

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

Научный журнал

2021

№ 56

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)

Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,
Высшей аттестационной комиссии

Founder – Tomsk State University

EDITORIAL BOARD

Alexander Gortsev – Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599
Valery Smagin – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599
Lyudmila Nezhelskaya – Executive Editor, Doctor. of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Sergey Vorobeychikov – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University
Vladimir Vishnevsky – Doctor of Sc., Prof. Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).
Gennady Koshkin – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University
Yury Kostyuk – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Informatics Department Tomsk State University
Anjela Matrosova – Doctor of Sc., Prof. of the Programming Department Tomsk State University
Anatoly Nazarov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department Tomsk State University
Konstantin Samouylov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Probability and Informatics Department RUDN University (Moscow, Russia)
Eugene Semenko – Doctor of Sc., Prof. System Analysis and Operations Research Department Reshetnev Siberian State University of Science and Technology (Krasnoyarsk, Russia)
Sergey Sushchenko – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied of Information Department Tomsk State University
Mais Farkhadov – Doctor of Sc., Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).
Gurami Tsitsiashevili – Doctor of Sc., Prof., Chief researcher Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Prof. Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russia)
Editorial address:
Institute of Applied Mathematics and Computer Science,
unit of Applied Mathematics
National Research Tomsk State University
36 Lenina Avenue, Tomsk, 634050
Telephone / fax: +73822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

EDITORIAL COUNCIL

Ana Rosa Cavalli PhD, Prof. University VII Paris, France	Gilbert Saporta PhD, Prof. Pierre and Marie Curie University, Paris, France
Alexander Dudin Doctor of Sc., Prof. Belarusian State University Minsk, Republic Belorussia	Raimund Ubar Doctor of Sc., Prof. University of Technology Tallinn, Estonia
Reindert Nobel Doctor of Sc., Associate Prof. Vrije University, Amsterdam, Netherlands	Nina Yevtushenko Doctor of Sc., Prof. Ivannikov V.P. ISP RAS Moscow, Russia
Enco Orzinger PhD, Prof. University of Rome, Italy	Yervant Zorian PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA
Paolo Prinetto Prof. Politecnico Institute, Torino, Italy	

JOURNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031)

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- control of dynamical systems,
- mathematical modeling,
- data processing,
- informatics and programming,
- discrete function and automation,
- designing and diagnostics of computer systems.

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

Учредитель – Томский государственный университет

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Горцев Александр Михайлович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599
Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599
Нежелская Людмила Алексеевна – ответственный секретарь, доц., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ
Вишневский Владимир Миронович – проф., д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)
Кошкин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ
Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теоретической информатики ТГУ
Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры программирования ТГУ
Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики ТГУ
Самуйлов Константин Евгеньевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (г. Москва)
Семенкин Евгений Станиславович – проф., д-р техн. наук, проф. каф. системного анализа и исследования операций, СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)
Сушенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики ТГУ
Фархадов Маис Паша Оглы – д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)
Цициашвили Гурами Шалвович – проф., д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН, проф. ДВФУ (г. Владивосток)

Адрес редакции и издателя: 634050, Томск, пр. Ленина, 36
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Институт прикладной математики и компьютерных наук,
отделение прикладной математики
Телефон / факс: +73822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Ана Роза Ковали д-р. философии, проф. Университет VII Париж, Франция	Жильберт Сапорта д-р. философии, проф. Университет им. Пьера и Марии Кюри, Париж, Франция
Александр Дудин д.ф.-м.н., проф. БГУ, Минск, Республика Беларусь	Раймонд Убар д-р. проф. Технологический университет, Таллинн, Эстония
Рейндерт Нобель д-р., доцент Свободный университет, Амстердам, Нидерланды	Нина Евтушенко д-р. техн. наук, проф. ИСП РАН им. Иванникова В.П., Москва, Россия
Енцо Орзингер д-р. философии, проф. Римский университет, Италия	Ервант Зорян д-р. философии, гл. научный сотр. Фирмы «Синописис», США
Паоло Принетто проф. Политехнический институт Турин, Италия	

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке

Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- управление динамическими системами,
- математическое моделирование,
- обработка информации,
- информатика и программирование,
- дискретные функции и автоматы,
- проектирование и диагностика вычислительных систем.

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).

Правила оформления статей приведены на сайте:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

СОДЕРЖАНИЕ

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Братчиков С.А., Абрамова Е.А., Федосов Ю.В. Решение обратной задачи кинематики манипулятора	4
Паршуков А.Н. Метод синтеза модального регулятора пониженного порядка	12

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Калашников С.Н., Мартусевич Е.А., Мартусевич Е.В., Бунинцев В.Н. Математическое моделирование действующего технологического процесса формирования алюминиевого расплава в миксере литейного отделения	20
Шкленник М.А., Моисеев А.Н., Задиранова Л.А. Исследование потока повторных обращений в двухфазной системе массового обслуживания $GI GI _{\infty}$ с мгновенной обратной связью методом марковского суммирования	29

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Головастова Э.А. Асимптотический анализ времени работы системы с ненадежными резервными элементами и восстанавливающим прибором в условиях быстрого ремонта элемента	41
Доронина Ю.В., Скاتков А.В. Особенности квалиметрического анализа полимодельных комплексов с переменной топологией при исследовании сложных технических систем	49
Зенкова Ж.Н., Цыбульникова Н.Р. Статистические свойства оценок ценовых значений метода ценовой чувствительности PSM для линейно зависимых наблюдений с учетом симметрии	59
Кеба А.В., Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний в условиях непродлевающего мертвого времени	68
Подкур П.Н., Смоленцев Н.К. Вейвлеты Мейера с коэффициентом масштабирования $N > 2$	81
Солдатенко А.А., Семенова Д.В. О связи биклик гиперграфа и всех максимально полных подматриц матрицы смежности	90

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Краснов Ф.В., Баскакова Е.Н., Смазневич И.С. Оценка прикладного качества тематических моделей для задач кластеризации	100
Печников А.А. Сравнительный анализ наукометрических показателей журналов Math-Net.ru и eLibrary.ru	112

МЕМОАРИ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

75 лет профессору Геннадию Михайловичу Кошкину	122
Сведения об авторах	125

CONTENTS

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Bratchikov S.A., Abramova E.A., Fedosov U.V. Solution of the inverse kinematics problem of the manipulator	4
Parshukov A.N. Method of synthesis of a reduced-order modal regulator	12

MATHEMATICAL MODELING

Kalashnikov S.N., Martusevich E.A., Martusevich E.V., Buintsev V.N. Mathematical modeling of the current technological process of forming an aluminum melt in the mixer of the foundry department	20
Shklennik M.A., Moiseev A.N., Zadiranova L.A. Analysis of repeated flow in queueing tandem $GI GI _{\infty}$ with feedback by method of markovian summation	29

DATA PROCESSING

Golovastova E.A. Asymptotic analysis of the operating time of a system with unreliable interchangeable elements and recovery device under conditions of element's fast repair	41
Doronina Yu.V., Skatkov A.V. Features of qualimetric analysis of polymodel complexes with variable topology in the study of complex technical systems	49
Zenkova Z.N., Tsybulnikova N.R. Statistical properties of price sensitivity meter results for linear relationship between observations with symmetry	59
Keba A.V., Nezhel'skaya L.A. Optimal state estimation of generalized MAP with an arbitrary number of states under conditions of unextendable dead time	68
Podkur P.N., Smolentsev N.R. Meyer wavelets with scaling factor $N > 2$	81
Soldatenko A.A., Semenova D.V. On connection between bicliques of hypergraph and all maximally complete submatrices of adjacency matrix	90

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Krasnov F.V., Baskakova E.N., Smaznevich I.S. Assessment of the applied quality of topic models for clustering problems	100
Pechnikov A.A. Comparative analysis of scientometrics indicators of journals Math-Net.ru and eLibrary.ru	112

MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES

75 years to professor Gennady Michailovich Koshkin	122
Brief information about the authors	125

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 004.021

DOI: 10.17223/19988605/56/1

С.А. Братчиков, Е.А. Абрамова, Ю.В. Федосов

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРА

Представлен и апробирован алгоритм аналитического решения обратной задачи кинематики для типовой антропоморфной структуры манипулятора, которая часто применяется на производствах. Приведены соотношения, которые позволяют преобразовать параметры задания в форме декартовых координат в обобщенные координаты манипулятора, они же – углы поворота звеньев манипулятора относительно друг друга. Эти соотношения легко могут быть реализованы в программе, вырабатывающей сигнал задания для двигателей манипулятора.

Ключевые слова: манипулятор; планирование траектории; аналитическое решение; обратная задача кинематики; обобщенные координаты.

Управление любым робототехническим комплексом [1] требует четкого детерминирования траектории всех движущихся частей этого комплекса, так называемого задания траектории. Это обусловлено необходимостью контролировать положение каждого из звеньев механизма для выполнения поставленной задачи [2]. Чаще всего перед робототехнической системой в производственных условиях задача ставится в терминах пространственно-временного состояния в декартовых координатах: в заданный момент времени t привести конечную точку робота в точку с координатами x, y, z . Такое задание понятно человеку, который формирует задание для машины, однако кинематическая схема робота не позволяет без обработки и преобразования входного сигнала обеспечить выполнение этого задания и желаемое положение конечной точки. Должно быть осуществлено преобразование к обобщенным координатам манипулятора из входных данных, задаваемых в декартовой системе координат. Процесс такого преобразования называется решением обратной задачи кинематики (ОЗК).

Существует несколько методов решения ОЗК: использование бикватернионов [3–5], матриц переходов, использование метода Ньютона для решения систем уравнений, нейронных сетей [6]. Однако большинство этих методов и их вариаций связано с решением систем трансцендентных уравнений либо с решением нелинейных дифференциальных уравнений [7], что существенно ограничивает их применение в системах реального времени при управлении манипуляторами, поскольку формирование таким образом задания для обобщенных координат требует значительных вычислительных ресурсов, а также обладает погрешностью, как и любой численный метод. В то же время к достоинствам подобных методов можно отнести универсальность по отношению к разным кинематическим схемам манипулятора. В задачах же прикладного характера, в условиях задания траектории манипулятора в реальном времени, правильнее использовать аналитический метод решения ОЗК [8] с целью получить значение каждой обобщенной координаты робота в виде функции от только входных параметров, заданных в декартовой системе координат. Такой подход жестко привязан к кинематической схеме робота, обладает универсальностью только в масштабах схожей кинематической структуры, однако позволяет вывести точное аналитическое соотношение между обобщенными координатами и входными параметрами. Таким образом, отпадает необходимость в трудоемких решениях транс-

цендентных уравнений, а сложность вычислений ограничивается условными операторами, вычислением тригонометрических функций и выполнением арифметических операций, с чем современные встраиваемые вычислительные комплексы могут справляться довольно быстро. Поэтому нахождение аналитического решения для ОЗК является актуальной задачей.

1. Описание рассматриваемой кинематической схемы

Рассматриваться решение ОЗК будет на примере распространенной на современных производствах типовой антропоморфной кинематической схемы промышленного робота [9, 10] (рис. 1).

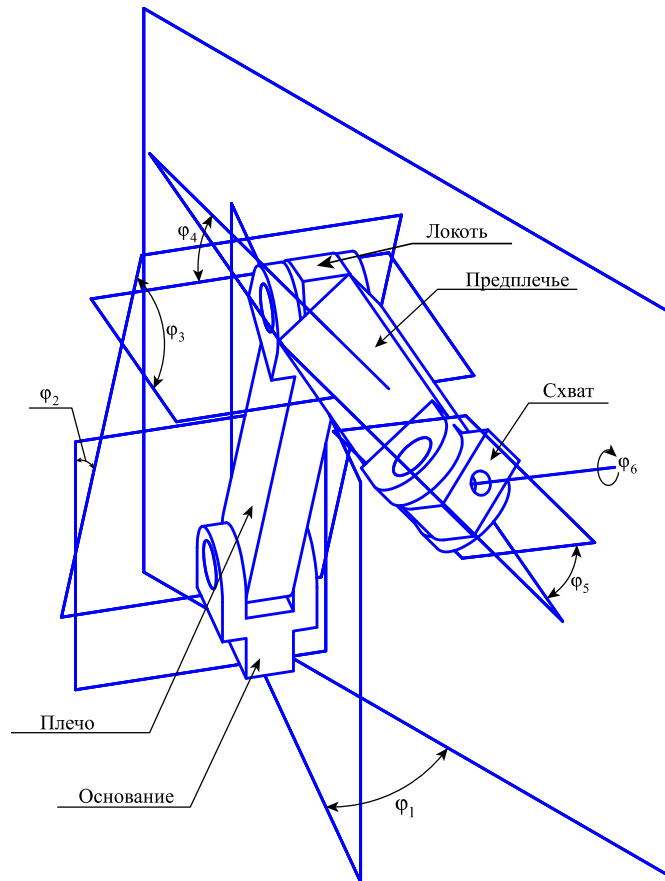


Рис. 1. Манипулятор и его обобщенные координаты
Fig. 1. Manipulator and its generalized coordinates

На рис. 1 обозначены наименования каждого из звеньев и показаны углы (обобщенные координаты), соотношения для которых необходимо определить. Стоит отметить, что каждый из этих углов в действительности соответствует углу поворота следующего звена относительно предыдущего.

Упрощенно кинематическая схема манипулятора может быть изображена в профиль в произвольной вертикальной плоскости так, как это показано на рис. 2, где в том числе дополнительно обозначены оси и опорные точки, на которые удобно ориентироваться при расчетах.

За начальные положения при расчетах (и, следовательно, нулевые углы поворота звеньев относительно друг друга) удобно принимать конфигурацию, при которой плечо расположено строго вертикально, длинная часть предплечья – строго горизонтальна и сонаправлена с осью u , схват – строго горизонтален, ось O_4 занимает положение, при котором схват поворачивается в вертикальной плоскости, а инструмент, если бы был прикреплен к схвату, занимал бы строго вертикальное положение. Дальнейшие рассуждения и расчеты строятся исходя из этих начальных условий кинематической схемы.

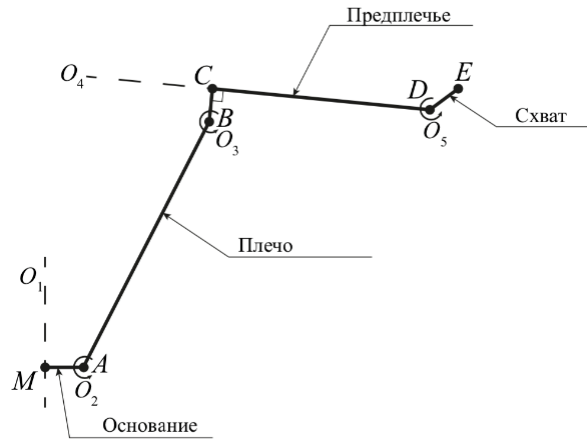


Рис. 2. Упрощенная кинематическая структура манипулятора в вертикальной плоскости
Fig. 2. Simplified kinematic structure of manipulator in the vertical plane

Стоит отметить, что кинематическая схема на рис. 2 несколько отличается от представленной на рис. 1 тем, что у изображенной на рис. 2 схемы чуть более сложная Г-образная форма предплечья, а также существует горизонтальное расстояние между осями вращения робота относительно основания и плеча относительно основания. Эти геометрические особенности, обусловленные конструктивными необходимостями и часто фигурирующие в серийных образцах, необходимо учитывать и брать соответствующие поправки в расчетах, что отражено в методе решения поставленной задачи.

2. Аналитическое решение ОЗК для рассматриваемой структуры

Решение ОЗК удобно начать с поиска углов φ_1 , φ_2 и φ_3 . Для этого необходимо определить координаты конечной точки предплечья манипулятора, обозначенной на рис. 2 как D . Это возможно сделать, зная координаты конечной точки схвата (x_E, y_E, z_E), требуемые углы азимута и возвышения схвата (ε, ϕ) (рис. 3), а также длину схвата l_3 (отрезок DE на рис. 2). Координаты точки D находятся в соответствии с соотношениями

$$\begin{cases} x_D = x_E - l_3 \cos(\varepsilon) \sin(\phi), \\ y_D = y_E - l_3 \cos(\varepsilon) \cos(\phi), \\ z_D = z_E - l_3 \sin(\varepsilon). \end{cases} \quad (1)$$

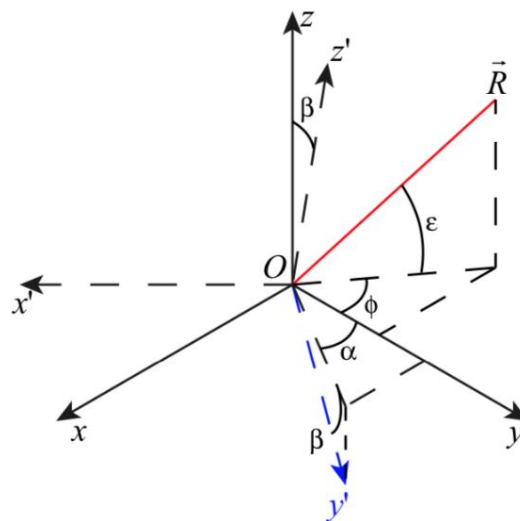


Рис. 3. Вектор желаемого положения и углы, определяющие это положение
Fig. 3. Desired position vector and the angles forming this position

Зная координаты этой точки, нахождение углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ сводится к решению задачи расположения в вертикальной плоскости треугольника со сторонами l_1 и l_2 и с вершинами, находящимися в начале координат и точке D . Однако остается вопрос влияния формы предплечья на соотношения. Он решается введением корректирующего угла α_{cor} , который равен углу CDB на рис. 2. Угол CDB находится как $\text{arctg}(BC / CD)$. Тогда за длину l_1 принимается отрезок AB , за длину l_2 – отрезок BD . Также следует отметить, что возможна ситуация, когда между осями O_1 и O_2 существует горизонтальное расстояние (отрезок MA на рис. 2). Решение этой задачи со всеми описанными допущениями записывается через соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle ABD = \arccos \left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - \left(\sqrt{(x_D^2 + y_D^2 - MA)} + z_D^2 \right)}{2l_1 l_2} \right), \\ \varphi_1 = \arccos \left(\frac{y_D}{\sqrt{x_D^2 + y_D^2}} \right), \\ \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(\frac{l_2 \cdot \sin(\angle ABD)}{\sqrt{(x_D^2 + y_D^2 - MA)} + z_D^2} \right) + \arcsin \left(\frac{z_D^2}{\sqrt{(x_D^2 + y_D^2 - MA)} + z_D^2} \right), \\ \varphi_3 = \angle ABD - \alpha_{cor} - \frac{\pi}{2}. \end{array} \right. \quad (2)$$

После определения углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ необходимо найти углы φ_4, φ_5 , которые зададут положение схвата относительно абсолютной системы координат. Однако определенные ранее углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ внесли свой вклад в поворот системы координат схвата относительно абсолютной системы координат, что должно быть включено в расчет. Это влияние отражено на рис. 3.

Предположим, что система координат (x, y, z) абсолютная (связана с основанием), и именно относительно нее задается желаемое положение вектора направления схвата $\vec{R}$. Углы, которые задают желаемое направление схвата в абсолютной системе координат: ϕ – азимут и ε – возвышение. Угол азимута соответствует повороту системы координат относительно оси z , а угол возвышения соответствует повороту системы координат относительно оси x . Система координат (x', y', z') – это система, которая соосна координатой y' с осью предплечья и является базовой для схвата. То есть положение в пространстве системы (x', y', z') определяет начальное положение схвата, относительно которого будут рассчитываться дальнейшие требуемые углы поворота осей. Это также означает, что положение предплечья в пространстве определяет положение системы координат (x', y', z') . Стоит отметить, что при выборе таких объектов исследования точка O (начало координат обеих систем) совпадает с точкой E , изображенной на рис. 2, и является центром крепления схвата к предплечью робота.

Из кинематической схемы (см. рис. 1) можно заметить, что показанные на рис. 3 углы α и β связаны с углами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ соотношениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \varphi_1, \\ \beta = \varphi_2 + \varphi_3. \end{array} \right. \quad (3)$$

Поскольку ось y' в начальном положении сонаправлена с отрезком CD предплечья, то требуемое положение схвата необходимо достичь следующим образом: сопоставить ось y' схвата с направлением желаемого единичного вектора $\vec{R}$. Исходя из кинематической схемы манипулятора, этого можно добиться поворотами относительно осей O_4 и O_5 . Поворот относительно оси O_4 соответствует углу вращения φ_4 и в условиях, показанных на рис. 3, будет соответствовать повороту системы (x', y', z') относительно оси y' , а поворот относительно оси O_5 соответствует углу вращения φ_5 и в условиях, показанных на рис. 3, будет соответствовать повороту системы (x', y', z') относительно оси x' .

Можно заметить, что угол φ_4 в представленной на рис. 3 конфигурации на самом деле представляет из себя угол между плоскостью, проходящей через векторы y' и z , и плоскостью, проходящей через векторы y' и $\vec{R}$. В то же время угол φ_5 представляет из себя угол между векторами y' и $\vec{R}$ в плоскости, проходящей через эти самые векторы.

Остается дать определение углу φ_6 , представленному на рис. 1. Для этого нужно определить его физический смысл и то, как составитель траектории манипулятора может его задавать в понятном для человека формате. Физически этот угол удобно понимать как угол между вертикальной плоскостью и продольной плоскостью инструмента, который находится в схвате. Необходимо понимать, что на задание этого угла оказывает влияние поворот схвата на углы φ_4 и φ_5 . Угол ζ , на который вносится поправка при задании углов φ_4 и φ_5 , представляет из себя угол между плоскостью, проходящей через векторы z и $\vec{R}$, и плоскостью, проходящей через векторы y' и $\vec{R}$. Углы φ_4 , φ_5 , ζ наглядно представлены на рис. 4.

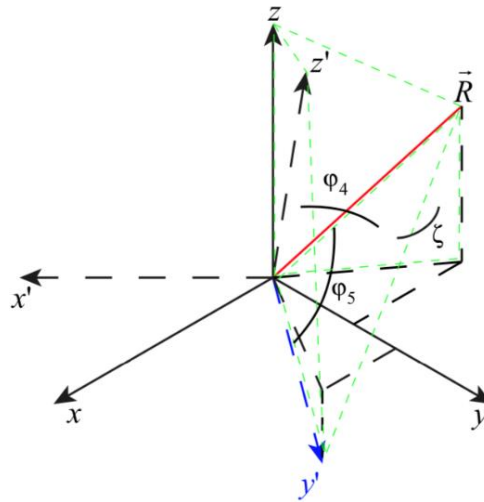


Рис. 4. Плоскости в системе координат и углы, соответствующие обобщенным координатам
Fig. 4. Planes in coordinate system and angles corresponding to generalized coordinates

Угол между плоскостями m и n может быть определен в соответствии с уравнением

$$\varphi = \arccos \left(\frac{|A_m A_n + B_m B_n + C_m C_n|}{\sqrt{A_m^2 + B_m^2 + C_m^2} \sqrt{A_n^2 + B_n^2 + C_n^2}} \right), \quad (4)$$

где A_i , B_i , C_i , ($i \in m, n$) – коэффициенты i -го уравнения плоскости, заданного в виде:

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0.$$

Известно, что любая плоскость, проходящая через три точки, не лежащие на одной прямой, может быть этими тремя точками детерминирована. А значит, и уравнение плоскости может быть получено из координат трех точек, которые ей принадлежат. В контексте данного рассуждения уравнение интересующей плоскости может быть получено как определитель матрицы

$$\begin{vmatrix} x - x_{0i} & y - y_{0i} & z - z_{0i} \\ x_{1i} - x_{0i} & y_{1i} - y_{0i} & z_{1i} - z_{0i} \\ x_{2i} - x_{0i} & y_{2i} - y_{0i} & z_{2i} - z_{0i} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

где x , y , z – координаты декартова пространства; x_{0i} , y_{0i} , z_{0i} – декартовы координаты первой точки, принадлежащей рассматриваемой плоскости i ; x_{1i} , y_{1i} , z_{1i} – декартовы координаты второй точки, принадлежащей рассматриваемой плоскости i ; x_{2i} , y_{2i} , z_{2i} – декартовы координаты третьей точки, принадлежащей рассматриваемой плоскости i .

Коэффициенты A_i , B_i , C_i для конкретной плоскости находятся как соответствующие коэффициенты при множителях x , y , z определителя (5). Однако следует заметить, что все плоскости, представ-

ляющие интерес в настоящем вычислении, проходят через начало координат (0, 0, 0), что дает возможность упростить определитель (5) до вида

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_{1i} & y_{1i} & z_{1i} \\ x_{2i} & y_{2i} & z_{2i} \end{vmatrix}, \quad (6)$$

Тогда коэффициенты уравнения плоскости записываются в виде:

$$\begin{cases} A_i = y_{1i}z_{2i} - z_{1i}y_{2i}, \\ B_i = -(x_{1i}z_{2i} - z_{1i}x_{2i}), \\ C_i = x_{1i}y_{2i} - y_{1i}x_{2i}. \end{cases} \quad (7)$$

Пусть плоскость, проходящая через единичные векторы z и y' (см. рис. 4), обозначается нижним индексом m , плоскость, проходящая через единичные векторы y' и $\vec{R}$, обозначается нижним индексом n , а плоскость, проходящая через единичные векторы z и $\vec{R}$, обозначается нижним индексом o . Тогда за точки, которые принадлежат этим плоскостям удобно выбрать концы указанных единичных векторов, а координаты этих точек записать в виде:

$$\begin{aligned} (x_{1m}, y_{1m}, z_{1m}) &= (x_{1o}, y_{1o}, z_{1o}) = (0, 0, 1), \\ (x_{2m}, y_{2m}, z_{2m}) &= (x_{1n}, y_{1n}, z_{1n}) = (\cos(\beta)\sin(\alpha), \cos(\beta)\cos(\alpha), \sin(\beta)), \\ (x_{2n}, y_{2n}, z_{2n}) &= (x_{2o}, y_{2o}, z_{2o}) = (\cos(\varepsilon)\sin(\phi), \cos(\varepsilon)\cos(\phi), \sin(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда соответствующие коэффициенты уравнения плоскостей будут иметь вид:

$$\begin{cases} A_m = -\cos(\beta)\cos(\alpha), \\ B_m = \cos(\beta)\sin(\alpha), \\ C_m = 0, \\ A_n = \cos(\varepsilon)\cos(\phi)\sin(\beta) - \cos(\beta)\cos(\alpha)\sin(\varepsilon), \\ B_n = -\cos(\varepsilon)\sin(\phi)\sin(\beta) + \cos(\beta)\sin(\alpha)\sin(\varepsilon), \\ C_n = \cos(\varepsilon)\sin(\phi)\cos(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\varepsilon)\cos(\phi)\cos(\beta)\sin(\alpha), \\ A_o = -\cos(\varepsilon)\cos(\phi), \\ B_o = \cos(\varepsilon)\sin(\phi), \\ C_o = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Для того чтобы получить угол φ_4 , необходимо подставить коэффициенты (9) в уравнение (4). В терминах нижних индексов плоскостей, которые были введены ранее, угол φ_4 соответствует углу между плоскостями m и n .

Угол φ_6 может быть определен как разность между следующими углами: углом поворота θ продольной плоскости инструмента относительно вертикальной плоскости и углом поправки ζ между плоскостями n и o , который определяется в соответствии с выражением (4) на основании коэффициентов (9) и требуемого угла. Требуемый угол θ задается оператором и является входным параметром для алгоритма решения ОЗК.

$$\varphi_6 = \theta - \zeta. \quad (10)$$

Угол φ_5 , судя из кинематики манипулятора, соответствует углу между векторами y' и $\vec{R}$, который удобно определять в системе (x', y', z') . В таком случае координаты вектора $y' = (0, 1, 0)$, а вектора $\vec{R} = (\cos(\varepsilon + \beta)\sin(\phi + \alpha), \cos(\varepsilon + \beta)\cos(\phi + \alpha), \sin(\varepsilon + \beta))$. Тогда удобно найти угол между векторами, пользуясь определением скалярного произведения векторов. Поскольку вектор y' имеет только координату y , слагаемые, относящиеся к координатам x и z , в скалярном произведении обращаются в ноль, а угол между векторами определяется как

$$\varphi_5 = \arccos(\cos(\varepsilon + \beta)\cos(\phi + \alpha)). \quad (11)$$

Таким образом, используя шесть входных параметров ($x_E, y_E, z_E, \varepsilon, \phi, \theta$), а также габаритные параметры робота, возможно определить аналитические выражения для обобщенных координат – углов поворота звеньев манипулятора относительно друг друга ($\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6$) – применяя выражения (2), (4), (10), (11). Однако такой метод требует знания кинематической структуры манипулятора и его габаритов.

Заключение

Полученные соотношения позволяют соотнести входные координаты в декартовом пространстве и обобщенные координаты манипулятора, тем самым однозначно обеспечивая перевод робота в желаемое положение, задаваемое в понятном человеку виде. Плюсом описанного подхода является отсутствие численных методов при решении дифференциальных и трансцендентных уравнений, что положительно отражается на скорости вычислений.

Описанный подход к нахождению аналитического соотношения между входными и обобщенными координатами может быть применен и к отличным от рассмотренной структурам манипуляторов, если применить принцип определения углов между плоскостями, а также разделить процесс поиска обобщенных координат для частей манипулятора подобно тому, как было описано. После этого потребуется наложить на полученные значения ограничения по знаку в зависимости от желаемого положения, поскольку используемые функции модуля могут определить величину значения, но не знак. Однако это предмет дальнейших исследований и дополнения представленного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Munasinghe S.R., Nakamura M. Trajectory Planning and Control of Industrial Robot Manipulators // Industrial robotics: theory, modelling and control / ed. by S. Cubero. Pro Literatur Verlag, 2006. P. 335–348.
2. Kabir A.M., Shah B.C., Gupta S.K. Trajectory planning for manipulators operating in confined workspaces // Proceedings IEEE 14th International Conference on Automation Science and Engineering (CASE). IEEE, 2018. P. 84–91.
3. Dantam N.T. Robust and efficient forward, differential, and inverse kinematics using dual quaternions // The International Journal of Robotics Research. 2020. V. 4 (40). P. 1–21. DOI: 10.1177/0278364920931948
4. Chen L. et al. Solution of an inverse kinematics problem using dual quaternions // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. 2020. V. 30, № 2. P. 351–361.
5. Zhao Z., Wang T., Wang D. Inverse kinematic analysis of the general 6R serial manipulators based on unit dual quaternion and Dixon resultant // Proceedings 2017 Chinese Automation Congress (CAC). IEEE, 2017. P. 2646–2650.
6. Srisuk P., Sento A., Kitjaidure Y. Inverse kinematics solution using neural networks from forward kinematics equations // 2017 9th international conference on Knowledge and Smart Technology (KST). IEEE, 2017. P. 61–65.
7. Kelemen M. et al. A novel approach for a inverse kinematics solution of a redundant manipulator // Applied Sciences. 2018. V. 8, № 11. P. 9–10.
8. Tian X., Xu Q., Zhan Q. An analytical inverse kinematics solution with joint limits avoidance of 7-DOF anthropomorphic manipulators without offset // Journal of the Franklin Institute. 2021. V. 358, № 2. P. 1252–1272.
9. Wang M. et al. Optimal trajectory planning of free-floating space manipulator using differential evolution algorithm // Advances in Space Research. 2018. V. 61, № 6. P. 1525–1536.
10. Sciavicco L., Siciliano B. Modelling and control of robot manipulators. 2nd ed. London : Springer Science & Business Media, 2000. 390 p.

Поступила в редакцию 15 апреля 2021 г.

Bratchikov S.A., Abramova E.A., Fedosov U.V. (2021) SOLUTION OF THE INVERSE KINEMATICS PROBLEM OF THE MANIPULATOR. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 56. pp. 4–11

DOI: 10.17223/19988605/56/1

There are a lot of methods for inverse kinematics problem of manipulator solution. But most of them include usage of transcendental equations, numerical methods, non-linear differential equations, and recursive calculations, which are very complicated for application in embedded systems. However, in real-time systems the speed and ease of algorithm are valued the most. These qualities are inherent for analytical solutions, which unequivocally connect the input coordinates of trajectory and generalized coordinates of kinematic scheme of manipulator, A.K.A angles of relative rotation of elements of manipulator.

First, it is needed to solve the simple problem of identification of triangle angles, located in vertical plane. The sides of the triangle are known, as the dimensions of manipulator are given. After doing so, it is possible to use the principles of interplanar angle identification to reach the last generalized coordinates. Also, the method of identifying the angle between two vectors is useful in these calculations.

After calculation of the generalized coordinates according to the described method, it is needed to apply constraints on the signs of the values of these coordinates depending on the desired position since the expressions include absolute value functions and trigonometric functions, which are not unambiguous.

Keywords: manipulator; trajectory planning; analytical solution; inverse kinematics problem; generalized coordinates.

BRATCHIKOV Stepan Artemievich (Post-graduate Student of the Control Systems and Robotics Faculty, ITMO University, Saint-Petersburg, Russian Federation).

E-mail: Loross90@gmail.com

ABRAMOVA Evgenia Aleksandrovna (Post-graduate Student of the Software Engineering and Computer Systems Faculty, ITMO University, Saint-Petersburg, Russian Federation).

E-mail: vectra4444@mail.ru

FEDOSOV Yurii Valerievich (Associate Professor, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Control Systems and Robotics Faculty, ITMO University, Saint-Petersburg, Russian Federation).

E-mail: yf01@yandex.ru

REFERENCES

1. Munasinghe, S.R. & Nakamura, M. (2006) Trajectory Planning and Control of Industrial Robot Manipulators. In: Cubero, S. (ed.) *Industrial Robotics: Theory, Modelling and Control*. Pro Literatur Verlag. pp. 335–348.
2. Kabir, A.M., Shah, B.C. & Gupta, S.K. (2018) Trajectory planning for manipulators operating in confined workspaces. *Proceedings IEEE 14th International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*. August. pp. 84–91.
3. Dantam, N.T. (2020) Robust and efficient forward, differential, and inverse kinematics using dual quaternions. *The International Journal of Robotics Research*. 4(40). pp. 1–21. DOI: 10.1177/0278364920931948
4. Chen, L., Zielinska, T., Wang, J. & Ge, W. (2020) Solution of an inverse kinematics problem using dual quaternions. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*. 30(2). pp. 351–361. DOI: 10.34768/amcs-2020-0027
5. Zhao, Z., Wang, T. & Wang, D. (2017) Inverse kinematic analysis of the general 6R serial manipulators based on unit dual quaternion and Dixon resultant. *Proceedings 2017 Chinese Automation Congress (CAC)*. pp. 2646–2650.
6. Srisuk, P., Sento, A. & Kitjaidure, Y. (2017) Inverse kinematics solution using neural networks from forward kinematics equations. *Proceedings 2017 9th International Conference on Knowledge and Smart Technology (KST)*. pp. 61–65.
7. Kelemen, M., Virgala, I., Lipták, T., Miková, E., Filakovský, F. & Bulej, V. (2018) A novel approach for a inverse kinematics solution of a redundant manipulator. *Applied Sciences*. 8(11). pp. 9–10. DOI: 10.3390/app8112229
8. Tian, X., Xu, Q. & Zhan, Q. (2021) An analytical inverse kinematics solution with joint limits avoidance of 7-DOF anthropomorphic manipulators without offset. *Journal of the Franklin Institute*. 358(2). pp. 1252–1272. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2020.11.020
9. Wang, M., Luo, J., Fang, J. & Yuan, J. (2018) Optimal trajectory planning of free-floating space manipulator using differential evolution algorithm. *Advances in Space Research*. 61(6). pp. 1525–1536. DOI: 10.1016/j.asr.2018.01.011
10. Sciavicco, L. & Siciliano, B. (2000) *Modelling and control of robot manipulators*. London: Springer Science & Business Media.

УДК 681.5

DOI: 10.17223/19988605/56/2

А.Н. Паршуков

МЕТОД СИНТЕЗА МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА

Разработан метод синтеза модального регулятора пониженного порядка. Данный метод основан на редуцировании исходной модели объекта управления, т.е. выделении в модели объекта доминирующей динамики и структурных возмущений, и последующем синтезе модального регулятора по классической схеме. Эффективность метода проиллюстрирована примером.

Ключевые слова: редуцированная модель объекта управления; доминирующая динамика; структурные возмущения; модальный регулятор полного порядка; модальный регулятор пониженного порядка.

В литературе, посвященной вопросам синтеза систем автоматического управления, чаще всего подразумевается синтез ПИ- и ПИД-законов регулирования (см., напр.: [1–3]). В этом смысле ПИД-законы регулирования именуются традиционными. Такое внимание к ним объясняется прежде всего тем, что до недавнего времени ПИД-регуляторы были единственными регуляторами, выпускаемыми промышленностью. ПИД-регуляторы доказали свою эффективность при управлении объектами, которые хорошо описываются дифференциальными уравнениями до 2-го порядка включительно. Однако, с одной стороны, интенсивное использование средств информатики и цифровой автоматики (микропроцессорных контроллеров, SCADA-систем и т.п.) при управлении технологическими процессами в промышленности позволяет перейти от традиционных ПИ- и ПИД-законов регулирования к более сложным, например модальным. С другой стороны, все большее число технологических процессов (объектов управления) описывается дифференциальными уравнениями высокого (начиная с 3-го) порядка [4–7]. Для объектов управления высокого порядка регулировочных возможностей ПИД-регулятора может быть недостаточно: очевидно, что повышая порядок модели объекта, следует адекватно повышать порядок регулятора.

Метод модального управления, изложенный в работах [8–10], позволяет синтезировать регулятор для объектов управления произвольного порядка; данный метод предполагает, что объект управления описывается линейным дифференциальным уравнением n -го порядка (n – любое целое неотрицательное число) без запаздывания. Модальный регулятор ищется также в виде линейного дифференциального уравнения. Качество управления задается в виде области S на комплексной плоскости, определяющей желаемое расположение полюсов передаточной функции замкнутой системы. В книге [9] доказано, что модальный регулятор порядка $n - 1$ и выше обеспечивает любое заданное расположение полюсов передаточной функции замкнутой системы и тем самым гарантирует устойчивость и заданные корневые показатели качества для замкнутой системы. Регулятор $(n - 1)$ -го порядка в работе [9] предложено называть модальным регулятором полного порядка.

В настоящей статье рассматривается задача понижения порядка модального регулятора. Данная задача является актуальной: понижение порядка регулятора позволит снизить влияние возможных ошибок при реализации закона регулирования, повысит надежность замкнутой системы (за счет понижения порядка замкнутой системы), и позволит экономить вычислительные ресурсы при расчете регулятора. Самым простым способом понижения порядка регулятора является редукция (упрощение) исходной модели объекта управления. Методам редукции посвящено значительное число публикаций (см., напр.: [11–14]); такие методы подразумевают разделение быстрых и медленных движе-

ний системы. В данной работе на основе подобного разделения динамик в объекте управления разработан метод обоснованного понижения порядка модального регулятора.

Далее приняты следующие обозначения: $=$ – равно по определению; $*$ – комплексное сопряжение; j – мнимая единица; R^n , C^n – пространства n -мерных векторов $x \doteq (x_1, \dots, x_n)$, коэффициенты которых соответственно вещественные или мнимые числа; s – комплексная переменная; S – область на C^1 ; ∂S – граница области S ; $\text{int } S$ – внутренняя часть области S ; t – непрерывное время; p^i – оператор i -й степени дифференцирования по времени:

$$p^i \doteq d^i/dt^i; \quad i \in \overline{0, n}, \quad p^0 \doteq 1.$$

Полиномиальным оператором степени l будем называть дифференциальный оператор вида

$$f(l, p) = \sum_{i=0}^l f_i p^i,$$

где f_i – постоянные коэффициенты ($i \in \overline{0, l}$). В изображениях по Лапласу оператору $f(l, p)$ соответствует алгебраический полином

$$f(l, s) = \sum_{i=0}^l f_i s^i,$$

определенный на C^1 ; здесь за s обозначена переменная преобразования Лапласа ($s \in C^1$).

Множество корней (нулей) полинома $f(l, s)$ будем обозначать $\Lambda(f)$:

$$\Lambda(f) \doteq \{ \lambda_i : f(l, \lambda_i) = 0, \quad i \in \overline{1, l} \}.$$

Передаточную функцию далее будем сокращенно записывать как ПФ.

1. Метод понижения порядка модального регулятора

1.1. Постановка задачи синтеза регулятора пониженного порядка

Пусть одномерный линейный стационарный динамический объект управления задан дифференциальным уравнением n -го порядка

$$a(n, p)y(t) = b(m, p)u(t), \quad n \geq m,^1 \quad (1)$$

где $y(t)$ – управляемая переменная (выходной сигнал), $u(t)$ – управляющая переменная (входной сигнал). Модальный регулятор ищется в виде дифференциального уравнения l -го порядка

$$\beta(l, p)u(t) = \alpha(l, p)y(t) + \chi(q, p)g(t), \quad l \geq q,^2 \quad \beta_l = 1, \quad (2)$$

где $g(t)$ – входной сигнал для замкнутой системы (рис. 1).

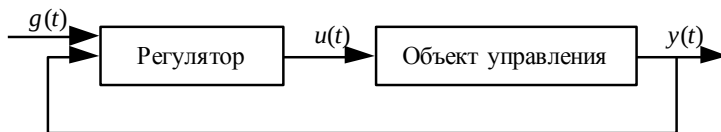


Рис. 1. Структурная схема замкнутой системы управления
Fig. 1. Block diagram of a closed control system

Уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$a^{c.l.}(n+l, p)y(t) = b^{c.l.}(m+q, p)g(t), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} a^{c.l.}(n+l, p) &= a(n, p)\beta(l, p) - b(m, p)\alpha(l, p), \\ b^{c.l.}(m+q, p) &= b(m, p)\chi(q, p). \end{aligned}$$

¹ Условие физической реализуемости математической модели объекта управления.

² Условие физической реализуемости замкнутой системы.

Уравнению (3) соответствует ПФ замкнутой системы

$$h^{c.l.}(s) = \frac{b(m,s)\chi(q,s)}{a(n,s)\beta(l,s) - b(m,s)\alpha(l,s)},$$

при этом характеристический полином замкнутой системы равен

$$a^{c.l.}(n+l,s) = a(n,s)\beta(l,s) - b(m,s)\alpha(l,s).$$

Качество управления назначается в виде области S , определяющей допустимое расположение полюсов ПФ на C^1 , что может быть записано в виде целевого условия

$$\Lambda(a^{c.l.}) \subset S. \quad (4)$$

Предполагается, что область S удовлетворяет следующим условиям: расположена в ограниченной части C^1 слева от мнимой оси; односвязна; для любой точки $s \in S$ также выполняется $s^* \in S$.

Прежде чем перейти к постановке задачи синтеза, рассмотрим следующие ситуации.

Ситуация 1. Все нули и полюсы ПФ объекта управления расположены внутри области S . В таком случае нет необходимости в синтезе модального регулятора полного порядка; можно показать, что в этом случае регулятор (2) представляет просто коэффициент передачи. Таким образом, в данном случае задачи синтеза динамического регулятора, по существу, нет.

Ситуация 2. Все нули и полюсы ПФ объекта управления расположены в правой части C^1 . В этом случае следует регулировать все моды¹ объекта управления, что, очевидно, можно сделать только регулятором полного порядка.

Ситуация 3. Часть нулей и полюсов ПФ объекта лежат внутри области S , а оставшиеся – вне. Следовательно, регулировке подлежат не все моды объекта, а только те, которые не удовлетворяют заданному целевому условию. Очевидно, что порядок модального регулятора должен определяться количеством «неудовлетворительных» мод объекта.

Таким образом, основанием для понижения порядка модального регулятора служит наличие «удовлетворительных» нулей и полюсов в ПФ объекта. Отметим, что подобные рассуждения ранее рассматривались в литературе [11–14], причем в качестве «неудовлетворительной» выступала так называемая доминирующая динамика², определяющая основные свойства системы и, как правило, подлежащая регулированию.

Исходя из вышеизложенного, можем сформулировать **задачу синтеза модального регулятора пониженного порядка** следующим образом: пусть заданы объект управления (1) и область S такие, что для них справедлива вышеописанная ситуация 3; требуется рассчитать настройки регулятора порядка l ($l < n - 1$) такие, что обеспечивают выполнение условия (4).

1.2. Метод синтеза модального регулятора пониженного порядка

Для удобства дальнейших рассуждений модель объекта управления (1) представим в следующем виде:

$$v(r_1, p)a^r(n_0, p)y(t) = w(r_2, p)b^r(m_0, p)u(t), \\ n_0 \geq m_0, \quad r_1 \geq r_2, \quad v_0 = w_0 = 1^3. \quad (5)$$

В записи (5) явно выделены операторы $v(r_1, p)$ и $w(r_2, p)$, корни которых лежат внутри области S , т.е. выполнены

$$\Lambda(v) \subset \text{int } S, \quad \Lambda(w) \subset \text{int } S. \quad (6)$$

¹ *Модами* называются слагаемые в свободной составляющей реакции системы, эти составляющие зависят от корней ее характеристического полинома [8. С. 5].

² Под *доминирующей динамикой* понимаются те моды, которые вносят наибольший вклад («главные моды») в свободной составляющей реакции системы.

³ Данное условие обеспечивает одинаковый коэффициент передачи моделей (1) и (7).

Пару операторов $\langle v(r_1, p), w(r_2, p) \rangle$ назовем структурными возмущениями. Операторы $\langle a^r(n_0, p), b^r(m_0, p) \rangle$ описывают ту часть объекта управления, которая желаемым качеством управления может не обладать и, следовательно, подлежит регулированию. Далее редуцированную модель

$$a^r(n_0, p)y(t) = b^r(m_0, p)u(t) \quad (7)$$

будем называть доминирующей динамикой объекта.

Модальный регулятор (2) будем рассчитывать по классической схеме синтеза [10. С. 10–14] для редуцированной модели объекта (7). Таким образом, модальный регулятор (2) будет иметь порядок $l = n_0 - 1$ (т.е. пониженный).

При синтезе будем выбирать корни характеристического полинома эталонной системы

$$a^{et}(2n_0 - 1, s) = a^r(n_0, p)\beta(n_0 - 1, p) - b^r(m_0, p)\alpha(n_0 - 1, p)$$

из условия

$$\Lambda(a^{et}) \subset \text{int } S. \quad (8)$$

После замыкания исходной модели объекта (5) синтезированным регулятором уравнение замкнутой системы (3) принимает следующий вид:

$$a^{c.l.}(2n_0 + r_1 - 1, p)y(t) = b^{c.l.}(m_0 + r_2 + q, p)g(t),$$

здесь

$$\begin{aligned} a^{c.l.}(2n_0 + r_1 - 1, p) &= v(r_1, p)a^r(n_0, p)\beta(n_0 - 1, p) - \\ &\quad - w(r_2, p)b^r(m_0, p)\alpha(n_0 - 1, p), \end{aligned} \quad (9)$$

$$b^{c.l.}(m_0 + r_2 + q, p) = w(r_2, p)b^r(m_0, p)\chi(q, p).$$

Выполняя в (9) несложные преобразования, получим следующее выражение для характеристического полинома замкнутой системы:

$$a^{c.l.}(2n_0 + r_1 - 1, s) = v(r_1, s)a^{et}(2n_0 - 1, s) - (v(r_1, s) - w(r_2, s))b^r(m_0, s)\alpha(n_0 - 1, s). \quad (10)$$

Из условий (6) и (8) следует, что корни первого слагаемого в (10) лежат внутри области S . Второе слагаемое в (10) вносит тем больший вклад, чем дальше отстоят корни полиномов $v(r_1, p)$ и $w(r_2, p)$. В частности, при $v(r_1, p) \equiv w(r_2, p)$ второе слагаемое в (10) обратится в ноль и корни полинома (10) гарантированно будут находиться внутри S .

Замечание. Существование регулятора заданного порядка l ($l < n - 1$), для которого гарантированно выполняется целевое условие (4), не доказано, поэтому после расчета регулятора по схеме (5)–(9) необходимо проверить выполнение условия (4). В том случае, если условие (4) для замкнутой системы не выполняется, рекомендуется:

1) попробовать выбрать другой характеристический полином эталона a^{et} (выбор полинома a^{et} ограничен условием (8));

2) повысить порядок l регулятора, для этого часть корней полиномов структурных возмущений следует отнести к полиномам доминирующей динамики.

Очевидно, что описанная процедура позволит найти модальный регулятор пониженного порядка (если он существует) или приведет к модальному регулятору полного порядка.

2. Пример синтеза модального регулятора пониженного порядка

Объект управления задан дифференциальным уравнением

$$a(3, p)y(t) = b(2, p)u(t), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} a(3, p) &= (s + 21)(s + 3)(s - 2) = p^3 + 22p^2 + 15p - 126, \\ b(2, p) &= 10(s + 20)(s + 6) = 10p^2 + 260p + 1200. \end{aligned}$$

Требования к качеству управления замкнутой системой заданы в виде области

$$S = \{s : \eta_2 \leq -\operatorname{Re}(s) \leq \eta_1, \quad |\operatorname{Im}(s_i)/\operatorname{Re}(s_i)| \leq \zeta_1\} \subset C^1,$$

где $\eta_1 = 25$, $\eta_2 = 2$, $\zeta_1 = 1$. Область S на комплексной плоскости расположена в левой полуплоскости, имеет трапецевидную форму и удовлетворяет всем вышеперечисленным требованиям. Параметр η_2 определяет допустимый запас устойчивости, а ζ_1 – допустимую колебательность.

Для сравнения рассчитаем модальные регуляторы полного и пониженного порядков. Отметим, что точка $(-\omega_0; 0j)$, где $\omega_0 = 5$, находится внутри области S . При расчетах характеристический полином эталонной системы будем назначать по биномиальной схеме [8. С. 6] с параметром $\omega_0 = 5$.

1. Синтез регулятора полного порядка. Регулятор полного порядка ищется на классе дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\ddot{u}(t) + \beta_1 \dot{u}(t) + \beta_0 u(t) = \alpha_2 \ddot{y}(t) + \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) + \chi_0 g(t). \quad (12)$$

Характеристический полином эталонной системы:

$$a^{et}(5, s) = (s + \omega_0)^5 = s^5 + 25s^4 + 250s^3 + 1250s^2 + 3125s + 3125.$$

В соответствии с изложенной в [10. С. 10–14] схемой синтеза модального регулятора нахождение коэффициентов регулятора (12) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (13)$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ – соответственно матрица и вектор, составленные из коэффициентов операторов $a(3, p)$ и $b(2, p)$ объекта управления и характеристического полинома эталона $a^{et}(5, s)$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & -b_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & -b_1 & -b_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & -b_2 & -b_1 & -b_0 \\ a_3 & a_2 & 0 & -b_2 & -b_1 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & -b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -126 & 0 & -1200 & 0 & 0 \\ 15 & -126 & -260 & -1200 & 0 \\ 22 & 15 & -10 & -260 & -1200 \\ 1 & 22 & 0 & -10 & -260 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_0^{et} \\ a_1^{et} \\ a_2^{et} - a_0 \\ a_3^{et} - a_1 \\ a_4^{et} - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3125 \\ 3125 \\ 1376 \\ 235 \\ 3 \end{pmatrix},$$

а $\mathbf{x} = (\beta_0; \beta_1; \alpha_0; \alpha_1; \alpha_2)^T$ – вектор коэффициентов регулятора.

Решая систему уравнений (13), получаем

$$\mathbf{x} = (990,2; 171,0; -106,6; 14,9; 16,8)^T.$$

Таким образом, регулятор полного порядка

$$\ddot{u}(t) + 171,0\dot{u}(t) + 990,2u(t) = 16,8\ddot{y}(t) + 14,9\dot{y}(t) - 106,6y(t) + \chi_0 g(t).$$

2. Синтез регулятора пониженного порядка. Объект управления (11) представим в виде:

$$v(1, p)a^r(2, p)y(t) = w(1, p)b^r(1, p)u(t), \quad (14)$$

здесь

$$v(1, p) = (p + 21)/21, \quad w(1, p) = (p + 20)/20,$$

$$a^r(2, p) = p^2 + 1p - 6, \quad b^r(1, p) = 9,5p + 57,1.$$

Для редуцированной модели

$$a^r(2, p)y(t) = b^r(1, p)u(t),$$

модальный регулятор будем искать на классе дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\dot{u}(t) + \beta_0 u(t) = \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) + \chi_0 g(t). \quad (15)$$

Характеристический полином эталонной системы

$$a^{et}(3, s) = (s + \omega_0)^3 = s^3 + 15s^2 + 75s + 125.$$

Расчет коэффициентов регулятора (15) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (16)$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ – матрица и вектор, составленные из коэффициентов операторов $a^r(2, p)$ и $b^r(1, p)$ редуцированной модели и характеристического полинома эталона $a^{et}(3, s)$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0^r & -b_0^r & 0 \\ a_1^r & -b_1^r & -b_0^r \\ a_2^r & 0 & -b_1^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -57,1 & 0 \\ 1 & -9,5 & -57,1 \\ 1 & 0 & -9,5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_0^{et} \\ a_1^{et} - a_0^r \\ a_2^{et} - a_1^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \\ 81 \\ 14 \end{pmatrix},$$

а $\mathbf{x} = (\beta_0; \alpha_0; \alpha_1)^T$ – вектор коэффициентов регулятора (15).

Решая систему уравнений (16), получаем

$$\mathbf{x} = (6,00; -2,82; -0,85)^T.$$

Таким образом, регулятор пониженного порядка

$$\dot{u}(t) + 6,00u(t) = -2,82\dot{y}(t) - 0,85y(t) + \chi_0 g(t). \quad (17)$$

После замыкания исходного объекта управления (14) регулятором (17) получим следующий характеристический полином замкнутой системы

$$a^{c.l.}(4, s) = 0,047s^4 + 1,713s^3 + 18,21s^2 + 78,56s + 123,9,$$

или, в унитарном виде,

$$a^{c.l.}(4, s) = s^4 + 36,42s^3 + 394,3s^2 + 1710s + 2628.$$

Корни характеристического уравнения замкнутой системы

$$s_{1,2} = -4,61 \pm j 0,55, \quad s_3 = -5,67, \quad s_4 = -21,5$$

лежат внутри заданной области S . Корневые показатели качества замкнутой системы $\eta = 4,61$, $\zeta = 0,12$ несколько лучше заданных допустимых значений $\eta_2 = 2$, $\zeta_1 = 1$.

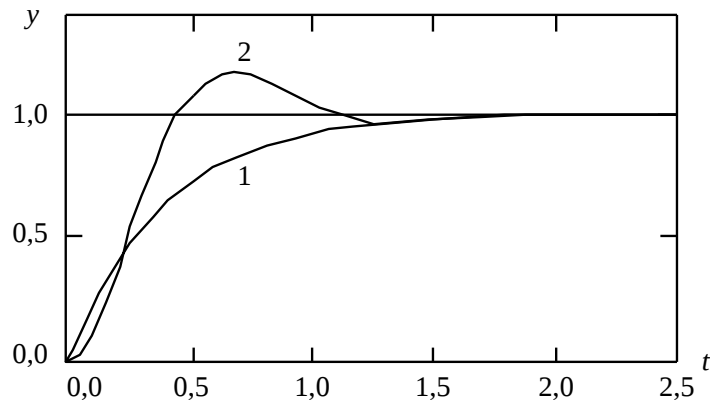


Рис. 2. Переходные процессы в замкнутых системах: график 1 соответствует регулятору полного порядка, график 2 – регулятору сокращенного порядка

Fig. 2. Transients in closed systems: graph 1 corresponds to a full-order regulator, graph 2 to a reduced-order regulator

На рис. 2 показаны переходные процессы в замкнутых системах. Для первого графика перерегулирование $\sigma = 0\%$, время реакции $t_P = 1,5$, для второго – $\sigma = 17,5\%$ и $t_P = 1,5$.

Заключение

В статье разработан метод обоснованного понижения порядка модального регулятора. Данный метод опирается на разделение мод объекта управления по отношению к цели управления на «доми-

нирующую динамику» (подлежащую регулированию) и «структурные возмущения» (уже удовлетворяющие цели управления и поэтому не учитываемые при синтезе регулятора). Расчет модального регулятора пониженного порядка сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, что позволяет реализовать его на ЭВМ. Эффективность метода проиллюстрирована примером. Предложенный в настоящей работе подход к понижению порядка одномерного регулятора допускает обобщение и на многомерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Г., Паленов М.В. Самонастраивающийся ПИД/И-регулятор // Автоматика и телемеханика. 2011. № 10. С. 4–18.
2. Александров А.Г., Паленов М.В. Состояние и перспективы развития адаптивных ПИД-регуляторов // Автоматика и телемеханика. 2014. № 2. С. 16–30.
3. Бураков М.В., Коновалов А.С. Нечеткий супервизор ПИД-регулятора // Информационно-управляющие системы. 2018. № 5 (96). С. 13–21.
4. Абрамкин С.Е., Душин С.Е. Математическое моделирование управляемых технологических процессов осушки природного газа // Информационно-управляющие системы. 2015. № 4 (77). С. 41–49.
5. Грудяева Е.К., Душин С.Е. Логико-динамическое управление биохимическими процессами очистки сточных вод // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2015. № 7 (168). С. 208–219.
6. Брикова О.И., Душин С.Е. Анализ влияния внешних факторов на процессы биологической очистки в моделях нитрификации и денитрификации // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2018. № 5 (199). С. 79–88.
7. Брикова О.И., Душин С.Е. Исследование влияния температуры среды на биологические процессы в моделях типа ASM1 // Известия Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина). 2019. № 5. С. 144–148.
8. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М. : Машиностроение, 1976. 184 с.
9. Соловьев И.Г. Методы мажоризации в анализе и синтезе адаптивных систем. Новосибирск : Наука, 1992. 191 с.
10. Паршуков А.Н. Методы синтеза модальных регуляторов. Тюмень : ТюмГНГУ, 2009. 84 с.
11. Воропаева Н.В., Соболев В.А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. М. : Физматлит, 2009. 255 с.
12. Воропаева Н.В., Соболев В.А. Декомпозиция линейно-квадратичной задачи оптимального управления с быстрыми и медленными переменными // Автоматика и телемеханика. 2006. № 8. С. 3–11.
13. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
14. Kokotovic P.V., Khalil H.K., O'Reilly J. Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design. New York : Academic Press, 1986. 371 p.

