

## МЕХАНИКА

УДК 532.546

Д.О. Диль, А.М. Бубенчиков

### ДВУХФАЗНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ТРУБЕ, ЗАПОЛНЕННОЙ ПОРИСТЫМ МАТЕРИАЛОМ

На основе анализа современного состояния работ по фильтрации составлена математическая модель двухфазной фильтрации в анизотропной пористой среде. Решение задачи строится с использованием метода контрольного объема и итерационной технологии Ньютона. В качестве примера рассмотрено одномерное развивающееся течение газожидкостной среды в однородном пористом материале.

**Ключевые слова:** пористый объем, двухфазная среда, влагонасыщенность, капиллярное давление, контрольный объем, нелинейные невязки уравнений, метод Ньютона.

Математическая модель двухфазной фильтрации в пористых пластах сформулирована на основе анализа работ [1–4]:

$$\frac{\partial \rho^G m (1-s)}{\partial t} - \operatorname{div} \left( \frac{\text{IK} k_r^G}{\mu^G} \rho^G (\bar{\nabla} p^G - \rho^G \bar{g}) \right) = q^G; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho^F m s}{\partial t} - \operatorname{div} \left( \frac{\text{IK} k_r^F}{\mu^F} \rho^F (\bar{\nabla} p^F - \rho^F \bar{g}) \right) = q^F; \quad (2)$$

$\rho^G = \rho^G(p^G) = \rho^{G,0} \frac{p^G}{p^0}$ ,  $p^0$  – атмосферное давление;

$m = m(p^G)$  – пористость ( $\frac{V_n}{V}$ ,  $V_n$  – объем пор);

$s$  – эффективная влагонасыщенность (в принципе меняется от 0 до 1);

IK – тензор проницаемости, в общем случае полно заполненный;

$k_r^G = \sqrt{1-s} (1-s^2)$  – относительная проницаемость для газовой фазы;

$\mu^G$  – вязкость газа;  $q^G$  – источниковый член в балансе газовой фазы;

$q^F$  – источниковый член в балансе жидкости;

$\rho^F = \rho^{F,0} \frac{p^F}{p^0}$ ,  $\rho^{F,0}$  – плотность флюида при атмосферном давлении;

$k_r^F = \sqrt{s} (1 - \sqrt{1-s^2})^2$  – относительная проницаемость для жидкой фазы;

$\mu^F$  – вязкость флюида ( $\mu^F \gg \mu^G$ );

$$p^F = p^G - p^c(s); \quad p^c(s) = p^d \frac{\sqrt{1-s^2}}{s} \quad \text{– капиллярное давление; } p^d \text{ – пороговое}$$

давление, причем  $p^d = \frac{\rho^F g}{\alpha}$ , где  $\alpha$  – параметр, характеризующий пористую среду. Таким образом независимыми переменными будут давление газа и влагонасыщенность. В качестве граничных условий для них будем использовать условия Дирихле. В начальный момент времени давление газа и влагонасыщенность будем считать постоянными и равными значениям на выходе.

### Одномерное приближение

Предельно упростим ситуацию. Примем, что источники отсутствуют, то есть  $q^G = q^F = 0$ . Будем рассматривать одномерное движение, в этом случае  $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\text{div} = \frac{\partial}{\partial x}$ . Кроме того, примем, что движение происходит в горизонтальном направлении:  $(\vec{g})_x = 0$ . В этом случае уравнения (1), (2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial \rho^G m(1-s)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Kk_r^G}{\mu^G} \rho^G \left( \frac{\partial p^G}{\partial x} \right) \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho^F ms}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Kk_r^F}{\mu^F} \rho^F \left( \frac{\partial p^F}{\partial x} \right) \right). \quad (4)$$

Здесь  $K$  – скалярный коэффициент проницаемости.

Плотность флюида будем считать неизменной, а плотность газа – линейной функцией давления:

$$\rho^G = \frac{\rho^{G,0}}{p^0} p^G.$$

В качестве независимых переменных будем рассматривать давление газа и влагонасыщенность. Поэтому давление флюида будем определять по формуле

$$p^F = p^G - p^c(s),$$

где  $p^c(s) = p^d \frac{\sqrt{1-s^2}}{s}$ . Эта зависимость представлена на рис. 1.

