открыто-замкнутое множество, то $\varphi(I \times \{n\})$ – открыто-замкнутое подмножество в отрезке I . Согласно лемме 2,

$$\varphi(I \times \{n\}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^n, \text{ где } I_i^n = (a_i^n, b_i^n] \text{ для любого } n \in \mathbb{N}.$$

Для обратного отображения φ^{-1} и открыто-замкнутого подмножества $(a_i^n, b_i^n] \subset I$ по лемме 2 имеем

$$\varphi^{-1}((a_i^n, b_i^n]) = \varphi^{-1}((a_i^n, b_i^n]) = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{i,j}^n, \quad (1)$$

где $I_{i,j}^n = (c_{i,j}^n, d_{i,j}^n] \times \{n\}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Ясно, что множество $\{c_{i,j}^n\}_{i,j,n=1}^{\infty} \cup \{d_{i,j}^n\}_{i,j,n=1}^{\infty}$ является счетным. Следовательно, существует точка $x_0 \in I$, такая, что $x_0 \notin \{c_{i,j}^n\}_{i,j,n=1}^{\infty} \cup \{d_{i,j}^n\}_{i,j,n=1}^{\infty}$. Это означает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют номера i_n и j_n такие, что

$$(x_0, n) \in (c_{i_n, j_n}^n, d_{i_n, j_n}^n) \times \{n\} \subset I_{i_n, j_n}^n. \quad (2)$$

Ясно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_0, n) = (x_0, \omega)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi((x_0, n)) = \varphi((x_0, \omega))$. Не нарушая общности (если нужно, переходя к подпоследовательности), можно считать, что

$$\varphi(x_0, n) < \varphi(x_0, n+1) < \varphi(x_0, \omega) \quad (3)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. В силу (1) и (2), получаем

$$\varphi(x_0, n) \in \varphi(I_{i_n, j_n}^n) \subset \varphi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{i_n, j}^n\right) = I_{i_n}^n. \quad (4)$$

Поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$ $I_{i_n}^n \cap I_{i_{n+1}}^{n+1} = \emptyset$ и выполняется неравенство (3), то

$$I_{i_1}^1 < I_{i_2}^2 < \dots < I_{i_n}^n < \dots < \varphi(x_0, \omega).$$

Отсюда следует, что для любой последовательности точек $y_n \in I_{i_n}^n$ выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \varphi(x_0, \omega)$.

Так как точка $(x_0, n) \in (c_{i_n, j_n}^n, d_{i_n, j_n}^n)$, то существует число ε_n , такое, что $(x_0 + \varepsilon_n, n) \in (c_{i_n, j_n}^n, d_{i_n, j_n}^n) \subset I_{i_n, j_n}^n, n \in \mathbb{N}$. В силу условия (4) $\varphi(x_0 + \varepsilon_n, n) \in I_{i_n}^n$ и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_0 + \varepsilon_n, n) = \varphi(x_0, \omega)$. С другой стороны, очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_0 + \varepsilon_n, n) \neq (x_0, \omega)$. Таким образом, получаем противоречие с непрерывностью отображения φ^{-1} . ■

В работе Бурке и Мур [1] доказано, что любое замкнутое подмножество прямой Зоргенфрея, не имеющее изолированных точек, гомеоморфно ей самой. Отсюда и из теоремы 3 получаем

Следствие 4. Пространство $I \times [1, \omega]$ не гомеоморфно никакому замкнутому подпространству пространства I .

Теорема 5. Пусть α – произвольный ординал. Тогда пространство $I \times [1, \omega^\alpha \cdot \omega]$ не гомеоморфно никакому замкнутому подпространству пространства $I \times [1, \omega^\alpha]$.

Доказательство. Доказательство проведем методом трансфинитной индукции.

База индукции. Пусть $\alpha = 0$. Согласно следствию 4, пространство $I \times [1, \omega]$ не гомеоморфно никакому замкнутому подпространству пространства I .