Поступила в редакцию 11 марта 2021 г.

Parshukov A.N. (2021) METHOD OF SYNTHESIS OF A REDUCED-ORDER MODAL REGULATOR. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 56. pp. 12–19

DOI: 10.17223/19988605/56/2

In the literature devoted to the synthesis of automatic control systems, in the vast majority of cases, the synthesis of PI- and PID-laws of regulation is implied. In this sense, the PID-laws of regulation are called traditional. Such attention to them is primarily due to the fact that until recently, PID-regulators were the only regulators produced by the industry. PID-regulators have proven their effectiveness in controlling objects that are well described by differential equations up to and including the 2nd order. However, on the one hand, the intensive use of computer science and digital automation tools (microprocessor controllers, SCADA systems, etc.) in the control of technological processes in industry allows us to move from traditional PI- and PID-laws of regulation to more complex, for example, modal ones. On the other hand, an increasing number of technological processes (control objects) are described by high-order differential equations (starting from the 3rd). For high-order control objects, the adjustment capabilities of the PID-regulator may not be enough: it is obvious that by increasing the order of the object model, it is necessary to adequately increase the order of the controller.

The modal control method allows you to synthesize a regulator for control objects of any order; this method assumes that the control object is described by a linear differential equation of the n th order (where n is any non-negative integer) without delay. The modal regulator is also sought in the form of a linear differential equation. The control quality is defined as a region S on the complex plane that determines the desired location of the poles of the transfer function of a closed system. It has been repeatedly proved in the literature that a modal regulator of the order $n-1$ and higher provides any given location of the poles of the transfer

function of a closed system, and thereby guarantees stability and specified root quality indicators for a closed system. The n -1st order regulator is called a full-order modal regulator.

In this article, the problem of lowering the order of the modal regulator is considered. This task is relevant: lowering the order of the regulator will reduce the impact of possible errors in the implementation of the law of regulation, increase the reliability of a closed system (by lowering the order of a closed system), and will save computing resources when calculating the regulator. The article develops a method for justifiably lowering the order of the modal regulator. The method is based on the simplification (reduction) of the original model of the control object and the subsequent synthesis of a simpler regulator. In the reduced model, all the main properties of the original model are preserved: the transmission coefficient, stability and control quality indicators. For this purpose, the modes of the initial model are divided into "dominant dynamics" (subject to regulation) and "structural disturbances" (already satisfying the control goals, and therefore not taken into account when synthesizing the regulator). As a result, the calculation of a modal regulator of a reduced order is reduced to the solution of a system of linear algebraic equations, which allows it to be implemented on a computer. The effectiveness of the method is illustrated by an example.

The approach proposed in this paper to lowering the order of a one-dimensional regulator allows generalization to the multidimensional case.

Keywords: reduced model of the control object; dominant dynamics; structural disturbances; full-order modal controller; reduced-order modal controller.

PARSHUKOV Andrej Nikolaevich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Federal State Budget Educational Institution of Higher Education «Industrial University of Tyumen», Tyumen, Russian Federation).

E-mail: anparshukov@mail.ru

REFERENCES

1. Aleksandrov, A.G. & Palenov, M.V. (2011) Self-Tuning PID/I Controller. *Avtomatika i tele-mekhanika – Automation Remote Control*. 72(10). pp. 2010–2022.
2. Aleksandrov, A.G. & Palenov, M.V. (2014) The state and prospects of development of adaptive PID-regulators. *Avtomatika i tele-mekhanika – Automation Remote Control*. 2. pp. 16–30.
3. Burakov, M.V. & Konovalov, A.S. (2018) Fuzzy supervisor for PID controller. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy – Information and Control Systems*. 5(96). pp. 13–21. DOI: 10.31799/1684-8853-2018-5-13-21
4. Abramkin, S.E. & Dushin, S.E. (2015) Mathematical modeling of controlled technological processes of natural gas drying. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy – Information and Control Systems*. 4(77). pp. 41–49.
5. Grudyaeva, E.K. & Dushin, S.E. (2015) Logical and dynamic management of biochemical processes of wastewater treatment. *Izvestiya Yuzhnogo federal'nogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*. 7(168). pp. 208–219.
6. Brikova, O.I. & Dushin, S.E. (2018) Analysis of the influence of external factors on biological purification processes in nitrification and denitrification models. *Izvestiya Yuzhnogo federal'nogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*. 5(199). pp. 79–88.
7. Brikova, O.I. & Dushin, S.E. (2019) Investigation of the influence of ambient temperature on biological processes in models of the type ASM1. *Izvestiya Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo elektrotekhnicheskogo universiteta "LETI" im. V.I. Ul'yanova (Lenina)*. 5. pp. 144–148.
8. Kuzovkov, N.T. (1976) *Modal'noe upravlenie i nablyudayushchie ustroystva* [Modal Control and Monitoring Devices]. Moscow: Mashinostroenie.
9. Soloviev, I.G. (1992) *Metody mazhorizatsii v analize i sinteze adaptivnykh sistem* [Methods of Majorization in the Analysis and Synthesis of Adaptive Systems]. Novosibirsk: Nauka.
10. Parshukov, A.N. (2009) *Metody sinteza modal'nykh regulyatorov* [Methods of Synthesis of Modal Regulators]. Tyumen: TyumNGU.
11. Voropaeva, N.V. & Sobolev, V.A. (2009) *Geometricheskaya dekompozitsiya singulyarno vozmushchennykh sistem* [Geometric Decomposition of Singularly Perturbed Systems]. Moscow: Fizmatlit.
12. Voropaeva, N.V. & Sobolev, V.A. (2006) Decomposition of a linear-quadratic optimal control problem with fast and slow variables. *Automation Remote Control*. 67(8). pp. 1185–1193.
13. Dmitriev, M.G. & Kurina, G.A. (2006) Singular perturbations in control problems. *Automation Remote Control*. 67(1). pp. 1–43.
14. Kokotovic, P.V., Khalil, H.K. & O'Reily, J. (1986) *Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design*. New York: Academic Press.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 004.942

DOI: 10.17223/19988605/56/3

С.Н. Калашников, Е.А. Мартусевич, Е.В. Мартусевич, В.Н. Буинцев

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕЙСТВУЮЩЕГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ АЛЮМИНИЕВОГО РАСПЛАВА В МИКСЕРЕ ЛИТЕЙНОГО ОТДЕЛЕНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-37-90087\19.

Рассматривается задача математического моделирования действующего процесса изготовления алюминиевых сплавов для осуществления непрерывного мониторинга основных технологических параметров, определяющих формирование требуемого химического состава алюминиевого расплава в миксере литейного отделения. Разработаны соответствующие математические модели, в частности модель материально-теплого баланса взаимодействующих веществ, а также модель динамики, характеризующая последовательный процесс модификации алюминиевого расплава, представленная в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно масс исходного алюминия-сырца в литейных ковшах.

Ключевые слова: математическая модель; вычислительный эксперимент; технологический процесс; алюминиевый расплав; параметры смешивания.

В настоящее время одной из наиболее ресурсоемких и стратегически важных отраслей промышленности является производство алюминиевых сплавов, обладающих различными физико-химическими характеристиками. Данная тенденция обусловлена возросшими запросами общества к использованию качественных материалов с высокими эксплуатационными свойствами, отвечающих современным экологическим требованиям. Стало быть, совершенствование действующей технологии производства алюминиевых сплавов является перспективной и актуальной задачей в связи с отсутствием комплексного подхода к рационализации установившихся технологических процессов, а также с учетом избыточного количества циклов модификации алюминиевого расплава в плавильном миксере. Так, неточность эмпирических методов расчета, направленных на определение корректных значений параметров смешивания исходного алюминия-сырца из литейных ковшей, или ошибочные управляющие воздействия технологического персонала непосредственно приводят к снижению производительности литейного отделения, а также способствуют повышению себестоимости готовой продукции и изменению плановых сроков выполнения производственного плана.

Для решения соответствующих технологических задач требуется использование средств математического моделирования и инструментов информатизации, что не только позволяет проводить неограниченное количество вычислительных экспериментов с использованием компьютерной техники, но и определяет возможность визуализации статических или динамических характеристик исследуемого объекта [1]. Как следствие, применение данного подхода способствует результативному управлению основными аспектами выбранного технологического процесса, что предопределяет эффективное достижение заданных физико-химических характеристик алюминиевого расплава, а также позволяет обеспечить возможность повышения уровня квалификации технологического персонала с учетом исходных наборов технологических данных и различных ограничений [2].

Математическое моделирование является универсальным инструментом для исследования сложных многопараметрических систем, к которым также относится и процесс формирования алюминиевого расплава в плавильном миксере. Моделирование обеспечивает математическое подобие исследуемых характеристик реального процесса или явления на основе вновь разработанных моделей, что способствует наиболее точному познанию природы выбранных объектов при проведении серии экспериментальных исследований [3]. Из этого следует, что замена основных характеристик исследуемого объекта или процесса адекватными моделями относится к общенаучным методам естественного познания с использованием эмпирических и теоретических уровней исследования. Так, основными отличительными преимуществами математического моделирования по сравнению с другими альтернативными видами моделирования считаются следующие особенности: возможность моделирования объектов любого происхождения; тестирование стандартных и нестандартных режимов работы объекта; точная масштабируемость исследуемых процессов во времени; проведение многофакторного анализа; прогнозирование общих и скрытых закономерностей объектов [4–6].

Действительно, развитие информационных технологий предопределяет необходимость тесного взаимодействия разработанных математических моделей объектов и современных электронно-вычислительных средств. Вместе с использованием высокоуровневых объектно-ориентированных языков программирования компьютерное моделирование является одним из наиболее эффективных методов изучения сложных технологических систем за счет осуществления численной реализации соответствующих математических моделей с учетом различных входных и выходных сигналов, что позволяет производить интерпретацию и сопоставление полученных результатов моделирования с реальным поведением исследуемого объекта [7]. При этом в зависимости от выбранных объектов познания, а также с учетом того, при каких обстоятельствах реализуется способность моделей полноценно отражать действительное соответствие исследуемых характеристик, существуют различные разновидности математических моделей, например эталонные, управленческие, регистрирующие, оптимизационные, балансовые, имитационные, статические, динамические [8, 9].

Также важно, что для исследования динамических процессов и непрерывного анализа переходных режимов работы объекта используются детально настраиваемые компьютерные модели, построенные на основе системы дифференциальных уравнений. Тем самым широкое использование возможностей математического моделирования является современным и наиболее комплексным подходом для разработки новых и оптимизации действующих технологических систем с целью достижения новых практических результатов научно-исследовательской деятельности.

1. Математическая модель технологического процесса на основе производственных данных

Для осуществления математического моделирования исследуемого технологического процесса, а также проведения соответствующих результативных вычислительных экспериментов необходимо разработать математическую модель процесса формирования алюминиевого расплава в плавильном миксере, которая, в свою очередь, состоит из уравнений теплового и материального балансов [10–13]. Общий вид уравнения теплового баланса для формируемого расплава в миксере имеет вид:

$$Q_{\text{распл}} = \sum_{i=1}^N Q_i, \quad (1)$$

где Q_i – приходно-расходные статьи теплового баланса, Дж.

Уравнения материального баланса построены на основе закона сохранения масс применительно к гетерогенной системе. Далее представлены уравнения, описывающие массовый баланс газовых потоков и физических веществ. Общее уравнение материального баланса вход-выходных газовых потоков в миксере имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{K_{\text{конд}}} G_k^{\text{конд}} + \sum_{k=1}^{K_{\text{газ}}} G_k^{\text{газ}} = \sum_{l=1}^{L_{\text{конд}}} G_l^{\text{конд}} + G^{\text{газ}}, \quad (2)$$

где $K^{\text{конд}}$, $K^{\text{газ}}$ – количество конденсированных и газообразных входных потоков, ед.; $G^{\text{конд}}_k$, $G^{\text{газ}}_k$ – массовые расходы конденсированных и газообразных входных потоков, кг/с; $G^{\text{конд}}_l$ – массовый расход l -го конденсированного выходного потока, кг/с; $G^{\text{газ}}$ – массовый расход газообразного выходного потока, кг/с; $L^{\text{конд}}$ – количество конденсированных выходных потоков, ед.

Входные конденсированные потоки веществ состоят из соответствующих потоков в виде периодических поступлений алюминиевого расплава из набора K ковшей, а также потока подачи лигатур с массовым расходом $G^{\text{газ}}$ и потока подачи флюсов с массовым расходом $G^{\text{фл}}$, т.е. $K^{\text{конд}} = K + 2$. В таком случае формируется единственный выходной конденсированный поток веществ.

На основе выходного потока осуществляется разливка полученного расплава алюминия с массовым расходом $G^{\text{распл}}$. Входной газообразный поток является единственным, поэтому через него / в расплав миксера поступают газовые включения кислорода и водорода с массовым расходом $G^{\text{газ}}_{\text{вх}}$.

Кроме этого, газовые включения могут содержаться в оставшемся расплаве после предшествующей плавки с массовым содержанием $G^{\text{газ}}_0$. Выходной газообразный поток также остается единственным и имеет массовый расход $G^{\text{газ}}_{\text{вых}}$.

Уравнение итогового материального баланса имеет следующий вид:

$$\sum_{k=1}^K G^{\text{конд}}_k + G^{\text{газ}}_{\text{вх}} + G^{\text{лиг}} + G^{\text{фл}} = G^{\text{газ}}_{\text{вых}} + G^{\text{распл}}. \quad (3)$$

Вместе с тем важной сопутствующей задачей является разработка математической модели динамики формирования алюминиевого расплава в плавильном миксере при добавлении в него жидкого алюминия-сырца из i -го литейного ковша, поступающего из электролизного цеха с некоторым интервалом времени. При этом интенсивность истечения исходной массы алюминия-сырца из выбранного i -го литейного ковша определяется соответствующей математической моделью, представленной в виде задачи Коши [14] для системы дифференциальных уравнений относительно массовых концентраций компонентов формируемого алюминиевого расплава в плавильном миксере:

$$\begin{cases} v^i = \frac{dm^i}{d\tau} = -\gamma m^i, \\ v^M = \frac{dm^M}{d\tau} = \gamma(m_0^M + m_0^i - m^M), \\ m^i(0) = m_0^i, \\ m^M(0) = m_0^M, \end{cases} \quad (4)$$

где m^i – масса расплава в i -м ковше, кг; m_0^i – начальная масса расплава в i -м ковше, кг; m^M – масса расплава в миксере, кг; m_0^M – начальная масса расплава в миксере, кг; v^i – скорость расхода массы (истечения) расплава в ковше, кг/с; v^M – скорость прироста массы расплава в миксере, кг/с; γ – коэффициент пропорциональности, характеризующий интенсивность уменьшения массы алюминиевого расплава, 1/с.

При этом $v^M = -v^i$, что соответствует соотношению

$$\gamma(m_0^M + m_0^i - m^M) = -(-\gamma m^i), \text{ т.е. } m^M - m_0^M = m_0^i - m^i. \quad (5)$$

В результате преобразований получается, что прирост массы расплава в миксере равен расходу массы каждого элемента содержимого расплава из i -го литейного ковша в любой момент времени. Данный эффект изображен на рис. 1.

Ниже представлен общий вид задачи Коши для основных элементов химического состава алюминиевого расплава, характеризующий скорость изменения масс этих элементов при смешивании в плавильном миксере:

$$\begin{cases} \frac{dm^M_X}{d\tau} = \gamma(m^M_{X_0} + m^i_{X_0} - m^M_X), \\ m^M_X(0) = m^M_{X_0}. \end{cases} \quad (6)$$

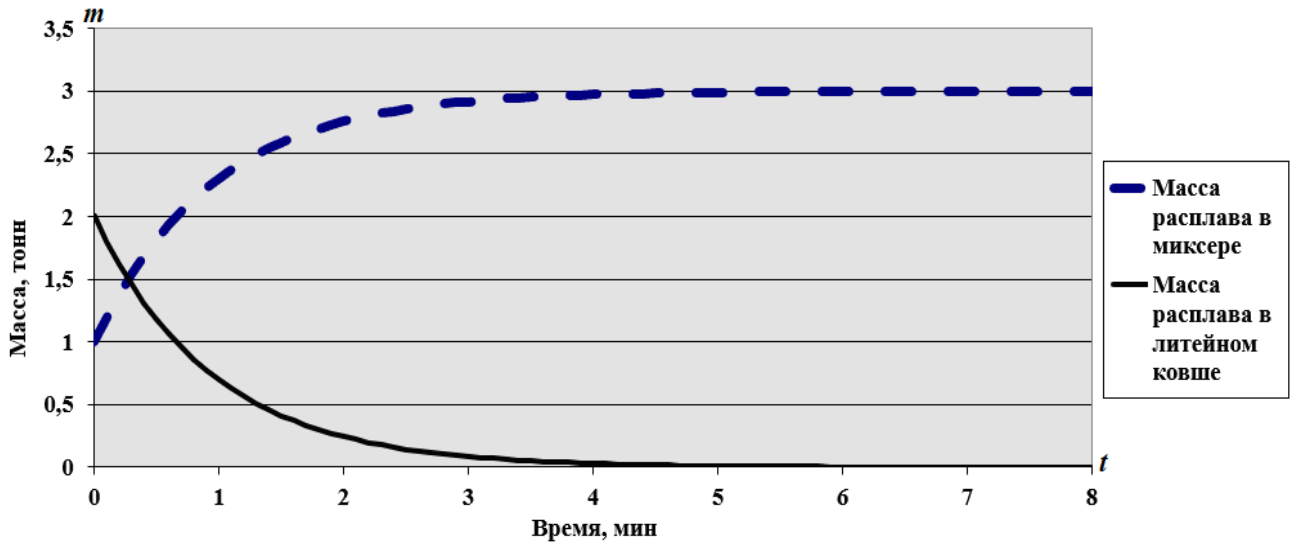


Рис. 1. Динамика формирования расплава в миксере при добавлении содержимого из i -го литейного ковша
 Fig. 1. Dynamics of melt formation in the mixer when adding content from the i -th casting ladle

Задача Коши (6) для каждого химического элемента в плавильном миксере имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dm_{Fe}^M}{d\tau} = \gamma(m_{Fe_0}^M + m_{Fe_0}^i - m_{Fe}^M), m_{Fe}^M(0) = m_{Fe}^M, \\ \frac{dm_{Si}^M}{d\tau} = \gamma(m_{Si_0}^M + m_{Si_0}^i - m_{Si}^M), m_{Si}^M(0) = m_{Si}^M, \\ \dots \\ \frac{dm_{Sn}^M}{d\tau} = \gamma(m_{Sn_0}^M + m_{Sn_0}^i - m_{Sn}^M), m_{Sn}^M(0) = m_{Sn}^M. \end{cases} \quad (7)$$

Далее представлена задача Коши для основных элементов химического состава алюминиевого расплава, характеризующая скорость изменения масс этих элементов в литейных ковшах:

$$\begin{cases} \frac{dm_X^i}{d\tau} = -\gamma m_X^M, \\ m_X^i(0) = m_{X_0}^i. \end{cases} \quad (8)$$

Задача Коши (8) для каждого химического элемента в литейном ковше имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dm_{Fe}^i}{d\tau} = -\gamma m_{Fe}^M, m_{Fe}^i(0) = m_{Fe_0}^i, \\ \frac{dm_{Si}^i}{d\tau} = -\gamma m_{Si}^M, m_{Si}^i(0) = m_{Si_0}^i, \\ \dots \\ \frac{dm_{Sn}^i}{d\tau} = -\gamma m_{Sn}^M, m_{Sn}^i(0) = m_{Sn_0}^i, \end{cases} \quad (9)$$

где X – химический элемент расплава в плавильном миксере и литейных ковшах из множества $\{Fe, Si, Ti, Al, Cu, Zn, Mn, Mg, Pb, Sn\}$.

В свою очередь, уравнения теплового баланса построены на основе закона сохранения тепловой энергии, что позволяет рассчитывать температуру полученного алюминиевого расплава при смешивании двух различных расплавов с помощью соотношения

$$T_{распл} = \frac{(m_1 t_1 + m_2 t_2)}{(m_1 + m_2)} + \Delta T, \quad (10)$$

где $T_{\text{распл}}$ – рассчитываемая конечная температура расплава, °С; m_1, m_2 – массы исходного и добавляемого расплава, кг; t_1, t_2 – температура исходного и добавляемого расплава, кг; ΔT – приращение температуры за некоторое время τ , °С.

$$\Delta T = \int_0^{\tau} V_{\text{нагр}} d\xi - \int_0^{\tau} V_{\text{охл}} d\xi, \quad (11)$$

где τ – текущее время процесса, с; $V_{\text{нагр}}, V_{\text{охл}}$ – скорости нагрева и охлаждения расплава при включенных или выключенных нагревательных элементах в миксере, °С/с.

Химический состав формируемого алюминиевого расплава высчитывается поэлементно на каждом технологическом шаге при помощи соотношения

$$X_j^{\text{спл}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ji} m_i - \sum_{i=1}^n k_{ij} m_{\text{флюс}}}{m_{\text{микс}}}, \quad (12)$$

где $X_j^{\text{спл}}$ – концентрация j -го химического элемента в алюминиевом сплаве, ед.; x_{ji} – концентрация j -го химического элемента в i -м шихтовом материале, ед.; m_i – масса i -го шихтового материала, кг; k_{ij} – коэффициент удаления массы j -го химического элемента i -м флюсом; $m_{\text{флюс}}, m_{\text{микс}}$ – массы флюса и расплава в миксере, кг.

Значение себестоимости готовой продукции описывается соотношением

$$C_{\text{спл}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \Pi_i + W_{\text{эл}} \Pi_{\text{эл}}}{m_{\text{спл}}} + S_{\text{др}}, \quad (13)$$

где $C_{\text{спл}}$ – себестоимость сплава, руб./кг; m_i – масса i -го шихтового материала, кг; Π_i – цена i -го шихтового материала, руб./кг; $W_{\text{эл}}$ – количество затраченной электроэнергии, кВт; $\Pi_{\text{эл}}$ – цена электроэнергии, руб./кВт; $S_{\text{др}}$ – другие затраты на 1 кг продукции, руб./кг.

Процент выполнения заказа определяется с помощью соотношения

$$\eta_e = \frac{m_{\text{расплава}}}{m_{\text{заказа}}} 100\%, \quad (14)$$

где $m_{\text{заказа}}, m_{\text{расплава}}$ – масса заданного и масса сформированного расплава в миксере, кг.

В итоге вышеописанная математическая структура помогает формализовать описание технологического процесса изготовления алюминиевого расплава в миксере литейного отделения.

2. Интерпретация результатов математического моделирования

В таблице представлены исходные технологические данные, отражающие действительные значения основных элементов химического состава исходных литейных ковшей. На основе этих данных представлен процесс формирования алюминиевого расплава при последовательном смешивании алюминия-сырца из литейных ковшей через промежутки времени $\Delta\tau = \tau_{i+1} - \tau_i$.

Полученные результаты представлены на рис. 2–4 в виде графического отображения для соответствующих значений химических элементов алюминиевого расплава, полученных на основе решения задачи Коши (7).

Исходные технологические данные

№	Масса, кг	Fe	Si	Ti	Al	Cu	Zn	Mn	Mg	Pb	Sn
Ковш 1	4 099	0,143	2,831	0,128	91,385	3,026	0,066	0,023	2,244	0,079	0,075
Ковш 2	2 000	0,841	4,433	0,099	88,308	2,959	1,159	0,068	1,839	0,238	0,056
Ковш 3	4 000	0,069	0,811	0,198	91,409	2,499	2,257	0,051	2,445	0,161	0,10
Ковш 4	3 000	0,081	7,464	0,076	86,829	2,438	2,51	0,087	0,38	0,031	0,104
Ковш 5	1 000	0,706	7,063	0,153	88,042	1,906	0,398	0,004	1,519	0,082	0,127
Ковш 6	4 305	0,001	5,874	0,06	89,643	0,53	2,383	0,037	1,259	0,192	0,021
Ковш 7	1 000	0,797	4,624	0,053	89,295	2,668	1,763	0,087	0,425	0,268	0,02
Ковш 8	3 500	0,476	4,712	0,05	92,156	1,063	0,649	0,068	0,649	0,001	0,176

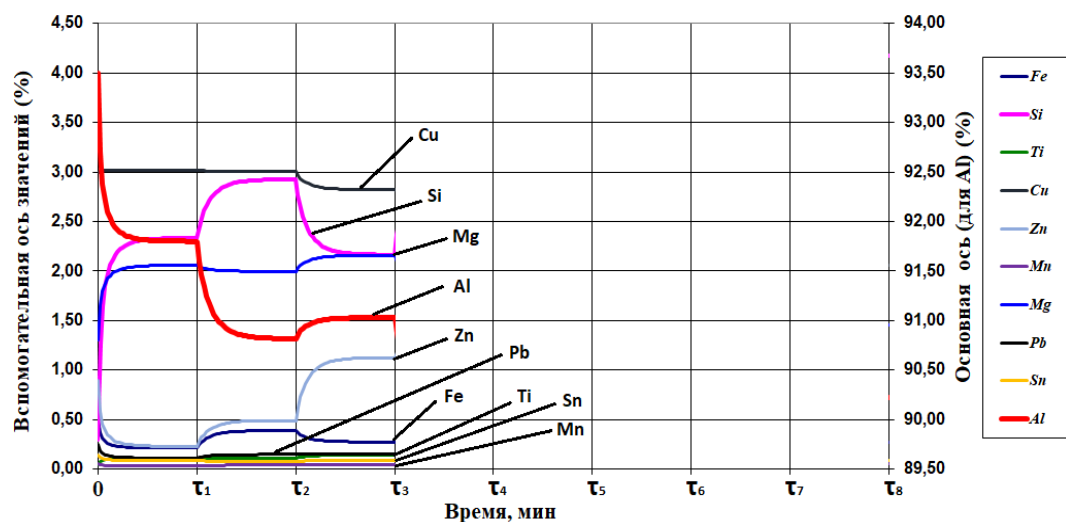


Рис. 2. Последовательное смешивание доступных расплавов из 3 литейных ковшей в плавильном миксере
Fig. 2. Sequential mixing of available melts from 3 casting ladles in a melting mixer

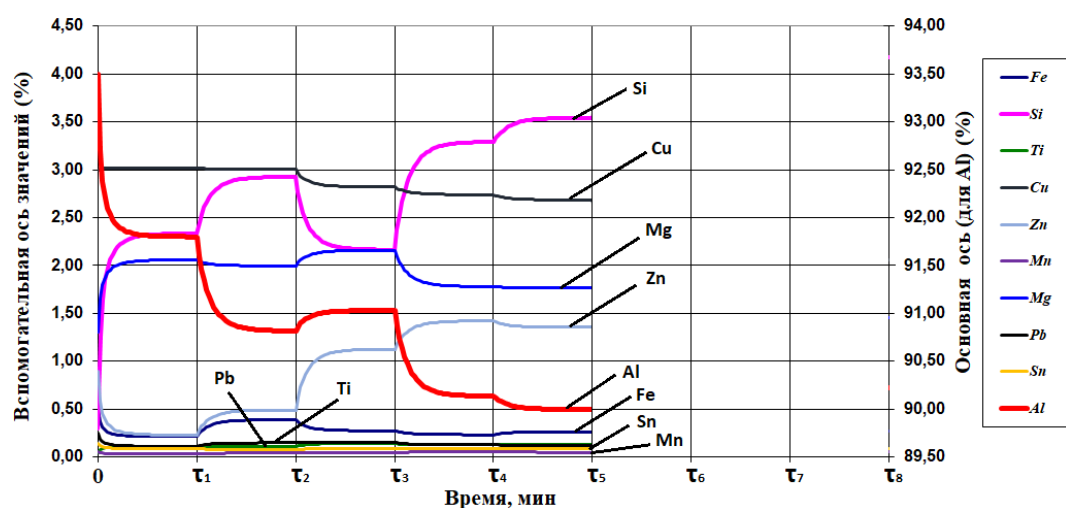


Рис. 3. Последовательное смешивание доступных расплавов из 5 литейных ковшей в плавильном миксере
Fig. 3. Sequential mixing of available melts from 5 casting ladles in a melting mixer

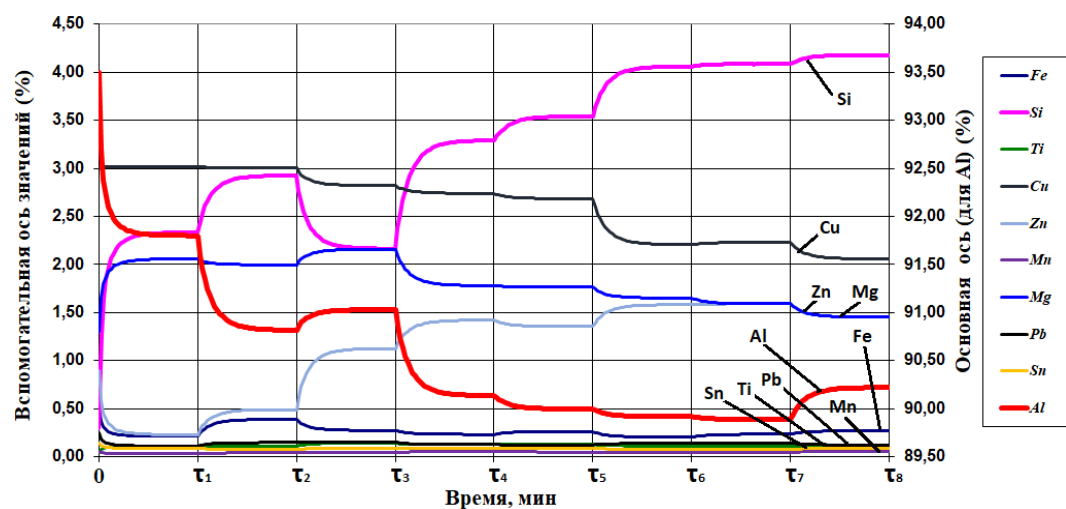


Рис. 4. Последовательное смешивание доступных расплавов из 8 литейных ковшей в плавильном миксере
Fig. 4. Sequential mixing of available melts from 8 casting ladles in a melting mixer

Представленные графики характеризуют процесс последовательного смешивания доступных литейных ковшей как результат вычислительного эксперимента на основе разработанной математической модели для формирования выходного химического состава расплава требуемой массы. Технологический процесс смешивания алюминия-сырца имеет инерционный характер протекания. Так, использование одного из выбранных ковшей характеризуется некоторой скоростью разливки, которая прямо пропорциональна оставшейся массе расплава в ковше, т.е. чем меньше остается доступного расплава в выбранном ковше, тем меньше скорость разливки алюминия-сырца.

Отображение многопараметрической динамической картины смешивания литейных ковшей в графическом виде обеспечивает возможность проведения визуально-событийного анализа реального процесса формирования алюминиевого расплава и является удобным инструментом для практического использования технологическим персоналом.

Заключение

На основе математических моделей материально-теплого баланса взаимодействующих веществ, а также модели динамики, характеризующей последовательный процесс модификации алюминиевого расплава, разработана соответствующая модель технологического процесса формирования требуемого химического состава алюминиевого расплава в плавильном миксере, предназначенная для проведения серии различных вычислительных экспериментов.

Предложенные математические модели могут быть использованы для анализа действующих режимов управления производственными агрегатами с целью улучшения текущих технико-экономических показателей производства алюминиевых сплавов, а также способны применяться для развития комплексного набора навыков при исследовании динамической реакции управляемого объекта в соответствии с произвольными воздействиями технологического персонала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Машунин Ю.К. Математическое моделирование и выбор оптимальных параметров технологического процесса // Математические методы в технике и технологиях. 2020. № 2. С. 39–51.
2. Скуратов А.П., Шахрай С.Г., Фомичев И.В., Белянин А.В. Повышение экологической и энергетической эффективности производства алюминия // Исследование энергетической эффективности и экологических показателей оборудования алюминиевой промышленности. Красноярск : СФУ, 2018. 179 с.
3. Мартусевич Е.А., Буинцев В.Н., Калашиников С.Н. Структура и математические модели информационно-обучающей системы «Шихтовщик алюминиевого расплава» // Инженерный вестник Дона : электронный научный журнал. 2019. № 2 (53). 14 с.
4. Аверченков В.И., Козак Л.Я., Кобищанов В.В. Математическое моделирование сложных технологических объектов большой размерности факторного пространства в условиях пассивного эксперимента // Вестник Брянского государственного технического университета. 2013. № 3 (39). С. 86–94.
5. Козак Л.Я. Получение математических моделей управления металлургическим производством // Инновационная деятельность: теория и практика. 2016. № 6 (2). С. 63–67.
6. Манкаев Н.В. Математическое моделирование глобальной экономики: актуальные методы // Экономика и управление: проблемы, решения. 2019. № 3 (6). С. 121–129.
7. Кабаков З.К. Математические модели при освоении новых технологий в металлургии // Высшее образование в Российской Федерации. 2005. № 11. С. 74–78.
8. Пилипчук А.И. Экономико-математические модели и методы // Наука и молодежь: новые идеи и решения : материалы XI Междунар. науч.-практ. конф. молодых исследователей. Волгоград, 2017. С. 333–335.
9. Сибицкий Н.В. Математические модели и оптимальные решения в условиях неполной информации // Автоматика и информатика. 2017. № 2 (41). С. 92–100.
10. Мясоедов А.И. Современные экономико-математические методы и модели в процессе принятия управленческих решений // Проблемы и перспективы экономики и управления : материалы VI Междунар. науч. конф. СПб., 2017. С. 150–153.
11. Сердюк В.С., Добренко А.М., Цорина О.А., Бакико Е.В., Янчий С.В. Математические модели для оценки производственных рисков // Проблемы машиностроения : материалы II Междунар. науч.-техн. конф. Омск, 2018. С. 288–293.
12. Христинич Р.М., Велентеев А.М., Головенко Е.А., Христинич А.Р. МГД-технологии рафинирования и приготовления алюминиевых сплавов в транспортных ковшах // Электрометаллургия. 2008. № 11. С. 1–8.

13. Горюхин А.С., Гайнцева Е.С., Шайхутдинова И.И. Модель экспертной системы автоматизированного управления технологической подготовкой производства отливок из алюминиевых сплавов // Information technologies for intelligent decision making support itids. Уфа, 2015. С. 183–187.
14. Кузнецов Е.Б., Леонов С.С. Параметризация задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с предельными особыми точками // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. № 6 (57). С. 934–957.

Поступила в редакцию 12 февраля 2021 г.

Kalashnikov S.N., Martusevich E.A., Martusevich E.V., Buintsev V.N. (2021) MATHEMATICAL MODELING OF THE CURRENT TECHNOLOGICAL PROCESS OF FORMING AN ALUMINUM MELT IN THE MIXER OF THE FOUNDRY DEPARTMENT. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 56. pp. 20–28

DOI: 10.17223/19988605/56/3

Improving the existing technology for the production of aluminum and its alloys is still an urgent task. The search for a solution to the presented technological problem is directly related to improving the technical and economic indicators of production, as well as increasing the efficiency of the corresponding algorithms for modifying aluminum alloys. The use of a mathematical apparatus to formalize the features of the presented production process will ensure finding the most optimal option for the formation of established grades of aluminum alloys in the foundry department of an industrial enterprise. This becomes possible thanks to the conduct of an unlimited number of scientific experiments and empirical operations aimed at calculating the required values of the parameters for mixing raw aluminum from casting ladles.

At the same time, it is possible to analyze the already obtained values of the concentrations of chemical elements of raw aluminum in casting ladles, taking into account the specified requirements of the order portfolio, in order to selectively modify the fundamental elements of the chemical composition of the formed grade of aluminum alloy. The software-algorithmic implementation of the presented mathematical model using modern high-performance devices and computers will ensure a higher competitiveness of finished products in the non-ferrous metals market due to a systematic reduction in the cost of producing a ton of metal and obtaining new practical results.

Also, the formalization of the technological process and the development of a mathematical model of the investigated process will allow organizing initial training and professional retraining of technological personnel of an industrial enterprise. Carrying out career guidance activities and organizing the process of improving the qualifications of technological personnel are possible by setting up various options for the initial combinations of casting ladles and determining the initial conditions of the set technological problem, taking into account the current production features and the available set of available modifying materials.

The result of this study is the development of a mathematical model of the process of forming an aluminum melt in a mixer in the foundry department, consisting of equations of heat and material balances, taking into account the physicochemical laws of the course of metallurgical processes based on the law of conservation of masses in relation to the selected heterogeneous system.

In addition, it is worth noting that using mathematical modeling, it is possible to continuously monitor the most important indicators of the technological process based on similar mathematical models in order to further improve the existing software complex or information system of the enterprise to an independent automated control system and user decision-making.

Keywords: mathematical model; computational experiment; technological process; aluminum melt; mixing parameters.

KALASHNIKOV Sergey Nikolaevich (Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Applied Information Technologies and Programming, Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russian Federation).
E-mail: s.n.kalashnikov@yandex.ru

MARTUSEVICH Efim Aleksandrovich (Junior Researcher, Post-graduate Student of the Department of Applied Information Technologies and Programming, Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russian Federation).
E-mail: program.pro666@yandex.ru

MARTUSEVICH Elena Vladimirovna (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Natural Science Disciplines named after Professor V.M. Finkel, Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russian Federation).
E-mail: science_nvz@yandex.ru

BUINTSEV Vladimir Nikolaevich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Information Technologies and Programming, Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russian Federation).
E-mail: buintsev@mail.ru

REFERENCES

1. Mashunin, Yu.K. (2020) Mathematical modeling and selection of the optimal parameters of technological process. *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologii*. 2. pp. 39–51.
2. Skuratov, A.P., Shakhrai, S.G., Fomichev, I.V. & Belyanin, A.V. (2018) Improving the environmental and energy efficiency of aluminum production. In: *Issledovanie energeticheskoy effektivnosti i ekologicheskikh pokazateley oborudovaniya alyuminievoy promyshlennosti* [Research of energy efficiency and environmental performance of equipment for the aluminum industry]. Krasnoyarsk: Siberian Federal University.
3. Martusevich, E.A., Buintsev, V.N. & Kalashnikov, S.N. (2019) The structure and mathematical models of the information system “Aluminum melt Mixer”. *Inzhenernyy vestnik Dona – Engineering Journal of the Don*. 2(53).
4. Averchenkov, V.I., Kozak, L.Ya. & Kobishchanov, V.V. (2013) Mathematical modeling of production facility of high dimension of the factorspace in conditions passive experiment. *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Bryansk State Technical University*. 3(39). pp. 86–94.
5. Kozak, L.Ya. (2016) Poluchenie matematicheskikh modeley upravleniya metallurgicheskim proizvodstvom [Obtaining mathematical models of metallurgical production management]. *Innovatsionnaya deyatel'-nost': teoriya i praktika*. 6(2). pp. 63–67.
6. Mankaev, N.V. (2019) Matematicheskoe modelirovanie global'noy ekonomiki: aktual'nye metody [Mathematical modeling of the global economy: topical methods]. *Ekonomika i upravlenie: problemy, resheniya*. 3(6). pp. 121–129.
7. Kabakov, Z.K. (2005) Matematicheskie modeli pri osvoenii novykh tekhnologiy v metallurgii [Mathematical models in the development of new technologies in metallurgy]. *Vysshee obrazovanie v Rossiyskoy Federatsii - Higher Education in Russia*. 11. pp. 74–78.
8. Pilipchuk, A.I. (2017) [Economic and mathematical models and methods]. *Nauka i molodezh': novye idei i resheniya* [Science and Youth: New Ideas and Solutions]. Proc. of the 11th International Conference of Young Researchers. Volgograd. pp. 333–335.
9. Skibitsky, N.V. (2017) Mathematical models and optimal solutions in conditions of incomplete information. *Avtomatika i informatika – Automatic. Computer Science*. 2(41). pp. 92–100.
10. Myasoedov, A.I. (2017) [Modern economic and mathematical methods and models in the process of making managerial decisions]. *Problemy i perspektivy ekonomiki i upravleniya* [Problems and Prospects of Economics and Management]. Proc. of the Sixth International Conference. St. Petersburg. pp. 150–153.
11. Serdyuk, V.S., Dobrenko, A.M., Tsorina, O.A., Bakiko, E.V. & Yanchiy, S.V. (2018) [Mathematical models for assessing industrial risks]. *Problemy mashinostroeniya* [Problems of Mechanical Engineering]. Proc. of the Second International Conference. Omsk. pp. 288–293.
12. Khristinich, R.M., Velenteeko, A.M., Golovenko, E.A. & Khristinich, A.R. (2008) MGD-tehnologii rafinirovaniya i prigotovleniya alyuminievykh splavov v transportnykh kovshakh [MHD-technologies for refining and preparation of aluminum alloys in transport buckets]. *Elektrometallurgiya – Russian Metallurgy*. 11. pp. 1–8.
13. Goryukhin, A.S., Gayntseva, E.S. & Shaikhutdinova, I.I. (2015) [Model of an expert system for automated control of technological preparation for the production of castings from aluminum alloys]. *Information technologies for intelligent decision making support*. Proceedings of the 4th International Conference. Ufa. pp. 183–187.
14. Kuznetsov, E.B. & Leonov, S.S. (2017) Parametrizatsiya zadachi Koshi dlya sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy s predel'nymi osobymi tochkami [Parametrization of the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations with limiting singular points]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 6(57). pp. 934–957.

УДК 519.872

DOI: 10.17223/19988605/56/4

М.А. Шкленник, А.Н. Моисеев, Л.А. Задиранова

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКА ПОВТОРНЫХ ОБРАЩЕНИЙ В ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $GI|GI|_{\infty}$ С МГНОВЕННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ МЕТОДОМ МАРКОВСКОГО СУММИРОВАНИЯ

Рассматривается двухфазная система массового обслуживания с неограниченным числом приборов на каждой фазе и возможностью повторного обращения заявок ко второй фазе. На вход системы поступает рекуррентный поток заявок. Методом марковского суммирования исследуется случайный процесс, описывающий число событий в потоке повторных обращений при нестационарном режиме работы системы.

Ключевые слова: двухфазная система массового обслуживания; обратная связь; поток повторных обращений; метод марковского суммирования; метод асимптотического анализа.

Системы массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом приборов используются в качестве математических моделей при решении достаточно широкого круга прикладных задач, например при исследовании процессов в социально-экономических системах [1, 2], в телекоммуникационных системах [3, 4] и т.д.

Зачастую по различным причинам обслуживаемым объектам требуется возвращение в систему для повторного обслуживания. В таких случаях используются модели СМО с возможностью повторного обслуживания (с обратной связью). В этом классе СМО различают системы с мгновенной и отсроченной обратной связью [5]. В системах с неограниченным числом приборов, как правило, рассматриваются модели с мгновенной обратной связью.

Одним из первых исследователей, обративших свое внимание на системы с обратной связью, был Л. Такач [6, 7]. Однако в дальнейшем исследователи не проявляли особого интереса к подобного рода системам в течение достаточно длительного периода. И лишь в последние несколько десятилетий, с развитием телекоммуникационных сетей, появилась потребность построения моделей с обратной связью [8–10].

Для исследования потоков в системах с обратной связью используются различные методы. Однако, как правило, каждый из них применяется при определенных ограничениях. Так, например, метод производящей функции и метод предельной декомпозиции можно использовать лишь в системах с простейшим входящим потоком [11–15].

Особого внимания заслуживает метод асимптотического анализа [16–19], позволяющий аппроксимировать распределение вероятностей исследуемого процесса при определенных условиях в случае, когда аналитическое решение системы уравнений, характеризующих процессы в системах, не представляется возможным.

В настоящей работе предлагается применить метод марковского суммирования [20, 21] для исследования потока повторных обращений в двухфазной системе с неограниченным числом приборов на каждой фазе, мгновенной обратной связью на второй фазе, с рекуррентным входящим потоком и неэкспоненциальным обслуживанием. Как правило, исследование процессов в системах массового обслуживания проводится в предположении, что системы функционируют в стационарном режиме. Однако это не всегда соответствует целям исследования. В настоящей работе представлено исследование указанной модели в нестационарном режиме.

1. Математическая модель

Рассмотрим двухфазную систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих устройств на каждой фазе (рис. 1).

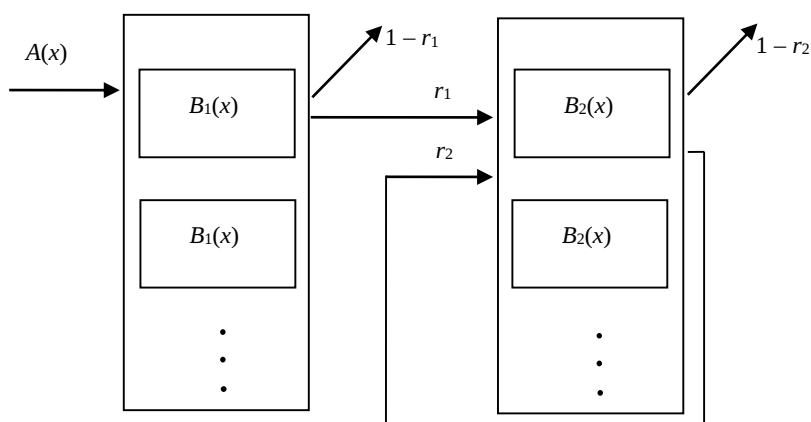


Рис. 1. Двухфазная система массового обслуживания с мгновенной обратной связью

Fig. 1. Tandem of queues with instantaneous feedback

На вход системы поступает рекуррентный поток заявок, заданный функцией распределения длин интервалов времени между последовательно наступающими событиями $A(x)$ и функционирующий в стационарном режиме. Интенсивность λ наступления событий в рекуррентном потоке определяется выражением [18]

$$\lambda = \frac{1}{\int_0^{\infty} [1 - A(x)] dx}. \quad (1)$$

Обслуживание заявок на первой фазе в каждом из приборов протекает независимо от других, а продолжительность такого обслуживания есть неотрицательная случайная величина с функцией распределения $B_1(x)$. По завершении обслуживания на первой фазе заявка может с вероятностью r_1 перейти на вторую фазу либо с вероятностью $(1 - r_1)$ покинуть систему. На второй фазе время обслуживания также имеет одинаковое распределение для каждого прибора с произвольной функцией распределения $B_2(x)$. По завершении обслуживания на второй фазе заявка может с вероятностью r_2 снова обратиться ко второй фазе, либо с вероятностью $(1 - r_2)$ покинуть систему. Будем называть обращение заявок на вторую фазу «повторным обращением (обслуживанием)» независимо от того, с какой фазы они поступают.

Таким образом, в рассматриваемой системе заявки, обратившиеся для обслуживания впервые и повторно, обрабатываются в течение времени, отличающегося по своим характеристикам. Поток заявок, обратившихся к системе для повторного обслуживания, т.е. поступивших на вторую фазу системы, будем называть r -поток. Ставится задача найти распределение вероятностей числа событий в r -потоке за фиксированный интервал времени $[0; T]$ при условии, что в начальный момент времени система пуста.

2. Метод марковского суммирования

Пусть в момент времени $t_0 = 0$ система свободна и в ней нет обслуживаемых заявок. Зафиксируем некоторый момент времени T , причем $0 \leq t \leq T$. Каждая заявка входящего потока, поступив в систему в момент времени t , будет формировать события r -потока. Последовательность моментов наступления событий в r -потоке, сформированных одной заявкой, поступившей в систему, будем называть локальным r -поток.

Обозначим:

- $n(t)$ – число событий r -потока, сформированных всеми заявками входящего потока, поступившими в систему на интервале $[0, t]$;
- $\xi(t)$ – число событий в r -потоке, сформированных за интервал времени $[t, T]$ одной заявкой, пришедшей в момент времени t ;
- $g(i, t) = P\{\xi(t) = i\}$ – вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени t , к моменту времени T сформирует в r -потоке i событий;
- $z(t)$ – остаточное время от момента t до момента наступления следующего события во входящем рекуррентном потоке;
- $P(n, z, t) = P\{n(t) = n, z(t) < z\}$ – вероятность того, что к моменту времени t в r -потоке произошло n событий и при этом $z(t) < z$.

Тогда по формуле полной вероятности можно записать следующее равенство:

$$P(n, z, t + \Delta t) = P(n, z + \Delta t, t) - P(n, \Delta t, t) + A(z) \sum_{i=0}^n P(n-i, \Delta t, t) g(i, t) + o(\Delta t).$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ получим дифференциальное уравнение Колмогорова для распределения вероятностей $P(n, z, t)$

$$\frac{\partial P(n, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(n, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(n, 0, t)}{\partial z} + A(z) \sum_{i=0}^n \frac{\partial P(n-i, 0, t)}{\partial z} g(i, t) \quad (2)$$

с начальным условием

$$P(n, z, 0) = \begin{cases} R(z), & n = 0, \\ 0, & n > 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $R(z)$ – распределение вероятностей значений случайного процесса $z(t)$ в стационарном режиме.

Определим характеристические функции вида

$$H(u, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(n, z, t),$$

$$G(u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} g(i, t).$$

Тогда от задачи (2)–(3) можно перейти к дифференциальному уравнению для характеристической функции исследуемого процесса $n(t)$:

$$\frac{\partial H(u, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial z} (A(z)G(u, t) - 1).$$

Характеристическая функция $G(u, t)$ процесса $\xi(t)$ найдена в работе [21] и имеет вид:

$$G(u, t) = 1 + r_1(e^{ju} - 1)B_1(T - t) + \frac{r_1 r_2}{2\pi} (e^{ju} - 1) e^{ju} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha) (1 - e^{-j\alpha(T-t)})}{(1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)) j\alpha} d\alpha,$$

где

$$b_1^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha\tau} dB_1(\tau), \quad b_2^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha\tau} dB_2(\tau).$$

Обозначив

$$\varphi(u, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha) (1 - e^{-j\alpha(T-t)})}{(1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)) j\alpha} d\alpha,$$

получаем уравнение вида

$$\frac{\partial H(u, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial z} \left[A(z) - 1 + A(z) r_1 (e^{ju} - 1) (B_1(T - t) + r_2 e^{ju} \varphi(u, t)) \right] \quad (4)$$

с начальным условием

$$H(u, z, 0) = R(z). \quad (5)$$

Решение задачи (4)–(5) будем искать методом асимптотического анализа [16] при условии высокой интенсивности входящего потока. Для этого запишем функцию распределения длин интервалов времени между событиями входящего потока в виде $A(Nz)$, где $N > 0$ – параметр высокой интенсивности потока. Тогда, выполнив соответствующие преобразования, уравнение (3) можем переписать в виде:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(u, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H(u, 0, t)}{\partial z} \left[A(z) - 1 + A(z)r_1(e^{ju} - 1) \left(B_1(T-t) + r_2 e^{ju} \varphi(u, t) \right) \right]. \quad (6)$$

3. Асимптотический анализ первого порядка

Используя метод асимптотического анализа, выполним замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad H(u, t) = F_1(w, t, \varepsilon),$$

тогда уравнение (5) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial F_1(w, z, t, \varepsilon)}{\partial t} = & \frac{\partial F_1(w, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \times \\ & \times \left[A(z) - 1 + A(z)r_1(e^{jw\varepsilon} - 1) \left(B_1(T-t) + r_2 e^{jw\varepsilon} \varphi(w, t, \varepsilon) \right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема 1. Пусть параметр λ входящего рекуррентного потока определяется выражением (1), а функция $R(z)$ – распределение вероятностей значений случайного процесса $z(t)$ в стационарном режиме. Тогда асимптотическое решение $F_1(w, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} F_1(w, z, t, \varepsilon)$ уравнения (7) имеет вид:

$$F_1(w, z, t) = R(z) \exp \left\{ jwr_1\lambda \left[\int_{T-t}^T B_1(y) dy + \frac{r_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{j\alpha(1-r_2b_2^*(\alpha))} \left(t + \frac{e^{-j\alpha T} - e^{-j\alpha(T-t)}}{j\alpha} \right) d\alpha \right] \right\}. \quad (8)$$

где $b_k^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{j\alpha t} dB_k(t)$ – преобразование Фурье–Стилтьеса функции распределения $B_k(t)$ времени обслуживания на фазах системы, $k = 1, 2$.

Доказательство. Доказательство теоремы будем проводить в два этапа.

Этап 1. В уравнении (6) выполним предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$, получим следующее уравнение:

$$0 = \frac{\partial F_1(w, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(w, 0, t)}{\partial z} [A(z) - 1],$$

решение которого будем искать в виде:

$$F_1(w, z, t) = R(z)\Phi_1(w, t), \quad (9)$$

где $\Phi_1(w, t)$ – некоторая скалярная функция.

Этап 2. Выполним в (7) предельный переход $z \rightarrow \infty$, получим

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(w, \infty, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial F_1(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} r_1(e^{jw\varepsilon} - 1) \left(B_1(T-t) + r_2 e^{jw\varepsilon} \varphi(w, t, \varepsilon) \right). \quad (10)$$

Разложим $e^{jw\varepsilon}$ и функцию $\varphi(w, \varepsilon, t)$ в ряд Маклорена:

$$e^{jw\varepsilon} = 1 + jw\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (11)$$

$$\varphi(w, \varepsilon, t) = a_0(t) + a_1(t) \cdot jw\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (12)$$

где

$$a_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b_1^*(\alpha) \frac{b_2^*(\alpha)}{1-r_2b_2^*(\alpha)} \left(\frac{1-e^{-j\alpha(T-t)}}{j\alpha} \right) d\alpha, \quad (13)$$

$$a_1(t) = r_2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b_1^*(\alpha) \left(\frac{b_2^*(\alpha)}{1-r_2b_2^*(\alpha)} \right)^2 \left(\frac{1-e^{-j\alpha(T-t)}}{j\alpha} \right) d\alpha. \quad (14)$$

Подставим выражения (9), (11), (12) в уравнение (10), разделим обе части равенства на ε и произведем предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$. С учетом того, что $R'(0) = \lambda$ [18], получаем дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi_1(w, t)$

$$\frac{\partial \Phi_1(w, t)}{\partial t} = r_1 \lambda j w \Phi_1(w, t) (B_1(T - t) + r_2 a_0(t)).$$

Обозначим

$$\psi(x) = B_1(T - x) + r_2 a_0(x), \quad (15)$$

тогда решение этого уравнения при начальном условии $\Phi_1(w, 0) = 1$ имеет вид:

$$\Phi_1(w, t) = \exp \left\{ j w r_1 \lambda \int_0^t \psi(x) dx \right\}. \quad (16)$$

Подставив в (16) выражение (13) и выполнив несложные преобразования, получим следующее выражение для функции $\Phi_1(w, t)$:

$$\Phi_1(w, t) = \exp \left\{ j w r_1 \lambda \left[\int_{T-t}^T B_1(y) dy + \frac{r_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha)}{j\alpha (1 - r_2 b_2^*(\alpha))} \left(t + \frac{e^{-j\alpha T} - e^{-j\alpha(T-t)}}{j\alpha} \right) d\alpha \right] \right\}. \quad (17)$$

Тогда, подставляя (17) в (9), получаем асимптотическое решение $F_1(w, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(w, z, t, \varepsilon)$ задачи (7) в виде (8). Теорема доказана.