В результате получим два уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial p^G m(1-s)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Kk_r^G(s)}{\mu^G} p^G \frac{\partial p^G}{\partial x} \right); \quad (5)$$

$$\frac{\partial ms}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Kk_r^F(s)}{\mu^F} \frac{\partial (p^G - p^c(s))}{\partial x} \right). \quad (6)$$

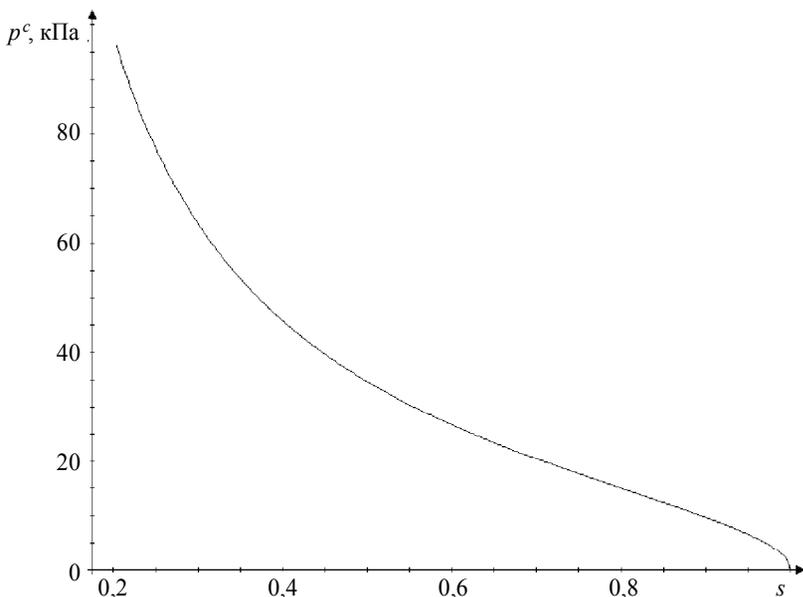


Рис. 1. Характер зависимости капиллярного давления от насыщенности

### Метод контрольного объема

Для построения дискретных аналогов исходных дифференциальных уравнений разобьем область решения на контрольные объемы вдоль оси  $x$  и проинтегрируем эти уравнения, заменяя объемные интегралы поверхностными. Поскольку стенки трубы непроницаемы, при интегрировании по поверхности рассматриваются только две ее составляющие – два круга, через которые осуществляется течение. Рассматривая значения давления газа и влагонасыщенности в центрах контрольных объемов, а также учитывая все предполагаемые выше упрощения исходных дифференциальных уравнений для случая одномерного приближения, будем иметь разностные уравнения следующего вида:

$$V_i m \frac{(p_i^G (1-s_i))^{n+1} - (p_i^G (1-s_i))^n}{\Delta t} = \bar{p}_{\text{left}}^{G,n+1} \cdot Q_{\text{left}}^{G,n+1} - \bar{p}_{\text{right}}^{G,n+1} \cdot Q_{\text{right}}^{G,n+1}, \quad (7)$$

$$V_j m \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\Delta t} = Q_{\text{left}}^{F,n+1} - Q_{\text{right}}^{F,n+1}. \quad (8)$$

где 
$$Q_j^{G,n+1} = \frac{K \cdot S_c \cdot k_r^G (\tilde{s}_j^{n+1})}{\mu^G} \frac{p_j^{G,n+1} - p_i^{G,n+1}}{\Delta l}, \quad (j = \text{left}, \text{right}),$$

$$Q_j^{F,n+1} = \frac{K \cdot S_c \cdot k_r^F (\tilde{s}_j^{n+1})}{\mu^F} \frac{p_j^{G,n+1} - p^c(s_j^{n+1}) - p_i^{G,n+1} + p^c(s_i^{n+1})}{\Delta l},$$

$V_i$  – объем  $i$ -го контрольного объема,  $S_c$  – площадь сечений трубы, через которые осуществляется течение,  $\bar{p}_j^{G,n+1} = (p_j^{G,n+1} + p_i^{G,n+1})/2$  – осредненное значение дав-

ления газа на  $j$ -й поверхности контрольного объема,  $p_i^{G,n+1}$  – давление газа в центре  $i$ -го контрольного объема,  $\tilde{s}_j^{n+1}$  – значение насыщенности на  $j$ -й поверхности, взятое против потока.