Предположим, что для всех $\beta < \gamma$ пространство $I \times [1, \omega^\beta \cdot \omega]$ не гомеоморфно никакому замкнутому подпространству пространства $I \times [1, \omega^\beta]$.

Докажем, что предположение индукции выполнено для ординала γ . Предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi: I \times [1, \omega^\gamma \cdot \omega] \rightarrow I \times [1, \omega^\gamma]$ такой, что $\varphi(I \times [1, \omega^\gamma \cdot \omega]) = F$, где F – замкнутое подпространство в пространстве $I \times [1, \omega^\gamma]$. Пусть точка $(x, \omega^\gamma) \in I \times \{\omega^\gamma\}$ переходит в точку $(y, \delta) \in I \times \{\delta\}$, где $\delta < \omega^\gamma$. Так как отображение φ является непрерывным, то для любого $\varepsilon > 0$ и $\rho < \delta$ существует открыто-замкнутая окрестность

$$(x - \varepsilon_1, x] \times (\xi, \omega^\gamma] \subset I \times [1, \omega^\gamma \cdot \omega]$$

такая, что $\varphi((x - \varepsilon_1, x] \times (\xi, \omega^\gamma]) \subset (y - \delta, y] \times (\rho, \delta]$

как замкнутое подпространство в $I \times [1, \omega^\gamma]$ (поскольку φ – гомеоморфизм на замкнутое подпространство). Так как отрезки ординалов $(\xi, \omega^\gamma] \sim [1, \omega^\gamma]$ гомеоморфны, то

$$(x - \varepsilon_1, x] \times (\xi, \omega^\gamma] \sim I \times [1, \omega^\gamma].$$

Представим ординал δ в следующем виде [2]:

$$\delta = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot n_m.$$

Тогда $[1, \delta] \sim [1, \omega^{\beta_1} \cdot n_1]$. Применяя теорему 1, получаем

$$\varphi((x - \varepsilon_1, x] \times (\xi, \omega^\gamma]) \subset I \times [1, \delta] \sim I \times [1, \omega^{\beta_1} \cdot n_1] \sim I \times [1, \omega^{\beta_1}].$$

Следовательно, $\varphi((x - \varepsilon_1, x] \times (\xi, \omega^\gamma])$ гомеоморфно вкладывается как замкнутое подпространство в $I \times [1, \omega^{\beta_1}]$. Так как $(x - \varepsilon_1, x] \times (\xi, \omega^\gamma] \sim I \times [1, \omega^\gamma]$, то пространство $I \times [1, \omega^\gamma]$ гомеоморфно вкладывается в $I \times [1, \omega^{\beta_1}]$, что невозможно, поскольку $\omega^\gamma \geq \omega^{\beta_1} \cdot \omega$.

Таким образом, $\varphi(I \times \{\omega^\gamma\}) \subset I \times \{\omega^\gamma\}$. Аналогично можно доказать, что $\varphi(I \times \{\omega^\gamma \cdot n\}) \subset I \times \{\omega^\gamma\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\varphi\left(\prod_{n=1}^{\infty} I \times \{\omega^\gamma \cdot n\}\right) \Pi(I \times \{\omega^\gamma \cdot \omega\}) \subset I \times \{\omega^\gamma\}.$$

В силу того, что

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty} I \times \{\omega^\gamma \cdot n\}\right) \Pi(I \times \{\omega^\gamma \cdot \omega\}) \sim I \times [1, \omega]$$

и $I \times \{\omega^\gamma\} \sim I$, получаем противоречие с теоремой 3. Теорема доказана. ■

Следствие 6. Пусть α – произвольный ординал. Тогда пространства $I \times [1, \omega^\alpha \cdot \omega]$ и $I \times [1, \omega^\alpha]$ не являются гомеоморфными.

Теорема 7. Пусть α и β произвольные ординалы и $\alpha \leq \beta$. Пространства $I \times [1, \alpha] \sim I \times [1, \beta]$ тогда и только тогда, когда $\alpha \leq \beta < \alpha \cdot \omega$.