4. Асимптотический анализ второго порядка

В уравнении (5) выполним следующую замену:

$$H(u, z, t) = H_2(u, z, t) \exp \left\{ j u N r_1 \lambda \int_0^t \psi(x) dx \right\}, \quad (18)$$

получим уравнение относительно функции $H_2(u, z, t)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \frac{\partial H_2(u, z, t)}{\partial t} + j u \lambda r_1 H_2(u, z, t) \psi(t) = \\ & = \frac{\partial H_2(u, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H_2(u, 0, t)}{\partial z} \left[A(z) - 1 + A(z) r_1 (e^{ju} - 1) (B_1(T - t) + r_2 e^{ju} \varphi(u, t)) \right]. \end{aligned}$$

Выполним в этом уравнении замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad H_2(u, z, t) = F_2(w, z, t, \varepsilon), \quad (19)$$

получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w, z, t, \varepsilon)}{\partial t} + j \varepsilon w \lambda r_1 F_2(w, z, t, \varepsilon) \psi(t) = \\ & = \frac{\partial F_2(w, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left[A(z) - 1 + A(z) r_1 (e^{j\varepsilon w} - 1) (B_1(T - t) + r_2 e^{j\varepsilon w} \varphi(w, t, \varepsilon)) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Теорема 2. Пусть параметр λ входящего рекуррентного потока определяется выражением (1), функция $R(z)$ – распределение вероятностей значений случайного процесса $z(t)$ в стационарном режиме и

$$\kappa = r_1 \lambda^3 (\sigma^2 - a^2), \quad (21)$$

где a и σ^2 – конечные математическое ожидание и дисперсия случайной величины с функцией распределения $A(x)$. Тогда асимптотическое решение $F_2(w, z, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_2(w, z, t, \varepsilon)$ уравнения (20) имеет вид:

$$F_2(w, z, t) = R(z) \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} r_1 \left[\lambda \int_{T-t}^T B_1(y) dy + \frac{3r_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha)}{j\alpha (1 - r_2 b_2^*(\alpha))} \left(t - \frac{e^{-j\alpha(T-t)} - e^{-j\alpha T}}{j\alpha} \right) d\alpha + \right. \right.$$

$$+ \frac{\lambda r_2^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha)}{i\alpha} \left(\frac{b_2^*(\alpha)}{1-r_2 b_2^*(\alpha)} \right)^2 \left(t - \frac{e^{-j\alpha(T-t)} - e^{-j\alpha T}}{j\alpha} \right) d\alpha +$$

$$+ \kappa \int_{T-t}^T \left(B_1(y) + \frac{r_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha)}{(1-r_2 b_2^*(\alpha))} \left(\frac{1-e^{-j\alpha y}}{j\alpha} \right) d\alpha \right)^2 dy \Bigg\}, \quad (22)$$

где $b_k^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{j\alpha t} dB_k(t)$ – преобразование Фурье–Стилтьеса функции распределения $B_k(t)$ времени обслуживания на фазах системы, $k = 1, 2$.

Доказательство выполним в три этапа.

Этап 1. Положим в (20) $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial F_2(w, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(w, 0, t)}{\partial z} [A(z) - 1] = 0.$$

Решение уравнения $F_2(w, z, t)$ будем искать в виде:

$$F_2(w, z, t) = R(z) \Phi_2(w, t), \quad (23)$$

где $\Phi_2(w, t)$ – некоторая функция, не зависящая от z .

Этап 2. Решение уравнения (20) запишем в виде разложения

$$F_2(w, z, t, \varepsilon) = \Phi_2(w, t) [R(z) + j\varepsilon w \psi(t) f(z)] + O(\varepsilon^2), \quad (24)$$

где $f(z)$ – некоторая функция. Подставим это выражение в (18). Используя разложения (11) и (12), получим

$$j\varepsilon w \lambda r_1 \psi(t) \Phi_2(w, t) R(z) = \Phi_2(w, t) \{ R'(z) + j\varepsilon w f'(z) \psi(t) + R'(0) [A(z) - 1] +$$

$$+ R'(0) j\varepsilon w r_1 A(z) \psi(t) + j\varepsilon w f'(0) \psi(t) [A(z) - 1] \} + O(\varepsilon^2).$$

В [18] показано, что

$$R'(z) = R'(0) [1 - A(z)],$$

тогда, приведя подобные и сократив обе части на $j\varepsilon w$, получим

$$\lambda r_1 R(z) = f'(z) + f'(0) [A(z) - 1] + \lambda r_1 A(z) + O(\varepsilon).$$

Отсюда при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $f(z)$:

$$f'(z) = f'(0) [1 - A(z)] + \lambda r_1 [A(z) - R(z)].$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения по z от 0 до ∞ , получим уравнение

$$f(\infty) - f(0) = f'(0) \cdot \frac{1}{\lambda} - \lambda r_1 \left(\int_0^\infty [1 - R(z)] dz - \int_0^\infty [1 - A(z)] dz \right),$$

решение которого дает результат [18]

$$f'(0) - \lambda f(\infty) = \frac{\kappa}{2}, \quad (25)$$

где κ определяется выражением (21).

Этап 3. В уравнении (20) выполним предельный переход при $z \rightarrow \infty$. В силу способа построения функции $F_2(w, z, t, \varepsilon)$ она является монотонно возрастающей и ограниченной сверху функцией по z . Следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\partial F_2(w, z, t, \varepsilon)}{\partial z} = 0.$$

Учитывая это и применяя разложение экспоненты $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + O(\varepsilon^3)$ и функции

$\varphi(w, \varepsilon, t) = a_0(t) + a_1(t) \cdot jw\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, получаем

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w, \infty, t, \varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon w \lambda r_1 \psi(t) F_2(w, \infty, t, \varepsilon) = \frac{\partial F_2(w, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \left[j\varepsilon w r_1 \psi(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} r_1 (\psi(t) + 2r_2 a_0(t) + 2r_2 a_1(t)) + O(\varepsilon^3) \right].$$

Подставим сюда разложение (24), при $z \rightarrow \infty$ получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} + j\varepsilon w \lambda r_1 \psi(t) \Phi_2(w, t) + (j\varepsilon w)^2 \lambda r_1 \psi^2(t) f(\infty) \Phi_2(w, t) = \\ & = \Phi_2(w, t) \left[j\varepsilon w \lambda r_1 \psi(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \lambda r_1 (\psi(t) + 2r_2 (a_0(t) + a_1(t)) + (j\varepsilon w)^2 r_1 \psi^2(t) \frac{df(0)}{dz} \right] + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Приведем подобные и сократим на ε^2 , тогда

$$\frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} = \frac{(jw)^2}{2} \Phi_2(w, t) \left[\lambda r_1 (\psi(t) + 2r_2 (a_0(t) + a_1(t)) + 2r_1 \psi^2(t) \left(\frac{df(0)}{dz} - \lambda f(\infty) \right) \right] + O(\varepsilon).$$

Учитывая (25) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\Phi_2(w, t)$

$$\frac{\partial \Phi_2(w, t)}{\partial t} = \frac{(jw)^2}{2} \Phi_2(w, t) r_1 \left[\lambda (\psi(t) + 2r_2 (a_0(t) + a_1(t)) + \psi^2(t) \kappa) \right].$$

Решение этого уравнения с учетом начального условия $\Phi_2(w, 0) = 1$ имеет вид:

$$\Phi_2(w, t) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} r_1 \left[\lambda \int_0^t [\psi(x) + 2r_2 (a_0(x) + a_1(x))] dx + \kappa \int_0^t \psi^2(x) dx \right] \right\}.$$

Тогда в силу (23) имеем

$$F_2(w, z, t) = R(z) \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} r_1 \left[\lambda \int_0^t [\psi(x) + 2r_2 (a_0(x) + a_1(x))] dx + \kappa \int_0^t \psi^2(x) dx \right] \right\}.$$

Подставив сюда выражения (13), (14), (15) для функций $a_0(x)$, $a_1(x)$ и $\psi(x)$ и выполнив несложные преобразования, получаем выражение (22), что и требовалось доказать.

Вернемся к характеристической функции $H(u, z, t)$ исследуемого процесса. Выполним в (22) обратные замены и получим аппроксимацию

$$\begin{aligned} H(u, z, t) \approx R(z) \exp & \left\{ juNr_1 \lambda \left[\int_{T-t}^T B_1(y) dy + \frac{r_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha)}{j\alpha (1 - r_2 b_2^*(\alpha))} \left(t + \frac{e^{-j\alpha T} - e^{-j\alpha(T-t)}}{j\alpha} \right) d\alpha \right] + \right. \\ & + \frac{(ju)^2}{2} Nr_1 \left[\lambda \int_{T-t}^T B_1(y) dy + \lambda \frac{3r_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha) (3 - r_2 b_2^*(\alpha))}{j\alpha (1 - r_2 b_2^*(\alpha))^2} \left(t - \frac{e^{-j\alpha(T-t)} - e^{-j\alpha T}}{j\alpha} \right) d\alpha + \right. \\ & \left. \left. + \kappa \int_{T-t}^T \left(B_1(y) + \frac{r_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha)}{(1 - r_2 b_2^*(\alpha))} \left(\frac{1 - e^{-j\alpha y}}{j\alpha} \right) d\alpha \right)^2 dy \right] \right\}, \end{aligned}$$

которая имеет место при достаточно больших значениях N .

Функция $H(u, T) = \lim_{z \rightarrow \infty} H(u, z, T)$ есть характеристическая функция числа событий, наступивших в потоке повторных обращений за интервал времени $[0, T]$.

$$H(u, T) \approx \exp \left\{ juNr_1 \lambda \left[\int_0^T B_1(y) dy + \frac{r_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha)}{j\alpha (1 - r_2 b_2^*(\alpha))} \left(T - \frac{1 - e^{-j\alpha T}}{j\alpha} \right) d\alpha \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(ju)^2}{2} Nr_1 \left[\lambda \int_0^T B_1(y) dy + \lambda \frac{r_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha) (3 - r_2 b_2^*(\alpha))}{j\alpha (1 - r_2 b_2^*(\alpha))^2} \left(T - \frac{1 - e^{-j\alpha T}}{j\alpha} \right) d\alpha + \right. \\
 & \left. + \kappa \int_0^T \left(B_1(y) + \frac{r_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha)}{(1 - r_2 b_2^*(\alpha))} \left(\frac{1 - e^{-j\alpha y}}{j\alpha} \right) d\alpha \right)^2 dy \right] \Bigg\}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Таким образом, при достаточно больших значениях N распределение числа событий в потоке повторных обращений за интервал времени $[0, T]$ аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием

$$M\{n(T)\} = Nr_1 \lambda \left[\int_0^T B_1(y) dy + \frac{r_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha)}{j\alpha (1 - r_2 b_2^*(\alpha))} \left(T - \frac{1 - e^{-j\alpha T}}{j\alpha} \right) d\alpha \right] \quad (27)$$

и дисперсией

$$\begin{aligned}
 D\{n(T)\} = Nr_1 \left[\lambda \int_0^T B_1(y) dy + \lambda \frac{r_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha) (3 - r_2 b_2^*(\alpha))}{j\alpha (1 - r_2 b_2^*(\alpha))^2} \left(T - \frac{1 - e^{-j\alpha T}}{j\alpha} \right) d\alpha + \right. \\
 \left. + \kappa \int_0^T \left(B_1(y) + \frac{r_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha)}{(1 - r_2 b_2^*(\alpha))} \left(\frac{1 - e^{-j\alpha y}}{j\alpha} \right) d\alpha \right)^2 dy \right]. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Численные результаты

Для демонстрации качества аппроксимации (26)–(28) приведем численный пример. Рассмотрим двухфазную систему массового обслуживания с мгновенной обратной связью, модель которой представлена в разделе 1. Выберем следующие параметры модели:

- длины интервалов во входящем рекуррентном потоке имеют гамма-распределение с параметрами формы и масштаба, соответственно равными $\alpha = 0,5$ и $\beta = 0,5N$ (в таком случае интенсивность входящего потока равна N);
- времена обслуживания на первой и второй фазах имеют гамма-распределения с параметрами формы и масштаба $\alpha_1 = 0,5$, $\beta_1 = 0,5$ для первой фазы и $\alpha_2 = 1,5$, $\beta_2 = 1,5$ для второй;
- вероятности перехода заявки с первой фазы на вторую и повторного обслуживания после второй фазы соответственно равны $r_1 = 0,75$ и $r_2 = 0,5$.

Будем находить параметры гауссовской аппроксимации (26)–(28) нестационарного распределения числа событий в потоке повторных обращений за интервал времени $[0, 1]$ ($T = 1$) и сравнивать ее с результатами имитационного моделирования при различных N . На графиках (рис. 2) представлены полученные распределения для нескольких значений N . Как видно, полученное распределение (26)–(28) достаточно хорошо аппроксимирует искомое при различных значениях N .

Для численного анализа точности аппроксимации будем использовать расстояние Колмогорова

$$\Delta = \max_{i \geq 0} \left| \sum_{n=0}^i [P(n) - F(n)] \right|$$

между соответствующими распределениями числа событий в потоке повторных обращений для гауссовской аппроксимации $P(n)$ и для распределения $F(n)$, полученного в результате имитационного моделирования. В таблице приведены значения расстояний Колмогорова для рассматриваемого численного примера. Как видим, при увеличении параметра N высокой интенсивности входящего потока расстояние Колмогорова между указанными распределениями уменьшается, т.е. точность полученной аппроксимации растет.

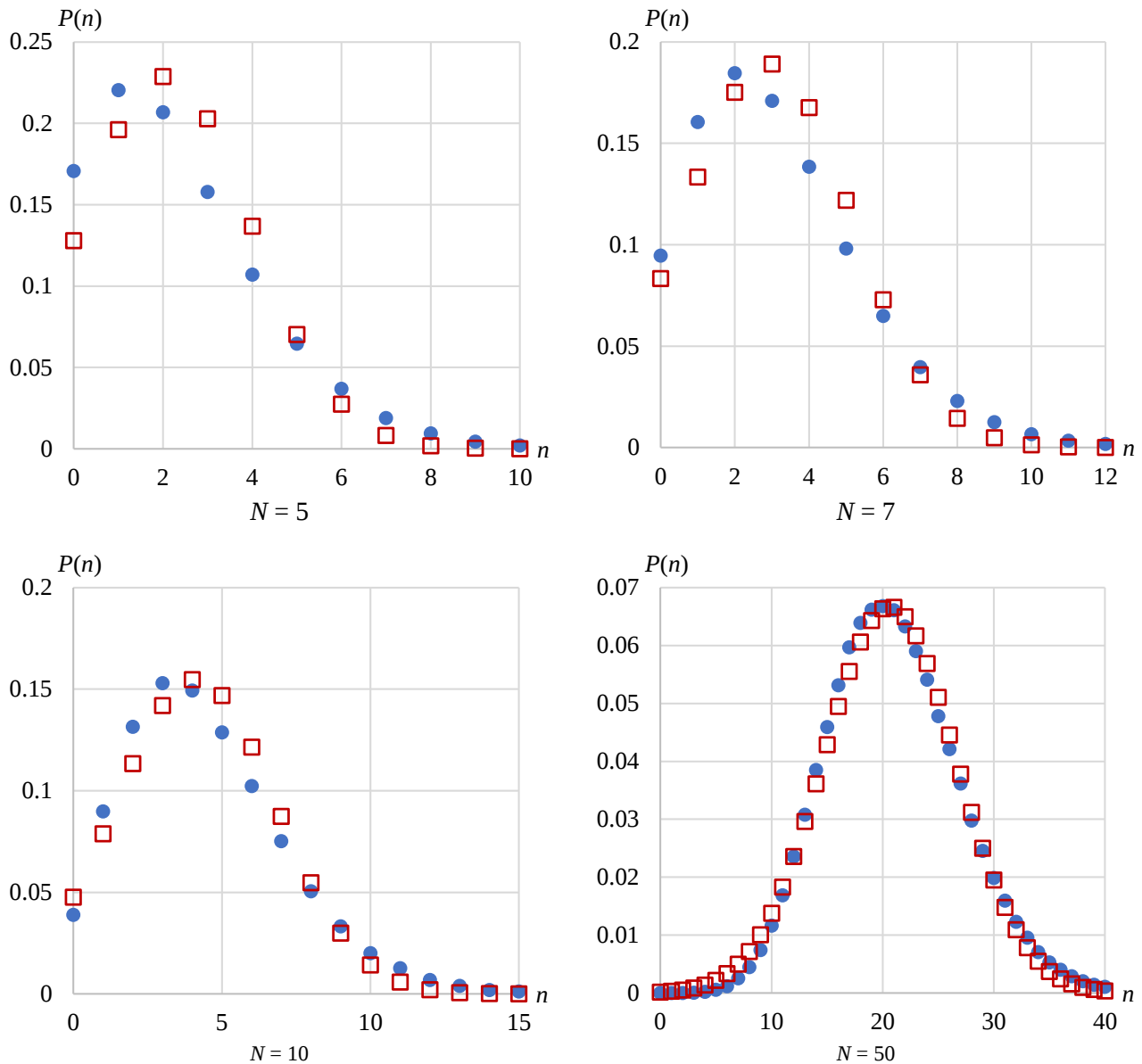


Рис. 2. Сравнение гауссовской аппроксимации (квадраты) распределения числа событий в потоке повторных обращений n и распределения, полученного в результате имитационного моделирования (закрашенные кружки), для разных значений N параметра высокой интенсивности входящего потока

Fig. 2. Comparisons of the Gaussian approximation (squares) and empiric distribution (circles) for various values of parameter N

Расстояние Колмогорова Δ между аппроксимацией и эмпирическим распределением

N	5	6	7	10	25	50	100	200
Δ	0,0671	0,0541	0,0479	0,0315	0,0227	0,0181	0,0125	0,0086

Если в качестве допустимого значения погрешности принять расстояние Колмогорова $\Delta \leq 0,05$, то для рассматриваемого примера можно считать, что полученная аппроксимация применима при $N \geq 7$. Таким образом, полученный результат (26)–(28) применим даже для не очень больших значений интенсивности входящего потока.

Заключение

В работе рассмотрена математическая модель обслуживания заявок в двухфазной системе массового обслуживания $GI|GI|_{\infty} \rightarrow GI|GI|_{\infty}$ с возможностью повторного обращения заявки ко второй фазе

системы. Методом марковского суммирования получена система уравнений для исследования случайного процесса, описывающего число событий в потоке повторных обращений к системе при нестационарном режиме работы. Методом асимптотического анализа при условии высокой интенсивности входящего потока доказано, что распределение вероятностей числа событий в потоке повторных обращений за фиксированный интервал времени $[0; T]$ может быть аппроксимировано нормальным распределением с математическим ожиданием и дисперсией, вычисляемыми по формулам (27) и (28) соответственно. Проведенные численные эксперименты подтверждают хорошее качество данной аппроксимации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозова А.С., Моисеева С.П., Назаров А.А. Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 293. С. 49–52.
2. Жидкова Л.А., Моисеева С.П. Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322, № 6. С. 5–9.
3. Van Doorn E.A., Jagers A.A. A Note on the GI/GI/∞ system with identical service and interarrival-time distributions // Queueing Systems. 2004. V. 47. P. 45–52.
4. Whitt W. Fluid models for multiserver queues with abandonments // Operations Research. 2006. V. 54. P. 37–54.
5. Королюк В.С., Меликов А.З., Пономаренко Л.А., Рустамов А.М. Методы анализа многоканальной системы обслуживания с мгновенной и отсроченной обратными связями // Кибернетика и системный анализ. 2016. Т. 52, № 1. С. 64–77.
6. Takács L. A single-server queue with feedback // Bell Syst. Tech. J. 1963. V. 42. P. 505–519.
7. Takács L. A queueing model with feedback // Oper. Res. 1977. V. 11. P. 345–354.
8. Boxma O.J., Yechiali U. An M/G/1 queue with multiple types of feedback and gated vacations // J. Appl. Probab. 1997. V. 34, is. 3. P. 773–784.
9. Choi B.D., Kim B., Choi S.H. An M/G/1 queue with multiple types of feedback, gated vacations and FCFS policy // Comput. & Oper. Res. 2003. V. 30, is. 9. P. 1289–1309.
10. Melikov A.Z., Aliyeva S.H., Sztrik J. Analysis of queueing system MMPP/M/ K/K with delayed feedback // Mathematics. 2019. V. 7, № 11. 14 p. DOI: 10.3390/math711128
11. Shklennik M., Moiseeva S., Moiseev A. Analysis of queueing tandem with feedback by the method of limiting decomposition // Communications in Computer and Information Science. 2017. V. 800. P. 147–157.
12. Моисеева С.П., Морозова А.С., Назаров А.А. Исследование суммарного потока обращений в бесконечно линейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 290. С. 173–175.
13. Назаров А.А., Моисеева С.П., Морозова А.С. Исследование СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. № 55. С. 88–92.
14. Шкленник М.А., Моисеев А.Н. Исследование потоков заявок в двухфазной системе массового обслуживания с неограниченным числом приборов и повторными обращениями // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 45. С. 48–58.
15. Моисеева С.П., Ананина И.А., Назаров А.А. Исследование потоков в системе M/GI/∞ с повторными обращениями // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 3 (8). С. 56–66.
16. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
17. Melikov A., Zadiranova L., Moiseev A. Two Asymptotic Conditions in Queue with MMPP Arrivals and Feedback // Communications in Computer and Information Science. 2016. V. 678. P. 231–240.
18. Moiseev A., Nazarov A. Investigation of high intensive general flow // Problems of Cybernetics and Informatics: proc. of the IV Int. Conf. PCI'2012 (Baku, September 12–14, 2012). Baku : IEEE, 2012. P. 161–163.
19. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Асимптотический анализ многофазной системы массового обслуживания с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком // Автометрия. 2014. Т. 50, № 2. С. 67–76.
20. Назаров А.А., Даммер Д.Д. Исследование дополнительно формируемого потока в системе с неограниченным числом приборов и рекуррентным обслуживанием методом марковского суммирования // Автоматика и телемеханика. 2019. № 12. С. 133–145.
21. Шкленник М.А., Моисеев А.Н. Метод марковского суммирования для исследования потока повторных обращений в двухфазных системах $M|GI|∞ \rightarrow GI|∞$ // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 111–123.

Поступила в редакцию 26 мая 2021 г.

Shklennik M.A., Moiseev A.N., Zadiranova L.A. (2021) ANALYSIS OF REPEATED FLOW IN QUEUEING TANDEM $GI|GI|_{\infty}$ WITH FEEDBACK BY METHOD OF MARKOVIAN SUMMATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 56. pp. 29–40

DOI: 10.17223/19988605/56/4

The paper presents the study of repeated flow in the two-stage infinite-server queueing system with feedback. The arrival process is the general flow having independent and identically distributed inter-arrival periods with length distributed with cumulative distribution function (c.d.f.) $A(x)$. Service times at the first stage are independent and identically distributed (i.i.d.) with c.d.f. $B_1(x)$. After a completion of the service at the first stage, the customer go to the second stage with the probability r_1 or it may leave the system with the probability $(1 - r_1)$. Service times at the second stage are i.i.d. with c.d.f. $B_2(x)$. When the service at the second stage is completed, the customer may come back to the second stage with the probability r_2 for the repeated service or it may leave the system with the probability $(1 - r_2)$.

The problem is to determine the probability distribution of the number of repeated customers (r -flow) during fixed time period $[0; T]$.

To solve this problem, the Markov summation method is used. This method is based on the consideration of Markov processes and the solution of the Kolmogorov equations. The number of events in the r -flow is sum of number of events in the so-called local r -flow which means the number of calls generated by one incoming customer in the r -flow. The equations are solved under asymptotic condition of high intensity of arrivals.

It is shown that the probability distribution of the number of repeated customers for the time interval $[0; T]$ converges to normal distribution with parameters

$$M\{n(T)\} = Nr_1\lambda \left[\int_0^T B_1(y)dy + \frac{r_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{j\alpha(1-r_2b_2^*(\alpha))} \left(T - \frac{1-e^{-j\alpha T}}{j\alpha} \right) d\alpha \right],$$

and

$$D\{n(T)\} = Nr_1\lambda \left[\lambda \int_0^T B_1(y)dy + \lambda \frac{r_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)(3-r_2b_2^*(\alpha))}{j\alpha(1-r_2b_2^*(\alpha))^2} \left(T - \frac{1-e^{-j\alpha T}}{j\alpha} \right) d\alpha + \right. \\ \left. + \kappa \int_0^T \left(B_1(y) + \frac{r_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{(1-r_2b_2^*(\alpha))} \left(\frac{1-e^{-j\alpha y}}{j\alpha} \right) d\alpha \right)^2 dy \right],$$

where $b_k^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha t} dB_k(t)$, $k = 1, 2$.

Using simulation experiments, we establish accuracy and applicability area of the obtained approximation for various values of intensity parameter N and observation time T .

Keywords: infinite-server queueing tandem; feedback; repeated flow; method of Markovian summation; asymptotic analysis.

SHKLENNIK Maria Alexandrovna (Assistant Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: shklennikm@yandex.ru

MOISEEV Alexander Nikolaevich (Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Software Engineering, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: moiseev.tsu@gmail.com

ZADIRANOVA Lyubov Alexandrovna (Candidate of Physics and Mathematics, “GazInformPlast” Well Testing Center, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: zhidkova@mail.ru

REFERENCES

1. Morozova, A.S., Moiseeva, S.P. & Nazarov, A.A. (2006) Investigation of the economic-mathematical model of discount for patrons influence on income of trading. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 293. pp. 49–52.
2. Zhidkova, L.A. & Moiseeva, S.P. (2013) Matematicheskaya model' potokov pokupateley dvukhproduktovoy trgovoy kompanii v vide sistemy massovogo obsluzhivaniya s povtornymi obrashcheniyami k blokam [A mathematical model of customer flows of a two-product trading company in the form of a queueing system with repeated calls to blocks]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*. 322(6). pp. 5–9.

3. Van Doorn, E.A. & Jagers, A.A. (2004) A Note on the GI/GI/infinity system with identical service and interarrival-time distributions. *Queueing Systems*. 47 pp. 45–52. DOI: 10.1023/B:QUES.0000032799.30173.b7
4. Whitt, W. (2006) Fluid models for multiserver queues with abandonments. *Operations Research*. 54. pp. 37–54. DOI: 10.1287/opre.1050.0227
5. Korolyuk, V.S., Melikov, A.Z., Ponomarenko, L.A. & Rustamov A.M. (2016) Methods for analysis of multi-channel queuing systems with instantaneous and delayed feedback. *Kibernetika i sistemnyy analiz – Cybernetics and Systems Analysis*. 52(1). pp. 58–70.
6. Takács, L. (1963) A single-server queue with feedback. *The Bell System Technical Journal*. 42. pp. 505–519.
7. Takács, L. (1977) A queuing model with feedback. *Operations Research*. 11. pp. 345–354.
8. Boxma, O.J. & Yechiali, U. (1997) An M/G/1 queue with multiple types of feedback and gated vacations. *Journal of Applied Probability*. 34(3). pp. 773–784.
9. Choi, B.D., Kim, B. & Choi S.H. (2003) An M/G/1 queue with multiple types of feedback, gated vacations and FCFS policy. *Computers & Operations Research*. 30(9). pp. 1289–1309. DOI: 10.1016/S0305-0548(02)00071-0
10. Melikov, A.Z., Aliyeva, S.H. & Sztrik, J. (2019) Analysis of queuing system MMPP/M/ K/K with delayed feedback *Mathematics*. 7(11). DOI: 10.3390/math7111128
11. Shklennik, M., Moiseeva, S. & Moiseev, A. (2017) Analysis of queueing tandem with feedback by the method of limiting decomposition. *Communications in Computer and Information Science*. 800. pp. 147–157. DOI: 10.1007/978-3-319-68069-9_12
12. Moiseeva, S.P., Morozova, A.S. & Nazarov, A.A. (2006) Investigation of the flow of appeals in infinite lines queueing system with repeated service. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 290. pp. 173–175.
13. Nazarov, A.A., Moiseeva, S.P. & Morozova, A.S. (2008) Analysis of queueing system with unlimited number of servers and feedback by the method of limiting decomposition. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13(55). pp. 88–92.
14. Shklennik, M.A. & Moiseev A.N. (2018) Analysis of Customers Flows in the Infinite-Server Queueing Tandem with Feedback. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 45. pp. 48–58. DOI: 10.17223/19988605/45/6
15. Moiseeva, S.P., Ananina, I.A. & Nazarov, A.A. (2009) Research of streams in system $M|GI|_{\infty}$ with repeated references the method of limiting decomposition. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(8). pp. 56–66.
16. Nazarov, A.A. & Moiseeva, S.P. (2006) *Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Asymptotic analysis method in queueing theory]. Tomsk: NTL.
17. Melikov, A., Zadiranova, L. & Moiseev A. (2016) Two Asymptotic Conditions in Queue with MMPP Arrivals and Feedback. *Communications in Computer and Information Science*. 678. pp. 231–240. DOI: 10.1007/978-3-319-51917-3_21
18. Moiseev, A. & Nazarov, A. (2012) Investigation of high intensive general flow. *Problems of Cybernetics and Informatics*. Proc. of the Fourth International Conference PCI'2012. Baku, September 12–14, 2012. Baku: IEEE. pp. 161–163.
19. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2014) Asymptotic Analysis of a Multistage Queueing System with a High-Rate Renewal Arrival Process. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 50(2). pp. 163–171.
20. Nazarov, A.A. & Dammer, D.D. (2019) A Study of Additionally Generated Flows in Systems with Unlimited Number of Devices and Recurrent Servicing with the Markov Summation Method. *Automation and Remote Control*. 80(12). pp. 2195–2205. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117919120087>
21. Shklennik, M.A. & Moiseev, A.N. (2021) Method of Markovian summation for study the repeated flow in queueing tandem $M|GI|_{\infty} \rightarrow GI|_{\infty}$. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*. 21(1). pp. 111–123. DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-1-111-123

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.873

DOI: 10.17223/19988605/56/5

Э.А. Головастова

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕНИ РАБОТЫ СИСТЕМЫ С НЕНАДЕЖНЫМИ РЕЗЕРВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ И ВОССТАНАВЛИВАЮЩИМ ПРИБОРОМ В УСЛОВИЯХ БЫСТРОГО РЕМОНТА ЭЛЕМЕНТА

Рассматривается модель с взаимозаменяемыми элементами с возможными отказами и одним надежным восстанавливающим прибором. Предполагается, что функция распределения времени работы элемента произвольная, а времени его восстановления – экспоненциальная. Получены соотношения, определяющие распределение времени работы всей системы, а также исследовано асимптотическое поведение этого распределения при условии быстрого ремонта элемента.

Ключевые слова: задача надежности; время безотказной работы системы; стохастические уравнения; преобразование Лапласа; асимптотическое поведение.

Одной из основных задач теории надежности является учет влияния отказов и сбоев компонент технических комплексов на эффективность работы всей системы. В частности, широкое распространение имеют функциональные системы, в которых есть как рабочие компоненты, так и компоненты, отвечающие за восстановление последних. Для такого рода моделей известны публикации, в которых рассматривается система с несколькими одинаковыми элементами, когда в каждый момент времени работает группа элементов [1] или один элемент, а другие находятся в холодном резерве или восстанавливаются [2–4]. Зачастую для определения нестационарных характеристик системы вводится марковский процесс, выписываются его уравнения Колмогорова и далее проводится их анализ [5, 6]. В подобном методе иногда можно значительно упростить нахождение искомой характеристики, установив некоторые ограничения для марковского процесса, как это выполнено, например, в работе [7]. Также характеристики системы можно определить с помощью методов имитационного моделирования [8]. Наконец, отметим: в силу того, что реальные технические комплексы должны быть устойчивыми к отказам, немаловажной задачей является вопрос предельной надежности резервированных систем, в частности, когда время работы их элементов больше времени восстановления [9, 10].

В данной работе мы рассмотрим модель системы с холодным резервом в условиях ее высокой надежности, а именно систему с n одинаковыми элементами и надежным восстанавливающим прибором при условии быстрого ремонта элемента. Установлено, что при соответствующей нормировке при увеличении скорости восстановления элемента распределение времени жизни системы сходится к экспоненциальному. Аналогичный результат был получен в работе [11], однако там распределения как времени работы, так и времени восстановления элемента полагались экспоненциальными; в настоящей работе только время восстановления элемента считается экспоненциальным, время работы элемента имеет произвольное непрерывное распределение.

1. Постановка задачи и математическая модель

В работе рассматривается система, состоящая из n одинаковых элементов, в которой в каждый момент времени работает только один элемент, называемый основным, а остальные находятся в хо-

лодном резерве. Основной элемент может выйти из строя, и тогда его сразу же заменяет любой резервный; отказавший элемент при этом немедленно отправляется восстанавливаться на прибор, который полагается надежным. Система выходит из строя в момент, когда все n элементов становятся неработоспособными.

Также мы предполагаем, что время восстановления сломанного элемента ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром μ , а время работы элемента η имеет распределение общего вида $G(t)$ ($G(t)$ – непрерывная функция для $t \geq 0$, у которой все моменты являются конечными). В частности, пусть $E\eta = b < \infty$. Считаем, что все случайные величины, задающие систему, взаимно независимы. Цель работы – получение соотношений для функции распределения времени безотказной работы системы, а также ее асимптотики при условии быстрого восстановления элемента.

Обозначим через τ_j – время до выхода из строя всей системы, если на момент начала ее работы имеется j неработоспособных элементов, $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Также пусть $m(0)$ – число неисправных элементов на момент начала работы первого основного элемента, $\zeta(\eta)$ – число восстановленных элементов за η – промежуток времени работы первого основного элемента. Так как время ремонта элементов имеет экспоненциальное распределение, то, если бы на момент начала работы системы число неисправных элементов было сколь угодно велико, число восстановленных элементов за время η равнялось бы числу требований пуассоновского потока интенсивности μ , пришедших за время η .

В соответствии с этим имеем условные вероятности:

$$P(\zeta(\eta) = k | m(0) = j; \eta) = e^{-\mu\eta} \frac{(\mu\eta)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, j-1, \quad j = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$P(\zeta(\eta) = j | m(0) = j; \eta) = 1 - \sum_{k=0}^{j-1} e^{-\mu\eta} \frac{(\mu\eta)^k}{k!}. \quad (1)$$

Мы рассматриваем систему при условии быстрого восстановления отказавших элементов. Это означает, что $1/E\xi = \mu \rightarrow \infty$. Это также означает, что при $\mu \rightarrow \infty$ имеет место следующая сходимость:

$$P(\xi > \eta) = \int_0^\infty e^{-\mu t} dG(t) = \varepsilon(\mu) \rightarrow 0. \quad (2)$$

Далее покажем, что при $\mu \rightarrow \infty$ для любого $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ выполнено условие

$$P(\varepsilon(\mu)^{n-1} \tau_j > t) \rightarrow e^{-\frac{t}{b}}. \quad (3)$$

Для краткости мы в дальнейшем иногда будем опускать в записи $\varepsilon(\mu)$ зависимость от аргумента и писать просто ε . По определению полагаем, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = 1$.

2. Распределение времени безотказной работы системы

Для определения времени безотказной работы системы мы используем метод, рассмотренный в работе [7]. То есть представим время работы системы как сумму промежутка времени работы первого основного элемента и оставшегося времени жизни системы. Тогда общее время безотказной работы системы определяется следующими стохастическими уравнениями (здесь $n > 2$):

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \eta + \tau_1, \\ \tau_1 &= (\eta + \tau_1) I(\zeta(\eta) = 1) + (\eta + \tau_2) I(\zeta(\eta) = 0), \\ \tau_j &= (\eta + \tau_j) I(\zeta(\eta) = j) + \sum_{k=0}^{j-1} (\eta + \tau_{j+1-k}) I(\zeta(\eta) = k), \quad 1 < j < n-1, \\ \tau_{n-1} &= (\eta + \tau_{n-1}) I(\zeta(\eta) = n-1) + \sum_{k=1}^{n-2} (\eta + \tau_{n-k}) I(\zeta(\eta) = k) + \eta I(\zeta(\eta) = 0) =, \end{aligned}$$

где $I(A) = 1$, $I(\bar{A}) = 0$ – индикатор события A .

Выполнив преобразование Лапласа–Стилтьеса от обеих частей равенства в предыдущих соотношениях, с учетом (1) получим следующую линейную алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(s) &= g(s)\varphi_1(s), \\
 \varphi_1(s) &= (g(s) - g_0(s))\varphi_1(s) + \varphi_2(s)g_0(s), \\
 \varphi_j(s) &= \left(g(s) - \sum_{k=0}^{j-1} g_k(s) \right) \varphi_1(s) + \sum_{k=0}^{j-1} g_k(s)\varphi_{j+1-k}(s), \quad 1 < j < n-1, \\
 \varphi_{n-1}(s) &= \left(g(s) - \sum_{k=0}^{n-2} g_k(s) \right) \varphi_1(s) + \sum_{k=1}^{n-2} g_k(s)\varphi_{n-k}(s) + g_0(s),
 \end{aligned} \tag{4}$$

где:

$$\begin{aligned}
 \varphi_j(s) &= E e^{-s\tau_j}, \quad g(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x), \quad g_0(s) = \int_0^\infty e^{-(s+\mu)x} dG(x), \\
 g_j(s) &= \int_0^\infty e^{-(s+\mu)x} \frac{(\mu x)^j}{j!} dG(x), \quad j=1, 2, \dots, n-2.
 \end{aligned}$$

Таким образом, условие (3) эквивалентно следующему условию сходимости:

$$\varphi_j(\varepsilon(\mu)^{n-1}s) \rightarrow \frac{1}{1+bs} \tag{5}$$

при $\mu \rightarrow \infty$ и для любого $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Также, учитывая (2), при $\mu \rightarrow \infty$ получим

$$\begin{aligned}
 g(\varepsilon^{n-1}s) &\sim 1 - \varepsilon^{n-1}bs, \\
 g_0(\varepsilon^{n-1}s) &\sim \varepsilon - \varepsilon^{n-1}s \int_0^\infty x e^{-\mu x} dG(x) = \varepsilon - \varepsilon^{n-1}s \gamma_0(\mu), \\
 g_j(\varepsilon^{n-1}s) &\sim g_j(0) - \varepsilon^{n-1}s \int_0^\infty x \frac{(\mu x)^j}{j!} e^{-\mu x} dG(x) = g_j(0) - \varepsilon^{n-1}s \gamma_j(\mu) \quad j=1, 2, \dots, n-2.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Отметим также, что

$$\begin{aligned}
 g_j(0) &= g_j(\mu, 0) \rightarrow 0, \quad j=1, 2, \dots, n-2; \\
 \gamma_j &= \gamma_j(\mu) \rightarrow 0, \quad j=0, 1, 2, \dots, n-2
 \end{aligned}$$

при $\mu \rightarrow \infty$.

3. Асимптотический анализ времени безотказной работы системы в предположении ее высокой надежности

Для двух элементов в рассматриваемой системе имеем следующий аналог соотношений (4) для уравнений преобразований Лапласа–Стилтьеса распределения ее времени работы:

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(s) &= g(s)\varphi_1(s), \\
 \varphi_1(s) &= (g(s) - g_0(s))\varphi_1(s) + g_0(s).
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\varphi_1(s) = \frac{g_0(s)}{1 - g(s) + g_0(s)}, \quad \varphi_0(s) = g(s)\varphi_1(s).$$

Поэтому, используя (6), получаем, что при $\mu \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 g(\varepsilon s) &\sim 1 - \varepsilon bs, \\
 g_0(\varepsilon s) &\sim \varepsilon - \varepsilon s \gamma_0 \sim \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Таким образом, следует, что функции $\varphi_0(\varepsilon s)$ и $\varphi_1(\varepsilon s)$ стремятся к $1/(1+bs)$ при $\mu \rightarrow \infty$, и (5) верно для двух элементов в системе.

Далее, при $n > 2$ и $\mu \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{\varphi_0(\varepsilon^{n-1}s)}{\varphi_1(\varepsilon^{n-1}s)} = g(\varepsilon^{n-1}s), \quad \frac{\varphi_0(\varepsilon^{n-1}s)}{\varphi_1(\varepsilon^{n-1}s)} \sim 1 - \varepsilon^{n-1}sb.$$

То есть $\varphi_0(\varepsilon^{n-1} s) \sim \varphi_1(\varepsilon^{n-1} s)$. Далее в целях представления рассуждений в более компактном и понятном виде мы иногда будем опускать зависимость от аргумента $\varepsilon^{n-1} s$ в записи функций $\varphi_j(s)$.

Разделив второе уравнение в (4) на φ_1 , получим

$$1 = (g - g_0) + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} g_0.$$

При $\mu \rightarrow \infty$, используя (6), справедливо следующее асимптотическое равенство:

$$1 \sim 1 - \varepsilon^{n-1} sb - \varepsilon + \varepsilon^{n-1} s \gamma_0 + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} (\varepsilon - \varepsilon^{n-1} s \gamma_0).$$

Оставляя в последнем выражении наиболее медленно убывающие по ε слагаемые, получаем

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \sim 1 + \varepsilon^{n-2} sb.$$

То есть $\varphi_2 \sim \varphi_1$ и $\varphi_2 \sim \varphi_1(1 + \varepsilon^{n-2} sb)$.

Для $2 < j < n - 1$, повторяя ту же самую процедуру, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_j}{\varphi_1} = & (g - g_0 - g_1 - \dots - g_{j-1}) + \\ & + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} g_{j-1} + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} g_{j-2} + \dots + \frac{\varphi_j}{\varphi_1} g_1 + \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_1} g_0. \end{aligned}$$

Снова, переходя в последнем равенстве к асимптотической эквивалентности, используя (6), мы, оставляя наиболее медленно убывающие по ε слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} 1 + \varepsilon^{n-j} sb \sim & 1 - \varepsilon + g_1(0) \times \varepsilon^{n-j} sb + \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_1} (\varepsilon - \varepsilon^{n-1} s \gamma_0), \\ \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_1} \sim & 1 + \varepsilon^{n-j-1} sb. \end{aligned}$$

То есть $\varphi_{j+1} \sim \varphi_1$ и $\varphi_{j+1} \sim \varphi_1 \times (1 + \varepsilon^{n-j-1} sb)$. В частности, $\varphi_{n-1} \sim \varphi_1$ и $\varphi_{n-1} \sim \varphi_1 \times (1 + \varepsilon sb)$.

Таким образом, при $\mu \rightarrow \infty$ справедливы соотношения: $\varphi_k(\varepsilon^{n-1} s) \sim \varphi_0(\varepsilon^{n-1} s)$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$, и $\varphi_j \sim \varphi_1 \times (1 + \varepsilon^{n-j} sb)$, $j = 2, \dots, n - 1$. В практическом отношении это означает, что при условии быстрого ремонта функция распределения времени жизни системы не зависит от числа неисправных элементов на момент начала ее работы. Однако эта функция распределения при увеличении скорости восстановления элементов сходится тем медленнее к предельному распределению, чем больше отказавших элементов на момент начала работы системы.

Разделим последнее уравнение системы (4) на φ_1 . Тогда с учетом последнего результата, оставив самые медленно убывающие по ε слагаемые в асимптотическом равенстве, мы получим

$$\begin{aligned} \varphi_1 \times (1 + \varepsilon sb) \sim & \varphi_1 \times (1 - \varepsilon + \varepsilon sb \times g_1(0)) + (\varepsilon - \varepsilon^{n-1} s \gamma_0), \\ \varphi_1 \times (\varepsilon + \varepsilon sb - \varepsilon sb \times & g_1(0)) \sim \varepsilon \times (1 - \varepsilon^{n-2} s \gamma_0). \end{aligned}$$

Итак, $\varphi_1(\varepsilon^{n-1} s) \sim 1/(1 + bs)$, когда $\mu \rightarrow \infty$, и, принимая во внимание полученные ранее соотношения, утверждение (5) также верно для любого $n > 2$.

4. Пример численного анализа

В этом разделе приведем результаты применения выводов проведенного теоретического исследования для конкретного примера, а именно: в условиях рассмотренной системы положим $n = 4$; в качестве распределения времени работы элемента возьмем распределение Эрланга с параметрами $k = 6$, $\theta = 1/6$, (т.е. здесь $b = 1$). Тогда, получив по формулам (4) выражения для преобразования Лапласа–Стилтьеса функций распределения времени жизни системы, построим их графики для различных значений параметра μ (рис. 1–4).

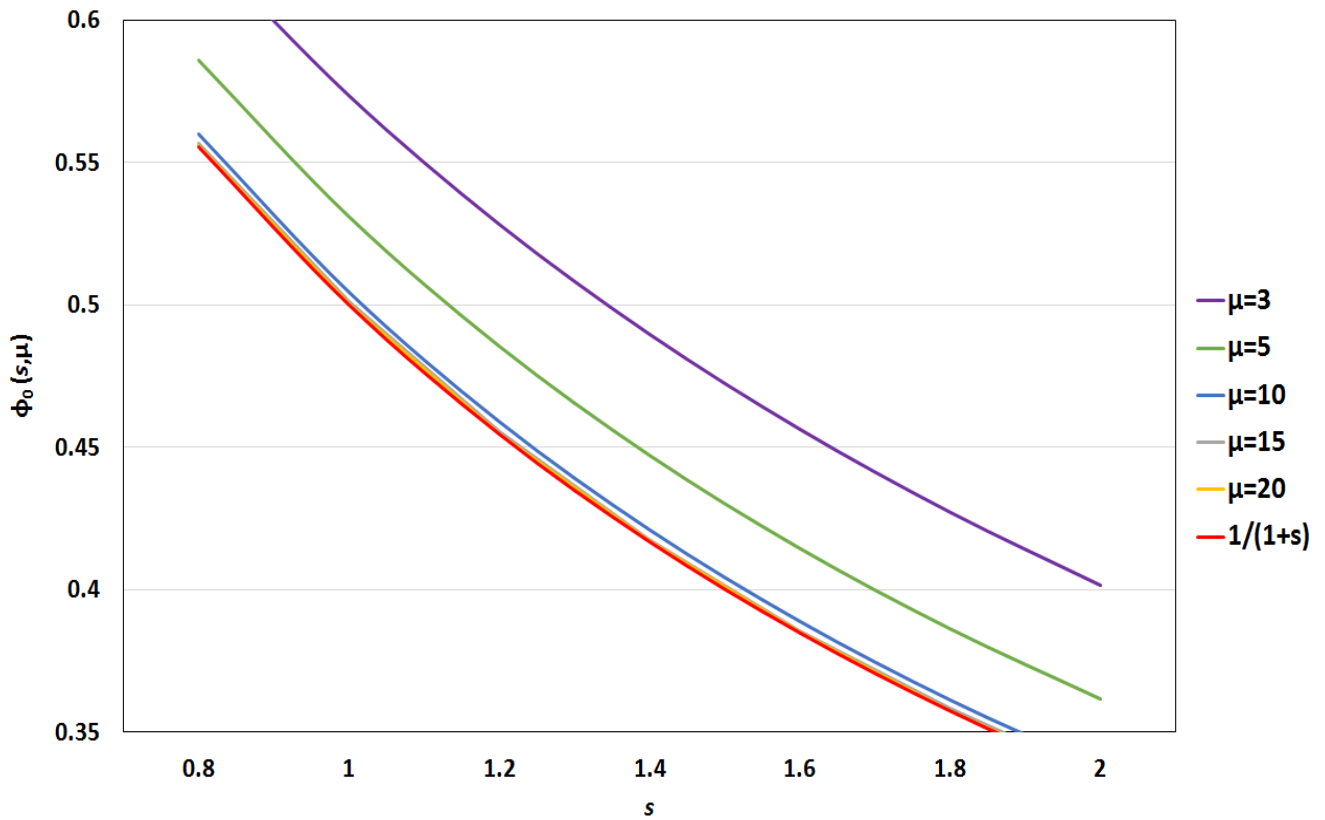


Рис. 1. Визуализация сходимости функции $\phi_0(s)$ при значениях параметра $\mu \in \{3, 5, 10, 15, 20\}$ к $(1+s)^{-1}$
 Fig. 1. Visualization of the convergence of the function $\phi_0(s)$ to $(1+s)^{-1}$ when $\mu \in \{3, 5, 10, 15, 20\}$

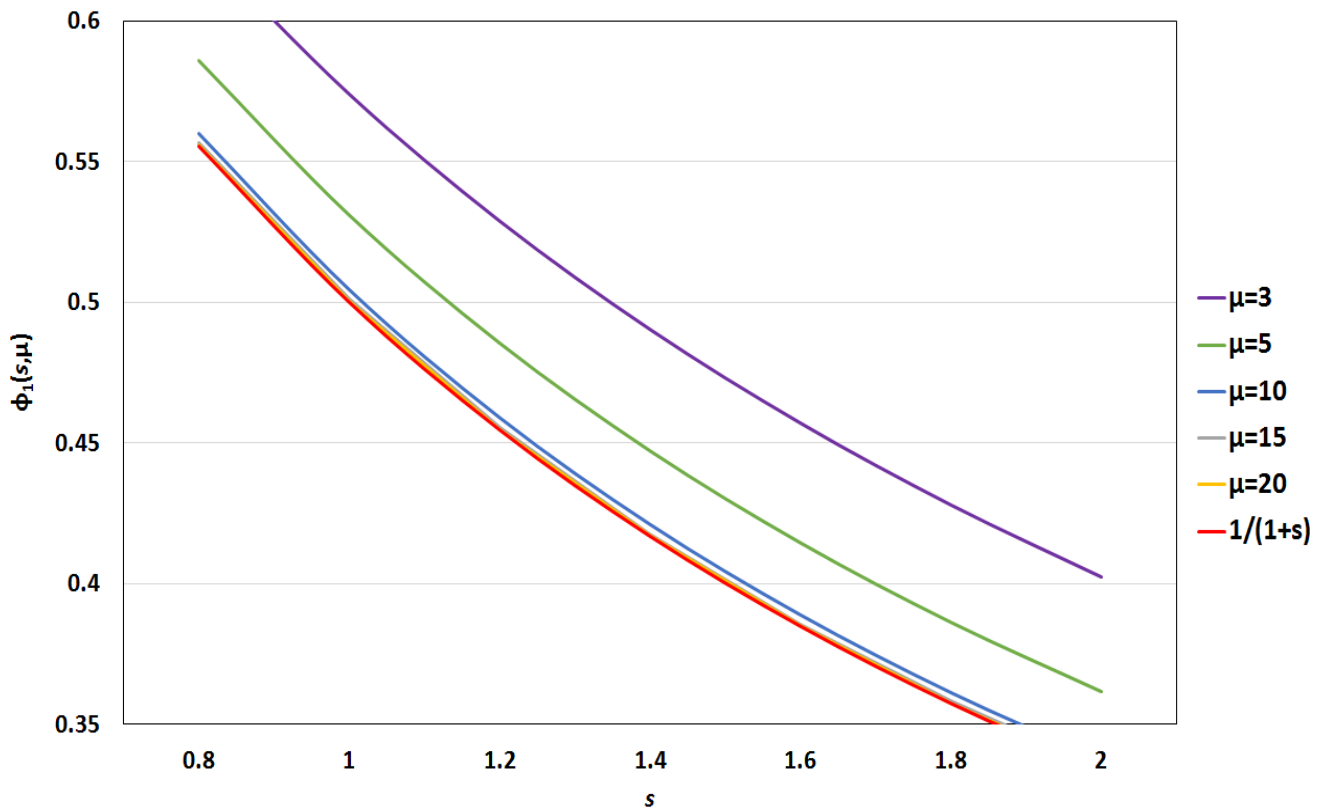


Рис. 2. Визуализация сходимости функции $\phi_1(s)$ при значениях параметра $\mu = 3, 5, 10, 15, 20$ к $(1+s)^{-1}$
 Fig. 2. Visualization of the convergence of the function $\phi_1(s)$ to $(1+s)^{-1}$ when $\mu \in \{3, 5, 10, 15, 20\}$

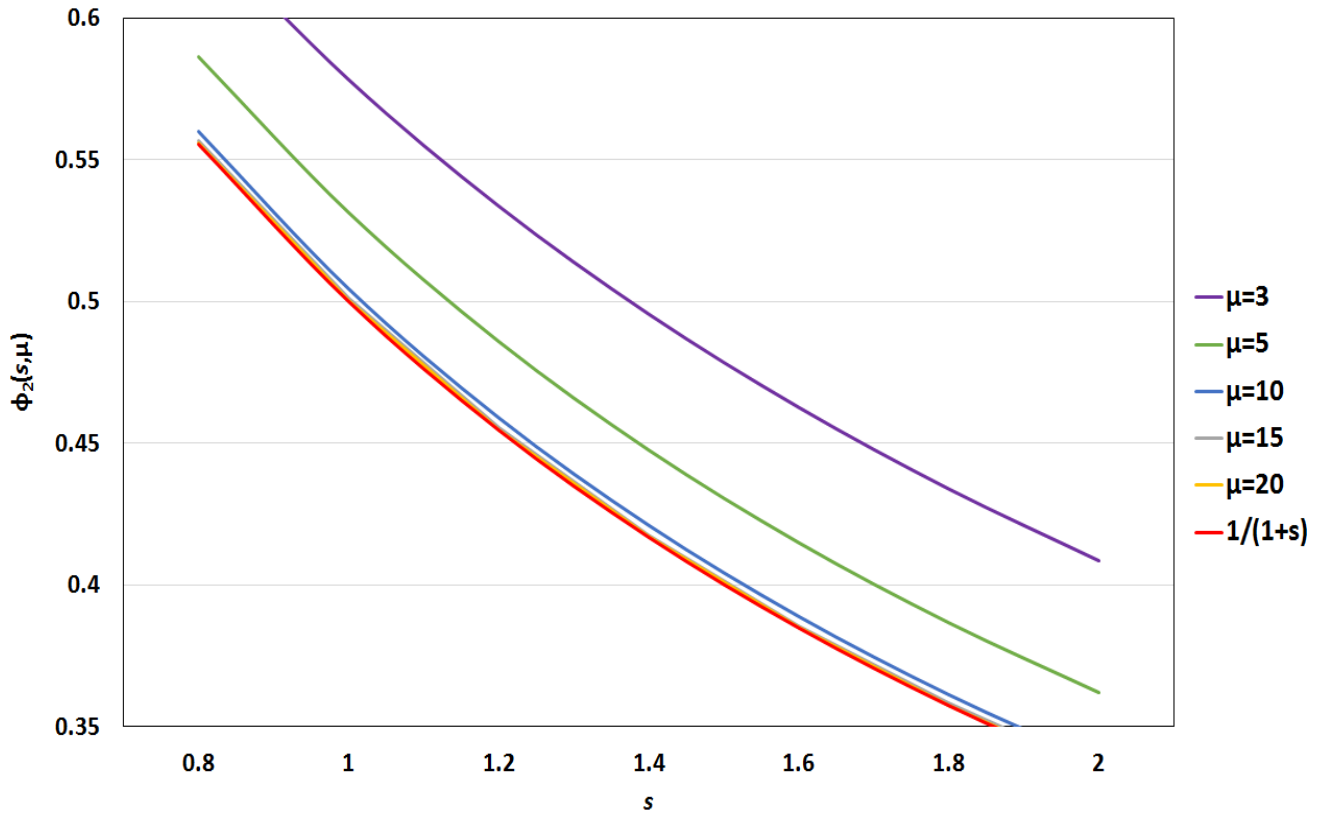


Рис. 3. Визуализация сходимости функции $\phi_2(s)$ при значениях параметра $\mu = 3, 5, 10, 15, 20$ к $(1 + s)^{-1}$
 Fig. 3. Visualization of the convergence of the function $\phi_2(s)$ to $(1 + s)^{-1}$ when $\mu \in \{3, 5, 10, 15, 20\}$

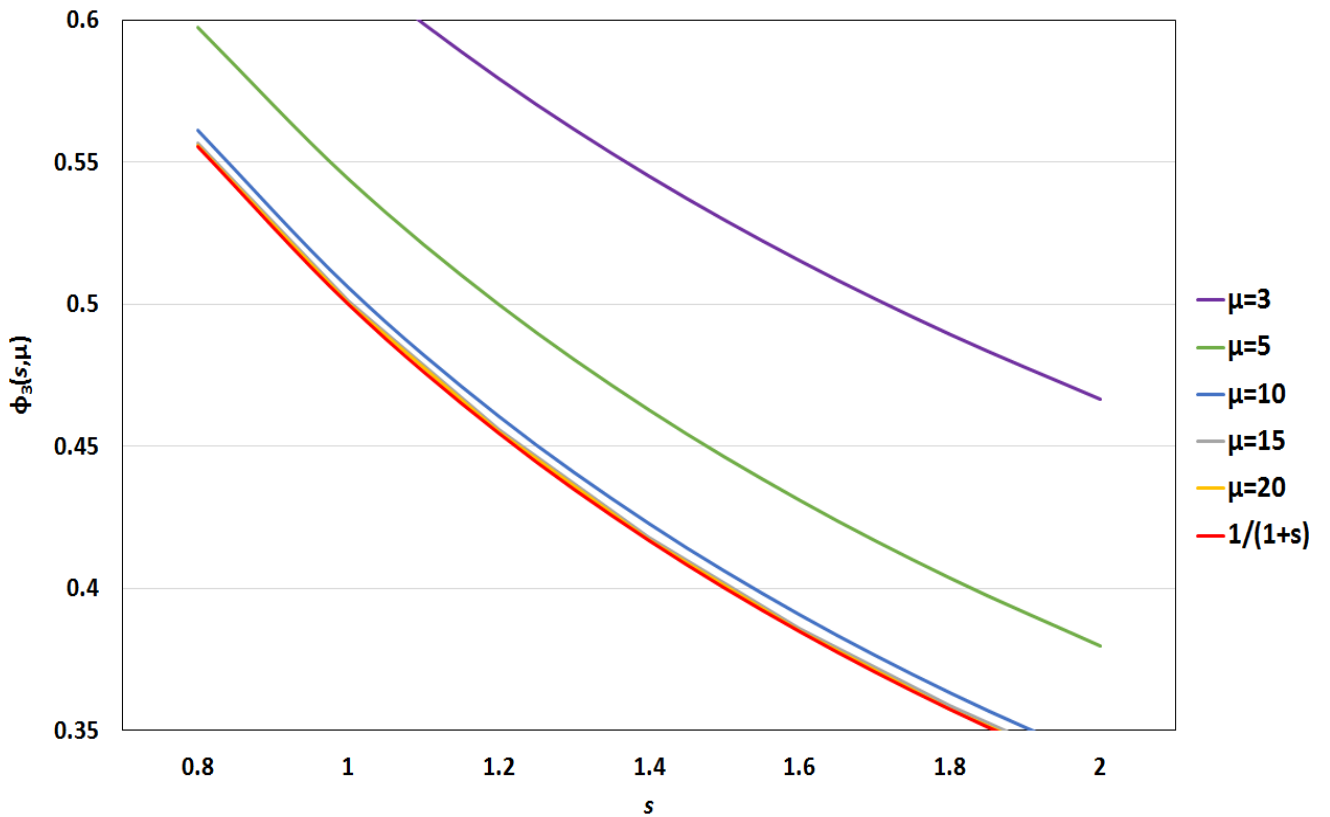


Рис. 4. Визуализация сходимости функции $\phi_3(s)$ при значениях параметра $\mu = 3, 5, 10, 15, 20$ к $(1 + s)^{-1}$
 Fig. 4. Visualization of the convergence of the function $\phi_3(s)$ to $(1 + s)^{-1}$ when $\mu \in \{3, 5, 10, 15, 20\}$

Таким образом, рис. 1–4 наглядно подтверждают теоретические выводы о сходимости к экспоненциальному закону и о скорости этой сходимости.