Для решения полученной системы  $2N$  дискретных уравнений ( $N$  – число контрольных объемов) воспользуемся технологией Ньютона, используемой для решения систем нелинейных уравнений. Выпишем нелинейные невязки уравнений для  $l$ -го приближения к величине, изменяемой на временном шаге  $n+1$  в  $i$ -м контрольном объеме:

$$R_{G,i}^l \cong V_i m \left[ p_i^{G,l} (1 - s_i^l) - p_i^{G,n} (1 - s_i^n) \right] - \Delta t \sum_{j=\text{left}}^{\text{right}} p_j^{G,l} Q_j^{G,l}; \quad (9)$$

$$R_{F,i}^l \cong V_i m \left[ s_i^l - s_i^n \right] - \Delta t \sum_{j=\text{left}}^{\text{right}} Q_j^{F,l}. \quad (10)$$

Определяя производные от невязок по значениям насыщенности и давления газа, запишем для каждого контрольного объема систему линейных алгебраических уравнений из двух уравнений для двух неизвестных приращений рассматриваемых переменных:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R_{G,i}^l}{\partial p_i^l} & \frac{\partial R_{G,i}^l}{\partial s_i^l} \\ \frac{\partial R_{F,i}^l}{\partial p_i^l} & \frac{\partial R_{F,i}^l}{\partial s_i^l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta p_i^l \\ \delta s_i^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_{G,i}^l \\ -R_{F,i}^l \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Благодаря тому, что для каждой ячейки записывается независимая система уравнений, легко решаемая с помощью правила Крамера, вычислительный алгоритм становится достаточно простым. Недостатком данного метода являются некоторые ограничения для шага по времени.

Вычисления проводились при следующих значениях определяющих параметров:

$$\begin{aligned} L &= 6 \text{ м} - \text{длина трубы;} \\ \rho^F &= 1000 \text{ кг/м}^3; \rho^{G,0} = 1,27 \text{ кг/м}^3; \\ K &= 9,869233 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2; \\ \mu^F &= 8,9 \cdot 10^{-4} \text{ Па}\cdot\text{с}; \mu^G = 1,78 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}. \end{aligned}$$

Далее будем рассматривать движение газо-жидкостной среды в трубе, заполненной пористым материалом, например песком ( $m = 0,4$ ).

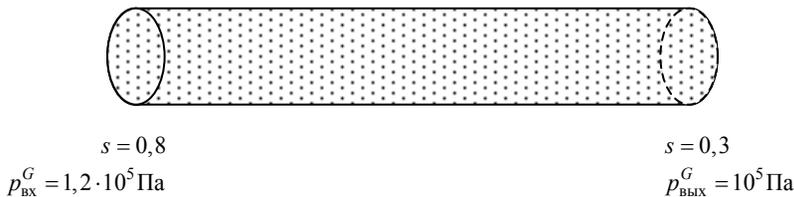


Рис. 2. Одномерная область двухфазной фильтрации

**Тестирование алгоритма при постоянной насыщенности**

В случае постоянной насыщенности уравнение для давления газа принимает вид квазилинейного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial p^G}{\partial t} = \frac{Kk_r^G(s)}{\mu^G m(1-s)} \frac{\partial}{\partial x} \left( p^G \frac{\partial p^G}{\partial x} \right). \tag{12}$$

На рис. 3 представлены результаты решения этого уравнения рассматриваемым численным методом. В случае установившегося течения, когда  $\frac{\partial p^G}{\partial t} = 0$ , решение легко находится аналитически. На графике аналитическое решение практически совпадает с численным, что говорит о корректности применения рассматриваемого численного метода для решения данных уравнений.