Доказательство. Пусть $\varphi: I \times [1, \alpha] \rightarrow I \times [1, \beta]$ – гомеоморфизм. Представим ординалы α и β в виде

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\gamma_n} \cdot n_m \quad \text{и} \quad \beta = \omega^{\delta_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\delta_n} \cdot n_m.$$

Из неравенства $\alpha \leq \beta$ следует, что $\gamma_1 \leq \delta_1$. Так как $[1, \alpha] \sim [1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1]$ и $[1, \beta] \sim [1, \omega^{\delta_1} \cdot m_1]$, получаем $I \times [1, \omega^{\gamma_1} \cdot n_1] \sim I \times [1, \omega^{\delta_1} \cdot m_1]$. Используя теорему 1, имеем $I \times [1, \omega^{\gamma_1}] \sim I \times [1, \omega^{\delta_1}]$.

В силу теоремы 5 неравенство $\omega^{\delta_1} \cdot k \geq \omega^{\gamma_1} \cdot \omega$ невозможно для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\omega^{\delta_1} \leq \omega^{\delta_1} \cdot k < \omega^{\gamma_1} \cdot \omega$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Таким образом,

$$\alpha \leq \beta < \omega^{\delta_1} \cdot n_1 + \omega^{\delta_1} = \omega^{\delta_1} \cdot (n_1 + 1) < \omega^{\gamma_1} \cdot \omega = \alpha \cdot \omega.$$

Последнее равенство верно, так как

$$\begin{aligned}\omega^{\gamma_1} \cdot \omega &= (\omega^{\gamma_1} \cdot n_1) \cdot \omega \leq \alpha \cdot \omega = (\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot n_2 + \dots + \omega^{\gamma_n} \cdot n_m) \cdot \omega \\ &\leq (\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \omega^{\gamma_1}) \cdot \omega = \omega^{\gamma_1} (n_1 + 1) \cdot \omega = \omega^{\gamma_1} \cdot \omega\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\omega^{\gamma_1} \cdot \omega = \alpha \cdot \omega. \quad (1)$$

Пусть теперь $\alpha \leq \beta < \alpha \cdot \omega$. Используя равенство (1), получаем

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\gamma_n} \cdot n_m \leq \beta = \omega^{\delta_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\delta_n} \cdot n_m < \alpha \cdot \omega = \omega^{\gamma_1} \cdot \omega = \omega^{\gamma_1+1}.$$

Из последнего неравенства видим, что $\gamma_1 \leq \delta_1 < \gamma_1 + 1$ и, следовательно, $\delta_1 = \gamma_1$.

Так как $I \times [1, \omega^{\gamma_1}] \sim I \times [1, \alpha]$ и $I \times [1, \omega^{\delta_1}] \sim I \times [1, \beta]$, то $I \times [1, \alpha] \sim I \times [1, \beta]$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Burke D.K., Moore J.T.* Subspaces of the Sorgenfrey line // *Topology and Its Applications*. 1988. V. 90. P. 57–68.
2. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

Статья поступила 04.07.2013 г.

Trofimenko N.N., Khmyleva T.E. ON HOMEOMORPHISMS OF SPACES $I \times [1, \alpha]$ WITH THE SORGENFREY TOPOLOGY. In this paper, a topological classification of spaces $I \times [1, \alpha]$ is presented. Here, α is an arbitrary ordinal and the semi-interval $I = (0, 1]$ is equipped with the Sorgenfrey topology. It is proved that the space $I \times [1, \alpha]$ is homeomorphic to the space $I \times [1, \beta]$ if and only if $\alpha \leq \beta < \alpha \cdot \omega$.

Keywords: line of Sorgenfrey, continuous functions, linear homeomorphisms, interval of ordinals.

TROFIMENKO Nadezhda Nikolaevna (Tomsk State University)

E-mail: Trofimenko@sibmail.com

KHMYLEVA Tatiana Evgenievna (Tomsk State University)

E-mail: TEX2150@yandex.ru.