Заключение

В работе показано, что соотношения для преобразований Лапласа–Стилтьеса от функции распределения времени безотказной работы рассматриваемой системы имеют вид системы линейных алгебраических уравнений (4). При небольшом числе рабочих элементов можно выписать явные выражения для искомых неизвестных. В случае, когда число рабочих элементов достаточно велико, можно использовать программное обеспечение, реализующее алгоритмы решения систем уравнений подобного вида. Также доказано утверждение о сходимости распределения нормированной случайной величины, задающей время безотказной работы системы, к экспоненциальному закону при условии быстрого ремонта элементов (3), (5).

Благодарность. Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук Л.Г. Афанасьевой, профессору кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, за помощь в подготовке материала и ценные замечания в процессе оформления данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Потапов В.И., Потапов И.В. Об оптимизации среднего времени «жизни» однородных нейронных сетей нейрокомпьютеров с замещением отказавших нейронов резервными // Омский научный вестник. 2004. № 1 (26). С. 95–99.
2. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М. : Наука, 1965. 524 с.
3. Соловьев А.Д. О резервировании без восстановления // Энергия. Кибернетика – на службу коммунизму. 1964. Т. 2. С. 83–121.
4. Козлов Б.А. Резервирование с восстановлением. М. : Сов. радио, 1969. 150 с.
5. Ahmed W., Hasan O., Pervez U., Qadir J. Reliability Modeling and Analysis of Communication Networks // Journal of Network and Computer Applications. 2017. V. 78. P. 191–215. DOI: 10.1016/j.jnca.2016.11.008
6. Taranenko A.G., Gabrousenko Ye.I., Holubnychiy A.G., Lavrynenko O.Yu. Operational reliability management of the reserved electronic system // Электроника та системи управління. 2020. Т. 1, № 63. С. 86–91.
7. Головастова Э.А. Время работы системы со взаимозаменяемыми элементами, выходящими из строя, и ненадежным восстанавливающим прибором // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. № 52. С. 59–65. DOI: 10.17223/19988605/52/7
8. Уанкпо Г.Ж.К., Козырев Д.В. Программный комплекс имитационного моделирования и расчета стационарных вероятностей и оценки надежности резервированной системы с произвольными распределениями времени безотказной работы и ремонта ее элементов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. № 15 (3). С. 553–562.
9. Шебе Х., Шубинский И.Б. Предельная надежность структурного резервирования // Надежность. 2016. № 16 (1). С. 3–13. DOI: 10.21683/1729-2646-2016-16-1-3-13
10. Фокин Ю.А. Вероятностные методы в расчетах надежности электрических систем. М. : МЭИ, 1983. 216 с.
11. Афанасьева Л.Г., Головастова Э.А. Асимптотический анализ надежности системы с резервными элементами и восстанавливающим прибором // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 1. С. 16–22.

Поступила в редакцию 12 февраля 2021 г.

Golovastova E.A. (2021) ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE OPERATING TIME OF A SYSTEM WITH UNRELIABLE INTERCHANGEABLE ELEMENTS AND RECOVERY DEVICE UNDER CONDITIONS OF ELEMENT'S FAST REPAIR. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 56. pp. 41–48

DOI: 10.17223/19988605/56/5

This paper deals with following reliability problem. We have a system with n elements, which can be broken and one reliable recovery device, in following prepositions: the distributions of the element repairing period is exponential with parameter μ . The distribution of the element working period is arbitrary with the continuous distribution function $G(t)$ and finite expected value b . All the described random variables are assumed to be mutually independent. The purpose is to find the system working time distribution τ_j and the asymptotic distribution of the system lifetime under condition of the element's fast repair.

The found relations for the Laplace-Stieltjes transformations of the system operating time distribution function in the current problem have the form of a system of linear algebraic equations:

$$\begin{aligned}\varphi_0(s) &= g(s)\varphi_1(s), \\ \varphi_1(s) &= (g(s) - g_0(s))\varphi_1(s) + \varphi_2(s)g_0(s), \\ \varphi_j(s) &= \left(g(s) - \sum_{k=0}^{j-1} g_k(s) \right) \varphi_1(s) + \sum_{k=0}^{j-1} g_k(s)\varphi_{j+1-k}(s), \quad 1 < j < n-1, \\ \varphi_{n-1}(s) &= \left(g(s) - \sum_{k=0}^{n-2} g_k(s) \right) \varphi_1(s) + \sum_{k=1}^{n-2} g_k(s)\varphi_{n-k}(s) + g_0(s),\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\varphi_j(s) &= E e^{-s\tau_j}, \quad g(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x), \quad g_0(s) = \int_0^\infty e^{-(s+\mu)x} dG(x), \\ g_j(s) &= \int_0^\infty e^{-(s+\mu)x} \frac{(\mu x)^j}{j!} dG(x), \quad j = 1, 2, \dots, n-2.\end{aligned}$$

It is also proved, that the normalized distribution of the system operating time converges to an exponential law under the conditions of element's fast repair. Namely:

$$P(\varepsilon(\mu)^{n-1}\tau_j > t) \rightarrow e^{-\frac{t}{b}}$$

as $\mu \rightarrow \infty$, and for any $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$. The normalization factor is determined as follows:

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} dG(t) = \varepsilon(\mu).$$

Keywords: reliability problem; system failure time; stochastic equations; Laplace transform; asymptotic behavior.

GOLOVASTOVA Eleonora Aleksandrovna (Post-graduate Student, Lomonosov Moscow State University, Russian Federation).
E-mail: golovastova.elina@yandex.ru

REFERENCES

1. Potapov, V.I. & Potapov, I.V. (2004) Ob optimizatsii srednego vremeni "zhizni" odnorodnykh neyronnykh setey neyrokomp'yutеров s zameshcheniem otказavshikh neyronov rezervnymi [On optimization of the average life time of homogeneous neural networks of neurocomputers with replacement of failed neurons by reserve ones]. *Omskiy nauchnyy vestnik*. 1(26). pp. 95–99.
2. Gnedenko, B.V., Belyaev, Yu.K. & Soloviev, A.D. (1965) *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti* [Mathematical Methods in the Theory of Reliability]. Moscow: Nauka.
3. Soloviev, A.D. (1964) O rezervirovani bez vosstanovleniya [On redundancy without recovering]. *Energiya. Kibernetika – na sluzhbu kommunizmu*. 2 pp. 83–121.
4. Kozlov, B.A. (1969) *Rezervirovanie s vosstanovleniem* [On redundancy with recovering]. Moscow: Sov. radio.
5. Ahmed, W., Hasan, O., Pervez, U. & Qadir, J. (2017) Reliability Modeling and Analysis of Communication Networks. *Journal of Network and Computer Applications*. 78. pp. 191–215. DOI: 10.1016/j.jnca.2016.11.008
6. Taranenko, A.G., Gabrousenko, Ye.I., Holubnychi, A.G. & Lavrynenko, O.Yu. (2020) Operational reliability management of the reserved electronic system. *Electronics and Control Systems*. 63(1). pp. 86–91. DOI: 10.18372/1990-5548.63.14528
7. Golovastova, E.A. (2020) System operating time with unreliable interchangeable elements and precarious recovery device. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 52. pp. 59–65. DOI: 10.17223/19988605/52/7
8. Houankpo, H.G.K. & Kozyrev, D.V. (2019) Software tool for simulation and calculating stationary probabilities and reliability of a redundant system with arbitrary distributions of uptime and repair time of its elements. *Sovremennye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie – Modern Information Technologies and IT-education*. 15(3). pp. 553–562. DOI: 10.25559/SITITO.15.201903.553-562
9. Schäbe, H. & Shubinsky, I.B. (2016) Limit reliability of structural redundancy. *Dependability*. 16(1). pp. 3–13. DOI: 10.21683/1729-2646-2016-16-1-3-13
10. Fokin, Yu.A. (1983) *Veroyatnostnye metody v raschetakh nadezhnosti elektricheskikh sistem* [Probabilistic methods in calculating the reliability of electrical systems]. Moscow: MPEI.
11. Afanasieva, L.G. & Golovastova, E.A. (2021) Asymptotic analysis of reliability of a system with reserve elements and repairing device. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika*. 1. pp. 16–22.

УДК 004.94

DOI: 10.17223/19988605/56/6

Ю.В. Доронина, А.В. Скатков

ОСОБЕННОСТИ КВАЛИМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПОЛИМОДЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ С ПЕРЕМЕННОЙ ТОПОЛОГИЕЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-06015/19, 19-29-06023/19.

Предложен подход к оценке качества моделей в полимодельных комплексах на основе топологической типизации, формирующий векторное пространство статистического образа мультимоделирования и числовые меры верификации с точки зрения устойчивости статистик. Приведена схема каркаса системы поддержки принятия решений по динамической типизации топологии полимодельных комплексов, позволяющая повысить эффективность принимаемых решений по оценке качества моделирования сложных технических систем. **Ключевые слова:** полимоделирование; статистическая устойчивость; квазиоднородная модель; статистическая волатильность; векторное пространство; цепь Маркова; точность; вероятность перехода; число реализаций процесса; статистический образ.

Сложные технические системы (СТС) требуют высокого качества их моделей на этапах проектирования и / или анализа. Процессы функционирования СТС часто реализуются в условиях неопределенности состояний, отсутствия возможности натурных испытаний, высокой стоимости получения данных, сложности мониторинга состояний вследствие особых условий функционирования, высокой стоимости ресурсов [1, 2]. Примерами таких систем могут быть объекты нефтехимического и нефтегазового производства, АЭС, ТЭС, гидроэлектростанции, транспортные беспилотные объекты со сложной инфраструктурой и другие.

Наряду с указанными проблемами моделирование таких систем всегда связано с большой размерностью моделей в полимодельных комплексах (ПМК), сложностью построения планов моделирования в параметрическом модельном пространстве, проблемами квалиметрической оценки этих ПМК и другими факторами, которые рассмотрены в [3, 4]. Полимоделирование СТС должно осуществляться с учетом выбора оптимальной топологии ПМК, соответствующей задачам и априорным данным о функционировании СТС, создания комплекса квалиметрических оценок и метрик, которые формируют статистический портрет ПМК, что позволит получить полную картину качества ПМК и каждой модели в частности на этапах проектирования и / или анализа СТС.

Основные результаты в рассматриваемой области связаны с анализом качества моделей в рамках квалиметрии моделей [4–6]. Как отдельный показатель качества модели статистическая устойчивость позволяет исследовать статистики (функций выборки), в том числе стабильности частоты (относительной частоты) статистик [6].

Случайные модели не всегда в полной мере отражают специфику реальных событий, и на больших интервалах гипотеза идеальной статистической устойчивости не находит экспериментального подтверждения. На больших объемах данных уровень флуктуаций реальных статистик практически не изменяется или возрастает, что обусловлено невозможностью обеспечить повторяемость условий экспериментов, как отмечается в [7].

Вопросам оценки результатов имитационного моделирования уделялось много внимания, использовались критерии Стьюдента, Фишера, Манна–Уитни, Вилкоксона и др. Но в существующих

исследованиях недостаточно проработаны вопросы метрик устойчивости моделей. В то же время устойчивость – это фундаментальное свойство динамических систем, которое исследуется обычно в двух плоскостях: как реакция системы на внешние возмущения динамического характера и как изменение параметров в ответ на эти возмущения [8, 9].

Исследования авторов [10, 11] связаны с процедурой многокритериального структурно-функционального синтеза комплекса разнотипных моделей, описывающих с различной степенью детализации различные аспекты функционирования системы проактивного управления группировкой СТС в динамически изменяющейся обстановке, задаваемой как стохастическими и интервальными исходными данными, так и данными, имеющими нечетко-возможностный характер, позволившей на конструктивном уровне количественно оценить робастность и устойчивость программ проактивного управления сложными техническими системами на основе построения и аппроксимации областей достижимости логико-динамических моделей, описывающих структурную динамику рассматриваемых систем.

Таким образом, вопросы оценки статистической устойчивости моделей поднимались разными авторами либо как методологический аспект качества модели, либо в рамках других модельных свойств. Однако в практических задачах имитационного моделирования, например на основе марковских моделей, возникает выраженная проблема размерности выборки.

В представленном исследовании предложен подход к формированию комплекса квалитетических мер на основе следующей группы оценок: статистической устойчивости, волатильности марковской модели в задачах анализа системной динамики, в которых не детализируется источник возникновения неустойчивости, а анализируются свойства модели в ее выходных характеристиках. Предложенный подход отличается конструктивизмом, позволяя исследователю формулировать на основе некоторых оценок статистический портрет модели.

1. Общая постановка задачи квалитетического анализа ПМК

В качестве основы (базового уровня ПМК) для описания предложенного авторами подхода используется модель Маркова. Применение марковских моделей (ММ) к анализу надежности и прогнозированию временных характеристик СТС широко распространено [12], но не всегда результаты оказываются достоверными, в связи с этим целесообразно развивать механизмы решения задач анализа функционирования СТС с учетом оценки качества решений в рамках ММ.

Для решения задач квалитетического анализа одной ММ предложено два основных вида квалитетических оценок: статистическая устойчивость модели (СУМ) и статистическая волатильность модели (СВМ), на основе которых формулируются другие оценки [3, 6].

Для двух ММ, входящих в ПМК, их квалитетическая оценка представляет собой системное свойство по отношению к задаче моделирования. Обозначим ПМК как

$$PMK_{I,K,D}^i[(M_1^1, \dots, M_I^1), (M_1^2, \dots, M_K^2), \dots, (M_1^L, \dots, M_D^L)],$$

где $i = \overline{1, I}$, $k = \overline{1, K}$, $d = \overline{1, D}$, – индексы моделей типов 1, 2, ..., L соответственно.

Полимодельный комплекс $PMK_2^1[M_1^1, M_2^1]$, где M_1^1 и M_2^1 – две однотипные модели, обладает достаточным качеством для решения некоторой задачи моделирования Z, если в совокупности модели M_1^1 и M_2^1 обладают достаточным качеством для решения некоторой задачи, но каждая из моделей может им не обладать (либо обладать частично). В квалитетическом анализе ПМК на основе оценки СУМ необходимо также оценить чувствительность модели, которая может входить в противоречие с достаточностью СУМ. Проблема определения достаточности качества отдельных моделей в ПМК сложна, но нахождение наилучшего соответствия качества отдельных моделей, в том числе с учетом их чувствительности в ПМК, может быть осуществлено лицом, принимающим решение (ЛПР) на основе построения области Парето.

Рассмотрим понятия и метрики статистической устойчивости модели (СУМ) и соответствующей ей статистической чувствительности модели (СЧМ).

2. Некоторые понятия и метрики квалиметрического анализа полимодельных комплексов

Мера статистической устойчивости (СУ) определена для модели Маркова, реализованной в рамках одного из видов математических схем моделирования, и представляет собой квалиметрическую оценку ее устойчивости, которая, начиная с некоторых $n_i \geq n_0$, $l_i \geq l_0$, $k_i \geq k_0$, будет удовлетворять условию

$$\left| \gamma^{M_x}(\theta(n_i, l_i, k_i)) - \tilde{\gamma} \right|_{\varepsilon, p} \leq \Delta \gamma \quad (1)$$

с учетом условия сходимости по статистической вероятности, где M_x – обозначение некоторой имитационной модели, n – скаляр, задающий число сгенерированных цепочек ММ в выражении (1), $n = |N|$; l_m – длина m -й цепи Маркова, $l = |L|$; k – кратность запусков модели, $k = |K|$; $\Theta_{n,l,k}$ – многомерная матрица, которая может содержать результаты первичной статистики, на основе которой будет оценена СУ [6, 12].

Определение (1) может быть детализовано в зависимости от целей исследования и типа исследуемого объекта. Основным оценочный параметр – это γ^{M_x} (оценка текущей статистики модели), представляющий интерес для исследования статистики по полученным результатам экспериментов в виде вектора θ с учетом ε – точности модели, p – доверительной вероятности оценки параметров.

Следовательно, модель M_x может быть определена в общем случае как k -статистически устойчивая (n -, l -, ε -, p -статистически устойчивая) на основе заданного плана экспериментов $\Pi(n, l, k, \theta)$. Если обозначить D – множество допустимых планов ($J = |D|$), то $\Pi_j \langle n_j, l_j, k_j, \theta_j \rangle$ – реализуемый план.

Таким образом, если при исследовании СТС на основе ММ по схеме: *schema A*: $\|P_{ij}\| \xrightarrow{M_v} \|P_{ij}^{M_x}\| \xrightarrow{M_m} \|\theta\|$, где $\|P_{ij}\|$ – матрица переходов ММ; $\|P_{ij}^{M_m}\|$ – «восстановленная» матрица переходных вероятностей, содержащая статистические оценки P_{ij} , отклонение $\|P_{ij}^{M_m}\|$ в модели M_x не превысит заданную ЛПР величину $\tilde{\theta}$, то для плана экспериментов $\Pi(n, l, k, \theta)$ модель M_x будет считаться $\theta(k, \varepsilon, p)$ -статистически устойчивой и обозначаться $\gamma_k^{M_x}, \gamma_\varepsilon^{M_x}, \gamma_p^{M_x}$.

При наличии у ЛПР требований к точности оценки показателей режимов СТС, например $|R_N - R_t| < \varepsilon$ в диапазоне $\varepsilon = 0,01..0,025$, и ресурса, позволяющего проводить не более чем $k = 20$ запусков модели, при изменении числа сгенерированных цепочек ММ от 100 до 200 и $\varepsilon = 0,015$ по результатам моделирования оценка СУ по мере $\Delta \gamma_{\varepsilon_1, p_1, k_1}^{M_1}$ колеблется от 0,67 до 0,81, что весьма существенно при принятии решений о наличии проблемной ситуации при исследовании перехода в состояние отказа. Если требования к ресурсам не позволяют проводить дополнительные запуски модели и увеличить число переходов, то модель может считаться $\Delta \gamma_{\varepsilon_1, p_1, k_1}^{M_1}$ устойчивой при $\varepsilon = 0,015$, $n = 100$, $k = 20$.

Для полноты описания СУ целесообразно оценить чувствительность модели на основе плана $\Pi_j \langle n_j, l_j, k_j, \theta_j \rangle$, где θ представляет собой $\Delta \lambda_\varepsilon^{M_1}(n, l_j)$ – оценку нестабильности модели относительно некоторых условий и n – числа сгенерированных цепочек ММ, $n = |N|$, и l_m – длины m -й цепи Маркова, $l = |L|$ [6].

Определение 1. Модель M_x , реализованная по одной из математических схем моделирования, является статистически чувствительной, если для квазиметрической оценки ее устойчивости, с учетом условия сходимости по статистической вероятности, начиная с некоторых $n_i \geq n_0$, $l_i \geq l_0$, $k_i \geq k_0$, условие (1) не выполняется при наличии одного из условий.

Условие 1.1 определяет зависимости от начального распределения вероятностей $(P_1(t_0), P_2(t_0), \dots, P_x(t_0))$, когда с учетом выбранной точности $\varepsilon^{M_1} \geq 0$ справедливо $\Delta\lambda_\varepsilon^{M_1}(n_i, l_j | P_\alpha(t_0)=1) \neq \Delta\lambda_\varepsilon^{M_1}(n_i, l_j | P_\beta(t_0)=1) | \varepsilon^{M_1}$, $\alpha, \beta \in x$, где x – конечное множество состояний исследуемой системы.

Условие 1.2 определяет зависимости от числа шагов H до финального распределения вероятностей (при наличии стационарного режима модели M_x).

На рис. 1 показаны результаты моделирования отклонений восстановленного значения P_{ij} модели M_x при изменении начального состояния в распределении вероятностей в зависимости от числа переходов N и длины цепочек L и приведены оценки чувствительности ММ при изменении начального состояния в распределении вероятностей в зависимости от осредненных отклонений числа переходов N и длины цепочек L по реализациям планов для $N = 10, L = 10$. Результаты моделирования отражают значительную нестабильность статистик на малых объемах выборок и сглаживаются при статистически устойчивых параметрах планов моделирования. Для уточнения свойств моделей на основе понятия СУ определяется метрика СУ некоторого параметра модели, которая позволяет исследовать отдельные значимые параметры модели.

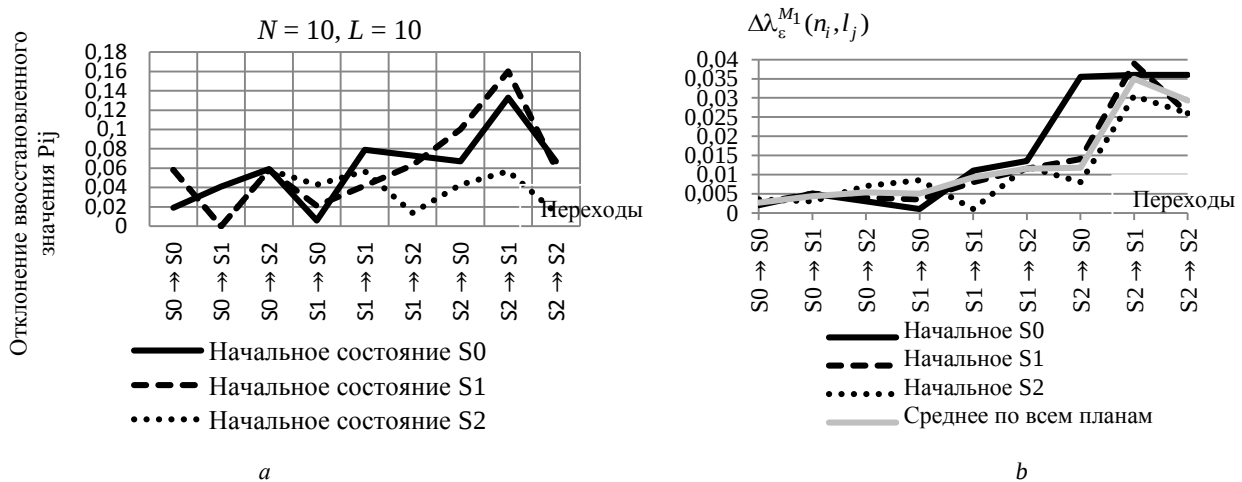


Рис. 1. Результаты моделирования: а – отклонений восстановленного значения P_{ij} в ММ при изменении начального состояния в распределении вероятностей для $N = 10, L = 10$; б – оценки чувствительности ММ $\Delta\lambda_\varepsilon^{M_1}(n_i, l_j)$

относительно изменении начального состояния в распределении вероятностей

Fig. 1. Results of modeling: а – deviations of the restored value of P_{ij} in MM with a change in the initial state in the probability distribution $N = 10, L = 10$ б – Estimates of MM $\Delta\lambda_\varepsilon^{M_1}(n_i, l_j)$ sensitivity with respect to changes in the initial state in the probability distribution

Статистическая устойчивость исследуемого параметра моделью (СУ ИПМ) понимается как СУ СВ оценки некоторого исследуемого параметра в смысле неравенства (1). Например, при исследовании риска ТС, с учетом того, что риск определяется как $L = P \cdot Z$, где P – вероятность отказа устройства и ее стоимость. Если Z – детерминированная, то P – случайная величина, следовательно, L обладает теми же свойствами что и P , а значит, может быть определена СУ ИПМ.

Тогда, для M_x и исследуемого параметра α : $\alpha_{\min} \leq \alpha_i \leq \alpha_{\max}$, $i = \overline{1, I}$ (или $\alpha_{\min} \geq \alpha_i \geq \alpha_{\max}$), СУ этого параметра $\gamma^{\alpha|M_x}$ (как оценки текущей статистики исследуемого параметра α моделью M_x)

при условии $\Delta\gamma_{\min}^{\alpha} < \Delta\gamma^{\alpha} < \Delta\gamma_{\max}^{\alpha}$ и начиная с некоторых $n_i \geq n_0$, $l_i \geq l_0$, $k_i \geq k_0$ (модельных параметров) будет удовлетворять условию $|\gamma^{\alpha|M_x}(\theta(n_i, l_i, k_i)) - \tilde{\gamma}|_{\varepsilon, p} \leq \Delta\gamma^{\alpha}$.

Для двух значимых параметров СТС α, β , с учетом

$$\begin{cases} \alpha_{\min} \leq \alpha_i \leq \alpha_{\max}, & i = \overline{1, I}, \\ \beta_{\min} \leq \beta_j \leq \beta_{\max}, & j = \overline{1, J}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \alpha_{\min} \geq \alpha_i \geq \alpha_{\max}, & i = \overline{1, I}, \\ \beta_{\min} \geq \beta_j \geq \beta_{\max}, & j = \overline{1, J}, \end{cases} \quad (2)$$

СУ этих параметров $\gamma^{\alpha|M_x}$ и $\gamma^{\beta|M_x}$, исследуемых на основе модели M_x имеет вид:

$$\begin{aligned} |\gamma^{\alpha|M_x}(\theta(n_i, l_i, k_i)) - \tilde{\gamma}|_{\varepsilon, p} &\leq \Delta\gamma^{\alpha}, \quad |\gamma^{\beta|M_x}(\theta(n_i, l_i, k_i)) - \tilde{\gamma}|_{\varepsilon, p} \leq \Delta\gamma^{\beta}, \text{ а при } \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in \{A\} \\ \left\{ \begin{aligned} &|\gamma^{\alpha_1|M_x}(\theta(n_i, l_i, k_i)) - \tilde{\gamma}|_{\varepsilon_{\alpha_1}, p_{\alpha_1}} \leq \Delta\gamma^{\alpha_1}, \\ &\dots \\ &|\gamma^{\alpha_n|M_x}(\theta(n_i, l_i, k_i)) - \tilde{\gamma}|_{\varepsilon_{\alpha_n}, p_{\alpha_n}} \leq \Delta\gamma^{\alpha_n}, \end{aligned} \right. \quad (3) \end{aligned}$$

где A – множество значимых параметров СТС.

На основе принципа монотонности системы модель M_x будет считаться устойчивой, т.е. (3) будет эквивалентно (1). Следовательно, оценка СУ ИПМ как одного или нескольких значимых параметров СТС позволит получить квалитетическую оценку модели M_x , что является важным для исследования качества ПМК в целом.

Статистической волатильностью исследуемого параметра в модели (СВ ИПМ) называется волатильность, представленная случайной функцией

$$v_{\kappa}^{\delta}(t) = (p_{\kappa}^{\delta}(t), \vartheta): \kappa \in K, \delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max},$$

где ϑ – мера волатильности исследуемого параметра, $p_{\kappa}^{\delta}(t)$ – вероятность, определяемая на основе статистических испытаний параметра κ из множества исследуемых параметров K (в натуральных или имитационных испытаниях), δ – требуемая точность оценки параметра κ с учетом стандартного отклонения s [13].

Для двух значимых параметров СТС α, β с учетом условия (4) выражение (8), определяющее оценку волатильности модели в целом, примет вид:

$$v_{i,j}^{\delta}(t) = \prod_{i=\alpha} \prod_{j=\beta} (p_{i,j}^{\delta}(t), \vartheta): \alpha, \beta \in K, \delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max},$$

где $v_{i,j}^{\delta}(t)$ – полная волатильность модели M_x , оцененная на основе двух значимых параметров α, β .

Мера волатильности представляет собой в общем случае интервал математического ожидания СВ оценки волатильности модели. Для оценки доверительного интервала в простейшем случае применяется статистика Стьюдента. С учетом ввода переменных $T = \frac{\tilde{m}_x - m_x}{\sqrt{\tilde{D}/n}} \in S_{n-1}$, где S_{n-1} – распределение по закону Стьюдента, $\tilde{m}_x$ – оценка математического ожидания, $\tilde{D}$ – оценка дисперсии распределения, получим $\frac{\varepsilon}{\sigma_{\tilde{m}} \cdot \sqrt{2}} = S^{-1}(\beta)$, $\varepsilon = \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}} S^{-1}(\beta)$.

Моделирование СВ ММ M_x в диапазоне параметров $n_1 = 1..100$, $n_2 = 1..200$, $l = 1..110$ показало существенное повышение неустойчивости модели (волатильности) относительно математического ожидания при уменьшении кратности запусков модели в два раза.

Приведенные в исследовании некоторые основные метрики позволили сформировать статистический портрет модели (СПМ) и представить его геометрическую интерпретацию. Получение СПМ осуществляется с учетом особенностей топологии ПМК конкретной СТС КП.

3. Топология полимодельных комплексов и их статистические образы

Моделирование СТС часто связано с накопительной проблемой размерности моделей, что осложняет оценку их качества. Но наряду с размерностью существует накопительная сложность из типизации, выраженной в различной топологии моделей. На рис. 2 предложены укрупненная внешняя классификация топологий ПМК и описание уровней в каскадах ПМК.

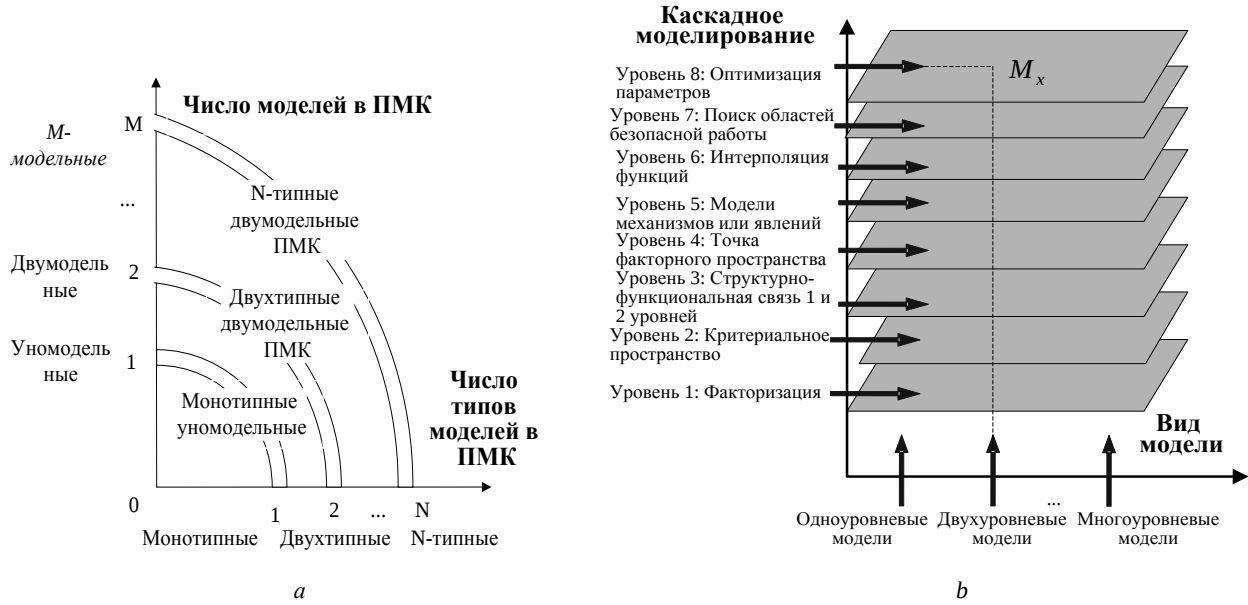


Рис. 2. Укрупненные схемы: *a* – внешняя классификация топологий ПМК; *b* – описание уровней
Fig. 2. Enlarged diagrams: *a* – external classification of PMC topologies; *b* – description of the levels

Представленная схема классификации топологий ПМК (на основе внешней и уровневой классификаций) позволит выбирать получаемые оценки качества отдельных моделей и комплекса в целом. Если модель M_x может быть определена в общем случае как k -статистически устойчивая (или n -, l -, ε -, p -статистически устойчивая) на основе заданного плана экспериментов $\Pi(n, l, k, \theta)$ при определенном ЛПР D -множестве допустимых планов ($J = |D|$) и $\Pi_j \langle n_j, l_j, k_j, \theta_j \rangle$ – реализуемом плане, то монотипный уномодельный ПМК в общем случае будет иметь СУ (1) и некоторую СВМ, то статистическая оценка $O_{i,j}^{M_x}$ уномодельного ПМК (или его статистический образ) представляет собой кортеж $O_{i,j}^{M_x} : \langle \Gamma_{i,j}^{M_x}, N_{i,j,\dots}^{\delta}(t, \rho) \rangle$; $t_0 \leq t \leq t'$, $\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}$; $i = \overline{1, I}$; $j = \overline{1, J}$, где $\Gamma_{i,j}^{M_x}$ – оценка СУ ПМК; $N_{i,j,\dots}^{\delta}(t, \rho)$ – оценка СВ ПМК при ρ – параметре, определяемом ЛПР.

Статистическая оценка $O_{i,j}^{M_x}$ M -модельного ПМК (статистический M -образ) в момент времени t с учетом $t_0 \leq t \leq t'$, $\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}$; $i = \overline{1, I}$; $j = \overline{1, J}$ представляет собой систему

$$O_{i,j}^{M_{x1}, \dots, M_{xm}} : \langle \Gamma_{i,j}^{M_{x1}, \dots, M_{xm}}, N_{i,j,\dots}^{[M_{x1}, \dots, M_{xm}], \delta}(t, \rho) \rangle. \quad (4)$$

Типизация ПМК означает возможную вариабельность при оценке качества ПМК в целом на основе входящих в него моделей. Статистическая оценка $O_{i,j}^{T_i | M_x}$ M -модельного T_i -типа ПМК (статистическое описание ПМК) с учетом $t_0 \leq t \leq t'$, $\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}$ ($i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J}$, $T_i \in \{T\}$) представляет собой систему

$$\begin{cases} O_{i,j...}^{T1|M_{x1}...M_{xm}} :< \Gamma_{i,j...}^{T1|M_{x1}...M_{xm}}, N_{i,j...}^{T1|M_{x1}...M_{xm}} \delta(t, \rho), \\ O_{i,j...}^{T2|M_{x1}...M_{xm}} :< \Gamma_{i,j...}^{T2|M_{x1}...M_{xm}}, N_{i,j...}^{T2|M_{x1}...M_{xm}} \delta(t, \rho), \\ \dots \\ O_{i,j...}^{Tm|M_{x1}...M_{xm}} :< \Gamma_{i,j...}^{Tm|M_{x1}...M_{xm}}, N_{i,j...}^{Tm|M_{x1}...M_{xm}} \delta(t, \rho). \end{cases} \quad (5)$$

В определенных случаях однотипные модели могут быть оценены по наиболее важным параметрам или оцениваться по аналогии.

Статистический образ ПМК (СО ПМК) представляет собой оценку $O_{i,j}^{T|M_x^y}$ в векторном пространстве, для описания свойств которого сформулируем следующие определения.

Определение 1. Набор n свойств модели M_x ($x_1, x_2, \dots, x_n$) называется вектором свойств x модели M_x размерности n . Числа x_i вектора свойств модели M_x называются координатами вектора x модели M_x . Пусть V – произвольное непустое множество, элементы которого мы будем называть векторами оценки модели M_x . Зададим поле K , элементы которого будем называть скалярами, представляющими собой задачи оценки ПМК.

Определение 2. Совокупность всевозможных векторов, описывающих x свойств моделей вида $O_{i,j}^{T|M_x^y}$ размерности n , в которой на множестве V определена внутренняя бинарная алгебраическая операция, которую мы будем обозначать знаком «+» и называть сложением векторов свойств моделей.

На множестве V определена внешняя бинарная алгебраическая операция, которую мы будем называть умножением вектора на скаляр и обозначать знаком умножения, т.е. определены два отображения: $V \times V \rightarrow V, \quad \forall x, y \in V, \quad (x, y) \rightarrow x + y \in V; \quad K \times V \rightarrow V, \quad \forall \lambda \in K, \quad \forall x \in V, \quad (\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x \in V$. Множество V_n вместе с этими двумя алгебраическими операциями называется векторным пространством свойств ПМК над полем K , если выполняются аксиомы для векторных пространств (коммутативность, ассоциативность, умножение и т.п.).

Утверждение 1. Если ранг матрицы плана экспериментов статистических оценок больше или равен рангу матрицы статистической оценки $\|\theta\|$ в плане $\Pi(n, l, k, \theta)$, т.е. $r[\Pi(n, l, k)] = r[\Pi(\theta)]$, то разложение оценок в векторном пространстве V_n существует. Доказательство утверждения 1 может быть выполнено как следствие известной теоремы Кронекера–Капелли.

Определение 3. Пусть вектор, отражающий свойства x_0 модели M_x , принадлежит векторному пространству V_n : $x_0 \in V_n$. Множество векторов, отражающих комплекс свойств M_x , $x \in V_n$, удовлетворяющих неравенству $\max \rho(x, x_0, t) < h(t)$, называется шаром свойств ПМК радиуса $h(t)$ – в момент времени t , $t_0 \leq t \leq t'$, т.е. с центром в точке x_0 . Множество векторов, отражающих свойства множества моделей M_x в ПМК: $x \in R_n$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, x_0, t) \leq h(t)$, $t_0 \leq t \leq t'$, называется замкнутым шаром переменного радиуса, зависящего от времени $h(t)$, с центром в точке x_0 и формирует полярную систему координат свойств моделей в ПМК относительно свойства x_0 .

Определение 4. Статистический образ ПМК является регулярным, если он формируется при условии равенства всех углов между векторами множества $x \in V_n$.

Приведенные определения 1–4 являются основными при описании ПМК, но на их основе формулируются и другие свойства, касающиеся особенностей формирования ПМК различных типов. На рис. 3 изображены представления статистического образа квалитетической оценки ПМК из M_n моделей и $h(t)$.

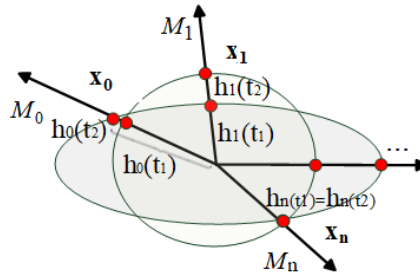


Рис. 3. Представление статистического образа квалиметрической оценки ПМК из M_n моделей
Fig. 3. Representation of the statistical image of the qualimetric assessment of the PMC from the M_n models

Сложность формализации квалиметрических оценок ПМК обусловлена как сложностью и неординарностью их топологий, так и необходимостью построения векторных пространств для статистического описания ПМК. В связи с этим предлагается следующая схема системы поддержки принятия решений (СППР) по динамической типизации топологии ПМК (рис. 4).

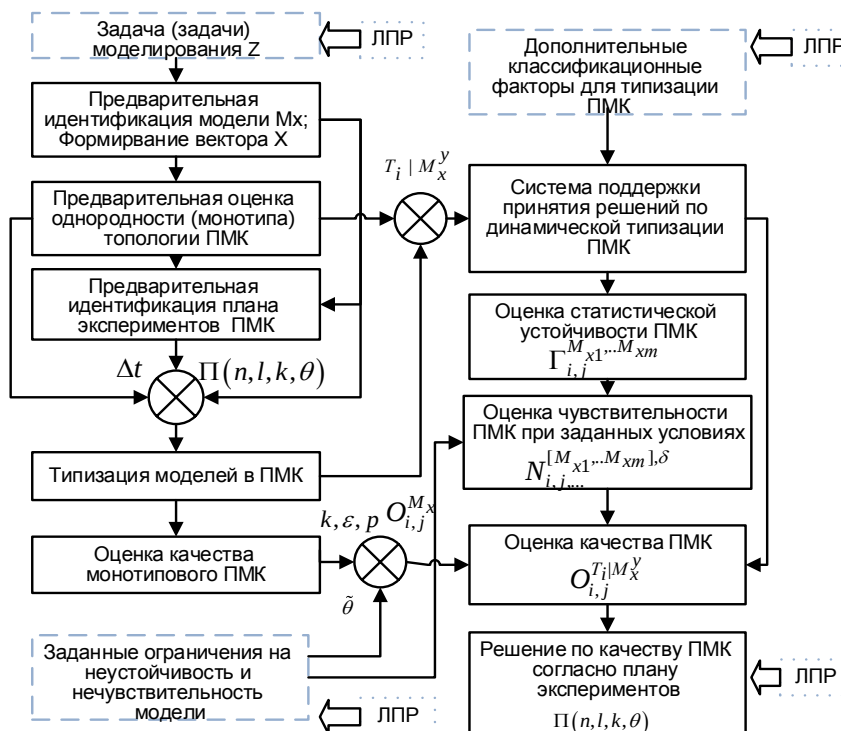


Рис. 4. Схема каркаса системы поддержки принятия решений по динамической типизации топологии ПМК
Fig. 4. Diagram of the framework of the decision support system for dynamic typing of the PMC topology

Изображенная на рис. 4 схема каркаса СППР по динамической типизации топологии ПМК имеет несколько точек, требующих решения ЛПР, и формирует возможность реализовать автоматизацию отдельных компонент, что позволит повысить эффективность и оперативность принимаемых решений по оценке качества ПМК при исследовании СТС критического применения, требующих детальной проработки моделей.

Заключение

При функционировании СТС критического применения важнейшей задачей выступает обеспечение качества моделей, которые представляют собой ПМК со сложной, в большинстве случаев переменной топологией. Предложенные перспективные исследования, связанные с формированием оценок и метрик СУМ, СВМ, СО ПМК, позволяют оценить степень неустойчивости статистик в зави-

симости от объема повторных запусков модели. Для моделей больших размерностей и с переменным числом запусков можно получить числовую меру верификации модели с точки зрения устойчивости статистик; приведен принцип описания свойств моделей в полярной системе координат свойств моделей для ПМК относительно свойства χ_0 , что представляет собой его статистический образ. В статье предложены принципы динамической типизации топологий ПМК и представлен каркас СППР, что позволит повысить эффективность и оперативность принимаемых решений по оценке качества ПМК. В дальнейших исследованиях авторы предполагают расширить множество статистических метрик ПМК, а также уточнить структуру СППР для решения задач квалиметрического анализа прикладной СТС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Okhtilev M.Yu., Gnidenko A.S., Alferov V.V., Salukhov V.I., Nazarov D.I. Methods and Algorithms of Integrated Modeling of Complex Technical Objects in Dynamically Changing Conditions // Proceedings of the International Scientific Conference MMET NW. 2018. P. 282–284.
2. Panella I., Hardwick G. Model Oriented System Design Applied to Commercial Aircraft Secondary Flight Control Systems // Simulation and Modeling Methodologies, Technologies and Applications. SIMULTECH 2017. Advances in Intelligent Systems and Computing / M. Obaidat, T. Ören, F. Rango (eds.) Springer, Cham., 2019. V. 873. P. 55–76.
3. Доронина Ю.В., Скатков А.В. Каскадно-иерархическое моделирование в задачах анализа динамики ресурсных характеристик сложных систем // Информационно-управляющие системы. 2020. № 3. С. 48–58. DOI: 10.31799/1684-8853-2020-3-48-58
4. Микони С.В., Соколов Б.В., Юсупов Р.М. Квалиметрия моделей и полимодельных комплексов. М. : РАН, 2018. 314 с.
5. Андрианов Ю.М., Суббето А.И. Квалиметрия в приборостроении. Л. : Машиностроение, 1990. 216 с.
6. Доронина Ю.В., Скатков А.В. Анализ статистической устойчивости стационарных Марковских моделей // Труды СПИИРАН. 2019. Т. 18, № 5. С. 1119–1148. DOI: 10.15622/sp.2019.18.5.1119-1148
7. Gorbani I.I. The Statistical Stability Phenomenon. Springer, 2017. 361 p.
8. Кондрашков А.В., Пичугин Ю.А. Идентификация и статистическая проверка устойчивости модели Вольтерры // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2014. № 1 (189). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/identifikatsiya-i-statisticheskaya-proverka-ustoychivosti-modeli-volterry> (дата обращения: 21.03.2019).
9. Laaksonen O., Peltoniemi M. The essence of dynamic capabilities and their measurement // International Journal of Management Reviews. British Academy of Management. 2018. V. 20 (2). P. 184–205.
10. Chen N., Majda A.J. Conditional gaussian systems for multiscale nonlinear stochastic systems: prediction, state estimation and uncertainty quantification // Entropy. 2018. V. 20, № 7. P. 1–80.
11. Dolgui A., Ivanov D., Sokolov B. Scheduling of recovery action in supply chain with resilience analysis consideration // International Journal of Production Research. 2018. V. 56, № 19. P. 6473–6490. URL: <http://www.tandfonline.com/loi/tprs20> (дата обращения: 21.03.2019).
12. Langville A., Meyer C. Updating Markov chains with an eye on Google's PageRank // SIAM J. on Matrix Analysis and Applications. 2006. V. 27 (4). P. 968–987.
13. Degiannakis S., Floros C. Methods of Volatility Estimation and Forecasting // Modelling and Forecasting High Frequency Financial Data. London : Palgrave Macmillan, 2015. P. 58–109.

Поступила в редакцию 12 февраля 2021 г.

Doronina Yu.V., Skatkov A.V. (2021) FEATURES OF QUALIMETRIC ANALYSIS OF POLYMODEL COMPLEXES WITH VARIABLE TOPOLOGY IN THE STUDY OF COMPLEX TECHNICAL SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science] 56. pp. 49–58

DOI: 10.17223/19988605/56/6

The paper considers aspects of the functioning of complex technical systems (CTS) of critical application, for which the most important task is to ensure the quality of their models, which are polymodel complexes (PMCs) with a complex, in most cases, variable topology. The operation of such CTS is implemented in conditions of uncertainty of states, lack of possibility of field tests, high cost of obtaining data, complexity of monitoring states due to special operating conditions, high cost of resources. In existing studies of estimates of the results of simulation modeling, the criteria of Student, Fisher, Mann-Whitney and Wilcoxon, and others, are used. However, the issues of model stability metrics and their complexes remain insufficiently developed. Stability is a fundamental property of dynamical systems, which is usually studied in two planes: both the reaction of the system to external perturbations of the dynamic character, and the change in parameters in response to these perturbations. The proposed prospective studies related to the formation of estimates and metrics of the statistical stability of models, statistical volatility of models, and the statistical image of the PMC allow us to assess the degree of instability of the statistics depending on the volume of repeated runs of the model and are a logical continuation of the authors' research in this area. The study also considers the statistical stability of the parameter studied by the

model. In contrast to the statistical stability of the model itself, the statistical stability of the model parameter allows you to fine-tune the model in the PMC. For models of large dimensions with a variable number of runs, the authors propose to type the topology of the PMC, which will allow us to evaluate the models most accurately.

If you have defined a vector that reflects the characteristics of $\mathbf{x}_0$ models M_x , which belongs to the vector space V_n : $\mathbf{x}_0 \in V_n$, then the set of such vectors reflecting the set of properties M_x , $\mathbf{x} \in V_n$, satisfying the inequality $\max(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t) < h(t)$, it is called a ball of PMC properties with a radius of $h(t)$ is at a point in time t , $t_0 \leq t \leq t'$ (the power of this property for the model M_x) centered at a point $\mathbf{x}_0$. A set of vectors that reflect the properties of a set of models M_x in PMC: $\mathbf{x} \in R_n$, satisfying the inequality $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t) \leq h(t)$, $t_0 \leq t \leq t'$ form the polar coordinate system of the model properties in the PMC relative to the property $\mathbf{x}_0$. The polar representation of the properties of the PMC is its statistical image. The article proposes the principles of dynamic typing of PMC topologies, on the basis of which the framework of the system for supporting decision-making on the quality assessment of PMC is presented. In further research, the authors propose to expand the set of statistical metrics of PMC, as well as to clarify the structure of the decision support system for problems of qualimetric analysis of applied CTS.

Keywords: polymodeling; statistical stability; quasi-homogeneous model; statistical volatility; vector space; Markov chain; accuracy; transition probability; number of process implementations; statistical image.

DORONINA Yulia Valentinovna (Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Information Technologies and Computer Systems, Institute of Information Technologies and Management in Technical Systems, Sevastopol State University, Russian Federation).

E-mail: apkSev@yandex.ru

SKATKOV Alexander Vladimirovich (Doctor of Technical Sciences, Expert of the Russian Academy of Sciences, Professor of the Department of Information Technologies and Computer Systems, Institute of Information Technologies and Management in Technical Systems, Sevastopol State University, Russian Federation).

E-mail: vm1945@mail.ru

REFERENCES

1. Okhtilev, M.Yu., Gnidenko, A.S., Alferov, V.V., Salukhov, V.I. & Nazarov, D.I. (2018) Methods and Algorithms of Integrated Modeling of Complex Technical Objects in Dynamically Changing Conditions. *Proceedings of the International Scientific Conference MMET NW*. pp. 282–284.
2. Panella, I. & Hardwick, G. (2019) Model Oriented System Design Applied to Commercial Aircraft Secondary Flight Control Systems. In: Obaidat, M., Ören, T. & Rango, F. (eds) *Simulation and Modeling Methodologies, Technologies and Applications. SIMULTECH 2017. Advances in Intelligent Systems and Computing*. Vol. 873. Springer, Cham. pp. 55–76.
3. Doronina, Yu.V. & Skatkov, A.V. (2020) Cascade-hierarchical modeling in problems of analyzing the dynamics of resource characteristics of complex systems. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy – Information and Control Systems*. 3. pp. 48–58. DOI: 10.31799/1684-8853-2020-3-48-58
4. Mikoni, S.V., Sokolov B.V. & Yusupov R.M. (2018) *Kvalimetriya modeley i polimodel'nykh kompleksov* [Qualimetry of Models and Polymodel Complexes]. Moscow: RAS.
5. Andrianov, Yu.M. & Subbeto, A.I. (1990) *Kvalimetriya v priborostroenii* [Qualimetry in Instrument Engineering]. Leningrad: Mashinostroenie.
6. Doronina, Yu.V. & Skatkov, A.V. (2019) Statistical Stability Analysis of Stationary Markov Models. *Tr. SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 18(5). pp. 1119–1148. DOI: 10.15622/sp.2019.18.5.1119-1148
7. Gorban, I.I. (2017) *The Statistical Stability Phenomenon*. Springer.
8. Kondrashkov, A.V. & Pichugin, Yu. A. (2014) On the identification and statistical testing stability of the Volterra model. *Nauchno-tehnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki* – St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics. 1(189). pp. 124–135. [Online] Available from: <https://cyberleninka.ru/article/n/identifikatsiya-i-statisticheskaya-proverka-ustoychivosti-modeli-volterra> (Accessed: 21st March 2019).
9. Laaksonen, O. & Peltoniemi, M. (2018) The essence of dynamic capabilities and their measurement. *International Journal of Management Reviews. British Academy of Management*. 20(2). pp. 184–205. DOI: 10.1111/ijmr.12122
10. Chen, N. & Majda, A.J. (2018) Conditional gaussian systems for multiscale nonlinear stochastic systems: prediction, state estimation and uncertainty quantification. *Entropy*. 20(7). pp. 1–80. DOI: 10.3390/e20070509
11. Dolgui, A., Ivanov, D. & Sokolov, B. (2018) Scheduling of recovery action in supply chain with resilience analysis consideration. *International Journal of Production Research*. 56(19). pp. 6473–6490. DOI: 10.1080/00207543.2017.1401747
12. Langville, A. & Meyer, C. (2006) Updating Markov chains with an eye on Google's PageRank. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 27(4). pp. 968–987. DOI: 10.1137/040619028
13. Degiannakis, S. & Floros, C. (2015) Methods of Volatility Estimation and Forecasting. *Modelling and Forecasting High Frequency Financial Data*. Palgrave Macmillan, London. pp. 58–109.

УДК 519.2

DOI: 10.17223/19988605/56/7

Ж.Н. Зенкова, Н.Р. Цыбульникова**СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНОК ЦЕНОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ МЕТОДА ЦЕНОВОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ PSM ДЛЯ ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫХ НАБЛЮДЕНИЙ С УЧЕТОМ СИММЕТРИИ**

Рассмотрены модификации метода ценообразования PSM на случай линейной зависимости между ценовыми предпочтениями потребителей с учетом симметрии, показана асимптотическая нормальность, состоятельность оценок, найдены асимптотические дисперсии. Показано, что для ряда распределений привлечение информации о линейной зависимости и симметрии позволяет найти более точные ценовые диапазоны при плохой различимости кривых ценовой чувствительности.

Ключевые слова: метод измерения ценовой чувствительности PSM; линейная зависимость; симметрия; медиана.

В экономике существует несколько подходов к ценообразованию [1], однако большинство предприятий при назначении цены ориентировано на затраты, что не всегда позволяет обоснованно установить такую цену, которая была бы привлекательна для потребителя [2]. В [3] при исследовании около 2 500 компаний было показано, что повышение точности в назначении цены на 1% приводит к 11,1% роста прибыли компании, при этом восприятие цены потребителем гораздо важнее, чем сама цена.

Для установления оптимальной с точки зрения спроса цены в зарубежной практике очень активно используются методы ценообразования, ориентированные на спрос [4–6]. Одним из таких методов является метод PSM (Price Sensitivity Meter), предложенный Питером Ван Вестендорпом [7, 8]. Метод PSM основан на анализе потребительских предпочтений относительно цены на товар, которые высказываются представителями целевой аудитории после использования товара в течение некоторого периода времени. Асимптотические свойства классического метода PSM исследовались в работе [9], показано, что в качестве ценовых границ можно использовать медианы попарно объединенных данных о ценовых предпочтениях, доказаны состоятельность, асимптотическая несмещенность и нормальность оценок.

Заметим, что потребители, отвечая на вопросы метода, часто отталкиваются от первоначально названной цены, что приводит к возникновению зависимости в ценовых предпочтениях. Характер зависимости может быть различным. В [10] автором были предложены модификации методов ценовой чувствительности Штоцеля [11], PSM и Ван Вестендорпа на случай линейной зависимости между ценовыми предпочтениями без исследования статистических свойств новых методов. В данной работе этот пробел устраняется для метода PSM. Отдельно рассматривается случай, когда линейно зависимые данные о ценовых предпочтениях обладают свойством симметрии относительно медианы [12], получены точные формулы для искомых цен. Для каждой модификации с использованием результатов [9] показаны состоятельность, асимптотическая несмещенность и нормальность оценок. Доказано, что привлечение дополнительной информации существенно повышает точность оценивания при близком расположении кривых ценовой чувствительности, чего не позволяют достичь классические оценки, рассмотренные в [9]. Для малых выборок свойства метода исследовались с помощью имитационного моделирования, выявлена достаточно медленная сходимость дисперсий к своим асимптотическим значениям, особенно при использовании классических оценок, показано, что в ряде случаев точность модифицированных методов выше по сравнению с классическими.

В настоящей статье предложена модификация метода PSM, которая, в отличие от классического варианта [9], позволяет получить более точные значения ценовых диапазонов в ситуациях, когда участники фокус-группы дают близкие ответы на вопросы о своих ценовых предпочтениях даже при малых объемах выборок, что является большим преимуществом, так как использование метода PSM весьма затратно.

1. Метод измерения ценовой чувствительности Price Sensitivity Meter (PSM)

Согласно алгоритму метода PSM, маркетологом проводится независимый опрос N респондентов – представителей целевой аудитории, которым предлагается на протяжении некоторого периода времени пользоваться исследуемым товаром, после чего они отвечают на четыре вопроса [13]:

1. Ниже какого уровня цены p_1 товар кажется настолько дешевым, что возникают подозрения, что он некачественный или что перед вами подделка?
2. Какая цена p_2 наиболее приемлема для вас?
3. Какая цена p_3 кажется высокой, но вы все еще рассматриваете вопрос о покупке?
4. Какая цена p_4 кажется вам настолько высокой, что вопрос о покупке даже не рассматривается?