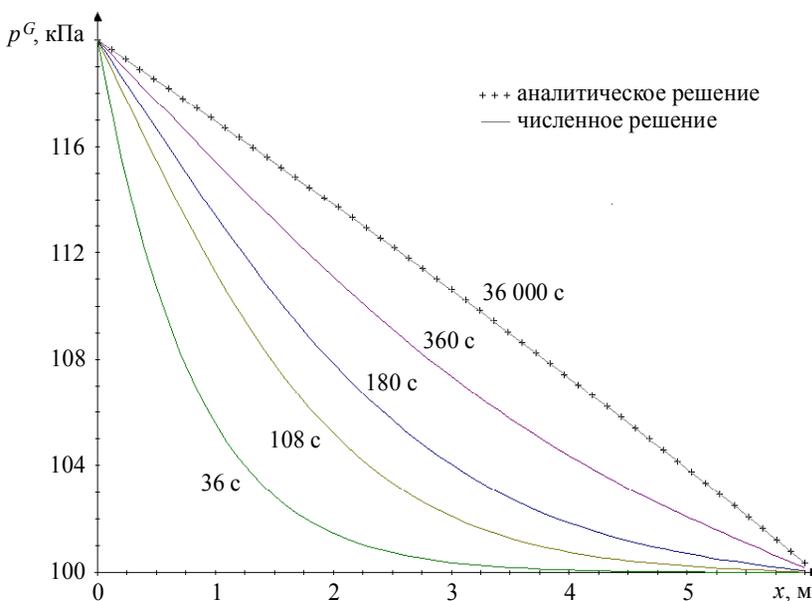


Рис. 3. Распределения давления газа по длине трубы в моменты времени 36, 108, 180, 360 и 36 000 с

В рассматриваемом примере профиль давления газа, изначально имеющий вид «левого нижнего уголка», постепенно деформируется в почти линейное распределение, что характерно для решения уравнения теплопроводности.

**Численный эксперимент**

Для анализа аппроксимационной сходимости были проведены вычисления с различными параметрами сетки, а именно шага вдоль оси x. На рис. 4 можно наблюдать характер сходимости решения разностной задачи. Заметной особенностью более точного решения является большая кривизна. В точках перегиба решения совпадают.

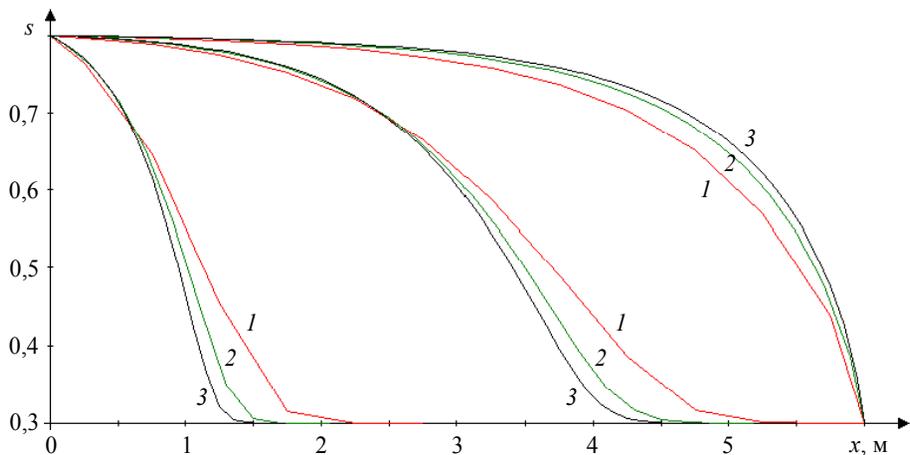


Рис. 4. Распределение насыщенности в моменты времени 10, 100, 360 часов для различных шагов вдоль оси  $x$  (1 – 0,5 м, 2 – 0,2 м, 3 – 0,1 м)

При указанных выше параметрах проводился численный эксперимент, отслеживающий динамику развития течения в трубе, заполненной пористым материалом. Шаг сетки вдоль оси  $x$  равнялся 0.1 м. В этом случае рассматриваемая область решения была покрыта 60-ю контрольными объемами. Были получены распределения давления флюида и газа, а также распределение насыщенности флюидом пористого пространства с течением времени, представленное на рис. 5. Полученные результаты позволяют анализировать течение и характер заполнения пористого пространства.