Допустим, что каждая из исследуемых цен есть случайная величина с функцией распределения $F_j(x) = P(p_j < x)$, $j = \overline{1,4}$. По каждой выборке P_{Nj} , $j = \overline{1,4}$, строится эмпирическая функция распределения [14] по следующей формуле:

$$\hat{F}_j(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I_{[0,x)}(p_{kj}), \quad (1)$$

где $I_{[0,x)}(y)$ – индикаторная функция. Для первой и третьей выборок ($j = 1, 3$) строятся оценки функции выживания [15]

$$\hat{S}_j(x) = 1 - \hat{F}_j(x), \quad (2)$$

при этом функции $\hat{S}_1(x)$, $\hat{F}_2(x)$, $\hat{S}_3(x)$, $\hat{F}_4(x)$ обычно сглаживаются и называются кривыми ценовой чувствительности (в оригинале – Price Sensitivity Curve). Абсциссы их пересечений помогают найти следующие ценовые значения:

$P_{\min} = \hat{x}^{(12)}$ – минимально возможная цена, или точка предельной дешевизны, – абсцисса пересечения первой и второй кривых. Назначать цену ниже $P_{\min}$ нельзя, так как объемы продаж при этом будут слишком малы из-за того, что основная масса целевых потребителей не поверит, что товар достаточно качественный или оригинальный (не является подделкой), и это приведет к прямым убыткам;

$P_{\text{безр}} = \hat{x}^{(23)}$ – ожидаемая цена, или точка безразличия (в англоязычных источниках обозначается как IDP – Indifference Price Point), – абсцисса пересечения второй и третьей кривых. Большинство потребителей не воспринимают такую цену ни слишком дорогой, ни слишком дешевой, она «вызывает безразличие»;

$P_{\text{опт}} = \hat{x}^{(14)}$ – оптимальная цена (OPP – Optimum Price Point, или Penetration Price) – абсцисса пересечения первой и четвертой кривых. В этой точке самое меньшее число потребителей отказываются от покупки товара из-за слишком высокой цены, эту цену считают «ценой проникновения на рынок»;

$P_{\max} = \hat{x}^{(34)}$ – максимально возможная цена, или точка предельной дороговизны, – абсцисса пересечения третьей и четвертой кривых. Если в погоне за прибылью назначить цену выше $P_{\max}$, то можно потерять большинство целевых потребителей, которые просто не в состоянии купить товар по слишком высокой для них цене. Данная стратегия может привести к существенным убыткам.

Заметим, что если в результате опросов цена безразличия $P_{\text{безр}}$ будет меньше, чем оптимальная $P_{\text{опт}}$, то это означает, что в исследовании принимали участие достаточно много представителей нецелевой аудитории, которые не разбираются в данном товаре, не имеют заинтересованности в нем и не могут адекватно воспринимать его ценность, поэтому они дают несправедливые, слишком заниженные или завышенные значения цен с большим разбросом.

В работе [9] были получены следующие формулы для расчета значений цен, определяемых методом PSM для случая, когда метод базируется на эмпирических функциях распределения без сглаживания: для $i = 1, 3$ и $j = 2, 4$:

$$\hat{x}^{(ij)} = \begin{cases} \max \{x : \hat{F}_j(x) = \hat{S}_i(x)\} \\ x : \hat{S}_i(x+0) \leq \hat{F}_j(x) < \hat{S}_i(x). \end{cases} \quad (3)$$

Статистические свойства оценок (3) исследовались с использованием функции распределения $G_{ij}(x) = (F_i(x) + F_j(x))/2$, так как искомые цены фактически являются решениями уравнений вида

$$F_j(x) = 1 - F_i(x) \quad (4)$$

и являются медианами функции распределения $G_{ij}(x)$. Было показано, что расчет оценок (3) сводится к поиску $\hat{x}_{(N+1)}^{(ij)}$ – $(N+1)$ -й порядковой статистики объединенной выборки $P_{Ni} \cup P_{Nj}$ объема $2N$, оценки являются состоятельными, асимптотически несмещенными и нормально распределенными с асимптотической, нормированной на N дисперсией

$$v_{ij}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{var} \{ \hat{x}_{(N+1)}^{(ij)} \} = F_{ij} \cdot (x_{ij}, x_{ij}) / (2g_{ij}^2(x_{ij})), \quad (5)$$

где для $j = 2, 4$ и $i = 1, 3$ $F_{ij}(\cdot, \cdot)$ – совместная функция распределения i -й и j -й цены, $g_{ij}(x) = (f_i(x) + f_j(x))/2$ – плотность функции распределения $G_{ij}(x)$, при этом предполагалось, что для $m = \overline{1,4}$ существуют $f_m(x)$ – плотности функций распределения $F_m(x)$ и $g_m(x_{ij}) \neq 0$.

2. Модификация метода PSM на случай линейной зависимости

Рассмотрим случай, когда между ценами имеет место линейная зависимость вида

$$p_i = a_i + b_i p_1, \quad (6)$$

где для $i = \overline{1,4}$ коэффициенты a_i и b_i известны, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$. В результате можно получить следующее равенство:

$$F_i(x) = F_1((x - a_i)/b_i), \quad (7)$$

так как $F_i(x) = P(p_i < x) = P(a_i + b_i \cdot p_1 < x) = P(p_1 < (x - a_i)/b_i) = F_1((x - a_i)/b_i)$, следовательно, для $i = 1, 3$ и $j = 2, 4$ (4) можно представить в виде:

$$F_1((x - a_j)/b_j) = 1 - F_1((x - a_i)/b_i),$$

аналогично (3) решение этого уравнения определяется как $\hat{x}_{(N+1)}^{(ij)*}$ – $(N+1)$ -я порядковая статистика, построенная по объединенной выборке объема $2N$, где каждая выборка есть линейная комбинация первой выборки: $\{a_i + b_i \cdot P_{11}, a_i + b_i \cdot P_{21}, \dots, a_i + b_i \cdot P_{N1}, a_j + b_j \cdot P_{11}, a_j + b_j \cdot P_{21}, \dots, a_j + b_j \cdot P_{N1}\}$. Здесь, как и для (3), $\hat{x}_{(N+1)}^{(ij)*}$ является состоятельной, асимптотически несмещенной и нормально распределенной оценкой, нормированная асимптотическая дисперсия которой определяется согласно теореме.

Теорема. Асимптотическая нормированная на N дисперсия ценовых значений, полученных методом измерения ценовой чувствительности PSM, в случае линейной зависимости между потребительскими предпочтениями в отношении цен вычисляется по следующей формуле: для $i = 1, 3$ и $j = 2, 4$

$$v_{ij}^{*2} = \lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \text{var} \left\{ \hat{x}_{(N+1)}^{(ij)*} \right\} = 2(b_i b_j)^2 F_1 \left(\min \left(\frac{x_{ij} - a_i}{b_i}, \frac{x_{ij} - a_j}{b_j} \right) \right) / \left(b_j f_1 \left(\frac{x_{ij} - a_i}{b_i} \right) + b_i f_1 \left(\frac{x_{ij} - a_j}{b_j} \right) \right)^2. \quad (8)$$

Доказательство. Согласно определению совместной функции распределения двух случайных величин $F_{ij}(x, y) = P(p_i < x, p_j < y)$, воспользуемся свойством (6), получим

$$F_{ij}(x, y) = P(a_i + b_i \cdot x_1 < x, a_j + b_j \cdot x_1 < y) = P \left(x_1 < \frac{x - a_i}{b_i}, x_1 < \frac{y - a_j}{b_j} \right) = F_1 \left(\min \left(\frac{x - a_i}{b_i}, \frac{y - a_j}{b_j} \right) \right),$$

следовательно,

$$F_{ij}(x, y) = F_1 \left(\min \left((x - a_i)/b_i, (y - a_j)/b_j \right) \right) \quad (9)$$

Рассмотрим плотность $g_{ij}(x) = (f_i(x) + f_j(x))/2$. В силу (7) $f_i(x) = f_1((x - a_i)/b_i)/b_i$, тогда

$$g_{ij}(x_{ij}) = (b_j f_1((x_{ij} - a_i)/b_i) + b_i f_1((x_{ij} - a_j)/b_j)) / (2b_i b_j). \quad (10)$$

В заключение, подставив (9) и (10) в формулу (5), получим (8). Что и требовалось доказать.

3. Модификация метода PSM при линейной зависимости и симметрии

Пусть в условиях (6) функция распределения $F_1(x)$ является непрерывной и обладает свойством симметрии относительно медианы α [16]:

$$F_1(x) = 1 - F_1(2\alpha - x),$$

тогда уравнение (4) может быть представлено в следующем виде:

$$F_1((x - a_j)/b_j) = 1 - F_1(2\alpha - (x - a_j)/b_j) = 1 - F_1((x - a_i)/b_i),$$

т.е. $F_1((x - a_i)/b_i) = F_1(2\alpha - (x - a_j)/b_j)$, следовательно, $(x - a_i)/b_i = (F_1)^{-1}(F_1(2\alpha - (x - a_j)/b_j))$, где $i = 1, 3$ и $j = 2, 4$, $(F_1)^{-1}(\cdot)$ – обратная к $F_1(x)$ функция. Тогда $(x - a_i)/b_i = 2\alpha - (x - a_j)/b_j$, в итоге решение уравнения (4) можно найти в явном виде по следующей формуле:

$$x_{ij}^{*S} = \frac{2\alpha b_i b_j + b_j a_i + b_i a_j}{b_i + b_j}.$$

Таким образом, при наличии линейной зависимости и симметрии задача сводится к оцениванию α – медианы функции распределения $F_1(x)$, например с помощью выборочной медианы

$$M_1 = \text{med}(P_{11}, P_{21}, \dots, P_{N1}) = \begin{cases} P_{(k)1}, & N = 2k - 1, \\ 0,5(P_{(k)1} + P_{(k+1)1}), & N = 2k, \end{cases} \quad (11)$$

и ее линейному преобразованию относительно известных коэффициентов. Здесь $P_{(k)1}$ – k -я порядковая статистика выборки P_{N1} . Свойства выборочной медианы (11) и порядковых статистик хорошо изучены и изложены в [17], их распределения не нормальны и из-за громоздкости формул здесь не приводятся. В качестве альтернативы рассмотрим оценку квантиля уровня 0,5

$$\hat{\alpha} = P_{(N/2)1} = \inf \{x : \hat{F}_1(x) \geq 0,5\},$$

которая является асимптотически несмещенной и нормально распределенной [17] с асимптотической, нормированной на N дисперсией

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \text{var} \{ \hat{\alpha} \} = 1/4 f_1^2(F_1^{-1}(0,5)) = 1/4 f_1^2(\alpha).$$

Заметим, что $\hat{\alpha}$ есть $([N/2] + 1)$ -я порядковая статистика выборки P_{N1} . Таким образом, в случае линейной зависимости между ценовыми предпочтениями и симметричности их функций распределения оценку итоговых значений цен рекомендуется рассчитывать по следующей формуле:

$$\hat{x}_{ij}^* = (2\hat{\alpha}b_i b_j + b_j a_i + b_i a_j) / (b_i + b_j), \quad (12)$$

при этом оценка $\hat{x}_{ij}^*$ также является асимптотически несмещенной и нормально распределенной с асимптотической, нормированной на N дисперсией, которая определяется формулой

$$v_{ij}^{s*2} = \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{var} \{ \hat{x}_{ij}^* \} = b_i^2 b_j^2 / \left((b_i + b_j)^2 f_1^2(\alpha) \right). \quad (13)$$

На рис. 1 приведены графики изменения v_{ij}^2 , v_{ij}^{*2} , v_{ij}^{s*2} в зависимости от изменения параметров a_m , $m = \overline{1,4}$. Рассматривались варианты, когда параметры наклона фиксированы при фиксированном a_1 и изменяющихся параметрах сдвига a_2 , a_3 , a_4 для равномерного случая, $F_1(x) = R_{(0,100)}(x)$. Очевидно, что дополнительная информация о симметрии позволила существенно повысить точность оценивания, когда кривые ценовой чувствительности очень близки и плохо различимы. Данный факт наблюдался и для нормальных кривых ценовой чувствительности. При слишком большой удаленности кривых друг от друга пересечения оказываются фактически на границах областей возможных значений цен, что сводит ошибки к минимуму, так как при этом можно сказать, что теряется случайный характер исходных данных, что, скорее всего, вызвано тем, что в исследовании принимали участие представители нецелевой аудитории или данные были сфальсифицированы.

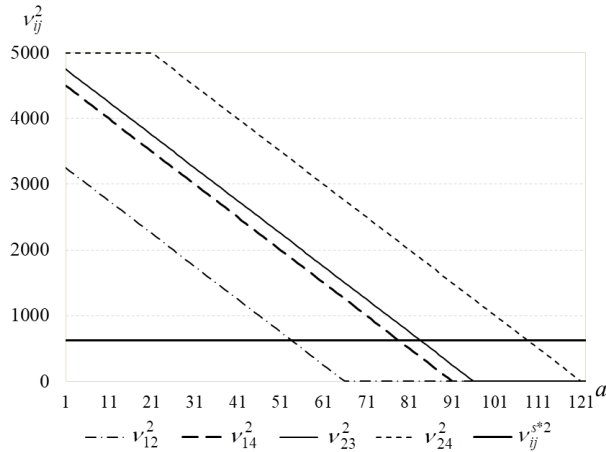


Рис. 1. Зависимость v_{ij}^2 и v_{ij}^{s*2} от b_k , $k = \overline{2,4}$, при фиксированных a_m , $m = \overline{1,4}$, для $F_1(x) = R_{(0,100)}(x)$
 Fig. 1. Dependence of v_{ij}^2 and v_{ij}^{s*2} on parameters b_k , $k = \overline{2,4}$, where a_m , $m = \overline{1,4}$, are fixed, $F_1(x) = R_{(0,100)}(x)$

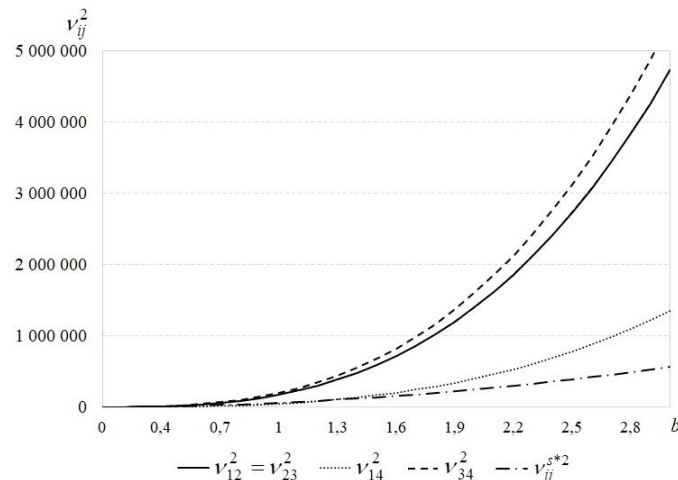


Рис. 2. Зависимость v_{ij}^2 и v_{ij}^{s*2} от b_k , $k = \overline{2,4}$, при фиксированных a_m , $m = \overline{1,4}$, $F_1(x) = R_{(0,100)}(x)$
 Fig. 2. Dependence of v_{ij}^2 and v_{ij}^{s*2} on parameters b_k , $k = \overline{2,4}$, where a_m , $m = \overline{1,4}$, are fixed, $F_1(x) = R_{(0,100)}(x)$

На рис. 2 приведены графики изменения v_{ij}^2 , v_{ij}^{*2} , v_{ij}^{s*2} в зависимости от изменения параметров b_k , $k = \overline{2, 4}$. Рассматривались варианты, когда параметры сдвига фиксированы и $b_1 = 1$, $F_1(x) = R_{(0,100)}(x)$. Очевидно, что дополнительная информация позволяет лучше оценить ценовые диапазоны, когда по отношению к первой кривой остальные кривые ценовой чувствительности имеют более высокое значение коэффициента наклона, что соответствует случаю, когда потенциальные потребители дают весьма близкие друг к другу ответы на вопросы анкеты. Аналогично предыдущему случаю, этот факт наблюдался и для нормальных кривых ценовой чувствительности.

4. Исследование с помощью имитационного моделирования статистических свойств модифицированных оценок в случае малых выборок

Для $i = 1, 3$ и $j = 2, 4$ статистические свойства оценок $\hat{x}_{(N+1)}^{(ij)}$, $\hat{x}_{(N+1)}^{(ij)*}$, $\hat{x}_{ij}^{S*}$, $MED_{ij}^{*S} = (2M_1b_ib_j + b_ja_i + b_ia_j)/(b_i + b_j)$, а также MED_{ij} – выборочной медианы объединенной выборки $P_{Ni} \cup P_{Nj}$ – на случай малых выборок, изучались и сравнивались с помощью имитационного моделирования [18] с параметром моделирования $M = 50\,000$ (количество значений статистик для каждого способа оценивания, которые позволяют получить различные статистические характеристики оценок, например их математическое ожидание и дисперсию).

Исследовались случаи равномерного и нормального распределений ценовых предпочтений. Для равномерного случая рассматривались различные параметры, притом оценки продемонстрировали схожесть поведения, здесь приведены результаты для $F_1(x) = R_{(0,100)}(x)$, $F_2(x) = R_{(5,105)}(x)$, $F_3(x) = R_{(7,107)}(x)$, $F_4(x) = R_{(15,115)}(x)$. В нормальном случае рассматривались $F_1(x) = N_{(100,25)}(x)$, $F_2(x) = N_{(105,25)}(x)$, $F_3(x) = N_{(107,25)}(x)$, $F_4(x) = N_{(115,25)}(x)$.

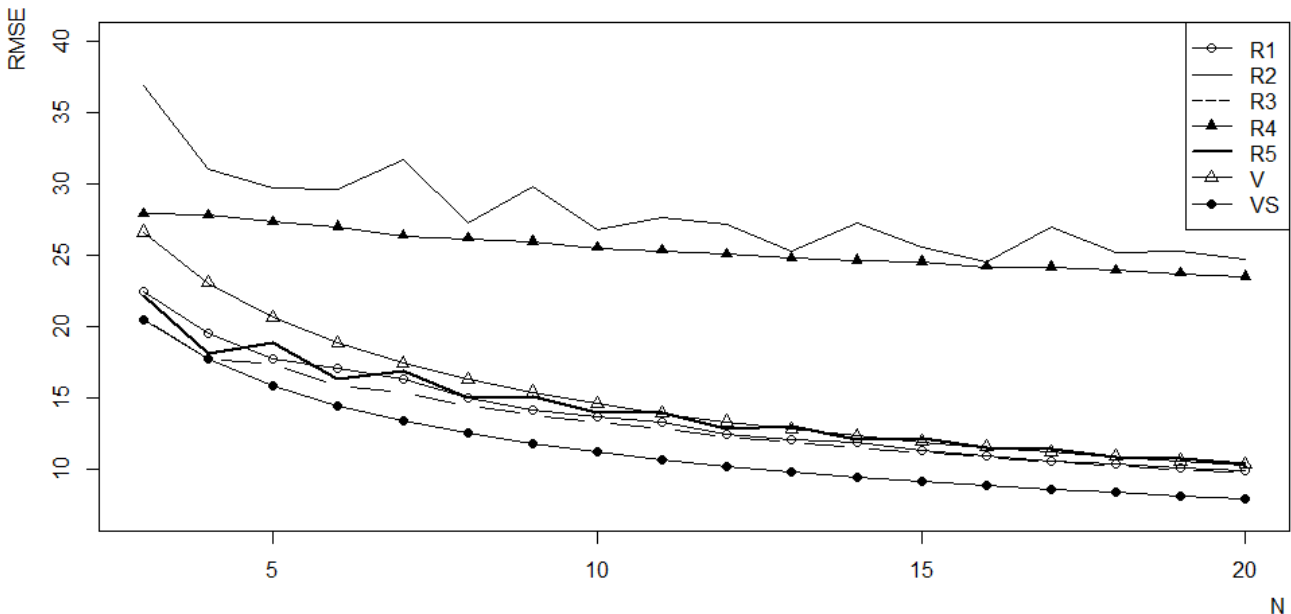


Рис. 3. Зависимости $RSME$ от N для равномерного случая (R1 означает $RMSE(\hat{x}_{(N+1)}^{(14)*})/\sqrt{N}$, R2 – $RMSE(\hat{x}^{(14)})/\sqrt{N}$,

R3 – $RMSE(MED_{14}^{*S})/\sqrt{N}$, R4 – $RMSE(MED_{14})/\sqrt{N}$, R5 – $RMSE(\hat{x}_{ij}^{S*})/\sqrt{N}$, V – $\sqrt{v_{14}^2}/\sqrt{N}$, VS – $\sqrt{v_{14}^{s*2}}/\sqrt{N}$)

Fig. 3. Dependences $RSME$ on N for uniform case (R1 means $RMSE(\hat{x}_{(N+1)}^{(14)*})/\sqrt{N}$, R2 – $RMSE(\hat{x}^{(14)})/\sqrt{N}$,

R3 – $RMSE(MED_{14}^{*S})/\sqrt{N}$, R4 – $RMSE(MED_{14})/\sqrt{N}$, R5 – $RMSE(\hat{x}_{ij}^{S*})/\sqrt{N}$, V – $\sqrt{v_{14}^2}/\sqrt{N}$, VS – $\sqrt{v_{14}^{s*2}}/\sqrt{N}$)

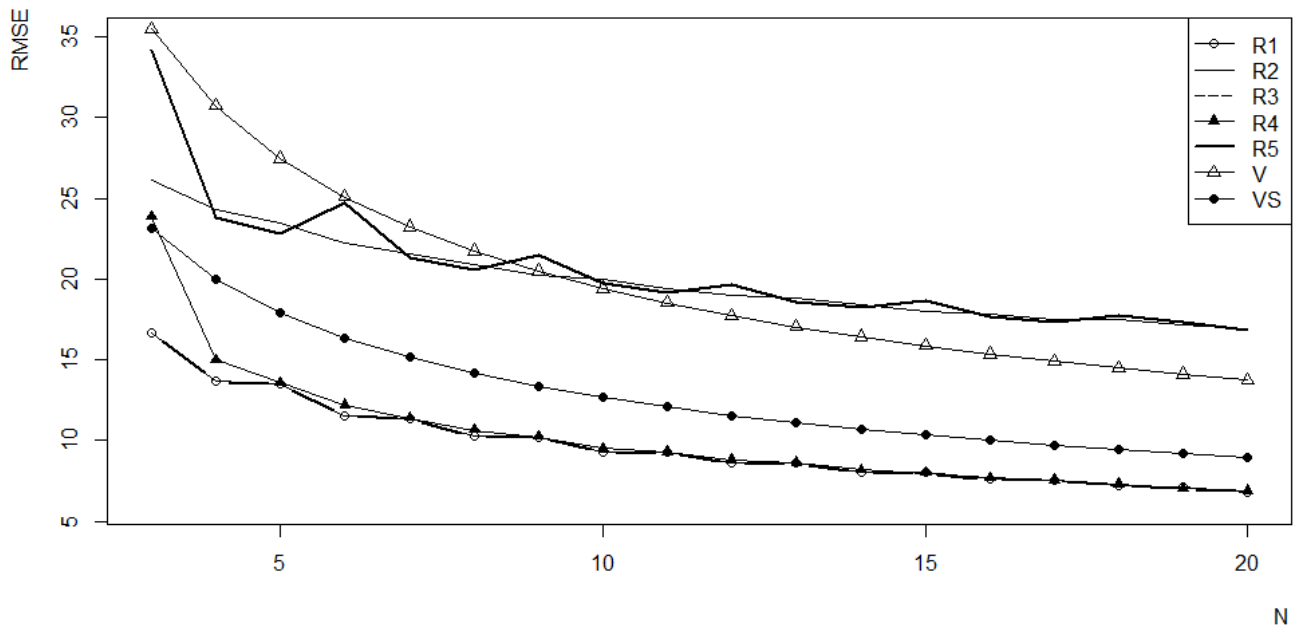


Рис. 4. Зависимости $RMSE$ от N для нормального случая (R1 означает $RMSE(\hat{x}_{(N+1)}^{(23)*})/\sqrt{N}$, R2 – $RMSE(\hat{x}^{(23)})/\sqrt{N}$, R3 – $RMSE(MED_{23}^{*S})/\sqrt{N}$, R4 – $RMSE(MED_{23})/\sqrt{N}$, R5 – $RMSE(\hat{x}_{ij}^{S*})/\sqrt{N}$, V – $\sqrt{v_{23}^2}/\sqrt{N}$, VS – $\sqrt{v_{23}^{*2}}/\sqrt{N}$)

Fig. 4. Dependences $RMSE$ on N for normal case (R1 means $RMSE(\hat{x}_{(N+1)}^{(23)*})/\sqrt{N}$, R2 – $RMSE(\hat{x}^{(23)})/\sqrt{N}$, R3 – $RMSE(MED_{23}^{*S})/\sqrt{N}$, R4 – $RMSE(MED_{23})/\sqrt{N}$, R5 – $RMSE(\hat{x}_{ij}^{S*})/\sqrt{N}$, V – $\sqrt{v_{23}^2}/\sqrt{N}$, VS – $\sqrt{v_{23}^{*2}}/\sqrt{N}$)

Исследовалось поведение $RMSE(\hat{\theta})/\sqrt{N}$, где $RMSE$ – квадратный корень из среднеквадратической ошибки (root mean squared error) $RMSE(\hat{\theta}) = \sqrt{E(\hat{\theta} - \theta)^2}$, $\hat{\theta}$ – некоторая оценка истинного значения θ исследуемой статистической характеристики, E – обозначение математического ожидания. Итоговые результаты отображены на рис. 3 и 4. Из рисунков видно, что привлечение дополнительной информации позволило снизить среднеквадратическую ошибку оценок ценовых значений методом PSM для малых объемов наблюдений, несмотря на недостаточно большую скорость сходимости к теоретическим значениям асимптотической, нормированной на N дисперсии.

Заключение

В работе показана асимптотическая нормальность и состоятельность оценок ценовых значений метода PSM, модифицированных с учетом линейной зависимости между ценовыми предпочтениями потребителей, а также симметрии их функций распределения относительно медианы. Статистические свойства модифицированных оценок на случай малых выборок исследованы с помощью имитационного моделирования, выявлена слабая скорость сходимости дисперсии к ее асимптотическому значению. Показано, что учет линейной зависимости и симметрии позволяет получить максимальный выигрыш в точности оценивания при слишком близких значениях индивидуальных ценовых предпочтений потребителей, а также при схожести ответов на вопросы разных респондентов, что является весьма ценным с практической точки зрения.

В дальнейшем планируется более глубокое исследование точности оценок на случай, когда коэффициенты линейной зависимости неизвестны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bouter E.-J. Pricing: The Third Business Skill: Principles of Price Management. First Price BV. 2013. 226 p.
2. Yang J.Y. The Pricing Puzzle: How to Understand and Create Impactful Pricing for Your Products Paperback. Springer, 2020. 188 p.

3. Marn M.V., Rosiello R.L. Managing Price, Gaining Profit // Harvard Business Review. 1992. V. 5. P. 84–94.
4. Haugom E. Essentials of Pricing Analytics. Routledge, 2020. 290 p. DOI: 10.4324/9780429345319
5. Paczkowski W.R. Pricing Analytics: Models and Advanced Quantitative Techniques for Product Pricing. Routledge, 2018. 338 p. DOI: 10.4324/9781315178349
6. Коржов М.М., Кузин Д.А. Сравнительный анализ и практическое применение методов ценообразования с ориентацией на спрос // Новости маркетинга. 2007. № 4. С. 9–17.
7. Westendorp P.H. NSS – Price Sensitivity Meter (PSM) – A New Approach to Consumer Perception of Prices // Venice Congress Main Sessions, European Marketing Research Society (ESOMAR). Amsterdam, 1976. P. 139–167.
8. Зенкова Ж.Н., Краковецкая И.В. Непараметрическая оценка Тёрнбулла для интервально-цензурированных данных в маркетинговом исследовании спроса на биоэнергетические напитки // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 3 (24). С. 64–69.
9. Дмитриев Ю.Г., Зенкова Ж.Н., Зенков А.Г. Статистические свойства оценок метода измерения ценовой чувствительности PSM // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 47. С. 30–40. DOI: 10.17223/19988605/47/4
10. Цыбулькикова Н.Р. Расчет цены спроса на программный продукт методом PSM для зависимых наблюдений // Материалы VII Междунар. молодежной науч. конф. «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», Томск, 23–25 мая 2019 г. Томск, 2019. С. 136–142.
11. Stoetzel J. Psychological / Sociological Aspects of Price / B. Taylor, G. Wills (eds.). Pricing Research, Princeton, NJ : Brandon Systems Press, 1970. P. 70–74.
12. Зенкова Ж.Н. Об S_p^C -неравноплечно k -го порядка симметричных функциях распределения // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : сб. науч. ст. Междунар. науч. конф. Минск, 15–19 сентября 2008 г. С. 108–115.
13. Зенкова Ж.Н., Бараксанов Д.Н. Применение метода PSM при определении рыночной цены нового программного продукта // Высокие технологии, исследования, образование, финансы : сб. ст. XVI междунар. науч.-практ. конф. «Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности и экономике». 5–6 декабря 2013 г. Санкт-Петербург, Россия. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2013. С. 17–21.
14. Боровков А.А. Математическая статистика. Новосибирск : Наука, 1997. 772 с.
15. Kleinbaum D.G., Klein M. Survival analysis: A Self-learning text. 3rd ed. Springer, 2012. 715 p.
16. Дмитриев Ю.Г., Зенкова Ж.Н. Критерии согласия Колмогорова для симметричных распределений // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 6. С. 265–269.
17. Шуленин В.П. Математическая статистика : учебник. Томск : НТЛ, 2012. Ч. 2: Непараметрическая статистика. 388 с.
18. Metropolis N. The Monte Carlo Method // Journal of the American Statistical Association. 1949. V. 44 (247). P. 335–341. DOI: 10.2307/2280232

Поступила в редакцию 10 февраля 2021 г.

Zenkova Z.N., Tsybulnikova N.R. (2021) STATISTICAL PROPERTIES OF PRICE SENSITIVITY METER RESULTS FOR LINEAR RELATIONSHIP BETWEEN OBSERVATIONS WITH SYMMETRY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 56. pp. 59–67

DOI: 10.17223/19988605/56/7

Price Sensitivity Meter (PSM) algorithm is applied in marketing to estimate target audience preferred prices, especially for new goods. It is based on marketing survey of N consumers' price preferences. The survey forms independent sample $(P_{k1}, P_{k2}, P_{k3}, P_{k4})$, $k = \overline{1, N}$, where for the k -th consumer P_{k1} is minimal acceptable, P_{k2} is bargain, P_{k3} is high but yet acceptable, P_{k4} is too high prices. For $j = \overline{1, 4}$ the empirical distribution functions (edf) $\hat{F}_j(x) = \sum_{k=1}^N I_{[0, x)}(X_{kj})/N$ are considered, for $i = \overline{1, 3}$: $\hat{S}_i(x) = 1 - \hat{F}_i(x)$. The final prices are found as the abscissas of $\hat{F}_j(x)$, $j = 2, 4$ and $\hat{S}_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$, intersections as $\hat{x}^{(ij)}$ is the medians' estimators of cdf $G_{ij}(x) = (F_i(x) + F_j(x))/2$. In the paper the case of linear relationships between consumers' price preferences $p_i = a_i + b_i p_1$, $i = \overline{1, 4}$, a_i and b_i are known, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, are considered. The final prices estimators $\hat{x}_{(N+1)}^{(ij)*}$ are $(N+1)$ -th ordered statistics of united samples $\{a_i + b_i \cdot P_{11}, \dots, a_i + b_i \cdot P_{N1}, a_j + b_j \cdot P_{11}, \dots, a_j + b_j \cdot P_{N1}\}$, $i = \overline{1, 3}$, $j = 2, 4$, they are consistent, asymptotically unbiased and normally distributed with variance

$$v_{ij}^2 = 2F_1 \left(\min \left(\frac{x_{ij} - a_i}{b_i}, \frac{x_{ij} - a_j}{b_j} \right) \right) / \left(f_1 \left(\frac{x_{ij} - a_i}{b_i} \right) + f_1 \left(\frac{x_{ij} - a_j}{b_j} \right) \right)^2,$$

where $f_1(x)$ is the density function of cdf $F_1(x)$, $f_1 \left(\frac{x_{ij} - a_i}{b_i} \right) \neq 0$, $f_1 \left(\frac{x_{ij} - a_j}{b_j} \right) \neq 0$.

If $F_1(x) = 1 - F_1(2\alpha - x)$ is symmetric about known median α , then prices can be estimated as $\hat{x}_{ij}^* = (2\hat{\alpha}b_j + b_ja_i + b_ia_j) / (b_i + b_j)$, where $i = 1, 3$, $j = 2, 4$, $\hat{\alpha}$ is $([N/2] + 1)$ -th ordered statistic of the sample P_{N1} , $\hat{x}_{ij}^*$, $i = 1, 3$, $j = 2, 4$, are consistent, asymptotically unbiased and normally distributed with variance

$$v_{ij}^{s*2} = b_i^2 b_j^2 / \left((b_i + b_j)^2 f_1^2(\alpha) \right).$$

It was found that use of all this additional information more valuable in the case when the price sensitivity curves are very close to each other or when the participants give very close answers on the same questions. Involving symmetry and linear dependence between prices' preferences help to find more precise estimators of PSM-prices.

Keywords: price sensitivity meter (PSM); linear relationship; symmetry; median.

ZENKOVA Zhanna Nikolaevna (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Tomsk State University, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Department of System Analysis and Mathematical Modeling, Tomsk, Russia; Senior Researcher, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (RANEPA), Moscow, Russian Federation).

E-mail: zhanna.zenkova@mail.tsu.ru

TSYBULNIKOVA Nina Romanovna (Post-graduate Student, Tomsk State University, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Department of System Analysis and Mathematical Modeling, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: tsybulnikova94@gmail.com

REFERENCES

1. Bouter, E.-J. (2013) *Pricing: The Third Business Skill: Principles of Price Management*. First Price BV.
2. Yang, J.Y. (2020) *The Pricing Puzzle: How to Understand and Create Impactful Pricing for Your Products Paperback*. Springer.
3. Marn, M.V. & Rosiello, R.L. (1992) Managing Price, Gaining Profit. *Harvard Business Review*. 5. pp. 84–94.
4. Haugom, E. (2020) *Essentials of Pricing Analytics*. Routledge. DOI: 10.4324/9780429345319
5. Paczkowski, W.R. (2018) *Pricing Analytics: Models and Advanced Quantitative Techniques for Product Pricing*. Routledge. DOI: 10.4324/9781315178349.
6. Korzhov, M.M. & Kuzin, D.A. (2007) Sravnitel'nyy analiz i prakticheskoe primeneniye metodov tsenoobrazovaniya s orientatsiey na spros [Comparative analysis and practical application of demand-driven pricing methods]. *Novosti marketinga*. 4. pp. 9–17.
7. Westendorp, P.H. (1976) NSS – Price Sensitivity Meter (PSM) – A New Approach to Consumer Perception of Prices. *Venice Congress Main Sessions, European Marketing Research Society (ESOMAR)*, Amsterdam. pp. 139–167.
8. Zenkova, Z.N. & Krakovetskaia, I.V. (2013) Nonparametric Turnbull estimator for interval-censored data in the marketing research of the demand of bio-energy drinks. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(24). pp. 64–69.
9. Dmitriev, Yu.G., Zenkova, Z.N., & Zenkov, A.G. (2019) Statistical properties of price sensitivity meter results. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 47. pp. 30–40. DOI: 10.17223/19988605/47/4
10. Tsybulnikova, N.R. (2019) [Calculation of the demand price for a software product using the PSM method for dependent observations]. *Matematicheskoe i programmnoe obespecheniye informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and Software Support of Information, Technical, and Economic Systems]. Proc. of the Seventh International Youth Conference. Tomsk, May 23–25, 2019. pp. 136–142.
11. Stoetzel, J. (1970) Psychological/Sociological Aspects of Price. In: Taylor, B. & Wills, G. (eds) *Pricing Research*. Princeton, NJ: Brandon Systems Press. pp. 70–74.
12. Zenkova, Z.N. (2008) [About $S_p^{\bar{C}}$ -unequal-shoulder k -th order symmetry of cumulative distribution]. *Teoriya veroyatnostey, slu-chaynye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya* [Theory of probability, random processes, mathematical statistics and applications]. Proc. of the International Conference. Minsk, September 15–19, 2008. pp. 108–115.
13. Zenkova, Z.N. & Baraksanov, D.N. (2013) [Method PSM in the new software pricing]. In: Kudinov, A.P. (ed.) *Vysokie tekhnologii, issledovaniya, obrazovanie, finansy* [High technologies, research, education, finance]. St. Petersburg: St. Petersburg Polytechnic. University. pp. 17–21.
14. Brovko, A.A. (1997) *Matematicheskaya statistika* [Math Statistics]. Novosibirsk: Nauka.
15. Kleinbaum, D.G. & Klein, M. (2012) *Survival Analysis: A Self-learning Text*. 3rd ed. Springer.
16. Dmitriev, Yu.G. & Zenkova, Z.N. (2003) Kolmogorov goodness-of-fit test for symmetric distributions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 6. pp. 265–269.
17. Shulenin, V.P. (2012) *Matematicheskaya statistika* [Math Statistics]. Tomsk: NTL.
18. Metropolis, N. (1949) The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association*. 44(247). pp. 335–341. DOI: 10.2307/2280232

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/56/8

А.В. Кеба, Л.А. Нежелская

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЙ ОБОБЩЕННОГО МАР-ПОТОКА СОБЫТИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ

Рассматривается задача оптимальной оценки состояний обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний в условиях частичной наблюдаемости (непродлевающееся мертвое время фиксированной длительности). Находится явный вид апостериорных вероятностей состояний потока. Формулируется алгоритм оптимального оценивания состояний. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности. Приводятся численные результаты расчетов оценок состояний и их анализ.

Ключевые слова: обобщенный МАР-поток событий с произвольным числом состояний; непродлевающееся мертвое время; оптимальное оценивание состояний; апостериорные вероятности; критерий максимума апостериорной вероятности.

Рассматривается обобщенный МАР-поток событий (Markovian Arrival Process) с n состояниями, относящийся к классу дважды стохастических потоков событий [1–3] и представляющий собой адекватную математическую модель реальных потоков случайных событий. Интенсивность исследуемого потока есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний [4–6].

При анализе дважды стохастических потоков событий выделяют два основных раздела задач, базой для которых служат моменты времени наступления событий в потоке: оценивание состояний потока событий [7–9]; оценивание параметров потока [10, 11]. При решении этих задач следует учитывать возможные искажающие факторы, существенно влияющие на качество оценивания. Одним из таких факторов является мертвое время регистрирующих приборов [12–14], порождаемое каждым зарегистрированным событием: последующие события исходного потока, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны для наблюдения. Такой эффект характерен для большинства реальных систем. Предполагается, что этот период ненаблюдаемости потока имеет фиксированную длительность (непродлевающееся мертвое время) [15].

В данной работе осуществляется исследование обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности (события, наступившие в период ненаблюдаемости, не вызывают продления периода мертвого времени). Находится явный вид выражений для апостериорных вероятностей состояний обобщенного МАР-потока событий, представляющих собой наиболее полную характеристику состояний потока, на интервалах ненаблюдаемости потока. Предлагается алгоритм оптимального оценивания состояний, согласно которому решение о состоянии выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, что обеспечивает минимум безусловной вероятности ошибки вынесения решения. Приводятся численные результаты оптимального оценивания состояний исследуемого потока. Данная статья является непосредственным развитием работ [16, 17].

1. Постановка задачи

Исследуется обобщенный МАР-поток событий с произвольным числом состояний (далее – поток), функционирующий в установившемся режиме. Сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$ изу-

чаемого потока представляет собой кусочно-постоянный ненаблюдаемый процесс с n состояниями: $S_1, \dots, S_n$. Полагается, что при $\lambda(t) = \lambda_i$ имеет место i -е состояние (S_i), $i = \overline{1, n}$, процесса $\lambda(t)$. При этом $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$.

Функция распределения случайной величины – длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i – является экспоненциальной: $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $t \geq 0$, $i = \overline{1, n}$. В момент окончания состояния S_i процесс $\lambda(t)$ переходит из состояния S_i в состояние S_j с вероятностью $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$ с наступлением события потока или с вероятностью $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$ без наступления события потока, $i, j = \overline{1, n}$. Отметим, что для введенных вероятностей справедливо $\sum_{j=1}^n P_0(\lambda_j | \lambda_i) + \sum_{j=1}^n P_1(\lambda_j | \lambda_i) = 1$, $i = \overline{1, n}$.

Замечание 1. Введение вероятности $P_0(\lambda_j | \lambda_i) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_j без наступления события приводит к обобщению классического МАР-потока с произвольным числом состояний.

Утверждение. Для обобщенного МАР-потока событий с n состояниями процесс $\lambda(t)$ является скрытым марковским процессом.

Блочная матрица инфинитезимальных характеристик [18] процесса $\lambda(t)$ имеет вид $\mathbf{D} = \|\mathbf{D}_0 | \mathbf{D}_1\|$, где

$$\mathbf{D}_0 = \left\| \begin{array}{cccc} -\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_1)) & \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_0(\lambda_n | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) & -\lambda_2(1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_2)) & \dots & \lambda_2 P_0(\lambda_n | \lambda_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_0(\lambda_1 | \lambda_n) & \lambda_n P_0(\lambda_2 | \lambda_n) & \dots & -\lambda_n(1 - P_0(\lambda_n | \lambda_n)) \end{array} \right\|_{n \times n},$$

$$\mathbf{D}_1 = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_1(\lambda_n | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) & \dots & \lambda_2 P_1(\lambda_n | \lambda_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_1(\lambda_1 | \lambda_n) & \lambda_n P_1(\lambda_2 | \lambda_n) & \dots & \lambda_n P_1(\lambda_n | \lambda_n) \end{array} \right\|_{n \times n}.$$

Каждое зарегистрированное событие потока создает период ненаблюдаемости фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного потока не наблюдаются (теряются); кроме того, события, наступившие в течение периода мертвого времени, не вызывают его продления (непродлеваемое мертвое время). Первое наступившее после периода мертвого времени событие потока снова создает период мертвого времени длительности T и т.д.

В качестве иллюстрации на рис. 1 приведена одна из реализаций процесса $\lambda(t)$ и наблюдаемого потока, где λ_i – значение процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i , $i = \overline{1, n}$; штриховкой обозначены периоды мертвого времени; события обобщенного МАР-потока, недоступные наблюдению, отмечены черными кружками; $t_1, t_2, \dots$ – моменты времени наступления событий в наблюдаемом потоке.

Задача исследования состоит в нахождении явного вида апостериорных вероятностей $w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i | t_1, \dots, t_m, t) = w(\lambda_i | t)$ того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, при условии, что известна реализация моментов $t_1, \dots, t_m$ наступления событий наблюдаемого потока на интервале (t_0, t) , где t_0 – момент начала наблюдения, t – момент окончания наблюдения, m – количество наблюденных событий на интервале (t_0, t) . Так как рассматривается установившийся режим функционирования потока, то переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t) пренебрегаем. Тогда без ограничения общности можно положить $t_0 = 0$.

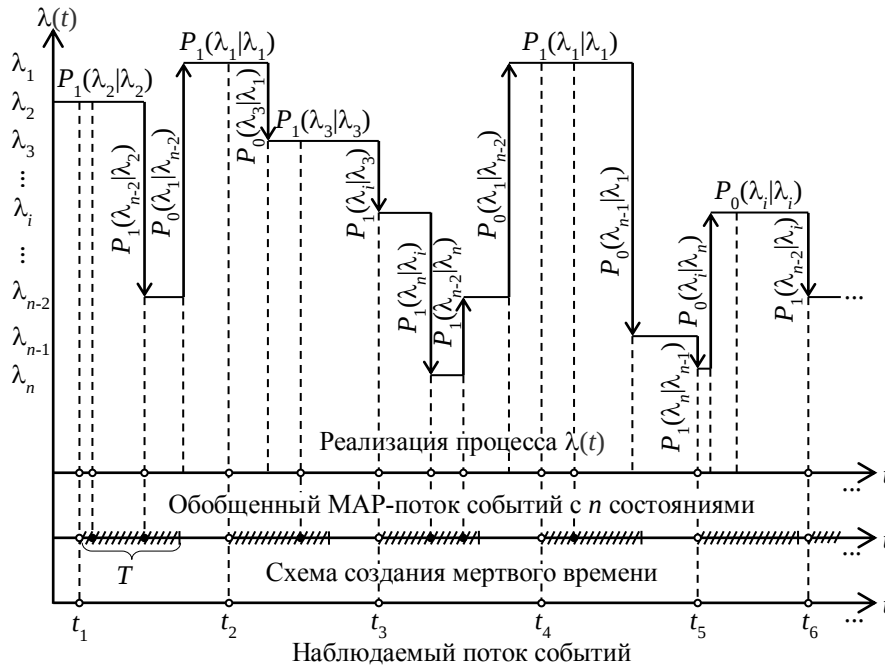


Рис. 1. Реализация обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний в условиях непродлевающегося мертвого времени длительности T
 Fig. 1. Implementation of Generalized MAP with an arbitrary number of states under conditions of unextendable dead time of duration T

Оптимальное оценивание состояния процесса $\lambda(t)$ в смысле минимума полной (безусловной) вероятности ошибки принятия решения [19, 20] осуществляется по критерию максимума апостериорной вероятности на основании сравнения $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, в произвольный момент времени t : если $w(\lambda_i|t) \geq w(\lambda_j|t)$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, то оценка $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$.

2. Исходные предпосылки для вывода апостериорной вероятности в условиях непродлевающегося мертвого времени

Рассмотрим интервал времени (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, между двумя соседними событиями наблюдаемого потока. Момент вынесения решения t о состоянии процесса $\lambda(t)$ (потока) принадлежит интервалу (t_k, t_{k+1}) , длительность которого является случайной величиной в силу того, что события в наблюдаемом потоке наступают в случайные моменты времени $t_1, \dots, t_k, \dots$, $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, значение длительности интервала (t_k, t_{k+1}) есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$. Вместе с тем, так как наблюдаемое в момент t_k событие порождает период мертвого времени длительности T , то $\tau_k = T + \eta_k$, где η_k – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени $t_k + T$ и моментом t_{k+1} . Таким образом, интервал (t_k, t_{k+1}) разбивается на два смежных: первый – полуинтервал $(t_k, t_k + T]$, второй – интервал $(t_k + T, t_{k+1})$. Отметим, что на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$ поток недоступен наблюдению, а на интервале $(t_k + T, t_{k+1})$ поток наблюдаем. В этой связи условия нахождения апостериорной вероятности $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$ и интервале $(t_k + T, t_{k+1})$ принципиально разные.

Для нахождения вероятности $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, необходимо точно знать значение T либо предварительно осуществить оценку T . В данной работе предполагается, что значение T точно известно.

Найдем явные выражения апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$ состояний S_i , $i = \overline{1, n}$, процесса $\lambda(t)$ на интервале ненаблюдаемости потока событий (разд. 4), т.е. на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$, а также

на временном интервале $(t_k + T, t_{k+1})$ (разд. 3), когда исходный обобщенный МАР-поток событий доступен наблюдению.

3. Апостериорные и априорные вероятности на интервалах наблюдаемости потока

В работе [17] получены выражения для апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, состояний S_i и формулы априорных финальных вероятностей состояний π_j , $j = \overline{1, n}$, обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний, функционирующего в условиях полной наблюдаемости потока, т.е. в случае отсутствия мертвого времени ($T = 0$).

На интервале времени (t_0, t_1) между началом наблюдения за потоком и первым событием потока, а также на интервалах времени (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, между соседними событиями исходного обобщенного МАР-потока поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, определяется формулой

$$w(\lambda_i|t) = \frac{\sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{A}_{js}}{\det \tilde{\mathbf{A}}_1} \alpha_i^{(s)} w(\lambda_j|t_k) e^{\beta_s(t-t_k)}}{\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{A}_{js}}{\det \tilde{\mathbf{A}}_1} \alpha_i^{(s)} w(\lambda_j|t_k) e^{\beta_s(t-t_k)}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad t_k < t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \sum_{i=1}^n w(\lambda_i|t) = 1, \quad (1)$$

где величины β_s – корни характеристического уравнения $|\mathbf{A} - \beta \mathbf{E}| = 0$, $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$, $a_{ij} = \lambda_j P_0(\lambda_i|\lambda_j) - \lambda_j \delta_{ji}$, δ_{ji} – символ Кронекера, $i, j = \overline{1, n}$; $\mathbf{E}$ – единичная матрица; $\alpha_i^{(s)}$ – компоненты собственного вектора $\mathbf{A}^{(s)}$, соответствующего корню β_s и определяемые из уравнения $(\mathbf{A} - \beta_s \mathbf{E})\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{O}$, $i, s = \overline{1, n}$; $\mathbf{O}$ – нулевой вектор-столбец; $\det \tilde{\mathbf{A}}_1$ – определитель матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_1 = \|\tilde{\mathbf{A}}^{(1)} \dots \tilde{\mathbf{A}}^{(n)}\|$; $\tilde{A}_{js}$ – алгебраические дополнения элементов $\tilde{a}_{js}$ матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_1$ ($\tilde{a}_{js} = \alpha_j^{(s)}$), $j, s = \overline{1, n}$; вероятность $w(\lambda_j|t_0) = w(\lambda_j|t_0 + 0) = \pi_j$, $j = \overline{1, n}$.

Апостериорная вероятность $w(\lambda_j|t_k) = w(\lambda_j|t_k + 0)$, $k = 1, 2, \dots$, в момент времени t_k наступления события потока задается формулой пересчета

$$w(\lambda_j|t_k) = w(\lambda_j|t_k + 0) = \frac{\sum_{d=1}^n \lambda_d P_1(\lambda_j|\lambda_d) w(\lambda_d|t_k - 0)}{\sum_{d=1}^n \sum_{s=1}^n \lambda_d P_1(\lambda_s|\lambda_d) w(\lambda_d|t_k - 0)},$$

$$j = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \sum_{j=1}^n w(\lambda_j|t_k + 0) = 1, \quad (2)$$

в которой $w(\lambda_d|t_k - 0)$, $d = \overline{1, n}$, вычисляется по формуле

$$w(\lambda_d|t_k - 0) = \frac{\sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{A}_{js}}{\det \tilde{\mathbf{A}}_1} \alpha_d^{(s)} w(\lambda_j|t_{k-1} + 0) e^{\beta_s(t_k - t_{k-1})}}{\sum_{d=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{A}_{js}}{\det \tilde{\mathbf{A}}_1} \alpha_d^{(s)} w(\lambda_j|t_{k-1} + 0) e^{\beta_s(t_k - t_{k-1})}},$$

$$d = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \sum_{d=1}^n w(\lambda_d|t_k - 0) = 1. \quad (3)$$

Отметим, что априорные финальные вероятности π_j , $j = \overline{1, n}$, того, что процесс $\lambda(t)$ в произвольный момент времени t находится в состоянии S_j , удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} \pi_j = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

и определяются выражениями

$$\pi_j = \frac{P_{nj}}{\det \mathbf{P}}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \sum_{j=1}^n \pi_j = 1, \quad (5)$$

где P_{nj} – алгебраическое дополнение элемента p_{nj} матрицы $\mathbf{P} = \|p_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, n}$,

$$p_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i (1 - P_0(\lambda_i | \lambda_i) - P_1(\lambda_i | \lambda_i)), & i = j, i = \overline{1, n-1}; \\ \lambda_j (P_0(\lambda_i | \lambda_j) + P_1(\lambda_i | \lambda_j)), & i \neq j, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, n}; \\ 1, & i = n, j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (6)$$

Итак, на интервале наблюдаемости $(t_k + T, t_{k+1})$ значение длительности которого есть η_k , $k = 1, 2, \dots$, и на начальном интервале (t_0, t_1) апостериорная вероятность $w(\lambda_i | t)$, $i = \overline{1, n}$, вычисляется по формуле (1). При этом начальное условие для $w(\lambda_i | t)$ привязывается к моменту времени $t_k + T$, т.е. в формуле (1) нужно заменить $w(\lambda_j | t_k) = w(\lambda_j | t_k + 0)$ на $w(\lambda_j | t_k + T)$; $t_k + T < t < t_{k+1}$. Для начального интервала (t_0, t_1) при $k = 0$ формула (1) не меняется.

4. Вывод формул апостериорных вероятностей на интервалах ненаблюдаемости

Рассмотрим полуинтервал $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, на котором событие имеет место в граничной точке t_k , а на самом полуинтервале события отсутствуют. Необходимо определить поведение апостериорных вероятностей $w(\lambda_i | t)$, $i = \overline{1, n}$, на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$

Теорема 1. Апостериорные вероятности состояний обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний на полуинтервалах ненаблюдаемости $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$w'(\lambda_i | t) = -\lambda_i w(\lambda_i | t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j (P_0(\lambda_i | \lambda_j) + P_1(\lambda_i | \lambda_j)) w(\lambda_j | t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Система (7) с начальными условиями $(w(\lambda_i | t_k) = w(\lambda_i | t_k + 0))$, $i = \overline{1, n}$, $k = 1, 2, \dots$, где $w(\lambda_i | t_k + 0)$ вычисляются по формуле (2)) определяет поведение вероятностей $w(\lambda_i | t)$, $i = \overline{1, n}$, на полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$. Ее решение устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. Апостериорные вероятности состояний обобщенного МАР-потока событий с n состояниями, $n = 2, 3, \dots$, на временных полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, после момента времени t_k наступления события имеют вид:

$$w(\lambda_i | t) = \pi_i + \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\tilde{\Gamma}_{js}}{\det \tilde{\Gamma}_1} \gamma_i^{(s)} (w(\lambda_j | t_k + 0) - \pi_j) e^{\mu_s(t-t_k)}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$w(\lambda_n | t) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} w(\lambda_i | t), \quad t_k < t \leq t_k + T, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где π_i , $i = \overline{1, n-1}$, определены в (5); величины $\tilde{\Gamma}_1$, $\tilde{\Gamma}_{js}$, $\gamma_i^{(s)}$, μ_s определяются в ходе доказательства.

Доказательство. Воспользуемся условием нормировки с тем, чтобы свести задачу интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений (7) к задаче интегрирования системы с меньшим числом неизвестных функций $w(\lambda_i | t)$, $i = \overline{1, n}$. Выражая, например, $w(\lambda_n | t) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} w(\lambda_i | t)$ и подставляя в (7), приходим к системе линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$w'(\lambda_i | t) = \sum_{j=1}^{n-1} (p_{ij} - p_{in}) w(\lambda_j | t) + p_{in}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (9)$$

$$w(\lambda_n | t) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} w(\lambda_i | t),$$

$t_k < t \leq t_k + T, k = 1, 2, \dots; p_{ij}, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, n}$, определены в (6).

Полученную систему дифференциальных уравнений (9) представим в матричном виде:

$$\dot{W} = \tilde{P}W + F, \quad (10)$$

где вектор-столбцы $W = \|w(\lambda_i | t)\|$, $\frac{dW}{dt} = \left\| \frac{dw(\lambda_i | t)}{dt} \right\|$, $F = \|p_{in}\|$, $i = \overline{1, n-1}$; элементы матрицы коэффициентов $\tilde{P} = \|\tilde{p}_{ij}\| = \|p_{ij} - p_{in}\|$ выписываются в виде:

$$\tilde{p}_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i (1 - P_0(\lambda_i | \lambda_i) - P_1(\lambda_i | \lambda_i)) - \lambda_n (P_0(\lambda_i | \lambda_n) + P_1(\lambda_i | \lambda_n)), & i = j, i = \overline{1, n-1}; \\ \lambda_j (P_0(\lambda_i | \lambda_j) + P_1(\lambda_i | \lambda_j)) - \lambda_n (P_0(\lambda_i | \lambda_n) + P_1(\lambda_i | \lambda_n)), & i \neq j, i, j = \overline{1, n-1}. \end{cases}$$

Получили линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (10), общее решение которой есть сумма общего решения W соответствующей однородной системы и частного решения $\tilde{W}$ исходной неоднородной системы (10).

Найдем прежде всего решение однородной системы дифференциальных уравнений, представленной в матричном виде:

$$\dot{W} = \tilde{P}W. \quad (11)$$

Решение системы (11) будем искать в виде $W = \tilde{\Gamma} e^{\mu t}$, где вектор-столбец $\tilde{\Gamma} = \|\gamma_i\|$, $i = \overline{1, n-1}$. Тогда, подставляя W в (11), получим систему линейных однородных уравнений относительно γ_i :

$$(\tilde{P} - \mu E)\tilde{\Gamma} = O, \quad (12)$$

где O – нулевой вектор-столбец, E – единичная матрица.

Для того чтобы уравнению (12) удовлетворял нетривиальный вектор $\tilde{\Gamma}$, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (12) был равен нулю, т.е.

$$|\tilde{P} - \mu E| = 0. \quad (13)$$

Для каждого корня μ_s , $s = \overline{1, n-1}$, характеристического уравнения (13) из (12) определяется собственный вектор $\tilde{\Gamma}^{(s)} \neq 0$. Будем рассматривать только случай, когда все корни μ_s характеристического уравнения (13) действительны и различны. Получаем $(n-1)$ линейно независимых решений $W_s = \tilde{\Gamma}^{(s)} e^{\mu_s t}$, где $\tilde{\Gamma}^{(s)} = \|\gamma_i^{(s)}\|$, $i, s = \overline{1, n-1}$. Постоянные $\gamma_i^{(s)}$, $i, s = \overline{1, n-1}$, определяются из (12) неоднозначно. Общее решение системы (11) имеет вид:

$$W = \sum_{s=1}^{n-1} C_s \tilde{\Gamma}^{(s)} e^{\mu_s t}; \quad w(\lambda_i | t) = \sum_{s=1}^{n-1} C_s \gamma_i^{(s)} e^{\mu_s t}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (14)$$

где C_s – произвольные постоянные, которые будут определены после нахождения решения неоднородной системы дифференциальных уравнений (10).

Частное решение $\tilde{W}$ неоднородной системы (10) будем искать по виду вектора $F = \|p_{in}\|$, $i = \overline{1, n-1}$. Покажем непосредственной подстановкой, что частное решение системы (10) может иметь вид $\tilde{W} = \|\pi_i\|$, $i = \overline{1, n-1}$. Подставляя $\tilde{w}(\lambda_i | t) = \pi_i$, $i = \overline{1, n-1}$, в систему (10), находим

$$\sum_{j=1}^{n-1} (p_{ij} - p_{in}) \pi_j + p_{in} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Покажем, что левая часть последнего равенства тождественно равна нулю. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} (p_{ij} - p_{in}) \pi_j + p_{in} &= \sum_{j=1}^{n-1} p_{ij} \pi_j - \sum_{j=1}^{n-1} p_{in} \pi_j + p_{in} = \sum_{j=1}^{n-1} p_{ij} \pi_j - p_{in} \sum_{j=1}^{n-1} \pi_j + p_{in} = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} p_{ij} \pi_j + p_{in} \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} \pi_j \right) = \sum_{j=1}^{n-1} p_{ij} \pi_j + p_{in} \pi_n = \sum_{j=1}^n p_{ij} \pi_j \equiv 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \end{aligned}$$

так как π_j , $j = \overline{1, n}$, – решение системы (4).

Таким образом, общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (9) (или (10) в матричном виде) есть сумма общего решения (14) соответствующей однородной системы (11) и частного решения $\tilde{W}$ исходной неоднородной системы (10) и имеет вид:

$$w(\lambda_i|t) = \pi_i + \sum_{s=1}^{n-1} C_s \gamma_i^{(s)} e^{\mu_s t}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (15)$$

где $\tilde{\Gamma}^{(s)} = \|\gamma_i^{(s)}\|$, C_s – произвольные постоянные, $i, s = \overline{1, n-1}$.

Значения C_s определим из начальных условий вероятностей $w(\lambda_i|t)$ в момент времени $t = t_k$ наступления события: $w(\lambda_i|t = t_k) = w(\lambda_i|t_k + 0)$, $i = \overline{1, n-1}$, $k = 1, 2, \dots$, где $w(\lambda_i|t_k + 0)$ определяются формулой пересчета (2). Подставляя вышеприведенные начальные условия в (15), выпишем систему $(n-1)$ линейных неоднородных уравнений для нахождения произвольных постоянных C_s , $i = \overline{1, n-1}$:

$$\sum_{s=1}^{n-1} C_s \gamma_i^{(s)} e^{\mu_s t_k} = w(\lambda_i|t_k + 0) - \pi_i, \quad i = \overline{1, n-1},$$

с отличным от нуля определителем для $(n-1)$ линейно независимого решения системы уравнений. Решая полученную систему с использованием правила Крамера, находим

$$C_s = e^{-\mu_s t_k} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\tilde{\Gamma}_{js}}{\det \tilde{\Gamma}_1} (w(\lambda_j|t_k + 0) - \pi_j), \quad s = \overline{1, n-1}, \quad (16)$$

где $\det \tilde{\Gamma}_1$ – определитель матрицы $\tilde{\Gamma}_1 = \|\tilde{\Gamma}^{(1)} \dots \tilde{\Gamma}^{(n-1)}\|$; $\tilde{\Gamma}_{js}$ – алгебраические дополнения элементов $\tilde{\gamma}_{js}$ матрицы $\tilde{\Gamma}_1$ ($\tilde{\gamma}_{js} = \gamma_j^{(s)}$), $j, s = \overline{1, n-1}$.

Подставляя (16) в (15), приходим к (8). *Теорема 2 доказана.*

Замечание 2. Так как процесс $\lambda(t)$ – марковский, то при $t \rightarrow \infty$ апостериорные вероятности $w(\lambda_i|t)$ стремятся к пределам $w(\lambda_i)$, $i = \overline{1, n}$, не зависящим от начальных условий. Тогда система (9) при $t \rightarrow \infty$ принимает вид:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (p_{ij} - p_{in}) w(\lambda_j) = p_{in}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad w(\lambda_n) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} w(\lambda_i).$$

Полученные аналитические формулы (1), (2), (3), (5) и (8) позволяют сформулировать следующий алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, и алгоритм вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в произвольный момент времени t :

1) в момент начала наблюдения за потоком $t_0 = 0$ в качестве начального значения $w(\lambda_i|t_0 + 0)$, $i = \overline{1, n}$, выбирается априорная стационарная вероятность π_i , вычисляемая по формуле (5), т.е. $w(\lambda_i|t_0 + 0) = w(\lambda_i|t_0 = 0) = \pi_i$;

2) по формуле (1) для $k = 0$ вычисляется вероятность $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, в любой момент времени t , $t_0 < t < t_1$, где t_1 – момент наблюдения первого события потока, при этом начальное условие $w(\lambda_i|t_0 + 0)$ для $w(\lambda_i|t)$ определено на первом шаге;

3) по формуле (3) вычисляется вероятность $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, в момент времени t_1 для $k = 1$, т.е. $w(\lambda_i|t_1) = w(\lambda_i|t_1 - 0)$;

4) по формуле (2) производится пересчет апостериорной вероятности в момент времени t_k наблюдения k -го события потока, т.е. вычисляется величина $w(\lambda_i|t_k + 0)$, $i = \overline{1, n}$, – начальное условие для $w(\lambda_i|t)$ на временном полуинтервале $(t_k, t_k + T]$;

5) по формуле (8) рассчитывается апостериорная вероятность $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, для любого момента времени t , $t_k < t < t_k + T$;

6) по формуле (8) рассчитывается $w(\lambda_i|t = t_k + T)$, $i = \overline{1, n}$, – начальное условие для $w(\lambda_i|t)$ на временном интервале $(t_k + T, t_{k+1})$, где t_{k+1} – момент наблюдения $(k+1)$ -го события потока;

7) по формуле (1) вычисляется апостериорная вероятность $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, для любого момента времени t , $t_k + T < t < t_{k+1}$;

8) по формуле (3) рассчитывается $w(\lambda_i|t_{k+1}) = w(\lambda_i|t_{k+1} - 0)$, $i = \overline{1, n}$;

9) k увеличивается на единицу; алгоритм переходит на шаг 4, шаги 4–8 повторяются последовательно.

При расчете апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, в произвольный момент времени t выносится решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ по методу максимума апостериорной вероятности: если $w(\lambda_i|t) \geq w(\lambda_j|t)$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, то оценка состояния процесса $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$.

5. Результаты численных расчетов

Для получения численных результатов построена имитационная модель обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности T . Основой имитационной модели являются датчики псевдослучайных чисел и метод обратных функций [21]. Первый этап заключается в имитационном моделировании исследуемого потока с целью получения выборки моментов времени наблюдаемых событий; второй этап – оценивание состояний потока методом максимума апостериорной вероятности на основе полученной на первом этапе выборки моментов наступления событий $t_1, \dots, t_m$ в наблюдаемом потоке.

Для числа состояний $n = 3$, времени моделирования $T_m = 10$ ед. времени, длительности мертвого времени $T = 0,27$, значений $\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 5$ процесса $\lambda(t)$ и переходных вероятностей, приведенных в табл. 1, проведены расчеты нахождения траектории оценки $\hat{\lambda}(t)$ процесса $\lambda(t)$.

Таблица 1

Значения переходных вероятностей обобщенного МАР-потока событий с тремя состояниями

$P_0(\lambda_1 \lambda_1) = 0,19$	$P_0(\lambda_1 \lambda_2) = 0,21$	$P_0(\lambda_1 \lambda_3) = 0,21$
$P_0(\lambda_2 \lambda_1) = 0,13$	$P_0(\lambda_2 \lambda_2) = 0,17$	$P_0(\lambda_2 \lambda_3) = 0,24$
$P_0(\lambda_3 \lambda_1) = 0,16$	$P_0(\lambda_3 \lambda_2) = 0,11$	$P_0(\lambda_3 \lambda_3) = 0,09$
$P_1(\lambda_1 \lambda_1) = 0,27$	$P_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0,23$	$P_1(\lambda_1 \lambda_3) = 0,17$
$P_1(\lambda_2 \lambda_1) = 0,17$	$P_1(\lambda_2 \lambda_2) = 0,12$	$P_1(\lambda_2 \lambda_3) = 0,26$
$P_1(\lambda_3 \lambda_1) = 0,08$	$P_1(\lambda_3 \lambda_2) = 0,16$	$P_1(\lambda_3 \lambda_3) = 0,03$

В качестве иллюстрации на рис. 2 приведена траектория поведения стационарного случайного процесса $\lambda(t)$ (истинная реализация процесса), полученная путем имитационного моделирования, и траектория поведения оценки $\hat{\lambda}(t)$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – состояния процесса $\lambda(t)$ и оценки $\hat{\lambda}(t)$, $t_1, t_2, \dots$ – моменты времени наступления событий потока. Вынесение решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ производилось с шагом $\Delta t = 0,001$. Жирной линией на оси времени отмечены области принятия ошибочного решения, когда значение оценки $\hat{\lambda}(t)$ не совпадает с истинным значением процесса $\lambda(t)$.

На рис. 3 продемонстрированы траектории поведения апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$ состояний λ_i процесса $\lambda(t)$, $i = \overline{1, 3}$, графические реализации которых получены с помощью имитационного моделирования последовательности наблюдаемых моментов времени наступления событий $t_1, t_2, \dots$. При этом в любой момент времени t , $t_0 \leq t \leq T_m$, выполняется условие нормировки $w(\lambda_1|t) + w(\lambda_2|t) + w(\lambda_3|t) = 1$.

Для установления частоты ошибочных решений о состоянии случайного процесса $\lambda(t)$ проведен ряд статистических экспериментов, состоящих из следующих этапов:

1) для определенного набора параметров λ_i , $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$, $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$, $i, j = \overline{1, n}$, осуществляется моделирование обобщенного МАР-потока с n состояниями на заданном отрезке времени моделирования $[0, T_m]$ (отдельный v -й эксперимент);

- 2) осуществляется расчет апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, состояний процесса $\lambda(t)$ на заданном отрезке моделирования $[0, T_m]$ по формулам (1), (2), (3), (5) и (8);
- 3) осуществляется оценивание траектории процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t , удовлетворяющий отрезку $[0, T_m]$, по методу максимума апостериорной вероятности;
- 4) определяется (для отдельного v -го эксперимента) d_v – суммарная протяженность интервалов, на которых истинное значение процесса $\lambda(t)$ не совпало с его оценкой $\hat{\lambda}(t)$;
- 5) вычисляются значения $p_v = d_v/T_m$ – доли ошибочных решений;
- 6) шаги 1–5 повторяются N раз ($v = \overline{1, N}$) для расчета оценки безусловной (полной) вероятности ошибки оценивания состояний случайного процесса $\lambda(t)$ на рассматриваемом отрезке $[0, T_m]$.

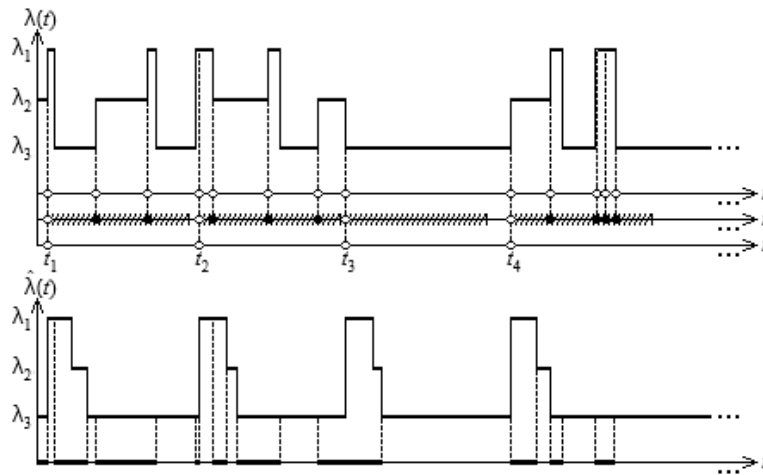


Рис. 2. Траектория процесса $\lambda(t)$ и траектория оценки $\hat{\lambda}(t)$

Fig. 2. The trajectory of the process $\lambda(t)$ and the trajectory of the estimate $\hat{\lambda}(t)$

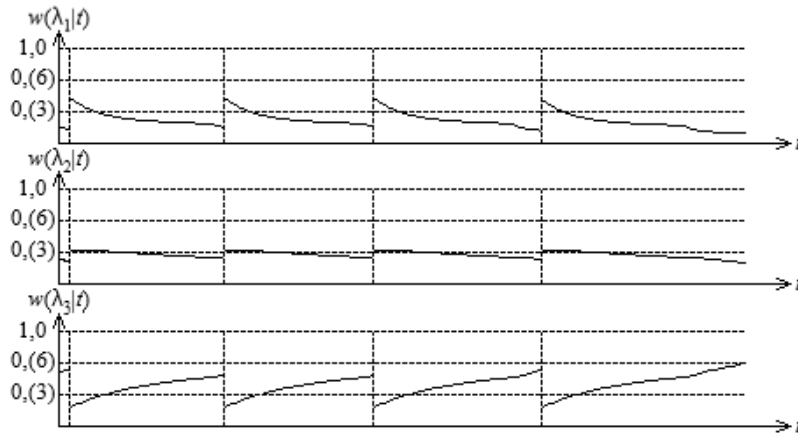


Рис. 3. Траектории апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, 3}$

Fig. 3. Trajectories of posterior probabilities $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, 3}$

Результатом реализации вышеприведенного алгоритма является выборка $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N$ долей ошибочных решений при проведении N экспериментов. На основании полученных данных вычисляются выборочное среднее безусловной вероятности ошибочно принятого решения $\hat{P}_{\text{ош}} = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \hat{p}_v$ и выборочная дисперсия $\hat{D}_{\text{ош}} = \frac{1}{N-1} \sum_{v=1}^N (\hat{p}_v - \hat{P}_{\text{ош}})^2$.

Эксперимент 1. Фиксируются число состояний $n = 3$, количество опытов $N = 100$, значение длительности мертвого времени $T = 0,17$ и переходные вероятности процесса $\lambda(t)$, заданные произвольно (табл. 1). Целью эксперимента является установление зависимости $\hat{P}_{\text{ош}}$ от длительности времени моделирования T_m , где $T_m \in \{100; 200; \dots; 1000\}$. Полученные результаты первого статистического эксперимента продемонстрированы в табл. 2.

Таблица 2

Результаты первого статистического эксперимента

T_m	$\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 1$		$\lambda_1 = 15, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 1$		$\lambda_1 = 20, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 1$	
	$\hat{P}_{\text{ош}}$	$\hat{D}_{\text{ош}} \times 10^3$	$\hat{P}_{\text{ош}}$	$\hat{D}_{\text{ош}} \times 10^3$	$\hat{P}_{\text{ош}}$	$\hat{D}_{\text{ош}} \times 10^3$
100	0,190598	0,233326	0,135726	0,164548	0,101226	0,094689
200	0,188431	0,121193	0,137610	0,069900	0,101258	0,048507
300	0,190477	0,097663	0,137746	0,044778	0,101435	0,033193
400	0,189772	0,045799	0,138334	0,039287	0,101186	0,016554
500	0,190016	0,031188	0,137480	0,026709	0,101556	0,012633
600	0,190599	0,024237	0,137827	0,016810	0,10147	0,013922
700	0,190222	0,033073	0,138078	0,011451	0,10132	0,010115
800	0,189895	0,024601	0,137343	0,016556	0,101181	0,008789
900	0,190018	0,019293	0,137997	0,011633	0,10171	0,006313
1000	0,190002	0,013740	0,137885	0,009393	0,101544	0,004877

Результаты свидетельствуют о том, что величина $\hat{P}_{\text{ош}}$ с ростом T_m практически не изменяет своего значения. Однако значения $\hat{D}_{\text{ош}}$ значительно убывают с ростом значения T_m . Таким образом, с ростом значения времени моделирования T_m можно предположить, что величина $\hat{P}_{\text{ош}}$ сходится к истинной вероятности ошибки принятия решения $P_{\text{ош}}$. Также результаты эксперимента показывают, что чем больше различимы состояния процесса $\lambda(t)$, тем меньше величина $\hat{P}_{\text{ош}}$ и тем быстрее убывает $\hat{D}_{\text{ош}}$ с ростом значения T_m .

Эксперимент 2. Фиксируются число состояний $n = 3$, количество опытов $N = 100$, значение времени моделирования $T_m = 500$ и переходные вероятности, представленные в табл. 1. В данном эксперименте устанавливается зависимость $\hat{P}_{\text{ош}}$ от длительности мертвого времени T , где $T \in \{0,1; 0,6; \dots; 4,6\}$. Результаты эксперимента представлены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты второго статистического эксперимента

T	$\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 1$		$\lambda_1 = 15, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 1$		$\lambda_1 = 20, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 1$	
	$\hat{P}_{\text{ош}}$	$\hat{D}_{\text{ош}} \times 10^3$	$\hat{P}_{\text{ош}}$	$\hat{D}_{\text{ош}} \times 10^3$	$\hat{P}_{\text{ош}}$	$\hat{D}_{\text{ош}} \times 10^3$
0,1	0,193369	0,045538	0,139048	0,017312	0,100887	0,016390
0,6	0,187282	0,043709	0,138662	0,028811	0,103253	0,021228
1,1	0,190675	0,056735	0,14153	0,032023	0,105240	0,013553
1,6	0,194373	0,050363	0,143708	0,033002	0,107182	0,018838
2,1	0,196068	0,066667	0,145241	0,039105	0,108634	0,023785
2,6	0,197257	0,058733	0,146991	0,034911	0,109077	0,020624
3,1	0,199398	0,078848	0,148189	0,039074	0,109718	0,022814
3,6	0,199237	0,053270	0,149020	0,040718	0,110203	0,023633
4,1	0,200456	0,069986	0,148979	0,024693	0,111391	0,024411
4,6	0,201110	0,078916	0,149998	0,035062	0,111273	0,020970

Результаты свидетельствуют о том, что значение $\hat{P}_{\text{ош}}$ растет с увеличением значения T , так как с увеличением длительности мертвого времени суммарный период ненаблюдаемости увеличивается и $\hat{P}_{\text{ош}}$ стремится к постоянной величине на основании того, что апостериорные вероятности на участке ненаблюдаемости с ростом T стремятся к априорным вероятностям. Это, в свою очередь, приводит к уменьшению числа наблюдаемых событий или, иными словами, к снижению количества информации о потоке, что является базой для алгоритма принятия решения о значении процесса $\lambda(t)$

в произвольный момент времени $t \geq t_0$. В табл. 3 с ростом значения мертвого времени можно наблюдать стабилизацию величины $D_{\text{ош}}^*$ в пределах некоторого постоянного значения $D_{\text{ош}}$. Также стоит отметить, что чем больше различимы состояния потока $\lambda(t)$, тем точнее оценивание.

Заключение

В данной статье приведены явные виды апостериорных вероятностей и априорных вероятностей состояний потока на интервалах наблюдаемости за исследуемым потоком, также получены явные выражения для апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$ состояний S_i , $i = \overline{1, n}$, обобщенного МАР-потока событий с n состояниями на временных интервалах, на которых поток событий недоступен наблюдению. Предложен алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний в условиях частичной наблюдаемости, приведены численные результаты ряда экспериментов по выявлению зависимости значений $P_{\text{ош}}^*$ от изменений некоторых параметров потока. В ходе экспериментов установлено:

- 1) с ростом T_m величина $P_{\text{ош}}^*$ стремится к некоторой постоянной величине, которая близка к истинной вероятности ошибки принятия решения $P_{\text{ош}}$;
- 2) значение $P_{\text{ош}}^*$ возрастает с увеличением значения T ;
- 3) чем больше различимы состояния потока $\lambda(t)$, тем точнее оценивание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, is. 4. P. 923–930.
2. Cox D.R., Miller H.D. The theory of stochastic processes. New York : Wiley, 1965. 398 p.
3. Grandell J. Doubly stochastic Poisson processes. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1976. 240 p.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
5. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
6. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
7. Леонова М.А., Нежельская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
8. Nezhefskaya L., Sidorova E. Optimal state estimation of the states of synchronous generalized flow of events of the second order under its complete observability // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 912. P. 157–178.
9. Nezhefskaya L., Tumashkina D. Optimal state estimation of semi-synchronous event of flow of the second order under its complete observability // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 912. P. 93–105.
10. Цицашвили Г.Ш., Осипова М.А. Оценка параметров мультипликативных распределений сетей массового обслуживания // Проблемы передачи информации. 2009. Т. 45, № 4. С. 115–120.
11. Okamura H., Dohi T., Trivedi K.S. Markovian arrival process parameter estimation with group data // IEEE/ACM Transactions on Networking (TON). 2009. V. 17 (4). P. 1326–1339.
12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М. : Мир, 1967. Т. 2. 752 с.
13. Normey-Rico J.E. Control of dead-time processes // Advanced textbooks in control and signal processing. London : Springer-Verlag, 2007. 462 p.
14. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
15. Nezhefskaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 141–151.
16. Кеба А.В., Нежельская Л.А. Статистические эксперименты на имитационной модели обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний // Труды Томского государственного университета. Сер. физико-математическая. Томск : Изд. Дом ТГУ, 2018. Т. 302. С. 157–164.
17. Кеба А.В., Нежельская Л.А. Апостериорные вероятности состояний обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний // Труды Томского государственного университета. Сер. физико-математическая. Томск : Изд. Дом ТГУ, 2019. Т. 304. С. 23–32.
18. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.

19. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М. : Сов. радио, 1968. 504 с.
20. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М. : Сов. радио, 1968. 256 с.
21. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.

Поступила в редакцию 30 марта 2021 г.

Keba A.V., Nezhel'skaya L.A. (2021) OPTIMAL STATE ESTIMATION OF GENERALIZED MAP WITH AN ARBITRARY NUMBER OF STATES UNDER CONDITIONS OF UNEXTENDABLE DEAD TIME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 56. pp. 68–80

DOI: 10.17223/19988605/56/8

The paper deals with a generalized MAP with an arbitrary number of states under conditions of unextendable dead time of fixed duration T (each registered event generates dead time period of duration T , events that occurred during the non-observability period are lost and do not cause an extension of the dead time period). The accompanying random process $\lambda(t)$ of the flow is an unobservable piecewise constant process with n states: $S_1, \dots, S_n$. The process $\lambda(t)$ is unobservable in principle, the moments of occurrence of events $t_1, t_2, \dots$ are observable.

It is necessary to estimate the state of the process $\lambda(t)$ at an arbitrary moment t provided that a sample of the moments of occurrence of events $t_1, \dots, t_m$ in the observed flow over the time interval (t_0, t) is known, where t_0 is the beginning of observation, t is the end of observation, m is the number of observed events over the time interval (t_0, t) . It is assumed that $\lambda(t)$ is stationary.

The optimal estimation of the states of the process $\lambda(t)$ in terms of the minimum of the total probability of making the erroneous decision is made according to the maximum a posteriori probability criterion. At an arbitrary moment t , the values $w(\lambda_i|t) = w(\lambda_i|t_1, \dots, t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i|t_1, \dots, t_m, t)$, $i = \overline{1, n}$ are compared: if $w(\lambda_i|t) \geq w(\lambda_j|t)$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, then $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$.

In the paper we present the formula for posterior probabilities on the intervals of the flow observability. The explicit form for posterior probabilities on the intervals of the flow unobservability is found. Based on these formulas, the algorithm for calculating the posterior probability $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, and the algorithm for deciding on the state of the process $\lambda(t)$ at an arbitrary moment t are proposed. The algorithms were implemented by C# programming language in the Visual Studio 2015. Statistical experiments were conducted on the simulation model to establish the frequency of making erroneous decisions about the state of the process $\lambda(t)$. The numerical results of these experiments are given in the paper and illustrate an acceptable estimate of the total probability of making the erroneous decision.

Keywords: generalized MAP with an arbitrary number of states; unextendable dead time; optimal state estimation; posterior probabilities; maximum a posteriori probability criterion.

KEBA Anastasia Vladimirovna (Post-graduate Student, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: mir.na.mig7@mail.ru

NEZHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Applied Mathematics Department, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: ludne@mail.ru

REFERENCES

1. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
2. Cox, D.R. & Miller, H.D. (1965) *The Theory of Stochastic Processes*. New York: Wiley.
3. Grandell, J. (1976) *Doubly Stochastic Poisson Processes*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the Equivalent Substitutions Method for Computing Fragments of Communication Networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
5. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 2 [On the Equivalent Substitutions Method for Computing Fragments of Communication Networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
6. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143

7. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88–101.
8. Nezhelskaya, L. & Sidorova, E. (2018) Optimal state estimation of the states of synchronous generalized flow of events of the second order under its complete observability. *Communications in Computer and Information Science*. 912. pp. 157–178. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5_13
9. Nezhelskaya, L. & Tumashkina, D. (2018) Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability. *Communications in Computer and Information Science*. 912. pp. 93–105. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5_8
10. Tsitsiashvili, G.Sh. & Osipova, M.A. (2009) Parameter estimation for product-form distributions of queueing networks. *Problemy Peredachi Informatsii – Problems of Information Transmission*. 45(4). pp. 115–120.
11. Okamura, H., Dohi, T. & Trivedi, K.S. (2009) Markovian arrival process parameter estimation with group data. *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*. 17(4). pp. 1326–1339. DOI: 10.1109/TNET.2008.2008750
12. Feller, W. (1967) *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i ee prilozheniya* [An Introduction to Probability Theory and its Applications]. Vol. 2. Moscow: Mir.
13. Normey-Rico, J.E. (2007) *Control of Dead-Time Process*. London: Springer-Verlag.
14. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskoy eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: University Press.
15. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_12
16. Кеба, А.В. & Нежельская, Л.А. (2018) Statisticheskie eksperimenty na imitatsionnoy modeli obobshchennogo MAP-potoka sobytiiy s proizvolnym chislom sostoyaniy [Statistical experiments on a simulation model of generalized MAP with an arbitrary number of states] In: Smyrin, I.S. (ed.) *Matematicheskiye i programmnoye obespecheniye informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and software informational, technical and economic systems]. Tomsk: Tomsk State University. pp. 157–164.
17. Кеба, А.В. & Нежельская, Л.А. (2019) Aposteriornye veroyatnosti sostoyaniy obobshchennogo MAP-potoka sobytiiy s proizvolnym chislom sostoyaniy [Posterior probabilities of states of generalized MAP with an arbitrary number of states] In: Smyrin, I.S. (ed.) *Matematicheskiye i programmnoye obespecheniye informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and software informational, technical and economic systems]. Tomsk: Tomsk State University. pp. 23–32.
18. Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (2006) *Teoriya veroyatnostey i sluchaynykh protsessov* [Theory of Probabilities and Random Processes]. Tomsk: NTL.
19. Levin, B.R. (1968) *Teoriticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering]. Moscow: Sovetskoe radio.
20. Khazen, E.M. (1968) *Metody optimal'nykh statisticheskikh resheniy i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods of Optimal Statistical Decisions]. Moscow: Sovetskoe radio.
21. Sobol, I.M. (1973) *Chislennyye metody Monte-Karlo* [Numerical methods of Monte Carlo]. Moscow: Nauka.

УДК 51-76

DOI: 10.17223/19988605/56/9

П.Н. Подкур, Н.К. Смоленцев

ВЕЙВЛЕТЫ МЕЙЕРА С КОЭФФИЦИЕНТОМ МАСШТАБИРОВАНИЯ $N > 2$

Определяются ортогональные вейвлеты с коэффициентом масштабирования $N > 2$, аналогичные классическим вейвлетам Мейера для $N = 2$. Построенные вейвлеты используются для анализа электроэнцефалограмм (ЭЭГ). Получено разложение сигнала ЭЭГ на отдельные компоненты, локализованные по частоте.

Ключевые слова: вейвлеты Мейера; вейвлет-анализ ЭЭГ; вейвлеты с коэффициентом масштабирования N .

Вейвлет-анализ предоставляет мощный инструмент для изучения различных медицинских данных. В настоящее время широко используются методы непрерывного вейвлет-анализа (см. напр.: [1, 2]). Также исследуются и числовые характеристики сигналов электрокардиограмм (ЭКГ) и электроэнцефалограмм (ЭЭГ), получаемые методами дискретного вейвлет-преобразования [3–7]. Использование степеней двойки для вейвлет-анализа и при построении теории вейвлетов удобно во многих отношениях, хотя и не является обязательным. Можно вместо коэффициента масштабирования 2 использовать любое целое число N и даже рациональное, большее единицы [8]. Основы теории вейвлетов с целым коэффициентом $N > 2$ представлены в работах [9] и [10]. В [10] показано использование вейвлетов Хаара с коэффициентами масштабирования 4, 5, 8 для анализа экономических данных. Однако других практических применений вейвлетов с коэффициентом $N > 2$ в настоящее время нет. Более того, нет даже примеров дифференцируемых вейвлетов с коэффициентом масштабирования $N > 2$.

В данной работе построены вейвлеты с коэффициентом масштабирования $N > 2$, аналогичные обычным ($N = 2$) вейвлетам Мейера. В случае $N = 3$ показано их применение для исследования ЭЭГ. Получено разложение сигнала ЭЭГ на основные частотные ритмы. Результаты показывают, что вейвлет-анализ с коэффициентом масштабирования больше двух позволяет получить новые числовые характеристики ЭЭГ, что подтверждает перспективность использования таких вейвлетов для анализа данных.

1. Предварительные сведения

Напомним основные положения вейвлет-анализа с масштабным коэффициентом $N > 2$. Развитие этой темы см.: [10]. Предположим, что задана интегрируемая с квадратом функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая следующему масштабирующему соотношению:

$$\varphi(x) = \sqrt{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi(Nx - n).$$

Такая функция $\varphi(x)$ называется масштабирующей, а набор коэффициентов разложения $\{h_n\}$ называется фильтром функции $\varphi(x)$. Кроме того, предположим, что целочисленные сдвиги $\{\varphi(x - n)\}$ попарно L_2 -ортогональны и нормированы. Тогда для любого $j \in \mathbb{Z}$ функции

$$\varphi_{j,n}(x) = \sqrt{N^j} \varphi(N^j x - n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

образуют ортонормированную систему. Пусть $V_j \subset L_2(\mathbb{R})$ – подпространство, порожденное функциями $\varphi_{j,n}(x)$, $n \in \mathbb{Z}$. Для масштабирующей функции $\varphi(x)$ определяется частотная функция формулой

$$H_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-i n \omega}.$$

После преобразования Фурье масштабирующего соотношения оно принимает вид:

$$\hat{\phi}(\omega) = H_0\left(\frac{\omega}{N}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{N}\right).$$

Масштабирующей функции $\phi(x)$ соответствует $N-1$ вейвлетов $\psi^1(x), \dots, \psi^{N-1}(x)$, определенных равенствами

$$\psi^k(x) = \sqrt{N} \sum_n g_n^k \phi(Nx-n), \quad k=1, 2, \dots, N-1, \quad (1)$$

где коэффициенты разложения $\{g_n^k\}_{n \in \mathbb{Z}}$ называются фильтрами вейвлетов. Для каждого $j \in \mathbb{Z}$ сдвиги масштабированных вейвлетов $\psi_{j,n}^k(x) = \sqrt{N^j} \psi^k(N^j x - n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $k=1, 2, \dots, N-1$, образуют ортонормированные базисы пространств вейвлетов $W_j^k \subset V_j$, $k=1, 2, \dots, N-1$. Определим соответствующие вейвлетам $\psi^k(x)$ частотные функции:

$$H_k(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n g_n^k e^{-in\omega}, \quad k=1, 2, \dots, N-1. \quad (2)$$

В частотной области равенство (1) принимает вид:

$$\hat{\psi}^k(\omega) = H_k\left(\frac{\omega}{N}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{N}\right), \quad k=1, 2, \dots, N-1. \quad (3)$$

Частотные функции вейвлетов удовлетворяют свойству унитарности матрицы [9, 10]:

$$\begin{pmatrix} H_0(\omega) & H_0\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) & \dots & H_0\left(\omega - \frac{2\pi(N-1)}{N}\right) \\ H_1(\omega) & H_1\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) & \dots & H_1\left(\omega - \frac{2\pi(N-1)}{N}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{N-1}(\omega) & H_{N-1}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) & \dots & H_{N-1}\left(\omega - \frac{2\pi(N-1)}{N}\right) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Вейвлет-преобразование. Пусть $P_j(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{j,n} \phi_{j,n}(x)$ – приближение функции $f(x)$ в пространстве $V_j \subset L_2(\mathbb{R})$. Тогда вейвлет-разложение $P_j(f)$ есть представление $P_j(f)$ в виде

$$P_j(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{j-1,n} \phi_{j-1,n}(x) + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{j-1,n}^k \psi_{j-1,n}^k(x). \quad (5)$$

В формуле (5) первая сумма дает более грубую аппроксимацию $P_{j-1}(f)$ функции $f(x)$ в пространстве $V_{j-1} \subset V_j$, а вторая сумма – это те детали, которые теряются при переходе от $P_j(f)$ к $P_{j-1}(f)$. Вместо набора коэффициентов $A_0 = \{a_{j,n}\}$ мы получили два: $A_1 = \{a_{j-1,n}\}$ и $D_1 = \{d_{j-1,n}^1, \dots, d_{j-1,n}^{N-1}\}$. Процедуру разложения можно повторить, применяя ее к $P_{j-1}(f) \in V_{j-1}$.

Практически мы имеем дело не функцией $f(x)$, а с цифровым сигналом S , который представлен массивом $S = A_0 = \{a_n\}$ значений функции $f(x)$. Тогда его вейвлет-разложение $S \rightarrow \{D_1, A_1\}$ производится по формулам [10]

$$a_{1,m} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_n} a_{n+Nm}, \quad d_{1,m}^k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g_n^k} a_{n+Nm}, \quad k=1, 2, \dots, N-1. \quad (6)$$

где $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ и $\{g_n^k\}_{n \in \mathbb{Z}}$ – фильтры вейвлетов $\phi(x)$ и $\psi^k(x)$, а черта сверху означает комплексное сопряжение. Таким образом, вместо $A_0 = \{a_n\}$ мы получили два массива: $A_1 = \{a_{1,m}\}$ – коэффициенты аппроксимации, и $D_1 = \{d_{1,m}^1, \dots, d_{1,m}^{N-1}\}$ – коэффициенты детализации. Процедуру разложения можно

повторить, применив ее к набору коэффициентов A_1 . Восстановление массива $A = \{a_n\}$ по коэффициентам вейвлет-разложения $A_1 = \{a_{1,m}\}$ и $D_1 = \{d_{1,m}^1, \dots, d_{1,m}^{N-1}\}$ производится следующим образом:

$$a_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{n-Nm} a_{1,m} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_{n-Nm}^k d_{1,m}^k. \quad (7)$$

2. Вейвлеты Мейера

Вейвлеты Мейера строятся на основе вейвлетов Шеннона [10]. Масштабирующая функция Шеннона $\phi(x)$ определяется через ее образ Фурье $\hat{\phi}(\omega)$, который берется в виде ступенчатой функции в частотной области: $\hat{\phi}(\omega) = 1$ при $\omega \in [-\pi, \pi]$ и $\hat{\phi}(\omega) = 0$ при других ω . Тогда $\phi(x) = \text{sinc}(\pi x)/(\pi x)$. Для нахождения вейвлетов Шеннона $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$, ..., $\psi^{N-1}(x)$ строятся их частотные функции (2), сначала $H_0(\omega)$, а затем остальные $H_k(\omega)$ с учетом унитарности матрицы (4).

Функция $H_0(\omega)$ может быть найдена из масштабирующего уравнения $\hat{\phi}(\omega) = H_0(\omega/N) \hat{\phi}(\omega/N)$. Действительно, поскольку функция $\hat{\phi}(\omega/N) = 1$ на промежутке $[-N\pi, N\pi]$ и равна нулю в противном случае, то $H_0(\omega/N) = \hat{\phi}(\omega)$ на $[-N\pi, N\pi]$, или $H_0(\omega) = \hat{\phi}(N\omega)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$. Поэтому $H_0(\omega) = 1$ при $\omega \in [-\pi/N, \pi/N]$ и $H_0(\omega) = 0$ при других $\omega \in [-\pi, \pi]$. Вне промежутка $[-\pi, \pi]$ функция $H_0(\omega)$ продолжается периодически. Для $k = 1, 2, \dots, N-1$ положим

$$H_k(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \in [k\pi/N, (k+1)\pi/N], \\ 0, & \text{для остальных } \omega \text{ промежутка } [-\pi, \pi]. \end{cases} \quad (8)$$

Вейвлеты Шеннона $\psi^k(x)$ с коэффициентом масштабирования N определяются из формулы (3). По построению вейвлеты Шеннона соответствуют идеальным фильтрам $H_0(\omega)$, $H_k(\omega)$. Вследствие разрывности этих функций масштабирующая функция $\phi(x)$ и вейвлеты $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$, ..., $\psi^{N-1}(x)$ убывают очень медленно, что затрудняет их практическое использование. Этот недостаток можно исправить «сглаживанием» разрывов. В результате получаются вейвлеты, которые мы называем именем Мейера по аналогии со случаем $N = 2$.

Построение масштабирующей функции Мейера. Разрывы масштабирующей функции $\hat{\phi}(\omega)$ вейвлетов Шеннона в точках $-\pi$ и π можно удалить сглаживанием многими способами. Однако нужно, чтобы сглаженная функция $\hat{\phi}(\omega)$ обладала свойством $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi n)|^2 = 1$, которое обеспечивает ортогональность системы функций $\phi(x - n)$. Проведем сглаживание на промежутках $[-\pi - \pi/N, -\pi + \pi/N]$ и $[\pi - \pi/N, \pi + \pi/N]$.

Масштабирующую функцию Мейера $\phi(x)$ коэффициента масштабирования N определим через ее преобразование Фурье $\hat{\phi}(\omega)$ равенством

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq \pi - \frac{\pi}{N}, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{N}{2\pi} |\omega| - \frac{N-1}{2}\right)\right), & \pi - \frac{\pi}{N} \leq |\omega| \leq \pi + \frac{\pi}{N}, \\ 0, & \text{для остальных } \omega, \end{cases} \quad (9)$$

где $v(x)$ есть вспомогательная функция, которая равна нулю при $x \leq 0$, равна единице при $x \geq 1$ и удовлетворяет условию $v(x) + v(1-x) = 1$. Мы используем следующую полиномиальную интерполяцию между 0 и 1 на промежутке $[0, 1]$: $v(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$, принятую в MATLAB.

Покажем, что сдвиги $\phi(x - n)$ функции $\phi(x)$ образуют ортонормированную систему. Для этого достаточно проверить равенство $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi n)|^2 = 1$ [10]. По построению $\hat{\phi}(\omega)$ мы видим, что достаточно показать равенство

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{N}{2\pi}|\omega|-\frac{N-1}{2}\right)\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{N}{2\pi}|\omega-2\pi|-\frac{N-1}{2}\right)\right)=1$$

только на промежутке $[\pi - \pi/N, \pi + \pi/N]$ – там, где пересекаются носители соседних функций $\hat{\phi}(\omega)$ и $\hat{\phi}(\omega - 2\pi)$ при суммировании. Это равенство верно, так как второй член в левой части уравнения с использованием равенства $v(1-x) = 1 - v(x)$ может быть легко преобразован к квадрату синуса:

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{N}{2\pi}(2\pi-\omega)-\frac{N-1}{2}\right)\right) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(-\frac{N}{2\pi}\omega+\frac{N-1}{2}+1\right)\right)= \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}v\left(\frac{N}{2\pi}\omega-\frac{N-1}{2}\right)\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{N}{2\pi}\omega-\frac{N-1}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Частотную функцию $H_0(\omega)$ найдем из масштабирующего уравнения

$$\hat{\phi}(\omega) = H_0\left(\frac{\omega}{N}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{N}\right).$$

Функция $\hat{\phi}(\omega)$ равна 1 на $[-\pi + \pi/N, \pi - \pi/N]$ и обращается в нуль вне промежутка $[-\pi - \pi/N, \pi + \pi/N]$. Поэтому $\hat{\phi}(\omega/N) = 1$ на промежутке $[-N\pi + \pi, N\pi - \pi]$ и обращается в нуль вне промежутка $[-N\pi - \pi, N\pi + \pi]$. Поскольку промежуток $[-N\pi + \pi, N\pi - \pi]$ включает в себя носитель $[-\pi - \pi/N, \pi + \pi/N]$ функции $\hat{\phi}(\omega)$, то сомножитель $\hat{\phi}(\omega/N)$ можно убрать (он равен единице на носителе функции $\hat{\phi}(\omega)$). Таким образом, $H_0(\omega/N) = \hat{\phi}(\omega)$ на $[-\pi - \pi/N, \pi + \pi/N]$ и $H_0(\omega/N) = 0$ вне $[-\pi - \pi/N, \pi + \pi/N]$, т.е. $H_0(\omega) = \hat{\phi}(N\omega)$ на промежутке $[-\pi/N - \pi/N^2, \pi/N + \pi/N^2]$ и $H_0(\omega) = 0$ вне промежутка $[-\pi/N - \pi/N^2, \pi/N + \pi/N^2]$:

$$H_0(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [-\pi/N + \pi/N^2, \pi/N - \pi/N^2], \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{N}{2\pi}|N\omega|-\frac{N-1}{2}\right)\right), & \pi/N - \pi/N^2 \leq |\omega| \leq \pi/N + \pi/N^2, \\ 0, & \text{для остальных } \omega. \end{cases} \quad (10)$$

Вне промежутка $[-\pi, \pi]$ функция $H_0(\omega)$ продолжается периодически.

Построение частотных функций и вейвлетов. Для построения вейвлетов Мейера найдем сначала их частотные функции $H_k(\omega)$ с учетом унитарности матрицы (4). Для этого проведем сглаживание частотных функций (8) вейвлетов Шеннона, аналогичное сглаживанию (10) частотной функции $H_0(\omega)$. Частотная функция Шеннона $H_k(\omega)$ четная и имеет носитель на двух симметричных промежутках:

как: $\frac{k\pi}{N} \leq |\omega| < \frac{(k+1)\pi}{N}$. Проведем сглаживание вблизи концов сначала для неотрицательных ω , т.е. на

промежутках $\frac{k\pi}{N} - \frac{\pi}{N^2} \leq \omega < \frac{k\pi}{N} + \frac{\pi}{N^2}$ и $\frac{(k+1)\pi}{N} - \frac{\pi}{N^2} \leq \omega < \frac{(k+1)\pi}{N} + \frac{\pi}{N^2}$. Тогда получаются следующие выражения сглаженных функций $H_{k+}(\omega)$, $k = 1, 2, \dots, N-2$, при $\omega > 0$:

$$H_{k+}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < \frac{k\pi}{N} - \frac{\pi}{N^2} \text{ или } \omega \geq \frac{(k+1)\pi}{N} + \frac{\pi}{N^2}, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{N^2}{2\pi}|\omega|-\frac{kN-1}{2}\right)\right), & \frac{k\pi}{N} - \frac{\pi}{N^2} \leq \omega < \frac{k\pi}{N} + \frac{\pi}{N^2}, \\ 1, & \frac{k\pi}{N} + \frac{\pi}{N^2} \leq |\omega| < \frac{(k+1)\pi}{N} - \frac{\pi}{N^2}, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{N^2}{2\pi}|\omega|-\frac{(k+1)N-1}{2}\right)\right), & \frac{(k+1)\pi}{N} - \frac{\pi}{N^2} \leq \omega < \frac{(k+1)\pi}{N} + \frac{\pi}{N^2}. \end{cases} \quad (11)$$

На весь промежуток $[-\pi, \pi]$ функции $H_{k+}(\omega)$ можно продолжить как по четности, так и по нечетности. Далее мы уточним, как это сделать из требования унитарности матрицы (4). Вне промежутка $[-\pi, \pi]$ они продолжаются по периодичности. Поскольку частотные функции периодические с периодом 2π , то последняя частотная функция сглаживается только внутри промежутка $[-\pi, \pi]$,

$$H_{N-1}(\omega) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{N^2}{2\pi} |\omega| - \frac{(N-1)N-1}{2}\right)\right), & |\omega| \in \left[\frac{(N-1)\pi}{N} - \frac{\pi}{N^2}, \frac{(N-1)\pi}{N} + \frac{\pi}{N^2}\right], \\ 1, & |\omega| \in \left[\frac{(N-1)\pi}{N} + \frac{\pi}{N^2}, \pi\right], \\ 0, & \text{для остальных } \omega \in [-\pi, \pi]. \end{cases} \quad (12)$$

Покажем, что указанные выше функции $H_0(\omega)$, $H_k(\omega)$ и (12) обладают тем свойством, что строки матрицы (4) имеют единичную норму. Для доказательства равенства $|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega - 2\pi/N)|^2 + \dots + |H_0(\omega - 2\pi(N-1)/N)|^2 = 1$ достаточно показать его только на промежутке $[\pi/N - \pi/N^2, \pi/N + \pi/N^2]$. Это следует из того, что сглаживание всех функций в точках разрыва проведено одинаково и симметрично. Кроме того, в приведенной сумме носители соседних функций пересекаются именно по тем промежуткам, где производилось сглаживание. На промежутке $[\pi/N - \pi/N^2, \pi/N + \pi/N^2]$ в сумме имеется только два ненулевых слагаемых, $H_0(\omega)$ и $H_0(\omega - 2\pi/N)$. Тогда получаем с использованием равенства $v(1-x) = 1 - v(x)$

$$\begin{aligned} & |H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega - 2\pi/N)|^2 + \dots + |H_0(\omega - 2\pi(N-1)/N)|^2 = |H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega - 2\pi/N)|^2 = \\ & = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{N^2}{2\pi} \omega - \frac{N-1}{2}\right)\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{N^2}{2\pi} (-\omega + 2\pi/N) - \frac{N-1}{2}\right)\right) = \\ & = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{N^2}{2\pi} \omega - \frac{N-1}{2}\right)\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{N^2}{2\pi} \omega - \frac{N-1}{2}\right)\right) = 1. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично показывается нормированность остальных строк для $H_k(\omega)$ как для четного продолжения $H_{k+}(\omega)$, так и для нечетного. Обеспечим эрмитову ортогональность строк матрицы (4) частотных функций вейвлеты Мейера. Поскольку носитель функции $H_k(\omega)$ имеет непустое пересечение с носителями только соседних функций $H_{k-1}(\omega)$ и $H_{k+1}(\omega)$, то достаточно обеспечить ортогональность только соседних строк. Для этого, как нетрудно увидеть, достаточно частотные функции $H_k(\omega)$ с четными номерами считать четными функциями, а нечетные $H_k(\omega)$ сделать нечетными функциями исходя из функций $H_{k+}(\omega)$, определенных на промежутке $[0, \pi]$.

Таким образом, искомые частотные функции вейвлетов $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$, ..., $\psi^{N-1}(x)$ имеют следующий вид: для четных значений k функция $H_k(\omega)$ является четной и на промежутке $[0, \pi]$ определяется формулой (11), а для нечетных значений k функция $H_k(\omega)$ является нечетной и на промежутке $[0, \pi]$ также определяется формулой (11). Соответственно определяется и последняя частотная функция $H_{N-1}(\omega)$ в зависимости от четности числа $N-1$.

Вейвлеты $\psi^k(x)$ определяются своими частотными функциями из формулы (3). Масштабирующая функция $\phi(x)$ и вейвлеты $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$, ..., $\psi^{N-1}(x)$ в пространственной области получаются при помощи обратного преобразования Фурье. Поскольку $\hat{\phi}(\omega)$ и $\hat{\psi}^k(\omega)$ имеют компактные носители, то функции $\phi(x)$ и $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$, ..., $\psi^{N-1}(x)$ являются бесконечно дифференцируемыми.

Из вида частотных функций Мейера $H_k(\omega)$ следует, что при вейвлет-разложении функция $\phi(x)$ обеспечивает сглаживание сигнала, пропуская низкие частоты, соответствующие промежутку $[-\pi/N, \pi/N]$, а вейвлеты $\psi^k(x)$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, разбивают сигнал последовательно на компоненты, соответствующие частотным диапазонам $k\pi/N \leq |\omega| < (k+1)\pi/N$. Чем больше k , тем более высокие частоты сигнала отражают коэффициенты деталей $\{d_{j-1,n}^k\}$.

Масштабирующий фильтр $\{h_n\}$ и фильтры вейвлетов $\{g_n^k\}$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, находятся разложением в ряд Фурье частотных функций $H_0(\omega)$ и $H_k(\omega)$.

3. Вейвлет-анализ сигнала ЭЭГ

В данном разделе мы рассмотрим вейвлет-анализ сигнала ЭЭГ с использованием вейвлетов Мейера $\varphi(x)$, $\psi^1(x)$ и $\psi^2(x)$ с коэффициентом масштабирования 3. Для анализа берется оцифрованный сигнал ЭЭГ, снятый на электроэнцефалографе высокого разрешения (500 отсчетов в секунду) и его фрагмент длительности 6 с.

Для разложения и восстановления сигнала вычислены фильтры $\{h_n\}$, $\{g_n^k\}$, $k = 1, 2$, вейвлетов Мейера. Вообще эти фильтры имеют бесконечное число элементов, но для номеров $|n| > 100$ коэффициенты имеют значения порядка 10^{-6} и меньше. Поэтому были вычислены значения фильтров в пределах $-100 \leq n \leq 100$.

По формулам (6), (7) составлены функции разложения и восстановления сигнала (в нашем случае $N = 3$) в системе MATLAB. Сигнал S представлен массивом $S = A_0 = \{a_n\}$. Тогда его вейвлет-разложение дает коэффициенты аппроксимации $A_1 = \{a_{1,n}\}$, коэффициенты детализации $D_1^1 = \{d_{1,m}^1\}$ вейвлета $\psi^1(x)$ и коэффициенты детализации $D_1^2 = \{d_{1,m}^2\}$ вейвлета $\psi^2(x)$. Разложение $S \rightarrow \{D_1^1, D_1^2, A_1\}$ производится по формулам (6), а восстановление массива $A_0 = \{a_n\}$ по коэффициентам вейвлет-разложения $\{D_1^1, D_1^2, A_1\}$ производится по формулам (7) для $N = 3$ и $k = 1, 2$. При многоуровневом вейвлет-анализе процедура вейвлет-разложения применяется многократно к массивам A_k коэффициентов аппроксимации. Это может быть изображено схематично следующим образом:

$$S = A_0 \rightarrow \{D_1^1, D_1^2, A_1\} \rightarrow \{D_1^1, D_1^2, D_2^1, D_2^2, A_2\} \rightarrow \dots \rightarrow \{D_1^1, D_1^2, \dots, D_M^1, D_M^2, A_M\}.$$

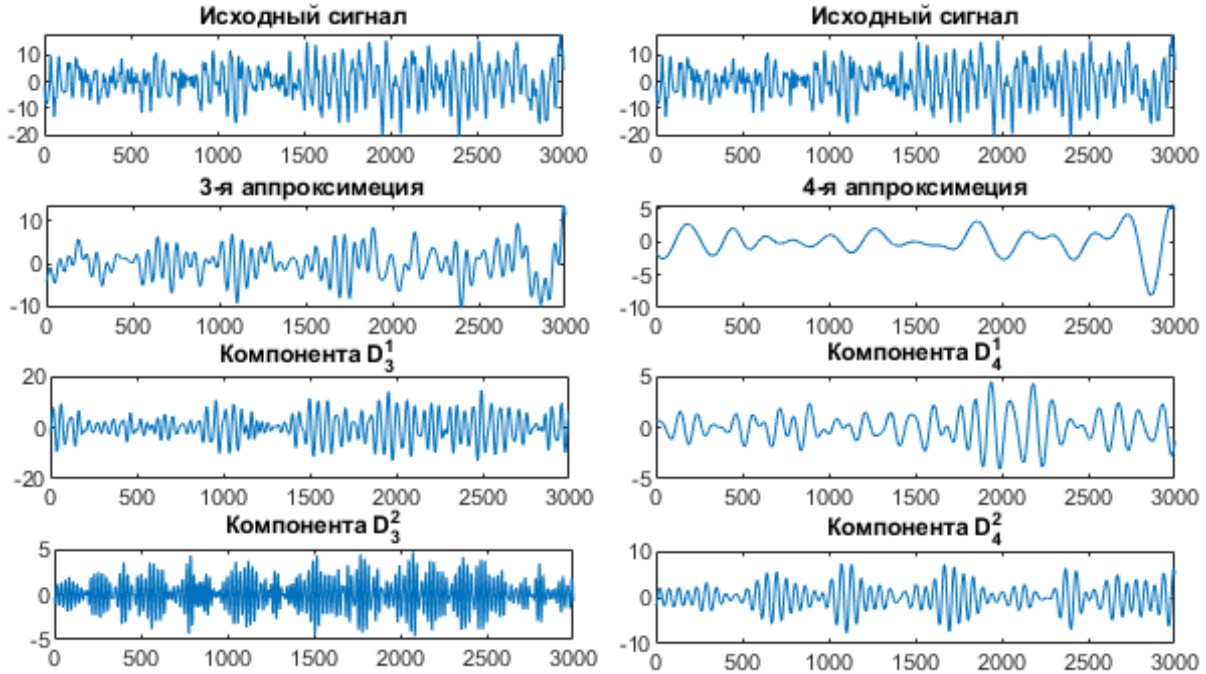


Рис. 1. Компоненты разложения ЭЭГ третьего и четвертого уровней разложения
Fig. 1. Components of EEG decomposition of the third and fourth levels of decomposition

Для изучения свойств сигнала S важно получить его компоненты ReD_j^k , которые восстанавливаются только из одного набора коэффициентов D_j^k , считая, что остальные коэффициенты равны ну-

лю. В нашем случае анализа ЭЭГ достаточно сделать разложение до 4-го уровня. Дело в том, что компонента сигнала с частотами в пределах от 0 до 4 Гц (Дельта-ритм), представлена как $RecA_4$. Вейвлет-коэффициенты D_1^1 , D_1^2 первого уровня разложения отражают шумовую компоненту сигнала и не рассматриваются.

Из вида частотных функций Мейера следует, что при вейвлет-разложении функция $\varphi(x)$ обеспечивает сглаживание сигнала, отсекая большой диапазон высоких частот вне промежутка $[-\pi/3, \pi/3]$, вейвлет $\psi^1(x)$ выделяет компоненту сигнала, соответствующую средним частотам $\pi/3 \leq |\omega| < 2\pi/3$, а вейвлет $\psi^2(x)$ выделяет высокочастотную компоненту сигнала, соответствующую высоким частотам $2\pi/3 \leq |\omega| < \pi$. Это хорошо демонстрирует рис. 1.