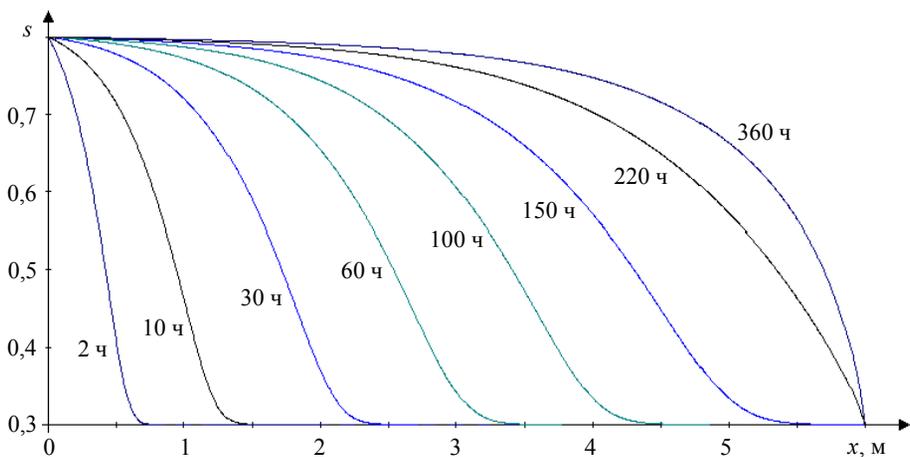


Рис. 5. Распределение насыщенности по объему пористого пространства в моменты времени 2, 10, 30, 60, 100, 150, 220, 360 ч

Как видно из рис. 5, наблюдается волновой механизм распространения насыщенности по пористому пространству трубы. Причем зона изменения насыщенности с течением времени увеличивается. Характерная выпукло-вогнутая форма

ее распределения со временем становится более простой и к моменту, определяющему установившееся состояние течения, кривая  $s = s(x)$  имеет вполне определенный знак кривизны.

В таблице приводятся данные итерационной сходимости при различных шагах по времени. Точность расчетов –  $10^{-2}$ . Для давления газа столь высокая точность является излишней и приводит к значительному увеличению итераций. Однако эта точность необходима для значений влагонасыщенности, которые колеблются в пределах от 0 до 1.

**Данные итерационной сходимости при расчёте течения с общим временем 15 дней**

Шаг по времени, мин (число шагов)	Общее число итераций	Среднее число итераций на шаг	Время выполнения программы, с
6 (3600)	590 534	768	315
60 (360)	276 477	164	142

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shikuo C.* Displacement mechanism of the two-phase flow model for water and gas based on adsorption and desorption in coal seams / Chen Shikuo, Yang Tianhong, Wei Chenhui // Materials of Int. Symposium on Multi-field Coupling Theory of Rock and Soil Media and Its Applications, Chengdu City, CHINA. 2010. P. 597–603.
2. *Van Genuchten M.Th.* A Closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil Sci. Soc. Am. J. 1980. V. 44. P. 892–898.
3. *Schaap M.G.* A modified Mualem – van Genuchten formulation for improved description of the hydraulic conductivity near saturation / M.G. Schaap, M.Th. van Genuchten // Vadose Zone J. 2006. V. 5. P. 27–34.
4. *Никитин К.Д.* Метод конечных объемов для задачи конвекции-диффузии и моделей двухфазных течений: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2010. 105 с.

Статья поступила 30.03.2013 г.

*Dil' D.O., Bubenchikov A.M.* TWO-PHASE FILTRATION IN A PIPE FILLED WITH A POROUS MATERIAL. Based on the analysis of the present-day state of works on the seepage theory, a mathematical model of two-phase flow in anisotropic porous medium is established. A numerical solution using the control volume method and Newton's iteration algorithm is proposed. As an example, one-dimensional developing motion of a gas-fluid medium in a homogeneous porous material is considered.

Keywords: porous volume, two-phase medium, water saturation, capillary pressure, control volume, nonlinear residuals, Newton's method.

*DIL' Denis Olegovich* (Tomsk State University)

E-mail: gradpower@list.ru

*BUBENCHIKOV Aleksey Mikhailovich* (Tomsk State University)

E-mail: alexy121@mail.ru