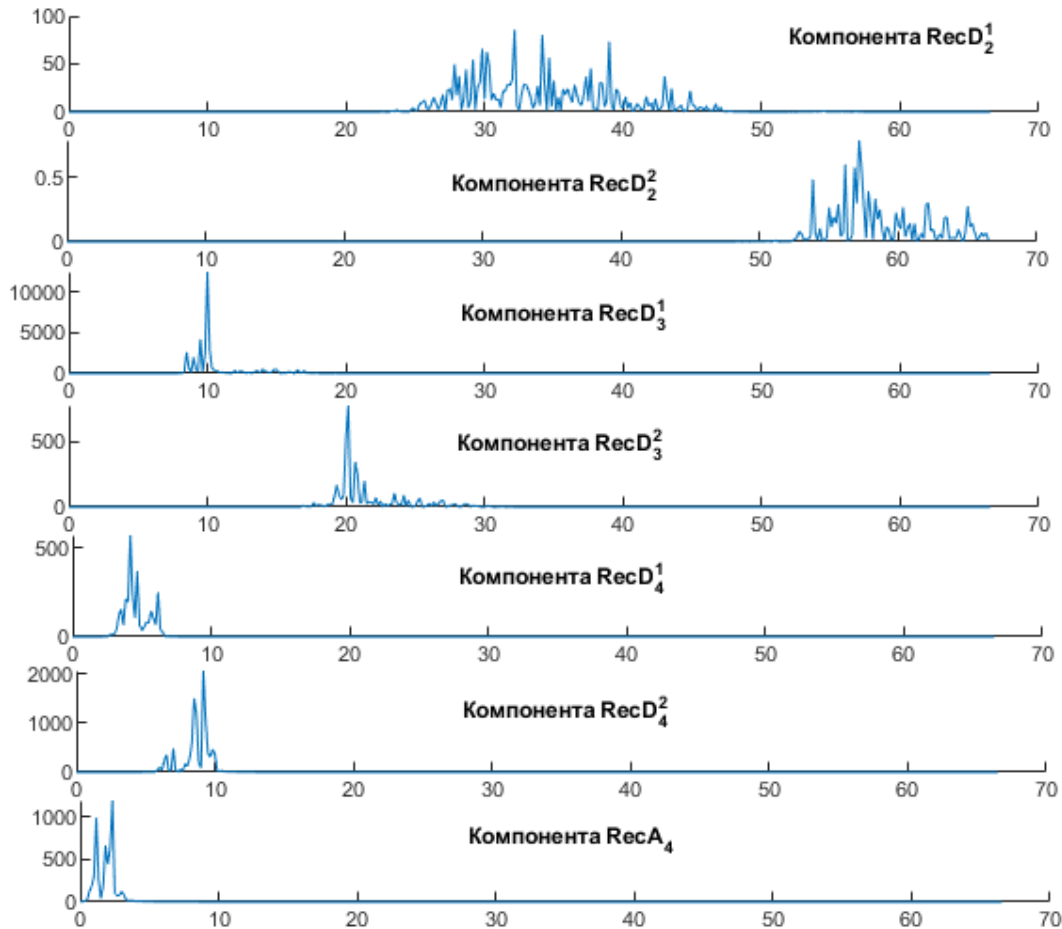


Рис. 2. Частотные спектры компонентов сигнала ЭЭГ (частота в Гц)

Fig. 2. Frequency spectra of the EEG signal components (frequency in Hz)

Для каждой компоненты сигнала мы вычисляем частотный спектр. На рис. 2 показаны графики частотных спектров всех компонент сигнала ЭЭГ. Мы видим, что частотные спектры компонент сигналов достаточно хорошо локализованы и представляют основные диапазоны ЭЭГ: $RecA_4$ – это Дельта-ритм (0–4 Гц), $RecD_4^1$ – Тета-ритм (4–8 Гц), $RecD_4^2$ и $RecD_3^1$ – Альфа-ритм (8–16 Гц), $RecD_3^2$ – Бета-ритм (16–31 Гц), $RecD_2^1$ и $RecD_2^2$ – Гамма-ритм (более 31 Гц). В каждом из диапазонов имеются ярко выраженные основные частоты: Гамма-ритм ($RecD_2^1$ и $RecD_2^2$) – 32,17, 34,17 и 57,17 Гц; Бета-ритм ($RecD_3^2$) – 20,17 Гц; Альфа-ритм ($RecD_4^2$ и $RecD_3^1$) – 9,17 и 10 Гц; Тета-ритм ($RecD_4^1$) – 4,17 и 4,67; Дельта-ритм ($RecA_4$) – 2,33 и 1,17 Гц. Эти частоты отличаются от полученных в работе [3] при исследовании ЭЭГ обычным вейвлетом Мейера.

Заключение

В работе построены вейвлеты с коэффициентом масштабирования $N > 2$, аналогичные обычным ($N = 2$) вейвлетам Мейера. В случае $N = 3$ показано их применение для исследования ЭЭГ. Получено разложение сигнала ЭЭГ на основные частотные ритмы и исследованы их частотные характеристики. На каждом этапе разложения сигнал разбивается на три компоненты, одна из которых является сглаженной версией сигнала, другая отражает высокочастотную часть сигнала, а третья отражает промежуточные частоты. В общем случае сигнал разбивается на N компонент с разными частотными характеристиками. Это дает более широкие возможности изучения частотных компонент сигнала, чем в обычном случае $N = 2$, когда сигнал раскладывается только на одну низкочастотную и одну высокочастотную части. Результаты показывают, что вейвлет-анализ с коэффициентом масштабирования больше двух позволяет получить новые числовые характеристики сигналов, что подтверждает перспективность использования таких вейвлетов для анализа данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов А.Н., Храмов А.Е., Короновский А.А., Ситникова Е.Ю., Макаров В.А., Овчинников А.А. Вейвлет-анализ в нейродинамике // Успехи физических наук. 2012. Т. 182, № 9. С. 905–939
2. Yumatov E.A., Hramov A.E., Grubov V.V., Glazachev O.S., Dudnik E.N., Karatygin N.A. Possibility for recognition of psychic brain activity with continuous wavelet analysis of EEG // Journal of Behavioral and Brain Science (JBBS). 2019. V. 9, № 3. P. 67–77.
3. Подкур П.Н., Смоленцев Н.К. Вейвлет-пакетное разложение ЭЭГ на основные частотные ритмы // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 2 (35). С. 54–61.
4. Siddiqi A.H., Sevindir H.K., Yazici C., Kutlu A., Aslan Z. Spectral Analysis of Eeg Signals by Using Wavelet and Harmonic Transforms // İstanbul Aydın Üniversitesi Dergisi. 2014. V. 3 (9). P. 1–20.
5. Rahman M.A., Khanam F., Ahmad M., Uddin M.S. Multiclass EEG signal classification utilizing Rényi min-entropy-based feature selection from wavelet packet transformation // Brain Informatics. 2020. V. 7/7. P. 1–11.
6. Магруппов Т.М., Талатов Е.Т., Абдихаликов С.П., Рипка Д.С. Обработка и анализ показателей электрокардиограмм на основе вейвлет-преобразования // XIV Международная научная конференция «Физика и радиоэлектроника в медицине и экологии ФРЭМЭ-2020»: доклады. Владимир; Суздаль, 2020. Кн. 1. С. 316–319.
7. Lung C.C., Sudirman R., Hussin S.S. Feature extraction of EEG signal using wavelet transform for autism Classification // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. 2015. V. 10, № 19. P. 8533–8540.
8. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: РХД, 2001. 464 с.
9. Podkur P.N., Smolentsev N.K. About construction of orthogonal wavelets with compact support and with scaling coefficient N . URL: <https://arxiv.org/abs/0705.4150>
10. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2013. 628 с.

Поступила в редакцию 11 декабря 2020 г.

Podkur P.N., Smolentsev N.R. (2021) MEYER WAVELETS WITH SCALING FACTOR $N > 2$. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 56. pp. 81–89

DOI: 10.17223/19988605/56/9

In this paper, we construct wavelets with a scaling factor $N > 2$, similar to the usual ($N = 2$) Meyer wavelets, and give an example of their use for signal analysis. The first part of the work gives a brief introduction to the theory of wavelets with a scaling factor $N > 2$. In the main part of the work, Meyer wavelets with a scaling factor $N > 2$ are constructed and the results of their use for studying the electroencephalogram (EEG) are presented. Meyer wavelets are constructed by smoothing at the discontinuity points of the frequency functions of Shannon wavelets with a scaling factor N . Since the Shannon wavelets correspond to ideal filters, the constructed Meyer wavelets are also infinitely differentiable and provide very good frequency localization of signal components in the wavelet decomposition.

For EEG analysis, Meyer wavelets $\varphi(x)$, $\psi^1(x)$ and $\psi^2(x)$ with a scaling factor $N = 3$ were used. The digitized EEG signal was recorded on a high-resolution electroencephalograph (500 samples per second), we use a fragment of it 3000 samples long (6 sec). When a signal is represented by an array $S = A_0 = \{a_n\}$, then its wavelet decomposition gives the approximation coefficients $A_1 = \{a_{1,n}\}$, the detail coefficients $D_1^1 = \{d_{1,m}^1\}$ of the wavelet $\psi^1(x)$, and the detail coefficients $D_1^2 = \{d_{1,m}^2\}$ of the wavelet $\psi^2(x)$.

In multilevel wavelet analysis, the wavelet decomposition procedure is applied repeatedly to the A_k weights of the approximation coefficients:

$$S = A_0 \rightarrow \{D_1^1, D_1^2, A_1\} \rightarrow \{D_1^1, D_1^2, D_2^2, A_2\} \rightarrow \dots \rightarrow \{D_1^1, D_1^2, \dots, D_M^1, D_M^2, A_M\}.$$

For studying the properties of the signal S , its components $RecD_j^k$ are of greater interest, which are obtained when the reconstruction procedure is applied to only one set of coefficients D_j^k , assuming that the remaining coefficients are equal to zero. In this work, the wavelet decomposition of the EEG signal to the 4th level is carried out. The components of signal decomposition are found using truncated Meyer wavelet filters. The results show that the frequency spectra of the signal components are well localized and represent the main rhythms that are usually detected in medical EEG studies using Fourier analysis methods. In our case: $RecA_4$ is the Delta rhythm (0–4 Hz); $RecD_4^1$ is the Theta rhythm (4–8 Hz); $RecD_4^2$ and $RecD_3^1$ is the Alpha rhythm (8–16 Hz); $RecD_3^2$ is the Beta rhythm (16–31 Hz); $RecD_2^1$, and $RecD_2^2$ is the Gamma rhythm (more than 31 Hz). Thus, wavelet analysis with a scaling factor of more than two allows one to decompose a signal into a number of components with good frequency localization and obtain new numerical characteristics of signal.

Keywords: Meyers wavelets; EEG wavelet analysis; wavelets with scaling factor N .

PODKUR Paulina Nikolaevna (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, Kemerovo, Russian Federation).

E-mail: paulina.podkur@gmail.com

SMOLENTSEV Nikolay Konstantinovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kemerovo State University, Russian Federation).

E-mail: smolennk@mail.ru

REFERENCES

1. Pavlov, A.N., Khramov, A.E., Koronovsky, A.A., Sitnikova, E.Yu., Makarov, V.A. & Ovchinnikov, A.A. (2012) Wavelet analysis in neurodynamics. *Uspekhi fizicheskikh nauk – Advances in Physical Sciences*. 182(9). pp. 905–939.
2. Yumatov, E.A., Hramov, A.E., Grubov, V.V., Glazachev, O.S., Dudnik, E.N. & Karatygin, N.A. (2019) Possibility for recognition of psychic brain activity with continuous wavelet analysis of EEG. *Journal of Behavioral and Brain Science (JBBS)*. 9(3). pp. 67–77. DOI: 10.4236/jbbs.2019.93006
3. Podkur, P.N. & Smolentsev, N.K. (2016) Wavelet packet decomposition EEG on the basic frequency rhythms. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(35). pp. 54–61.
4. Siddiqi, A.H., Sevindir, H.K., Yazici, C., Kutlu, A. & Aslan, Z. (2014) Spectral Analysis Of Eeg Signals By Using Wavelet And Harmonic Transforms. *İstanbul Aydın Üniversitesi Dergisi*. 3(9). pp. 1–20.
5. Rahman, M.A., Khanam, F., Ahmad, M. & Uddin, M.S. (2020) Multiclass EEG signal classification utilizing Rényi min-entropy-based feature selection from wavelet packet transformation. *Brain Informatics*. 7/7. pp. 1–11. DOI: 10.1186/s40708-020-00108-y
6. Magrupov, T.M., Talatov, E.T., Abdikhalikov, S.P. & Ripka, D.S. (2020) [Processing and analysis of electrocardiogram indicators based on wavelet transform]. *Fizika i radioelektronika v meditsine i ekologii FREME-2020* [Physics and Radioelectronics in Medicine and Ecology – FREM'2020]. Vol. 1. Vladimir; Suzdal. pp. 316–319.
7. Lung, C.C., Sudirman, R. & Hussin, S.S. (2015) Feature extraction of EEG signal using wavelet transform for autism Classification. *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*. 10(19). pp. 8533–8540.
8. Daubechies, I. (1992) *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM.
9. Podkur, P.N. & Smolentsev, N.K. (2007) *About construction of orthogonal wavelets with compact support and with scaling coefficient N* . [Online] Available from: <https://arxiv.org/abs/0705.4150>.
10. Smolentsev, N.K. (2014) *Osnovy teorii veyvletov. Veyvlety v MATLAB* [Fundamentals of the theory of wavelets. Wavelets in MATLAB]. Moscow: DMK Press.

УДК 519.7

DOI: 10.17223/19988605/56/10

А.А. Солдатенко, Д.В. Семенова

О СВЯЗИ БИКЛИК ГИПЕРГРАФА И ВСЕХ МАКСИМАЛЬНО ПОЛНЫХ ПОДМАТРИЦ МАТРИЦЫ СМЕЖНОСТИ

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1).

Исследуется связь между задачей поиска всех максимально полных подматриц $(0, 1)$ -матрицы и задачей поиска всех максимальных биклик гиперграфов. Разработан алгоритм *HFindMCS* нахождения всех максимально полных подматриц $(0, 1)$ -матрицы. Проведен теоретический анализ вычислительной сложности предложенного алгоритма и доказана его корректность. Вычислительные эксперименты показали эффективность алгоритма *HFindMCS* на гиперграфах с ограниченной степенью. Предложена процедура перехода от решения задачи поиска всех максимально полных подматриц $(0, 1)$ -матрицы к решению задачи поиска всех максимальных биклик гиперграфов.

Ключевые слова: гиперграф; максимальные биклики; $(0, 1)$ -матрица; максимально полные подматрицы.

Гиперграфы являются расширением классической теории графов на случай, когда ребро графа может содержать число вершин, отличное от двух. Изначально гиперграфы нашли практическое применение в моделировании реляционных баз данных и комбинаторной химии [1, 2]. Возможность объединения нескольких вершин одним ребром дает мощный инструмент для моделирования различных сетей и систем. В настоящее время гиперграфовые модели активно применяются при построении и исследовании дорожных и телекоммуникационных сетей [3, 4], для построения семантических сетей и представления лингвистических знаний [5, 6], при решении задач управления большими системами [7].

Значительная часть задач исследований указанных моделей сводится к проблемам определения различных конфигураций. Под конфигурацией понимается любая система подмножеств конечного множества [8]. Особый интерес вызывают задачи перечислительного типа [8], в которых существование интересующих исследователя конфигураций не вызывает сомнения, вопрос – лишь в количестве и способе их представления. Большинство задач, связанных с поиском различных конфигураций в данных, имеет высокую сложность, с которой ничего нельзя сделать, однако поиск новых моделей и алгоритмов может повысить производительность вычислений. При этом использование асимптотически более медленных алгоритмов может быть оправдано тем, что для наборов данных, организованных определенным образом, они будут эффективнее [9]. Задача может быть сложной в общем случае, но иметь эффективный алгоритм для некоторого частного случая или класса объектов. Если сети и системы представить гиперграфами, то интересующие конфигурации удобно описывать на языке $(0, 1)$ -матриц [10]. Например, задача выделения всех максимальных биклик гиперграфа сводится к задаче построения следующих конфигураций – полных единичных подматриц $(0, 1)$ -матрицы [11].

В настоящей работе рассматривается задача нахождения всех максимально полных подматриц $(0, 1)$ -матрицы и схожая с ней задача поиска максимальных биклик гиперграфа. Поиск максимально полных единичных подматриц востребован в задаче нахождения всех формальных понятий, которая возникает при поиске скрытых взаимосвязей и построении онтологий предметных областей [5]. Поиск максимальных биклик связан с задачей адресации внутри коммуникационной сети [3]. В сетях, представленных графами и гиперграфами, выделение биклик способно повысить эффективность решения задачи адресации и маршрутизации [3, 12, 13]. Также максимальные биклики востребованы

в анализе данных и при кластеризации, имеют широкое применение при исследовании генных структур и социальных сетей [14–16]. Заметим, что задачи поиска таких конфигураций являются $\#P$ -полными [17].

В работе предлагаются новый алгоритм выделения максимально полных подматриц $(0, 1)$ -матрицы, основанный на теории гиперграфов, и процедура выделения всех максимальных биклик на основе всех максимально полных подматриц.

В первом разделе статьи приводятся необходимые понятия и определения $(0, 1)$ -матриц и теории гиперграфов. Второй раздел содержит описание предлагаемого алгоритма, доказательство его корректности и теоретический анализ вычислительной сложности. В третьем разделе представлены результаты вычислительных экспериментов.

1. Основные понятия и определения

Пусть задана $(0, 1)$ -матрица I размера $n \times m$, где $n \geq 1, m \geq 1$ [8, 10].

Определение 1. Полной подматрицей $(0, 1)$ -матрицы называется подматрица, все без исключения элементы которой равны 1 [18].

Определение 2. Максимально полной подматрицей называется полная подматрица, не содержащая никакой другой максимально полной матрицы [18].

Последнее можно трактовать следующим образом: максимально полной подматрицей называется полная подматрица, не входящая ни в какую другую полную подматрицу.

Матрица I по своей сути может представлять множество всевозможных комбинаторных объектов, примерами которых являются: матрицы инцидентности и смежности графов и гиперграфов, контекст в анализе формальных понятий, реализация конечного случайного множества и др. [1, 5, 8, 10].

Пусть задан (n, m) -гиперграф $H = (X, U)$, где X – конечное множество вершин, U – конечное семейство гиперребер гиперграфа, при этом $|X| \geq 1, |U| \geq 1$ и всякое гиперребро гиперграфа – некоторое подмножество множества X . Пусть $X(u)$ – множество всех вершин, инцидентных гиперребру $u \in U$, а $U(x)$ – множество гиперребер, инцидентных вершине $x \in X$. Двойственным к гиперграфу $H = (X, U)$ называют гиперграф $H^* = (X^*, U^*)$, где $X^* = U$ – множество вершин двойственного гиперграфа, $U^* = U(x)$ – семейство гиперребер двойственного гиперграфа для всякого $x \in X$. Одним из способов задания гиперграфа является $(0, 1)$ -матрица инцидентности I , где 1 ставится в случае, когда гиперребро содержит вершину, и 0 в противном случае. Будем называть степенью гиперребра $u \in U$ мощность множества $|X(u)|$.

Приведем необходимые для дальнейшего изложения определения [19].

Определение 3. Подгиперграфом, индуцированным множеством вершин X' , называется гиперграф $H' = (X', U')$, где $U' = \{u': X(u') = X(u) \cap X' \neq \emptyset, u \in U\}$.

Заметим, что в рамках определения 3 для U' всегда справедливо высказывание: $|X(u) \cap X'| \geq 2$, или $|u'| = 1$.

Известно определение двудольности гиперграфа [20], которое аналогично 2-раскраске: гиперграф $H = (X, U)$ называется двудольным, когда множество вершин X может быть разделено на два множества S_0 и S_1 таким образом, что $S_0 \cup S_1 = X, S_0 \cap S_1 = \emptyset$, и для всякого гиперребра $u \in U$ выполнено $|X(u) \cap S_0| = 1$. В работе используется следующее определение двудольности подгиперграфа.

Определение 4. Подгиперграф $H' = (X', U')$ является двудольным, если существует разбиение $S_0 \cup S_1 = X'$ такое, что $S_0 \cap S_1 = \emptyset$ и неравенства $|S_0 \cap X(u')| \leq 1, |S_1 \cap X(u')| \leq 1$ выполняются для любого гиперребра $u' \in U'$.

Приведем определение реализации гиперграфа в виде вершинного графа $L_2(H)$ [21].

Определение 5. Вершинным графом гиперграфа $H = (X, U)$ называется граф $L_2(H) = (X, E)$, множество вершин которого совпадает с множеством вершин X гиперграфа H , при этом две вершины графа $L_2(H)$ смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие им вершины гиперграфа H .

Нетрудно показать, что подгиперграф $H' = (X', U')$ является двудольным тогда и только тогда, когда в вершинном графе $L_2(H)$ гиперграфа H существует двудольный подграф, индуцированный множеством вершин X' .

Определение 6. Двудольный граф называется полным двудольным графом (бикликой), если всякая вершина одной доли соединена со всеми вершинами второй доли [22].

Данное определение можно сформулировать иначе: если двудольный граф содержит все возможные ребра, не нарушающие условия двудольности, то такой граф называется полным двудольным графом. К поиску биклик сводится ряд теоретико-графовых задач [17], которые относятся к классу $\#P$ -полных или NP -полных задач, поскольку в общем случае число максимальных биклик экспоненциально зависит от размера графа [23].

Определение 7. Будем говорить, что подгиперграф $H' = (X', U')$, где $S_0 \cup S_1 = X'$, $S_0 \cap S_1 = \emptyset$ и $U' = \{u : s_0, s_1 \in X(u), s_0 \in S_0, s_1 \in S_1\}$, называется полным двудольным подгиперграфом (бикликой) исходного гиперграфа H .

Определение 8. Максимальная биклика – это биклика, которая не может быть расширена путем включения дополнительных смежных вершин, или, что эквивалентно, для максимальной биклики не существует другой биклики, которая полностью включает данную.

Определение 8 справедливо как для графов, так и для гиперграфов.

Задача поиска максимальной биклики хорошо известна в теории графов. При этом выделяют два варианта: задача поиска максимальной биклики с наибольшим числом вершин и задача поиска максимальной биклики с наибольшим числом ребер. Данные задачи возникают при обнаружении аномалий, анализе генных структур, анализе социальных структур [24]. Любой из вариантов данной задачи для связного графа произвольного вида является NP -трудной [25].

Помимо поиска одной максимальной биклики, не ослабевают интерес к задаче MBGP (Maximal Biclique Generation Problem), которая состоит в поиске всех возможных максимальных биклик для любого заданного графа. Известно, что MBGP не может быть решена за полиномиальное время относительно размера ввода, поскольку размер вывода может быть экспоненциально большим по n [25]. Сложность данной задачи не меньше, чем сложность задачи поиска одной максимальной биклики, которая является NP -трудной задачей [24].

Задача MBGP для графов может быть расширена на гиперграфы. В частности, для бигиперграфов задача MBGP исследована в [20]. Под бигиперграфом понимается гиперграф вида $H = (H^0, H^1)$, где всякое гиперребро гиперграфов H^0 и H^1 содержится в H . При этом вводится определение двудольного гиперграфа согласно устойчивости множества вершин. Множество вершин $S \subseteq V$ устойчиво в H^i , если S не содержит гиперребер из H^i , $i = 0, 1$. Гиперграф $H = (H^0, H^1)$ называется двудольным, если существует разбиение $S^0 \cup S^1 = V$, где S^i устойчиво в H^i , $i = 0, 1$.

В данной работе исследуется задача поиска всех возможных максимальных биклик для любого заданного гиперграфа.

Задача 1 (MBGP for Hypergraphs). Дан гиперграф $H = (X, U)$ без кратных гиперребер, требуется найти множество всех максимальных биклик.

Заметим, что задача нахождения биклик в графе тесно связана с поиском подматриц специального вида [11]. Проведем связь между задачей нахождения максимальных биклик в гиперграфе и задачей поиска максимально полных подматриц $(0, 1)$ -матрицы.

Для двудольного подгиперграфа $H' = (X', U')$ запишем его эквивалентное представление в виде $(0, 1)$ -матрицы смежности вершинного графа $L_2(H')$. Обозначим S_0, S_1 – доли подгиперграфа H' , мощности которых равны c и d соответственно. Поскольку вершинный граф $L_2(H')$ тоже является двудольным, его матрица смежности представима в виде:

$$A' = \begin{pmatrix} O_c & B' \\ B'^T & O_d \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где O_c, O_d – нулевые матрицы порядка c и d соответственно, а B' – матрица размера $c \times d$, которая отражает смежность вершин между долями S_0 и S_1 [11]. Очевидно, что в случае, когда подгиперграф H'

является бикликой, матрица B является полной подматрицей матрицы A . Нетрудно показать, что проверка всякой подматрицы из множества всех максимально полных подматриц выполнима за линейное время относительно размера подматрицы. Таким образом, для поиска биклик в гиперграфе $H = (X, U)$ требуется найти такие полные подматрицы B' матрицы смежности A вершинного графа $L_2(H)$, для которых будет существовать подматрица вида (1), что приводит к задаче поиска всех максимально полных подматриц (maximally complete submatrices) исходной $(0, 1)$ -матрицы.

Задача 2 (Maximally Complete Submatrices Problem, MCSP). Дана $(0, 1)$ -матрица I , требуется найти множество всех максимально полных подматриц.

Заметим, что максимально полные подматрицы могут представлять различные комбинаторные объекты [8], а задача их поиска носит перечислительный характер и принадлежит классу сложности $\#P$ -полных задач [5, 8]. Применение алгоритмов решения задачи выделения максимально полных подматриц ограничивается высокой трудоемкостью на матрицах большой размерности.

2. Алгоритм нахождения всех максимально полных подматриц для заданной $(0, 1)$ -матрицы

Основываясь на определениях теории гиперграфов и $(0, 1)$ -матриц, опишем алгоритм для нахождения максимально полных подматриц исходной $(0, 1)$ -матрицы. Для этого понадобится понятие l -уровня $(0, 1)$ -матрицы.

Определение. Полным l -уровнем $(0, 1)$ -матрицы будем называть все ее полные подматрицы с числом строк, равным l .

Всякую полную подматрицу инцидентности гиперграфа $H = (X, U)$ с числом строк, равным l , можно описывать как подгиперграф $H' = (X', U(X'))$, где $X' \subseteq X$ – множество вершин, при этом $|X'| = l$, а $U(X') \subseteq U$ – множество гиперребер. Следовательно, l -уровень в терминах гиперграфов описывается следующей системой множеств: $P_l = \{H' = (X', U(X')) : |X'| = l, X' \subseteq X\}$. Также отметим, что гиперграфу H соответствует $(0, 1)$ -матрица инцидентности I с заданным лексикографическим порядком как для строк, так и для столбцов.

Заметим, что в общем случае всякую $(0, 1)$ -матрицу можно представить в виде гиперграфа независимо от ее семантики, и наоборот. Обозначим множество всех максимально полных подматриц как MCS . Идея алгоритма заключается в генерации всех возможных l -уровней $(0, 1)$ -матрицы и последующем выделении максимально полных подматриц. Иерархия уровней позволяет с легкостью проверять, является ли полная подматрица максимальной. Данная идея хорошо реализуется на языке гиперграфов. Приведем описание алгоритма $HFindMCS$ и его вспомогательной функции $GenerateCombinations(H, l)$ на псевдокоде.

Алгоритм $HFindMCS$
Вход: гиперграф $H = (X, U)$
Выход: множество MCS
1. Для $l := 1, \dots, \Delta$ выполнять 2. $P_l := GenerateCombinations(H, l)$ 3. Конец цикла 4. $P := \bigcup_{l=\Delta, \dots, 1} P_l$ 5. $MCS := \{\emptyset\}$ 6. Для $(Y, U(Y)) \in P$ выполнять 7. Если $U(Y) \neq U(Y') : \forall (Y', U(Y')) \in MCS$ тогда 8. $MCS := MCS \cup (Y, U(Y))$ 9. Конец условия 10. Конец цикла 11. Возвратить MCS

Функция $GenerateCombinations(H, l)$
1. $P_l := \{\emptyset\}$ 2. Для $u \in U$ выполнять 3. $C_u^l := \{X' : X' \subseteq X(u), X' = l\}$ 4. Для $X' \in C_u^l$ выполнять 5. $P_l[X'] := P_l[X'] \cup u$ 6. Конец цикла 7. Конец цикла 8. Возвратить P_l

Теорема 1. Алгоритм *HFindMCS* корректно решает задачу MCSP для $(0, 1)$ -матрицы инцидентности I гиперграфа $H = (X, U)$ со степенью Δ за время, не превышающее $O\left[\log(|MCS|)|U|^2 \Delta 2^\Delta \log\left(2^\Delta |U|\right)\right]$.

Доказательство. Алгоритм *HFindMCS* принимает на вход гиперграф $H = (X, U)$ без кратных гиперребер и вершин. Для простоты изложения будем считать, что максимальная степень гиперребра меньше максимальной степени вершины, т.е. $\max_{u \in U} |X(u)| \leq \max_{x \in X} |U(x)|$. Это условие необходимо для быстрогодействия алгоритма, в общем случае алгоритм можно применять к любому гиперграфу без кратных гиперребер. Если условие не выполнено, то алгоритм *HFindMCS* применяется к двойственному гиперграфу $H^* = (X^*, U^*)$. Далее будем обозначать максимальную степень гиперребра как $\Delta = \max_{u \in U} |X(u)|$ и называть степенью гиперграфа [19].

На шагах 1–3 последовательно формируются множества P_l , соответствующие полным l -уровням, где $l = 1, \dots, \Delta$. Для каждого значения l , соответствующего требуемому уровню $(0, 1)$ -матрицы, на шаге 2 вызывается функция *GenerateCombinations*(H, l). Вызываемая функция для каждого гиперребра $u \in U$ выполняет генерацию всех возможных подмножеств вершин $X' \subseteq X(u)$ таких, что $|X'| = l$. Множество всех возможных подмножеств l -уровня обозначим как C_u^l . Каждое сгенерированное множество X' индуцирует исходный гиперграф H в подгиперграф $H' = (X', U')$. Построение множества U' происходит последовательно путем просмотра всех гиперребер $u \in U$. Исходя из этого, множество U' индуцированного подгиперграфа формируется в лексикографическом порядке. Полученный подгиперграф H' однозначно сопоставим с полной подматрицей матрицы I , а множество всех таких подгиперграфов образует полный l -уровень $(0, 1)$ -матрицы, т.е. множество P_l .

Выполняя данную процедуру для каждого уровня $l = 1, \dots, \Delta$, получим набор множеств P_l , содержащих подгиперграфы, матрицы инцидентности которых соответствуют всем полным подматрицам матрицы инцидентности I гиперграфа. Очевидно, что полные подматрицы с наибольшим количеством строк, равным Δ , будут являться максимально полными, поскольку они гарантированно не вложены ни в какие другие полные подматрицы.

При формировании набора множеств P_l процесс генерации сочетаний для всех уровней не превосходит $\tau_1 = O(|U|2^\Delta)$. Действительно, поскольку на каждом уровне необходимо генерировать сочетания для каждого гиперребра и количество уровней $l = 1, \dots, \Delta$, то

$$|U|C_u^1 + \dots + |U|C_u^\Delta = |U|(C_u^1 + \dots + C_u^\Delta) = |U|(2^\Delta - 1) = O(|U|2^\Delta).$$

Отметим, что всякое множество $X' \in C_u^l$ является лексикографически упорядоченным, и любые X'_1, X'_2 из C_u^l являются сравнимым. Эти два факта позволяют для хранения и обновления множеств P_l использовать древовидные структуры данных, в частности красно-черные деревья. Очевидно, что сравнение X'_1 и X'_2 выполнимо за $O(\Delta)$, так как мощность всякого X' не превосходит Δ . А поиск и добавление элементов в красно-черном дереве не превосходят $\tau_2 = O(\Delta \log(|U|2^\Delta))$ [26]. Следовательно, выполнение шагов 1–3 алгоритма *HFindMCS* требует не более

$$T_1 = \tau_1 \tau_2 = O\left[|U| \Delta 2^\Delta \log(|U|2^\Delta)\right].$$

На шаге 4 алгоритма *HFindMCS* полученный на шагах 1–3 набор множеств P_l объединяется в упорядоченное множество P следующим образом: объединение осуществляется в порядке убывания значения уровня l с сохранением у каждого подгиперграфа лексикографического порядка на множестве вершин и на множестве гиперребер. Следовательно, формирование множества P выполнимо за время равное $T_2 = O(1)$.

Множество P является допустимым множеством решений задачи поиска всех максимально полных подматриц и соответствующих им гиперграфов. Формирование множества MCS осуществляется на шагах 5–10 путем просматривания множества P от подгиперграфов с наибольшей мощностью

множества вершин до обладающих наименьшей мощностью. Изначально в MCS добавляются подгиперграфы с числом вершин, равным Δ , из множества P . Такие подгиперграфы всегда будут соответствовать максимально полным подматрицам. Далее последовательно просматриваются остальные элементы множества P , и в множество MCS добавляются только такие подгиперграфы, множества гиперребер которых еще не встречались. После этого множество MCS будет содержать все подгиперграфы, соответствующие максимально полным подматрицам матрицы инцидентности I . Следовательно, алгоритм корректно решает задачу MCSP.

Заметим, что сравнение подгиперграфов по множеству гиперребер требует не более $O(|U|)$ времени. Это следует из того, что максимальная мощность множества гиперребер подгиперграфа не превосходит $|U|$. Поскольку по построению все комбинации вершин для подгиперграфов в множестве P различны, то соответствующие им полные подматрицы могут содержаться в других только в случае, когда множество гиперребер совпадает. Это соответствует тому, что полная подматрица содержится в полной подматрице с большим числом строк. Для хранения и обработки множества MCS в работе используются красно-черные деревья, что облегчает поиск и добавление новых элементов. Последовательно просматривая множество P , для каждого элемента выполняется поиск в множестве MCS за время $T_3 = O\left[|U| \log(|MCS|)\right]$, аналогичное время требуется для добавления нового элемента. Таким образом построение множества MCS требует времени не более чем

$$T_1 T_2 T_3 = O\left[\log(|MCS|) |U|^2 \Delta^{\Delta} \log(2^{\Delta} |U|)\right].$$

Теорема доказана.

Искомому множеству MCS будет соответствовать множество подгиперграфов, матрицы инцидентности которых максимально полные. Отметим, что время работы алгоритма $HFindMCS$ существенно зависит от параметра Δ , который соответствует максимальной степени гиперребра или вершины.

Существует множество алгоритмов для нахождения максимально полных подматриц [6]. Всем известным алгоритмам нахождения комбинаторных объектов, связанных с максимально полными подматрицами, присущ комбинаторный взрыв на выходе в виде множества $|MCS|$. Наиболее универсальным является широко известный алгоритм нахождения всех формальных понятий формального контекста Close-by-One (CbO) [6]. Асимптотическая сложность данного алгоритма оценивается как $O(|MCS||U||X|^2)$. В общем случае предложенный алгоритм $HFindMCS$ асимптотически медленнее алгоритма CbO , однако для наборов данных, организованных определенным образом [9], он будет эффективнее алгоритма CbO . В частности, для квадратных матриц алгоритм $HFindMCS$ будет асимптотически быстрее алгоритма CbO при выполнении условия $\Delta^{\Delta} \log(2^{\Delta} |X|) \leq |X|$.

Решением задачи MBGP for Hypergraphs является множество максимальных биклик гиперграфа $H = (X, U)$. Обозначим множество максимальных биклик как BC . Применение алгоритма $HFindMCS$ к матрице смежности вершинного графа $L_2(H)$ дает на выходе множество всех максимально полных подматриц MCS в виде подгиперграфов. Поскольку алгоритм $HFindMCS$ применяется к матрице смежности, то всякий подгиперграф $H' = (X', U')$ из множества MCS фактически отражает пару множеств вершин X' и U' . Кратко опишем процедуру нахождения множества BC на основе множества MCS . Если элемент множества MCS удовлетворяет условию (1), то он является бикликой, в противном случае происходит расщепление элемента на два по тем вершинам, которые смежны внутри доли X' или U' , чтобы убрать смежность. После этого необходимо выбрать максимальные биклики из полученного множества биклик.

3. Вычислительные эксперименты и сравнение алгоритмов

В работе проводились две серии экспериментов. Первая серия экспериментов направлена на оценку результативности предложенного алгоритма $HFindMCS$ решения задачи MCSP. Вторая серия экспериментов призвана оценить эффективность процедуры перехода от решения задачи MCSP

к решению задачи MBGP for Hypergraphs. Вычислительные эксперименты проводились на ПК с процессором AMD Ryzen 5 3600 6-Core Processor 3,60 ГГц и ОЗУ объемом 16 Гбайт.

Эксперименты первой серии проводились на гиперграфах с различным числом вершин $|X|$ и гиперребер $|U|$, а также различной степенью гиперграфа Δ . Результаты вычислительных экспериментов представлены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты вычислительных экспериментов алгоритма *HFindMCS*

Δ	$ X $	$ U $	$ MCS $	t, c
5	100	100	276	0,002
	1 000	1 000	2 055	0,012
	10 000	9 904	19 609	0,145
	25 000	24 540	48 220	0,421
10	100	100	1 199	0,041
	1 000	1 000	3 786	0,422
	10 000	9 999	22 037	4,938
	25 000	24 989	52 501	13,571
13	100	100	2 570	0,339
	1 000	1 000	7 056	3,521
	10 000	10 000	26 102	38,091
	25 000	24 999	57 420	497,621

Таблица 1 хорошо демонстрирует сложность задачи поиска всех максимально полных подматриц. Число максимально полных подматриц соответствует столбцу $|MCS|$ и, как видно, даже при малом значении степени гиперграфа Δ оно достаточно велико. Учитывая, что все алгоритмы точного решения задачи поиска всех максимально полных подматриц зависят от мощности выходного множества MCS , алгоритм *HFindMCS* обладает приемлемым временем работы относительно размера исходного гиперграфа.

Для второй серии экспериментов были сгенерированы гиперграфы $H = (X, U)$ с фиксированной степенью вершин. Для гиперграфов строились вершинные графы $L_2(H)$. К матрицам смежности вершинного графа $L_2(H)$ применялся алгоритм *HFindMCS* для нахождения множества MCS . Далее к множеству MCS применялась процедура нахождения всех максимальных бикликов. В табл. 2 приводятся параметры гиперграфа H , включая максимальную степень вершины Δ' , а также время нахождения множества BC .

Таблица 2

Результаты вычислительных экспериментов расщепления множества MCS

Δ'	$ X $	$ U $	$ MCS $	$ BC $	t, c
3	100	90	202	191	0,040
	500	439	2 055	961	0,863
5	100	76	476	453	1,366
	500	362	2 506	2 208	40,848
7	100	73	1 234	757	30,132
	500	317	5 738	4 343	653,944

Из табл. 2 видно, что процедура нахождения всех максимальных бикликов из множества MCS требует значительных временных затрат. Это связано с тем, что подгиперграфы, соответствующие максимально полным подматрицам, не обязательно являются бикликами. Из-за этого процедура расщепления может вызвать геометрический рост количества проверяемых подгиперграфов.

Заключение

В работе исследуются две задачи: поиск всех максимально полных подматриц $(0, 1)$ -матрицы (MCSP) и поиск всех максимальных бикликов гиперграфов (MBGP for Hypergraphs). Для решения задачи MCSP разработан гиперграфовый алгоритм *HFindMCS*. Установлено, что время формирования

множества MCS алгоритмом $HFindMCS$ существенно зависит от входного гиперграфа и составляет $O\left[\log(|MCS|)|U|^2 \Delta^{\Delta} \log(2^{\Delta}|U|)\right]$. Разработанный алгоритм имеет высокую вычислительную сложность относительно известных алгоритмов. Однако использование данного алгоритма может быть оправдано тем, что для гиперграфов, обладающих малой степенью, он будет значительно эффективнее, что подтверждено вычислительными экспериментами для специального вида гиперграфов.

Предложена процедура перехода от решения задачи MCSP к решению задачи MBGP for Hypergraphs, идея которой заключается в расщеплении элементов множества MCS и проверке их на соответствие специальному виду. Вычислительные эксперименты показали высокую трудоемкость перехода от решения задачи MCSP к решению задачи MBGP for Hypergraphs. Для повышения производительности процедуры построения решения задачи MBGP for Hypergraphs предполагается применение описанной процедуры перехода к промежуточным множествам P_i , формируемым в процессе работы алгоритма $HFindMCS$. Такая модификация позволит сократить необходимое число расщеплений и тем самым повысить производительность алгоритма. Также стоит отметить, что для алгоритма $HFindMCS$ перспективны исследования по применению технологий параллельных вычислений для улучшения времени его работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мейер Д. Теория реляционных баз данных. М. : Мир, 1987. 608 с.
2. Konstantinova E.V., Skorobogatov V.A. Application of hypergraph theory in chemistry // Discrete Mathematics, 2001. V. 235, is. 1–3. P. 365–383.
3. Graham R.L., Pollak H.O. On the addressing problem for loop switching // The Bell System Technical Journal. 1971. V. 50, № 8. P. 2495–2519.
4. Попов В.Б. Экстремальная нумерация вершин гиперграфа и задача объектно-признаковой кластеризации // Динамические системы. 2010. № 28. С. 99–112.
5. Ganter B., Wille R. Formal concept analysis. Springer, 1999. 284 p.
6. Kuznetsov S., Obiedkov S. Comparing performance of algorithms for generating concept lattices // J. Exp. Theor. Artif. Intell. 2002. V. 14. P. 189–216.
7. Блюмин С.Л. Полные гиперграфы. Спектры лапласианов. Мультиагентные системы // Управление большими системами, 2010. № 30. С. 5–23.
8. Тараканов В.Е. Комбинаторные задачи и $(0, 1)$ -матрицы. М. : Наука, 1985. 195 с.
9. Миллер Р., Боксер Л. Последовательные и параллельные алгоритмы: общий подход. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 406 с.
10. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М. : Наука, 1972. 232 с.
11. Beineke L., Wilson R.J. Topics in Algebraic Graph Theory. Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 2008. 276 p. (Mathematical Sciences Faculty Publications).
12. Jukna S., Kulikov A. On covering graphs by complete bipartite subgraphs // Discrete Mathematics. 2009. V. 309. P. 3399–3403.
13. Faure N., Chretienne P., Gourdin E., Sourd F. Biclique completion problems for multicast network design // Discrete Optimization. 2007. V. 4, is. 3–4. P. 360–377.
14. Hermelin D., Manoussakis G. Efficient enumeration of maximal induced bicliques // Discrete Applied Mathematics. 2020. DOI: 10.1016/j.dam.2020.04.034
15. Shaham E., Yu H., Li X. On finding the maximum edge biclique in a bipartite graph: a subspace clustering approach // Proc. of the 2016 SIAM International Conference on Data Mining (SDM). 2016. P. 315–323.
16. Damaschke P. Enumerating maximal bicliques in bipartite graphs with favorable degree sequences // Inf. Process. Lett. 2014. V. 114, is. 6. P. 317–321.
17. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М. : Мир, 1982. 416 с.
18. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. М. : Наука, 1975. 480 с.
19. Bretto A. Hypergraph theory: an introduction. Springer, 2013. 119 p.
20. Zverovich I., Zverovich I. Bipartite bihypergraphs: A survey and new results // Discrete Mathematics. 2006. V. 306. P. 801–811.
21. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М. : Наука, 1990. 384 с.
22. Харари Ф. Теория графов. М. : URSS, 2018. 304 с.
23. Prisner E. Bicliques in graphs I: bounds on their number // Combinatorica. 2000. V. 20. P.109–117.
24. Lyu B., Qin L., Lin X., Zhang Y., Qian Z., Zhou J. Maximum biclique search at billion scale // Proc. VLDB Endow. 2020. P. 1359–1372.
25. Alexe G., Alexe S., Crama Y., Foldes S., Hammer P.L., Simeone B. Consensus algorithms for the generation of all maximal bicliques // Discrete Applied Mathematics. 2004. V. 145. P. 11–21.

26. Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. 3-е изд. М. : Вильямс, 2013. 1328 с.

Поступила в редакцию 10 апреля 2021 г.

Soldatenko A.A., Semenova D.V. (2021) ON CONNECTION BETWEEN BICLIQUES OF HYPERGRAPH AND ALL MAXIMALLY COMPLETE SUBMATRICES OF ADJACENCY MATRIX. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 56. pp. 90–99

DOI: 10.17223/19988605/56/10

Nowadays hypergraph models are actively used in modeling and researching road and telecommunication networks, design semantic networks and representing linguistic knowledge, when solving problems of control of large systems.

In this paper we investigate connection between problem of finding all maximally complete submatrices of $(0, 1)$ -matrix and problem of finding all maximal bicliques of hypergraph. Problem of finding all maximally complete submatrices of $(0, 1)$ -matrix is in demand in the analysis of formal context. This problem arises in searching for hidden relationships in subject areas and building ontologies of subject areas. Finding bicliques in networks represented by graph and hypergraph can increase the efficiency of solving the problem of addressing and routing. It is known that problem of finding all maximally complete submatrices of $(0, 1)$ -matrix is $\#P$ -complete, and problem of finding all maximal bicliques at least hard as NP -hard problems. We propose new hypergraph algorithm *HFindMCS* for searching all maximally complete submatrices of $(0, 1)$ -matrix. In the algorithm initial $(0, 1)$ -matrix is represented as a hypergraph H . We introduce new definition of l -level for algorithm are given. By the complete l -level of $(0, 1)$ -matrix we mean all its complete submatrices with the number of rows equal to l . Main idea of algorithm *HFindMCS* is to generate all possible l -levels of $(0, 1)$ -matrix and then select maximally complete submatrices from them. Moreover, number of l -levels does not exceed the degree of the hypergraph. Level hierarchy makes it easy to check if complete submatrix is maximal. This idea is well implemented in the language of hypergraphs. We proved that algorithm *HFindMCS* finds all maximally complete submatrices of incidence $(0, 1)$ -matrix I of hypergraph H in time $O\left[\log(|MCS|)|U|^2 \Delta^{2^A} \log(2^A |U|)\right]$. The efficiency of the *HFindMCS* algorithm has been confirmed by computational experiments for hypergraphs with limited degree.

A procedure for transition from solution of the problem of finding all maximally complete submatrices of the $(0, 1)$ -matrix (MCSP) to solution of the problem of finding the maximum bicliques of hypergraph (MBGP for Hypergraphs) is proposed. The idea of the procedure consists in splitting elements of the set of all maximally complete submatrices and checking for satisfaction to a special form of the matrix. A special form of matrix is associated with the adjacency matrix of the hypergraph. Computational experiments have shown the high complexity of the transition from solving the MCSP problem to solving the MBGP for Hypergraphs problem. To improve the performance of procedure for constructing a solution of MBGP for Hypergraphs problem, we assume to apply the described procedure to sets P_i , which are formed in *HFindMCS* algorithm. This modification can decrease a number of needed splits hence increase overall algorithm performance. It is also worth noting that researches on using of parallel computing technologies for the *HFindMCS* algorithm are perspective and will allow to reduce it operation time.

Keywords: hypergraph; maximal bicliques; $(0, 1)$ -matrix; maximally complete submatrices.

SOLDATENKO Aleksandr Aleksandrovich (Post-graduate Student, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation).
E-mail: ASoldatenko@sfu-kras.ru

SEMENOVA Darya Vladislavovna (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation).
E-mail: DVSeменова@sfu-kras.ru

REFERENCES

1. Meyer, D. (1987) *Teoriya relyatsionnykh baz dannykh* [The Theory of Relational Databases]. Moscow: Mir.
2. Konstantinova, E.V. & Skorobogatov, V.A. (2001) Application of hypergraph theory in chemistry. *Discrete Mathematics*. 235(1–3). pp. 365–383. DOI: 10.1016/S0012-365X(00)00290-9
3. Graham, R.L. & Pollak, H.O. (1971) On the addressing problem for loop switching. *The Bell System Technical Journal*. 50(8). pp. 2495–2519. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1971.tb02618.x
4. Popov, V.B. (2010) Ekstremal'naya numeratsiya vershin gipergrafa i zadacha ob"ektno-priznakovoy klasterizatsii [Extreme enumeration of the hypergraph vertex and the box clusterization problem]. *Dinamicheskie sistemy*. 28. pp. 99–112.
5. Ganter, B. & Wille, R. (1999) *Formal Concept Analysis*. Springer.
6. Kuznetsov, S. & Obiedkov, S. (2002) Comparing performance of algorithms for generating concept lattices. *Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence*. 14. pp. 189–216. DOI: 10.1080/09528130210164170

7. Blyumin, S.L. (2010) Complete Hypergraphs. Laplasian spectra. Multi-agent systems. *Upravlenie bol'shimi sistemami – Large-Scale Systems Control*. 30. pp. 5–23.
8. Tarakanov, V.E. (1985) *Kombinatornye zadachi i (0, 1)-matritsy* [Combinatorial problems and (0, 1) -matrices]. Moscow: Nauka.
9. Miller, R. & Boxer, L. (2009) *Posledovatel'nye i parallel'nye algoritmy: obshchiy podkhod* [Algorithms Sequential & Parallel. A Unified Approach]. Translated from English. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy.
10. Marcus, M. & Minc, H. (1972) *Obzor po teorii matrits i matrichnykh neravenstv* [Matrix Theory and Matrix Inequalities]. Moscow: Nauka.
11. Beineke, L. & Wilson, R.J. (2008) *Topics in Algebraic Graph Theory*. Cambridge; New York : Cambridge University Press.
12. Jukna, S. & Kulikov, A. (2009) On covering graphs by complete bipartite subgraphs. *Discrete Mathematics*. 309. pp. 3399–3403. DOI: 10.1016/j.disc.2008.09.036
13. Faure, N., Chretienne, P., Gourdin, E. & Sourd, F. (2007) Biclique completion problems for multicast network design. *Discrete Optimization*. 4(3–4). pp. 360–377. DOI: 10.1016/j.disopt.2007.09.005
14. Hermelin, D. & Manoussakis, G. (2020) Efficient enumeration of maximal induced bicliques. *Discrete Applied Mathematics*. 303(1). DOI: 10.1016/j.dam.2020.04.034
15. Shaham, E., Yu, H. & Li, X. (2016) On finding the maximum edge biclique in a bipartite graph: a subspace clustering approach. *Proc. of the 2016 SIAM International Conference on Data Mining (SDM)*. pp. 315–323.
16. Damaschke, P. (2014) Enumerating maximal bicliques in bipartite graphs with favorable degree sequences. *Inf. Process. Lett.* 114(6). pp. 317–321. DOI: 10.1016/j.ipl.2014.02.001
17. Garey, M. & Johnson, D. (1982) *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi* [Computers and Intractability]. Translated from English. Moscow: Mir.
18. Kaufmann, A. (1975) *Vvedenie v prikladnuyu kombinatoriku* [Introduction to applied combinatorics]. Translated from French. Moscow: Nauka.
19. Bretto, A. (2013) *Hypergraph Theory: An Introduction*. Springer.
20. Zverovich, I. & Zverovich, I. (2006) Bipartite bihypergraphs: A survey and new results. *Discrete Mathematics*. 306. pp. 801–811. DOI: 10.1016/j.disc.2005.10.026
21. Emelichev, V.A., Melnikov, O.I., Sarvanov, V.I. & Tyshkevich, R.I. (1990) *Leksii po teorii grafov* [Lectures on Graph Theory]. Moscow: Nauka.
22. Harary, F. (2018) *Teoriya grafov* [Graph Theory]. Translated from English. Moscow: URSS.
23. Prisner, E. (2000) Bicliques in graphs I: bounds on their number. *Combinatorica*. 20. pp. 109–117.
24. Lyu, B., Qin, L., Lin, X., Zhang, Y., Qian, Z. & Zhou, J. (2020) Maximum biclique search at billion scale. *Proc. VLDB Endow.* pp. 1359–1372.
25. Alexe, G., Alexe, S., Crama, Y., Foldes, S., Hammer, P.L. & Simeone, B. (2004) Consensus algorithms for the generation of all maximal bicliques. *Discrete Applied Mathematics*. 145. pp. 11–21. DOI: 10.1016/j.dam.2003.09.004
26. Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest, R.L. & Stein, C. (2013) *Algoritmy: postroyeniye i analiz* [Introduction to Algorithms]. 3rd. ed. Translated from English. Moscow: Vil'yams.

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 004.896

DOI: 10.17223/19988605/56/11

Ф.В. Краснов, Е.Н. Баскакова, И.С. Смазневич

ОЦЕНКА ПРИКЛАДНОГО КАЧЕСТВА ТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
ДЛЯ ЗАДАЧ КЛАСТЕРИЗАЦИИ

Исследуются методы оценки качества тематических моделей, способные обеспечить их устойчивое применение для решения практических задач, связанных с анализом набора текстовых документов. На примере задачи мягкой кластеризации показано, что использования метрики средней когерентности тем недостаточно для оценки применимости построенной модели, и целесообразно учитывать показатели связей документов с высококогерентными темами.

Ключевые слова: тематическое моделирование; когерентность темы; мягкая кластеризация; анализ текста; ARTM.

За два десятилетия тематическое моделирование текстовых коллекций зарекомендовало себя как гибкий и надежный инструмент для работы с большими объемами документов. Эффективная реализация этого алгоритма позволяет успешно решать задачи кластеризации и классификации текстов [1], может использоваться для поиска информации [2], аннотирования текстов [3], анализа трендов и новостных потоков [4], обработки мультязычных данных [5].

Начиная с изобретения метода в 1999 г. [6], принципы и алгоритмы тематического моделирования постоянно развивались. В настоящее время, согласно обзору [7], существует более 50 вариантов построения тематических моделей. Наиболее популярный сегодня метод построения тематической модели – метод латентного распределения Дирихле (Latent Dirichlet Allocation, LDA), созданный авторами D. Blei, A. Ng, M. Jordan и описанный в работе [8], набравшей более 35 тысяч цитирований¹.

Самым перспективным можно назвать метод тематического моделирования с аддитивной регуляризацией (Additive Regularization Topic Modelling, ARTM) [9], в основе которого лежит алгоритм PLSA (вероятностный латентно-семантический анализ) [6]. В рамках этого подхода был создан теоретический аппарат для построения тематических моделей, оптимизирующих заданный перед началом обучения набор формализованных критериев. Программная реализация метода в библиотеке BigARTM [10] позволяет обучать модели ARTM с высокой скоростью в потоковом (онлайновом) и статическом режимах.

Результатом обучения тематической модели являются две матрицы: Φ -матрица «термы–темы» и Θ -матрица «темы–документы», произведение которых дает исходную матрицу «документы–термы», также известную как модель «мешок слов». Задача тематического моделирования относится к классу некорректных обратных задач, т.е. существует бесконечное множество вариантов Φ и Θ , соответствующих заданной векторной модели текстового корпуса. Поэтому актуальной является задача получения тематической модели с определенным качеством.

Служебным признаком сходимости итерационного процесса обучения модели является ее перплексия. С прикладной точки зрения важно исследовать качество каждой из найденных тем. На прак-

¹ По данным системы «Google Академия».

тике его принято связывать со свойством их интерпретируемости человеком. Для оценки этого показателя могут быть использованы разные стратегии. Обзоры существующих методов были сделаны, например, в работах [11–13].

Наиболее популярные способы вычисления основаны на PMI [14] (или нормализованном варианте – NPMI [15]) и логарифме условной вероятности [16], которые, в свою очередь, базируются на анализе совстречаемости термов. В других подходах статистика совстречаемости используется опосредованно. В работе [17] слова тем помещаются в семантическое пространство, построенное на PMI или NPMI, где методами дистрибутивной семантики рассчитывается попарная схожесть этих слов.

Универсальной метрикой в задачах тематического моделирования считается когерентность тем. Высококогерентная тема содержит семантически связанные между собой слова, что определяется контекстом их использования. Эта метрика подходит для большинства задач текстовой аналитики, решаемых с помощью тематического моделирования. Однако когерентность темы может быть вычислена различными алгоритмами, каждый из которых допускает вариативность набора параметров.

Изучению подходов к оптимизации оценки и методов вычисления тематической когерентности посвящен ряд исследований. Так, в работе [11] отмечается, что значение метрики когерентности оказывается больше у тем с часто употребляемыми термами. В результате получаются понятные, но довольно общие темы, что не всегда приемлемо при работе с отраслевыми документами. Авторы предлагают еще две дополнительные метрики – эксклюзивность и подъем (lift): эксклюзивность темы отражает степень перекрытия между темами, подъем определяет с помощью референсного корпуса степень присутствия специфичных слов в темах модели. В [13] для оценки качества тематической модели предлагается метод автоматического обнаружения лишнего терма (topic intruder). Для этого анализируется не только матрица Φ «темы–термы», но и связи тем с документами в матрице Θ . В [18] исследуется зависимость когерентности темы от выбора числа термов, учитываемых при расчете PMI. В [19] сравниваются различные способы вычисления когерентности и предлагается общий метод оценки совстречаемости термов через исследование близости их векторов.

Большое число исследований говорит о том, что единого «золотого стандарта» по оценке качества тематической модели пока не найдено. При этом академический подход не всегда оправдан в прикладных задачах.

Одна из возможностей прикладного использования тематической модели – мягкая (нечеткая) кластеризация набора текстов. На основе самых значимых слов тем кластеры получают собственные интерпретируемые названия, тогда как при других подходах кластеры формируются анонимными, что понижает объяснимость решения.

Для валидации качества кластеров разработано достаточно много метрик: Partition Coefficient [20], Dunn Index [21], DBI [22] и ее модификации [23–25], Silhouette [26]. Однако все они задействованы в алгоритмах кластеризации и не подходят для уже построенной тематической модели, которая в границах информационной системы может участвовать и в решении других задач.

С прикладной точки зрения в модели важны только темы с высокой когерентностью, их количество (или доля) характеризует потенциал практического использования модели. Интуитивно «хорошей» считается ситуация, когда документ моделируется 2–3 темами с высокими значениями их весов, в то время как документ, где десятки тем присутствуют незначительно, считается нераспознанным моделью (неподдающимся тематическому анализу). При этом в тематической модели всегда будут присутствовать низкокогерентные темы, но они не имеют значения в реальных задачах.

Данная статья посвящена изучению поведения метрики когерентности, основанной на нормализованной поточечной взаимной информации, для решения задачи мягкой тематической кластеризации текстов. Цель настоящего исследования – выработка нового подхода к оценке тематической модели, обеспечивающего возможность устойчивого применения методов тематического моделирования в прикладных интеллектуальных информационных системах за счет повышения точности кластеризации, а также уменьшения вычислительной сложности. Гипотеза авторов состоит в том, что среднее число высококогерентных тем на один документ является более эффективной метрикой для оценки качества тематической модели, чем средняя когерентность.

1. Методика

Идея оценки качества тем с помощью когерентности была сформулирована Д. Ньюманом и соавт. в работе [14]. В рамках исследования свойств взаимной информации между терминами авторы ввели метрику PMI-Score (1), которую в дальнейшем назвали когерентностью темы:

$$PMI - Score(w) = mean\{PMI(w_i, w_j), ij = 1...10(k), i \neq j\}, \text{ где } PMI(w_i, w_j) = \log \frac{p(w_i, w_j)}{p(w_i) \cdot p(w_j)}. \quad (1)$$

Когерентность темы PMI-Score вычисляется как средняя поточечная взаимная информация для всех пар различных термов w_i и w_j из массива $w = (w_1, \dots, w_{10})$, содержащего 10 наиболее весомых термов темы; $p(w_i, w_j)$ – вероятность совместного появления термов w_i и w_j в текстовом окне заданной ширины, $p(w_i)$ – вероятность появления термина w_i в текстовом окне заданной ширины.

Также в [14] были собраны мнения экспертов о тематической модели и констатирована высокая корреляция между когерентностью и человеческими оценками тем. Таким образом, метрика когерентности темы стала основной для оценки ее качества.

Свободный параметр в определении когерентности (1) – число 10, в более поздних работах замененное на k . Для экспертной оценки необходимо было выбирать из каждой темы небольшое количество (k) взвешенных термов, характеризующих ее, тогда как в полной тематической модели количество термов одинаково для всех тем и равно количеству термов в словаре коллекции.

Применительно к тематическим моделям Ньюман использует когерентность в исследовании [27], где она сравнивается с 15 другими метриками и показывается, что сильнее всего когерентность коррелирует с человеческой оценкой у моделей с автоматически выделяемыми темами в количестве $T = 200$ и $T = 400$. Для вычисления встречаемости термов в [27] введено понятие «скользящего окна» – отрывка исходного текста длиной в 10 термов (позднее длина окна стала задаваться величиной sw – от sliding window). Свободный параметр $k = 10$ стал интерпретироваться как число наиболее весомых термов в темах модели, учитываемое при расчете когерентности.

Д. Мимно и соавт. [16] ввели новую формулу для когерентности темы на основе величины document frequency (DF), которая может быть переписана в терминах данной статьи:

$$C_{df} = \sum_{j=2}^k \sum_{i=1}^{j-1} \log \frac{D(w_j, w_i) + 1}{D(w_i)}, \quad (2)$$

где C_{df} – когерентность темы для документов, $D(w_i)$ – количество документов, где встречается терм w_i , $D(w_i, w_j)$ – количество документов, где встречаются термы w_i и w_j одновременно, w_i – i -й термин в порядке убывания веса в матрице Φ для темы t , k ($= 10$) – количество термов в теме t (постоянная 1 включена для исключения возможности вычисления логарифма 0).

В отличие от (1) в формуле (2) рассматривается когерентность для документов, а не для термов. Будем различать далее метрики когерентности C_{tf} (1) и C_{df} (2). В формуле (2) еще не используется окно: встречающимися считаются термы, содержащиеся одновременно в одном или более документах. При этом в обеих формулах (1) и (2) значение когерентности темы зависит от выбора величины k , определяющей набор термов с наибольшими весами. В [16] это число равно 10 при общем количестве тем модели $T = 200$.

В статье [28] предложена нормализованная версия PMI – NPMI, в терминах данной статьи представимая как

$$NPMI(t) = \sum_{j=2}^k \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\log \frac{P(w_j, w_i)}{P(w_i)P(w_j)}}{-\log P(w_i, w_j)}. \quad (3)$$

Когерентность темы t на основе NPMI показала высокую корреляцию с экспертными оценками за счет уменьшения влияния низкочастотных термов.

В работе [19] произведено сравнение вышеперечисленных формул когерентности темы в тематической модели по методике LDA. Представляет интерес, что авторы [19] рассмотрели поведение корреляции когерентности темы с ее человеческой оценкой в зависимости от значения свободного параметра sw , определяющего размер скользящего окна, в интервале от 10 до 300 термов. Для всех вариантов расчетов когерентности выявлена общая тенденция: уменьшение корреляции при увеличении $sw > 50$. Также в [19] предложена новая формула для когерентности, в терминах данной статьи представимая следующим образом:

$$C_{tf} = \frac{2}{k(k-1)} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k PMI(w_i, w_j), \text{ где } PMI(w_i, w_j) = \log \frac{P(w_i, w_j) + \varepsilon}{P(w_i)P(w_j)}. \quad (4)$$

Нормировочный коэффициент в (4) отражает количество возможных пар среди k термов и позволяет сравнивать когерентности тем при различных значениях k , а PMI может быть заменено на NPMI.

Рассмотрим когерентность для двух вариантов совстречаемости PMI с окном $sw = 10$: по документам (DF) и по термам (TF), используя только положительные значения (PPMI). Вероятности в формуле Ньюмана (1) можно оценить по частотам:

$$p(w_i, w_j) = \frac{n(w_i, w_j)}{n} \text{ и } p(w_i) = \frac{n(w_i)}{n}, \text{ где } n(w_i) = \sum_{w \in W} n(w_i, w), \quad n = \sum_{w \in W} n(w) - \text{размер словаря.}$$

Следовательно, формулу PPMI можно записать как

$$PPMI(w_{di}, w_{dj}) = \left[\log \frac{n(w_{di}, w_{dj})n}{n(w_{di})n(w_{dj})} \right]_+, \quad (6)$$

где

$$n(w_{di}, w_{dj}) = \sum_{d=1}^{|D|} \sum_{i=1}^{N_d} \sum_{j=1}^{N_d} [0 < |i - j| \leq k] - \text{величина } CoocTF, \quad (7)$$

оценка, обозначающая, сколько раз пара термов w_i и w_j встретила в коллекции внутри окна заданной ширины, либо

$$n(w_{di}, w_{dj}) = \sum_{d=1}^{|D|} [\exists i, j : 0 < |i - j| \leq k] - \text{величина } CoocDF, \quad (8)$$

оценка, обозначающая, в скольких документах коллекции встретила пара термов w_i и w_j хотя бы один раз в окне заданной ширины.

Согласно [19, 29], формулы (6)–(8) дают высокую корреляцию когерентности тем с человеческой оценкой их качества.

В рассмотренных исследованиях анализируется когерентность отдельных тем либо усредняется когерентность всех тем модели, чтобы оценивать общее качество тематической модели и сравнивать методики тематического моделирования [30]. Авторы [19, 29, 31] отмечают, что, упорядочив темы по этой метрике, можно выбрать основные темы коллекции, однако характер распределения когерентности тем в этих работах не изучен, что подсказало авторам направление исследований.

Для эксперимента в рамках данной работы была выбрана метрика среднего количества высококогерентных тем в одном документе T_D : при уменьшении этой величины улучшается качество кластеризации текстовой коллекции с помощью тематической модели.

2. Описание эксперимента

Цель эксперимента – изучить поведение метрики когерентности темы в зависимости от свободных параметров тематической модели. Для достижения этой цели были сформулированы следующие задачи:

1. Выбрать три различные методики построения тематической модели.
2. Выбрать два набора данных с различными характеристиками (длина одного документа, размер словаря, количество документов коллекции).

3. Выбрать формулу для расчета когерентности темы.

4. Разработать форму визуального представления распределения когерентности темы в зависимости от свободных параметров тематической модели; определить характер зависимости распределения когерентности.

5. Разработать методику определения прикладного качества тематической модели.

Для эксперимента были выбраны три методики построения тематической модели: генеративная – LDA ($\alpha = T/50$, $\beta = 0,01$) [8], вероятностная – PLSA [6], вероятностная с аддитивной регуляризацией – ARTM [9].

Для реализации этих алгоритмов использовалась библиотека BigARTM как наиболее производительная. Токенизация проводилась методом NLTK, приведение к нормальной форме – PyMorphu. Предобработка и анализ документов указанными методами и алгоритмами осуществлялись в рамках платформы анализа текста SemanticTech¹.

В качестве данных были выбраны два набора русскоязычных документов:

– «Тайга»: 7 695 текстов средней длины (среднее количество термов в одном документе – 145) со словарем объемом 40 тысяч термов [32];

– ГОСТ: 1 066 длинных текстов (среднее количество термов в документе – 1 391) со словарем объемом 23 тысяч термов (сформирован авторами²).

Для расчета когерентности темы была использована формула

$$C_{PPMI} = \frac{2}{k(k-1)} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k PPMI(w_i, w_j), \quad (9)$$

где PPMI рассчитывается по формуле (6). Для расчета когерентности по словарной частоте C_{PPMI}^{TF} встречаемость термов определяется по формуле (7), для расчета когерентности по документарной частоте C_{PPMI}^{DF} встречаемость термов определяется по формуле (8).

3. Результаты

На рис. 1 для выбранных наборов данных показана зависимость средней когерентности от количества тем (T) для трех вариантов построения тематических моделей по формулам (6)–(8).

Видно, что для корпуса «Тайга» наибольшим значением средней когерентности обладает методика LDA в варианте DF в районе значения $T = 600$ и в районе значения $T = 300$ в случае TF. Для ГОСТ наибольшим значением средней когерентности обладает ARTM в районе $T = 500$ (DF) и $T = 400$ (TF). Для «Тайги» при TF все методики имеют ярко выраженные максимумы, в случае DF методики ARTM и PLSA выходят на асимптотический рост при $T > 500$. Наименьшими средними значениями когерентности обладает тематическая модель набора «Тайга» по методике PLSA при DF. В ходе эксперимента остановка обучения моделей для получения зависимостей, отраженных на рис. 1, была сделана при достижении схожих значений перплексии около $P = 300$, что позволяет считать сравнение методик оправданным.

Рассмотрим детально распределение когерентности тем для разных значений T и различных методик построения тематической модели. На рис. 2 приведены кривые распределения когерентности тем в разных случаях для набора «Тайга». Из него видно, что распределения принципиально не отличаются: с ростом количества тем модели растет максимальное значение когерентности тем. Эти детали распределений теряются при усреднении когерентности, сделанном на рис. 1.

Далее в качестве метрики когерентности была использована метрика C_{PPMI}^{TF} , поскольку, как видно на рис. 1, 2, она более чувствительная для данной коллекции и имеет ярко выраженные экстремумы, что позволяет выбрать оптимальное число тематических компонент для построения модели.

¹ Система мониторинга и семантического анализа юридических документов SemanticTech – собственная разработка NAUMEN R&D; свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2021610340 от 13.01.2021. URL: <https://new.fips.ru/iiss/document.xhtml?faces-redirect=true&id=3aee969154040e2049c98bc60a571dcd>

² Краснов Ф.В., Баскакова Е.Н., Смазневич И.С. Принцип построения корпуса нормативно-технических документов. PREPRINTS.RU. 2021. DOI: 10.24108/preprints-3112181

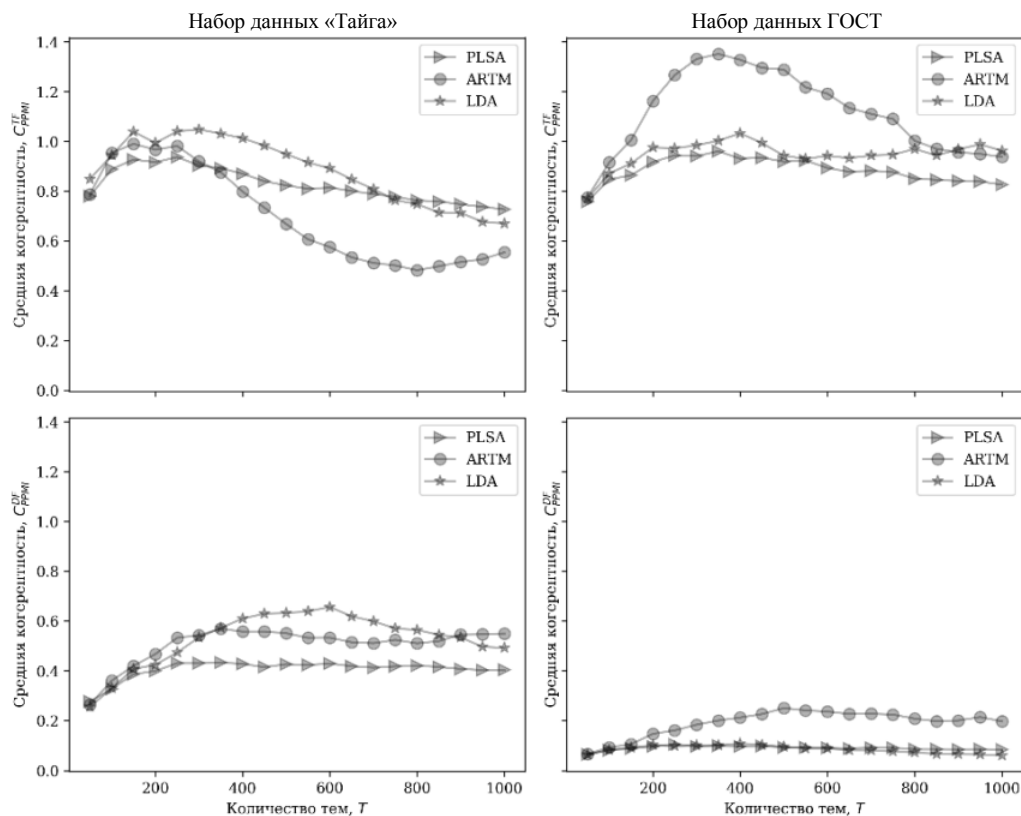


Рис. 1. Средняя когерентность для различных наборов данных и методик построения тематических моделей
Fig. 1. Average coherence for different datasets and methodologies for constructing thematic models

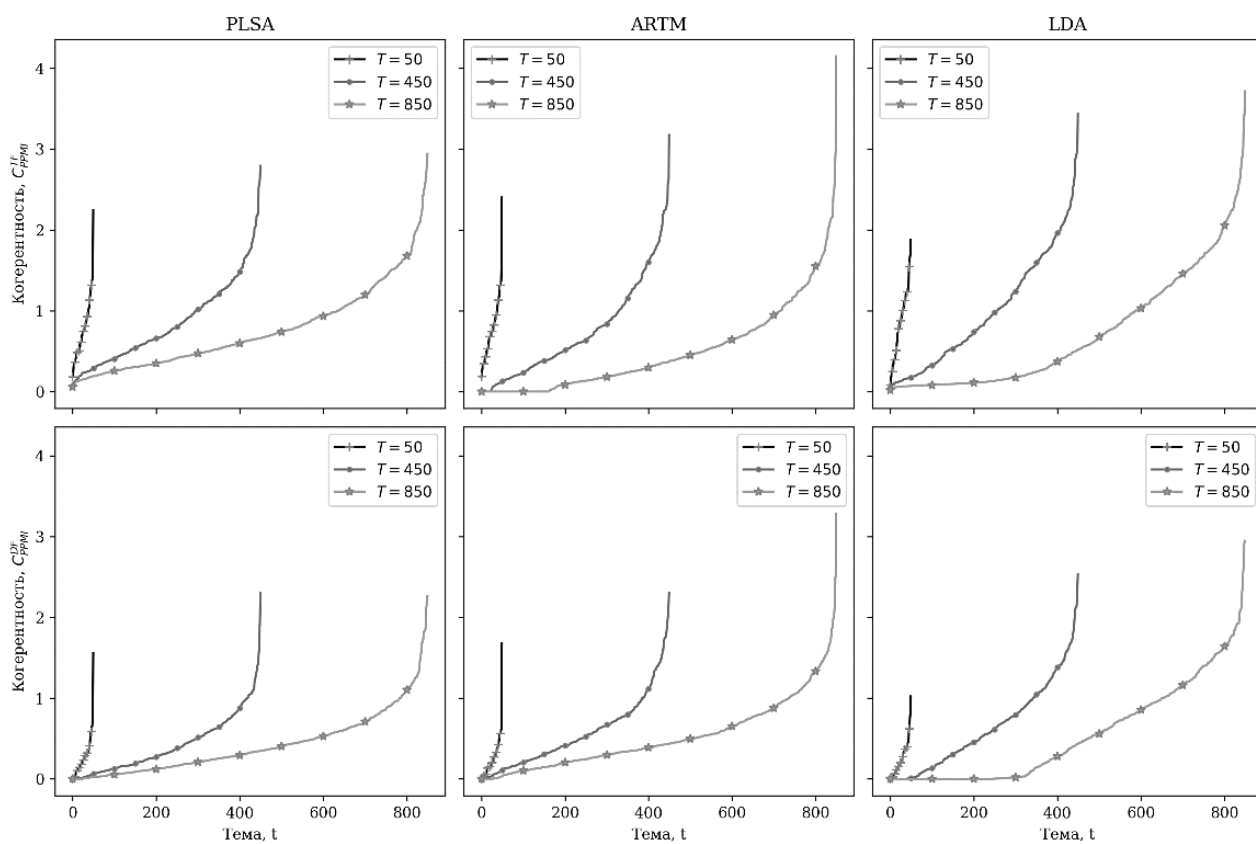


Рис. 2. Когерентность тем для методик ARTM, LDA, PLSA и набора данных «Тайга» в вариантах DF и TF
Fig. 2. Coherence of topics for ARTM, LDA, PLSA methods and the "Taiga" dataset in DF and TF variants

В табл. 1 приведены значения метрики качества кластеров в корпусе ГОСТ. Значения когерентности C_{PPMI}^{TF} получены при размере окна $sw = 5$. Под порогом подразумевается вес связи документа и темы в матрице Θ . Среднее количество тем в документе и среднее количество высококогерентных тем в документе обозначены как K_t и K_{hct} соответственно.

Таблица 1

Метрики качества кластеров текстов корпуса ГОСТ

Количество тем в модели	Методика моделирования	Порог $< 10^{-4}$		Порог $< 10^{-3}$		Порог $< 10^{-2}$	
		K_{hct}	K_t	K_{hct}	K_t	K_{hct}	K_t
50	PLSA	10,7	25,3	6	14,5	2,6	6,4
	ARTM	12,5	25,6	8	16,5	3,6	7,5
	LDA	27	50	24,8	46,1	3,8	7,7
100	PLSA	13,7	33,4	6,8	16,6	2,6	6,4
	ARTM	16,4	36	9,7	21,4	3,8	8,5
	LDA	57,8	99,7	36,3	64,8	3,6	6,9
200	PLSA	19,6	39	8,8	17,2	3,3	6,1
	ARTM	29,8	48,3	17,1	27,6	5,7	9,4
	LDA	123,4	196,1	30,1	50,6	3,6	6
500	PLSA	15,3	35,5	6,2	13,9	2,3	4,6
	ARTM	40,7	78,4	25,5	52,4	7,3	14,8
	LDA	211,5	413	8,8	22,9	2,3	4,8

Результат эксперимента показал, что вне зависимости от используемой методики построения модели в среднем можно достичь сокращения числа тем документов в 2 раза, анализируя среди всех тем только высококогерентные темы (ВКТ). В прикладных задачах это обеспечит более качественную кластеризацию документов с точки зрения человеческой оценки. Анализ только ВКТ документа позволит сократить усилия на исключение шумовых тем, принимая во внимание только те семантические связи, которые являются весомыми в рамках обрабатываемой коллекции документов.

Однако необходимо удостовериться, что учет только ВКТ не приведет к снижению качества распределения документов по темам для пользователя.

В рамках данного эксперимента высококогерентными темами считаются темы со значением когерентности больше 1; это означает, что каждый терм встречается с каждым другим термом один раз (среди 10 наиболее значимых термов каждой темы).

При учете только ВКТ из 1 066 документов корпуса ГОСТ 161 документ (15%) не имеет связи ни с одной темой, при этом 54 документа не имеют явно выраженных (с весом более 0,4) связей ни с одной из тем в Θ вне зависимости от значения их когерентности, – такие документы исключаются из рассмотрения. Интерес представляют документы, имеющие весовую ($> 0,4$) связь с автоматически выделенной темой, которая не является высококогерентной. При подробном анализе были выявлены темы с когерентностью, близкой к пороговой ($= 1$), связанные большим весом с несколькими документами (пример такой темы приведен в табл. 2), не имеющими весомых связей с другими темами. Такие документы также образуют кластер.

Таблица 2

Пример кластера документов ГОСТ, связанных с низкокогерентной темой, близкой к порогу

Торис_4. Когерентность – 0,82. Термы (веса): покрытие (0,08), нанесение (0,04), состав (0,04), приготовление (0,03), валик (0,02), масло (0,02), приложение (0,02), древесина (0,01), влажность (0,01), конструкция (0,01)	
Вес темы в документе	Название документа
0,79	ГОСТ 25130–82. Покрытие по древесине вспучивающееся огнезащитное ВПД. Технические требования
0,78	ГОСТ 25131–82. Государственный стандарт Союза ССР. Покрытие по стали вспучивающееся огнезащитное ВПИМ-2. Технические требования
0,67	ГОСТ 23790–79. Покрытие по древесине фосфатное огнезащитное. Технические требования
0,65	ГОСТ 25665–83. Покрытие по стали фосфатное огнезащитное на основе минеральных волокон. Технические требования
0,63	ГОСТ 23791–79 (1985). Покрытие по стали фосфатное огнезащитное. Технические требования

Далее, со снижением уровня когерентности, обнаруживалось все меньше связей между документами и темами, существенных для решения прикладных задач, таких как автоматическое формирование рубрикатора, тематический поиск, маршрутизация документов и т.д.

Отдельно была рассмотрена группа документов, имеющих весомую связь в матрице Θ ($> 0,6$) с низкокогерентной темой (НКТ). Если учитывать только ВКТ, то в некоторых документах теряется весомая связь с НКТ и основной темой становится ВКТ, что не снижает качества анализа с точки зрения пользователя. Примеры таких документов приведены в табл. 3.

Таблица 3

Пример документов, по которым произошла замена ключевой темы с НКТ на ВКТ

Тема (когерентность)	Вес темы в документе	Состав темы
ГОСТ 12.1.041–83. Система стандартов безопасности труда. Пожаровзрывобезопасность горючих пылей. Общие требования		
ВКТ (1,80)	0,26	Торис_79: вещество (0,06), температура (0,04), взрыв (0,03), смесь (0,03), испытание (0,02), взрывоопасный (0,02), самовоспламенение (0,02), воспламенение (0,02), горючий (0,01), концентрация (0,01)
НКТ (0,45)	0,63	Торис_123: пыль (0,02), оборудование (0,02), аппарат (0,02), норма (0,02), водоснабжение (0,01), вода (0,01), услуга (0,01), коммунальный (0,01), лампа (0,01), система (0,01)
ГОСТ 20522–96. Грунты. Методы статистической обработки результатов испытаний		
ВКТ (1,35)	0,1	Торис_96: грунт (0,31), глинистый (0,02), песок (0,02), природный (0,01), степень (0,01), грунтовый (0,01), состав (0,01), крупнообломочный (0,01), органический (0,01), плотность (0,01)
НКТ (0,79)	0,76	Торис_11: значение (0,13), коэффициент (0,06), формула (0,05), приложение (0,04), характеристика (0,03), испытание (0,03), величина (0,02), результат (0,02), определение (0,01), средний (0,01)

В остальных случаях документы, имеющие весомую связь только с НКТ, при удалении этой темы из рассмотрения считаются нераспознанными тематической моделью, что не противоречит их первоначальному статусу, поскольку низкая когерентность темы означает ее неинтерпретируемость.

Таким образом, эксперимент подтвердил, что использование в информационных приложениях связей документов только с ВКТ не ухудшает результаты тематического анализа, а позволяет концентрироваться на малом количестве ключевых тем, понятных пользователям. Следовательно, показатель качества тематической модели можно вычислять с помощью доли высококогерентных тем в модели. Сокращение количества тем в модели на 30% за счет использования только ВКТ позволило снизить среднее количество связей «документ–тема», рассматривая только хорошо интерпретируемые темы, и повысить среднюю когерентность модели на 20%.

4. Дискуссия

Для исследования корреляции когерентности темы с человеческим восприятием важны как наибольшие, так и наименьшие значения когерентности, чтобы сравнивать их и с позитивными, и с негативными экспертными оценками. Для прикладных же задач темы с невысокой когерентностью не представляют интереса как неинтерпретируемые в силу низкой встречаемости образующих их термов. Для оценки качества тематической модели критически важны именно высококогерентные темы.

В зависимости от прикладной задачи для этого могут быть использованы разные метрики. В частности, при кластеризации важным условием качества тематической модели является присутствие каждой ВКТ в ненулевом числе документов коллекции, причем с достаточным весом.

Дополнительным критерием качества модели может выступать требование минимизации числа ВКТ в каждом из документов коллекции либо в большинстве из них. На практике в прикладных информационных системах достаточным является выявление в документе от одной до трех основных тем. Таким образом, на модель может быть наложено ограничение по среднему количеству ВКТ, входящих в число основных тем в одном документе коллекции.

При таком подходе всегда останутся документы, не относящиеся к ВКТ, поэтому некоторые документы коллекции при кластеризации должны быть признаны «непонятыми». Чтобы сократить их количество, можно ввести еще одно требование: число документов, содержащих ВКТ в качестве одной из основных тем, должно быть максимально, а документов без ВКТ – минимально.

В то же время для достижения этой цели недостаточно просто увеличивать долю ВКТ в модели. При довольно большом их количестве некоторые из них будут состоять из одинаковых термов. Наличие таких похожих ВКТ снижает прикладную ценность тематической модели. Поэтому необходимо выделять ВКТ с неповторяющимися термами. В ARTM это позволяет сделать регуляризатор декоррелирования.

Кроме того, если при определении тематики корпуса ориентироваться только на значение когерентности, существует риск потери автоматически выделенного кластера документов, сильно отличающихся по смыслу от остальных. Простое снижение порога когерентности в этом случае нивелирует выгоду от использования в приложениях только ВКТ, понятных пользователю. Таким образом, необходимо устанавливать гибкий порог по определению уровня когерентности.

Заключение

В статье исследуется возможность разработки метрики качества тематической модели, способной обеспечить устойчивое практическое применение тематического моделирования при решении задач обработки неструктурированных текстовых данных в прикладных интеллектуальных информационных системах. Рассматривается задача мягкой кластеризации коллекции документов.

Прикладные задачи по мягкой кластеризации коллекции документов предъявляют повышенные требования к метрике для выбора наилучшей тематической модели. Авторы показали, что использование метрики средней когерентности приводит к излишним затратам ресурсов для нахождения оптимальной тематической модели. В работе продемонстрировано, что на практике для достижения устойчивой работы приложений достаточно использовать в качестве метрики среднее число высококогерентных тем на один документ.

В рамках исследования проведен эксперимент по тематическому моделированию двух корпусов русскоязычных текстов: «Тайга» (7 695 документов) и ГОСТ (1 066 документов) по методам LDA, PLSA и ARTM. Изучено распределение когерентности тем в зависимости от параметров расчета этой метрики для каждого метода и установлено, что с увеличением общего числа тем в модели растет максимальное значение их когерентности, однако при усреднении метрики по всем темам модели эта информация теряется.

По окончании эксперимента проведена проверка на предмет возможных потерь в результатах кластеризации при исключении из рассмотрения низкокогерентных тем. На примерах продемонстрировано, что существенных потерь, критичных с точки зрения человеческой оценки, при сужении тем модели до высококогерентной их части не происходит, что подтвердило сформулированную в исследовании гипотезу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rubin T.N., Chambers A., Smyth P., Steyvers M. Statistical topic models for multi-label document classification // Machine learning. 2012. V. 88, № 1-2. P. 157–208.
2. Янина А., Воронцов К. Мультимодальные тематические модели для разведочного поиска в коллективном блоге // Машинное обучение и анализ данных. 2016. Т. 2, № 2. С. 173–186.
3. Litvak M., Vanetik N., Liu C., Xiao L., Savas O. Improving summarization quality with topic modeling // Proceedings of the 2015 Workshop on Topic Models: Post-Processing and Applications. 2015. P. 39–47.
4. Zhang J., Song Y., Zhang C., Liu S. Evolutionary hierarchical dirichlet processes for multiple correlated time-varying corpora // Proceedings of the 16th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. 2010. P. 1079–1088.
5. Ni X., Sun J.T., Hu J., Chen Z. Mining multilingual topics from wikipedia // Proceedings of the 18th international conference on World wide web. 2009. P. 1155–1156.
6. Hoffmann T. Probabilistic latent semantic indexing // Proceedings of the 22nd annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval. New York : ACM, 1999. P. 50–57.

7. Vayansky I., Kumar S.A.P. A review of topic modeling methods // *Information Systems*. 2020. V. 94. P. 101582.
8. Blei D.M., Ng A.Y., Jordan M.I. Latent dirichlet allocation // *Journal of machine Learning research*. 2003. V. 3, № 1. P. 993–1022.
9. Vorontsov K.V. Additive regularization for topic models of text collections // *Doklady Mathematics*. 2014. V. 89, № 3. P. 301–304.
10. Vorontsov K., Frei O., Apishev M., Romov P., Dudarenko M. BigARTM: Open source library for regularized multimodal topic modeling of large collections // *International Conference on Analysis of Images, Social Networks and Texts*. Springer, Cham., 2015. C. 370–381.
11. Krasnashchok K., Jouili S. Improving topic quality by promoting named entities in topic modeling // *Proceedings of the 56th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*. 2018. V. 2: Short Papers. P. 247–253.
12. Omar M. et al. LDA topics: Representation and evaluation // *Journal of Information Science*. 2015. V. 41, № 5. C. 662–675.
13. Bhatia S., Lau J.H., Baldwin T. An automatic approach for document-level topic model evaluation // *arXiv preprint. arXiv:1706.05140*. 2017. URL: <https://arxiv.org/pdf/1706.05140.pdf>
14. Newman D., Noh Y., Talley E., Karimi S., Baldwin T. Evaluating topic models for digital libraries // *Proceedings of the 10th Annual Joint Conference on Digital libraries*. 2010. C. 215–224.
15. Lau J.H., Newman D., Baldwin T. Machine reading tea leaves: Automatically evaluating topic coherence and topic model quality // *Proceedings of the 14th Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics*. 2014. C. 530–539.
16. Mimno D., Wallach H., Talley E., Leenders M., McCallum A. Optimizing semantic coherence in topic models // *Proceedings of the 2011 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing*. 2011. P. 262–272.
17. Aletas N., Stevenson M. Evaluating topic coherence using distributional semantics // *Proceedings of the 10th International Conference on Computational Semantics (IWCS 2013) : Long Papers*. 2013. P. 13–22.
18. Lau J.H., Baldwin T. The sensitivity of topic coherence evaluation to topic cardinality // *Proceedings of the 2016 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies*. 2016. C. 483–487.
19. Röder M., Both A., Hinneburg A. Exploring the space of topic coherence measures // *Proceedings of the Eighth ACM International Conference on Web Search and Data Mining*. 2015. C. 399–408.
20. Bezdek J.C. Cluster validity with fuzzy sets // *Journal of Cybernetics*. 1973. V. 3 (3). P. 58–73.
21. Dunn J.C. Well-separated clusters and optimal fuzzy partitions // *Journal of cybernetics*. 1974. V. 4. No. 1. C. 95–104.
22. Davies D.L., Bouldin D.W. A cluster separation measure // *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*. 1979. № 2. C. 224–227.
23. Halkidi M., Batistakis Y., Vazirgiannis M. Clustering validity checking methods: part II // *ACM Sigmod Record*. 2002. V. 31, № 3. C. 19–27.
24. Xie X.L., Beni G. A validity measure for fuzzy clustering // *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence*. 1991. № 8. C. 841–847.
25. Краснов Ф.В. Оценка оптимального количества тематик в тематической модели: подход на основе качества кластеров // *International Journal of Open Information Technologies*. 2019. V. 7, № 2. P. 8–15.
26. Rousseeuw P.J. Silhouettes: a graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1987. V. 20. P. 53–65.
27. Newman D., Lau J.H., Grieser K., Baldwin T. Automatic evaluation of topic coherence // *Human language technologies: The 2010 Annual Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics*. 2010. P. 100–108.
28. Bouma G. Normalized (pointwise) mutual information in collocation extraction // *Proceedings of GSCL*. 2009. P. 31–40.
29. O’Callaghan D., Greene D., Carthy J., Cunningham P. An analysis of the coherence of descriptors in topic modeling // *Expert Systems with Applications*. 2015. V. 42, № 13. P. 5645–5657.
30. Syed S., Spruit M. Full-text or abstract? Examining topic coherence scores using latent dirichlet allocation // *2017 IEEE International conference on data science and advanced analytics (DSAA)*. IEEE, 2017. C. 165–174.
31. Nikolenko S.I., Koltcov S., Koltsova O. Topic modelling for qualitative studies // *Journal of Information Science*. 2017. V. 43, № 1. P. 88–102.
32. Shavrina T., Shapovalova O. To the Methodology of Corpus Construction for Machine Learning: “Taiga” Syntax Tree Corpus and Parser // *Корпусная лингвистика : тр. Междунар. конф. СПб., 2017*. C. 78–84.

Поступила в редакцию 22 декабря 2020 г.

Krasnov F.V., Baskakova E.N., Smaznevich I.S. (2020) **ASSESSMENT OF THE APPLIED QUALITY OF TOPIC MODELS FOR CLUSTERING PROBLEMS**. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 56. pp. 100–111

DOI: 10.17223/19988605/56/11

The average coherence is the key quality assessment parameter for topic models; it reflects most closely the human topic evaluation. Scientific literature describes a variety of methods to calculate topic coherence, each featuring their pros and cons from the point of view of both scientific validity and practical utility.

The current paper studies the potential for practical application of different coherence calculation methods in real informational systems, which were tested on two text corpora, namely «Taiga» (7695 documents) и «GOST» (1066 documents), using several algorithms of topic modeling (LDA, ARTM, PLSA). The problem of soft clustering of a text document collection was considered.

The article describes the conducted experiment aimed to reduce the total number of the surveyed model topics to the set of high-coherent topics (HCT). Various ways of documents connection to the high-, mid-, and low-coherent topics have been examined; it has been demonstrated that the applied quality of the topic model is not diminished when the low-coherent topics are removed from the scoop, while depending on the specific features of the objective and the data being processed the coherence threshold value can be reduced.

The topic coherence used to analyze the results of transition from the complete model to the set of HCT was calculated using the following formula, determined as the most valid one for the task:

$$PPMI(w_{di}, w_{dj}) = \left[\log \frac{n(w_{di}, w_{dj})n}{n(w_{di})n(w_{dj})} \right]_+, \text{ where } n(w_{di}, w_{dj}) = \sum_{d=1}^{|D|} \sum_{i=1}^{N_d} \sum_{j=1}^{N_d} [0 < |i - j| \leq k]$$

is the *CoocTF* value, defining the co-occurrence of the terms w_i and w_j within the sliding window of a preset width in all the document; $|D|$ is the document collection size, N_d is the volume of the document d .

The main outcome of the research is the conclusion that topic model application for practical use in informational systems requires focusing not on the average coherence values, but on the topics featuring high values of coherence. To assess the applied quality of a topic model, a complex procedure was developed based on topic coherence calculating and involving some extra criteria. It demonstrated better effectiveness in soft clustering of a text collection, than evaluating a topic model by the metrics of its average coherence.

Keywords: topic modeling; topic coherence; soft clustering; text analysis; ARTM.

KRASNOV Fedor Vladimirovich (Candidate of Technical Sciences, Expert, Researcher, Department of Information Management Systems, NAUMEN R&D, Yekaterinburg, Russian Federation).

E-mail: fkrasnov@naumen.ru

BASKAKOVA Elena Nikolaevna (Leading System Analyst, Department of Information Management Systems, NAUMEN R&D, Yekaterinburg, Russian Federation).

E-mail: enbaskakova@naumen.ru

SMASNEVICH Irina Sergeevna (Business Analyst, Department of Information Management Systems, NAUMEN R&D, Yekaterinburg, Russian Federation).

E-mail: ismaznevich@naumen.ru

REFERENCES

1. Rubin, T.N., Chambers, A., Smyth, P. & Steyvers, M. (2012) Statistical topic models for multi-label document classification. *Machine Learning*. 88(1-2). pp. 157–208. DOI: 10.1007/s10994-011-5272-5
2. Yanina, A. & Vorontsov, K. (2016) Multimodal topic models for exploratory search in a collective blog. *Mashinnoe obuchenie i analiz dannykh – Machine Learning and Data Analysis*. 2(2). pp. 173–186. DOI: 10.21469/22233792.2.2.04
3. Litvak, M., Vanetik, N., Liu, C., Xiao, L. & Savas, O. (2015) Improving summarization quality with topic modeling. *Proceedings of the 2015 Workshop on Topic Models: Post-Processing and Applications*. pp. 39–47. DOI: 10.1145/2809936.2809944
4. Zhang, J., Song, Y., Zhang, C. & Liu, S. (2010) Evolutionary hierarchical dirichlet processes for multiple correlated time-varying corpora. *Proceedings of the 16th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. pp. 1079–1088. DOI: 10.1145/1835804.1835940
5. Ni, X., Sun, J. T., Hu, J. & Chen, Z. (2009) Mining multilingual topics from Wikipedia. *Proceedings of the 18th International Conference on World Wide Web*. pp. 1155–1156. DOI: 10.1145/1526709.1526904
6. Hoffmann, T. (1999) Probabilistic latent semantic indexing. *Proceedings of the 22nd Annual International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval*. New York, NY, USA: ACM. pp. 50–57.
7. Vayansky, I. & Kumar, S.A.P. (2020) A review of topic modeling methods. *Information Systems*. 94. pp. 101–582. DOI: 10.1016/j.is.2020.101582
8. Blei, D.M., Ng, A.Y. & Jordan, M.I. (2003) Latent dirichlet allocation. *Journal of Machine Learning Research*. 3(1). pp. 993–1022.
9. Vorontsov, K. (2014) Additive regularization for topic models of text collections. *Doklady Mathematics*. 89(3). pp. 301–304. DOI: 10.1007/s10994-014-5476-6
10. Vorontsov, K., Frei, O., Apishev, M., Romov, P. & Dudarenko, M. (2015) BigARTM: Open source library for regularized multimodal topic modeling of large collections. *International Conference on Analysis of Images, Social Networks and Texts*. Springer, Cham. pp. 370–381.

11. Krasnashchok, K. & Jouili, S. (2018) Improving topic quality by promoting named entities in topic modeling. *Proceedings of the 56th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (vol. 2: Short Papers)*. pp. 247–253. DOI: 10.18653/v1/P18-2040
12. Omar, M. et al. (2015) LDA topics: Representation and evaluation. *Journal of Information Science*. 41(5). pp. 662–675. DOI: 10.1177/0165551515587839
13. Bhatia, S., Lau, J.H. & Baldwin, T. (2017) An automatic approach for document-level topic model evaluation. *ArXiv preprint arXiv:1706.05140*. [Online] Available from: <https://arxiv.org/pdf/1706.05140.pdf>
14. Newman, D., Noh, Y., Talley, E., Karimi, S. & Baldwin, T. (2010) Evaluating topic models for digital libraries. *Proceedings of the 10th annual joint conference on Digital libraries*. pp. 215–224. DOI: 10.1145/1816123.1816156
15. Lau, J.H., Newman, D. & Baldwin, T. (2014) Machine reading tea leaves: Automatically evaluating topic coherence and topic model quality. *Proceedings of the 14th Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics*. pp. 530–539. DOI: 10.3115/v1/E14-1056
16. Mimno, D., Wallach, H., Talley, E., Leenders, M. & McCallum, A. (2011) Optimizing semantic coherence in topic models. *Proceedings of the 2011 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing*. pp. 262–272.
17. Aletras, N. & Stevenson, M. (2013) Evaluating topic coherence using distributional semantics. *Proceedings of the 10th International Conference on Computational Semantics (IWCS 2013)–Long Papers*. pp. 13–22.
18. Lau, J.H. & Baldwin, T. (2016) The sensitivity of topic coherence evaluation to topic cardinality. *Proceedings of the 2016 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies*. pp. 483–487. DOI: 10.18653/v1/N16-1057
19. Röder, M., Both, A. & Hinneburg, A. (2015) Exploring the space of topic coherence measures. *Proceedings of the eighth ACM international conference on Web search and data mining*. pp. 399–408. DOI: 10.1145/2684822.2685324
20. Bezdek, J.C. (1973) Cluster validity with fuzzy sets. *Journal of Cybernetics*. 3(3). pp. 58–73. DOI: 10.1080/01969727308546047
21. Dunn, J.C. (1974) Well-separated clusters and optimal fuzzy partitions. *Journal of Cybernetics*. 4(1). pp. 95–104. DOI: 10.1080/01969727408546059
22. Davies, D.L. & Bouldin, D.W. (1979) A cluster separation measure. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*. 2. pp. 224–227.
23. Halkidi, M., Batistakis, Y. & Vazirgiannis, M. (2002) Clustering validity checking methods: part II. *ACM Sigmod Record*. 31(3). pp. 19–27. DOI: 10.1145/601858.601862
24. Xie, X.L. & Beni, G. (1991) A validity measure for fuzzy clustering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence*. 8. pp. 841–847. DOI: 10.1109/34.85677
25. Krasnov, F. (2019) Evaluation of Optimal Number of Topics of Topic Model: An Approach Based on the Quality of Clusters. *International Journal of Open Information Technologies*. 7(2). pp. 8–15.
26. Rousseeuw, P.J. (1987) Silhouettes a graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 20. pp. 53–65. DOI: 10.1016/0377-0427(87)90125-7
27. Newman, D., Lau, J.H., Grieser, K. & Baldwin, T. (2010) Automatic evaluation of topic coherence. *Human Language Technologies: The 2010 Annual Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics*. pp. 100–108.
28. Bouma, G. (2009) Normalized (pointwise) mutual information in collocation extraction. *Proceedings of GSCL*. pp. 31–40.
29. O’Callaghan, D., Greene, D., Carthy, J. & Cunningham, P. (2015) An analysis of the coherence of descriptors in topic modeling. *Expert Systems with Applications*. 42(13). pp. 5645–5657. DOI: 10.1016/j.eswa.2015.02.055
30. Syed, S. & Spruit, M. (2017) Full-text or abstract? Examining topic coherence scores using latent dirichlet allocation. *2017 IEEE International Conference on Data Science and Advanced Analytics (DSAA)*. IEEE. pp. 165–174. DOI: 10.1109/DSAA.2017.61
31. Nikolenko, S., Koltsova, O. & Koltsov, S. (2017) Topic modelling for qualitative studies. *Journal of Information Science*. 43(1). pp. 88–102. DOI: 10.1177/0165551515617393
32. Shavrina, T. & Shapovalova, O. (2017) To the Methodology of Corpus Construction for Machine Learning: “Taiga” Syntax Tree Corpus and Parser. *Korpusnaya lingvistika [Corpus linguistics]*. Proc. of the International Conference. pp. 78–84.

УДК 519.7:004.738
DOI: 10.17223/19988605/56/12

А.А. Печников

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НАУКОМЕТРИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЖУРНАЛОВ MATH-NET.RU И ELIBRARY.RU

Для верификации официальных показателей научной результативности предлагается использовать интернет-площадки, объединяющие ученых в конкретной области знаний. Подход продемонстрирован для показателей журналов по математике eLibrary.ru и Math-Net.ru. Из нескольких рейтинговых оценок eLibrary.ru определена оценка, которая наилучшим образом соответствует показателям значимости в Math-Net.ru, тем самым давая инструментальное обоснование такого ранжирования в eLibrary.ru.

Ключевые слова: наукометрия; граф цитирования журналов; рейтинговые показатели; коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

Сегодня научный уровень журнала, подтвержденный высоким значением некоторого «импакт-фактора», признанного государственными органами управления наукой как показатель результативности научной деятельности, прямо или косвенно определяет зарплаты, стимулирующие надбавки, карьерный рост и возможность получения грантов для большинства ученых. Как правило, в России и других странах используется «...семейство “импакт-факторов” (двухлетний и пятилетний импакт-фактор, различные их модификации), индекс Херфиндаля, а также многочисленные комбинации этих индикаторов, включая композитный Science Index» [1]. Вопрос о том, кому нужны институализированные методы формальной оценки результатов научной деятельности, рассмотрен в работе [2], где указаны четыре заинтересованных субъекта: государство в лице чиновников от науки, руководители научных организаций, организации и исследователи, специализирующиеся в области наукометрии, систематизации и распространения научной информации, и сами ученые. Причины заинтересованности у этих субъектов различные. Руководителям приходится заниматься оценкой индивидуальных и коллективных результатов подчиненных. Ученым «...например, вникая в новую для себя предметную область, полезно иметь в качестве ориентиров “объективные” характеристики приоритетов и трендов в этой области» [2]. Отмечается, что использование механизмов формальной оценки научной деятельности необходимо «...в сочетании с экспертизой в каком-то варианте» [2].

Об этом же говорится и в работе [3]: «...сопоставление научных журналов, основанное на наукометрических показателях, должно обязательно подтверждаться экспертной оценкой». В работе [4], посвященной системе Web of Science, указывается на «...необходимость привлечения экспертных групп в целях обеспечения полноты оценки научной деятельности».

В статье [5] вопрос об экспертных оценках ставится еще более жестко: «...я вообще не уверен, что существующее интуитивное знание, формирующее мнение экспертного сообщества о российских экономических журналах, нужно замещать какими-то формальными рейтингами».

Следует учитывать, что сама процедура коллективной экспертной оценки (чего бы то ни было) является очень непростой, зачастую трудоемкой и затратной. Например, тот или иной принцип подбора экспертов или алгоритм определения результирующих экспертных оценок зачастую вызывают не меньшие дискуссии (в любой области человеческой деятельности), чем импакт-факторы, используемые «государством в лице чиновников от науки». Примером такой работы (и дискуссий) является экспертная оценка качества российских научных журналов с целью выделения лучших журналов в РИНЦ и размещения их в базе данных Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science [6].

В данной работе мы поставим вопрос несколько иначе. В качестве основы для экспертной оценки официальных показателей предлагается использовать уже имеющиеся интернет-площадки, неформально и добровольно объединяющие ученых в некоторой области знаний и обладающие достаточно большим объемом информации о публикациях и цитированиях по данной теме. Если у нас есть официальные показатели результативности научной деятельности и некая интернет-площадка, то основной вопрос заключается в том, может ли она служить средством для верификации показателей, признанных органами управления наукой?

Для математических наук в России в качестве такой интернет-площадки был взят Общероссийский математический портал Math-Net.ru (<http://www.mathnet.ru>), который начинался в 2006 г. как инновационный проект Математического института им. В.А. Стеклова РАН. В настоящее время он является известным веб-ресурсом, предоставляющим российским и зарубежным математикам большие возможности в поиске информации о математической жизни в России.

Портал Math-Net.ru был выбран как объект исследования несколькими причинами. Первая из них заключается в том, что в Math-Net.ru каждому автору статьи присваивается уникальный идентификатор базы данных [7], что позволяет находить список его публикаций по коду, а не поиском по фамилии, как в некоторых других библиографических ресурсах. Это обеспечивает высокую достоверность построенных моделей.

Вторая причина заключается в том, что журналы Math-Net.ru составляют большую (и наиболее значимую) часть журналов по математике, имеющих ненулевой рейтинг Science Index Научной электронной библиотеки eLibrary.ru.

Кроме этого, в работе мы показываем с использованием индекса Херфиндаля, что журналы Math-Net.ru обладают двумя очень важными, на наш взгляд, свойствами, характеризующими высокую репутацию данного ресурса: отсутствие монополизации статей и ссылок.

Индекс Херфиндаля (HNI), точнее, индекс Херфиндаля–Хиршмана [8], используемый, например, при корректировке Science Index в eLibrary.ru [9], является экономическим показателем оценки степени монополизации отрасли. В eLibrary.ru этот показатель служит для оценки распределения ссылок на статьи из данного журнала, опубликованные в других журналах. Мы будем рассматривать его в несколько ином качестве для определения степени концентрации распределения статей и ссылок между журналами. Используем определение индекса HNI применительно к концентрации распределения публикаций между странами [10]. Пусть n – общее количество стран, а $S_1, S_2, \dots, S_n$ – отношение количества публикаций страны i ($i \in 1 \dots n$) к общему количеству публикаций. Тогда

$$HNI = S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_n^2. \quad (1)$$

Значение HNI выше 0,25 указывает на высокую концентрацию, между 0,15 и 0,25 – на умеренную, ниже 0,15 – просто на концентрацию, а ниже 0,1 – уже на высокую конкуренцию [11].

В экономике результат расчета индекса HNI часто дополняется коэффициентом концентрации конкуренции CR . Пусть D_i – доля продаж i -го продавца в объеме реализации рынка. Упорядочим фирмы по убыванию объема продаж и зафиксируем первые k из них (как правило, этот показатель рассчитывается для трех-четырех крупнейших продавцов). Тогда

$$CR_k = D_1 + D_2 + \dots + D_k. \quad (2)$$

Далее с использованием HNI и CR_k определяется несколько типов рынка. Часто используется случай $k = 3$ [12]:

- 1) высококонцентрированный: $0,7 < CR_3 \leq 1$ и $0,2 < HNI \leq 1$;
- 2) умеренно концентрированный: $0,45 < CR_3 \leq 0,7$ и $0,1 < HNI \leq 0,2$;
- 3) низкоконтрированный: $CR_3 \leq 0,45$ и $HNI \leq 0,1$.

Далее с использованием индекса HNI и коэффициента CR показано отсутствие монополизации статей и ссылок в Math-Net.ru.

Был построен граф цитирования журналов для Math-Net.ru, позволяющий вычислить такие формальные характеристики вершин графа, как PageRank и собственный вектор центральности, и принять их в качестве показателей значимости журналов. Для eLibrary.ru с помощью предоставлен-

ных ресурсом возможностей получены такие показатели этих же журналов, как ScienceIndex и средняя оценка по результатам общественной экспертизы.

Для тех и других показателей выполнен анализ корреляционных связей, показывающий сильную положительную статистическую взаимосвязь для ряда из них, что позволяет сделать вывод о возможности использования данных Math-Net.Ru для верификации некоторых показателей eLibrary.ru в области математики.

1. Данные Math-Net.Ru

Информационная система Math-Net.ru индексирует списки литературы и хранит их в базе данных в структурированном виде [7]. Списки литературы всех публикаций объединены в одну таблицу базы данных Microsoft SQL, в которой в отдельных колонках хранятся данные об авторе, названии, годе, томе, страницах цитируемой публикации. Каждой индивидуальной ссылке соответствует одна запись в таблице. Такой подход, в частности, позволяет с помощью запроса сформировать требуемую нам базу данных цитирования журналов с записями вида:

<цитирующий журнал> <цитирующая статья> <цитируемый журнал> <цитируемая статья>.

Данные о статьях, в свою очередь, имеют поля, позволяющие точно идентифицировать список авторов, название, год, страницы и т.д. База на дату исследования содержит более 264 тысяч записей, в которых цитирующие статьи датируются с 1936 по 2019, а цитируемые – с 1866 по 2019 гг. Около 90 тысяч записей относятся к случаям «журнального самоцитирования», когда в статье, опубликованной в некотором журнале, цитируется статья, ранее опубликованная в этом же журнале. В [13] утверждается, что самоцитирование журналов требует исключения из индексов цитирования. Мы считаем, что самоцитирование журналов, как и самоцитирование авторов, является особой формой публикационной научной коммуникации и требует внимательного изучения, но это выходит за рамки данной работы. Здесь мы ограничились изучением случая без самоцитирования.

Таким образом, в выборке из базы цитирования были оставлены только записи, содержащие статьи, которые цитируют и / или которые цитируются в статьях других журналов, входящих в Math-Net.ru. Выборка содержит 114 678 статей, опубликованных в 180 журналах. Общее количество сделанных между ними ссылок превышает 173 тысячи. При этом 106 журналов имеют как входящие, так и исходящие ссылки, 7 журналов не имеют исходящих ссылок, а 67 – входящих.

Из 180 рассматриваемых журналов, проиндексированных в Math-Net.ru, по классификации eLibrary.ru более 85% относится к тематике «математика», а остальные к тематикам «информатика», «кибернетика» и «автоматика и вычислительная техника». Ряд журналов относится сразу к нескольким из этих тематик.

Из 86 журналов, имевших в 2018 г. ненулевой показатель Science Index в eLibrary.ru, 59 входят в Math-Net.ru. В первую десятку с наибольшим Science Index по тематике «математика» входят 9 журналов Math-Net.ru, а в первые 50 журналов входят 46 из них.

В табл. 1 приводится выборка из общего списка для первой восьмерки и двух последних журналов. Здесь представлены показатели количества статей, количества цитирований, сделанных на другие журналы, и количества цитирований данного журнала; журналы упорядочены по убыванию количества статей.

Далее проводим вычисления по формуле (1), полагая для журналов Math-Net.ru в качестве S_i количество статей в i -м журнале, $n = 1 \dots 180$, и получаем $HNI = 0,030$, что не только является признаком отсутствия концентрации, но и указывает на высокую конкуренцию.

Для вычислений по формуле (2) считаем, что D_i – это доля статей i -го журнала в общем количестве статей в Math-Net.ru. Три крупнейших по публикациям журнала («Математические заметки», «Теоретическая и математическая физика» и «Доклады Академии наук») дают в сумме 19 948 статей, откуда $CR_3 = 0,174$. Это позволяет сделать вывод о низкой концентрации публикаций в Math-Net.ru.

Таблица 1

Показатели количества статей и цитируемости для некоторых журналов Math-Net.Ru

n	Название журнала	Количество статей (S_i)	Количество цитирований других журналов	Количество цитирований журнала
1	Математические заметки	7 033	11 198	11 814
2	Теоретическая и математическая физика	6 495	7 506	3 823
3	Журнал вычислительной математики и математической физики	6 418	7 134	6 775
4	Успехи математических наук	5 795	20 875	15 260
5	Математический сборник	5 678	14 406	17 329
6	Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики	4 036	1 966	1 617
7	Известия высших учебных заведений. Математика	4 023	5 485	5 391
8	Известия Российской академии наук. Серия математическая	3 551	11 423	10 196
	...	...	...	...
179	Theory of Stochastic Processes	99	1	197
180	Вестник российских университетов. Математика	16	2	48

С использованием формул (1), (2) был исследован вопрос о концентрации ссылок. Пусть в формуле (1) S_i – количество ссылок, сделанных на статьи, опубликованные в i -м журнале. Получаем $CR_3 = 0,294$, а $HNI = 0,0514$.

Если же принять S_i как количество ссылок, сделанных со статей, опубликованных в i -м журнале, то получаем $CR_3 = 0,268$, а $HNI = 0,041$.

Концентрации ссылок не наблюдается ни в том ни в другом случае, скорее, если ориентироваться только на HNI , можно даже говорить об определенной конкуренции журналов (хотя содержательная трактовка конкуренции в этом случае затруднительна).

Таким образом, множество журналов Math-Net.ru, занимающих в eLibrary.ru самые высокие позиции в своей области, не является монополизированным ни по количеству статей, ни по количеству взаимных ссылок между журналами.

2. Граф цитирования журналов Math-Net.ru и его характеристики

Естественным способом моделирования связей между журналами является его представление в виде ориентированного графа, в котором журналы соответствуют вершинам, а отношения цитирования – дугам [14].

Обозначим граф цитирования журналов Math-Net.ru как $G_{cj}(M, E, W)$, где M – множество вершин, соответствующих журналам, E – множество (направленных) дуг, связывающих пары вершин $(i, j) \in M$, если существует хотя бы одна ссылка со статьи из журнала i на статью в журнале j , W – множество весов дуг. Вес дуги $(i, j) \in M$ равен количеству ссылок, сделанных статьями из журнала i на статьи журнала j . Соответствующие выборки из базы данных цитирования позволяют:

1) сформировать множество M и связанный с ним массив журналов, цитируемых и / или цитирующих журналы из Math-Net.ru (без учета самоцитирования), содержащий идентификаторы и названия 180 журналов, $|M| = 180$;

2) построить множество E , содержащее 4 751 дугу;

3) построить множество W , в котором наименьший вес дуги равен 1, а наибольший – 4 114.

Связность графа G_{cj} очевидна по построению. Максимальная компонента сильной связности одержит 106 вершин. Остальные 74 вершины являются висячими, т.е. содержат только входящие или только исходящие дуги, причем 7 из них не имеют входящих дуг, а 67 – исходящих.

Отсутствие исходящих дуг в графе во всех случаях имеет содержательное объяснение и не всегда касается только реального отсутствия ссылок с этих журналов на другие журналы Math-Net.ru.

В ряде случаев журналы не зарегистрированы на портале, и поэтому ссылки с них не проиндексированы в системе. Есть случаи, связанные с техническими проблемами, когда пристатейные списки невозможно обработать автоматически, как в случае «Докладов Академии наук». Есть и содержательные объяснения: например, журнал «Успехи химии», зарегистрированный на портале, имеет более 500 входящих ссылок и ни одной исходящей. Можно предположить, что работы «на стыке» математики и химии чаще публикуются в математических журналах, чем в специализированном журнале по химии, с чем и связан такой дисбаланс.

Исключим из рассмотрения висячие вершины и построим граф G_{cj}^{SCC} , равный максимальной компоненте сильной связности графа G_{cj} . Он содержит 106 вершин и 3 956 дуг, веса которых находятся в интервале от 1 до 3 538. Диаметр графа равен 4, средняя длина пути 1,702. Плотность графа (по дугам, без учета их весов) равна 0,355. Распределение степеней вершин ближе к линейному, чем к степенному [15]. Если рассматривать взвешенные степени вершин с учетом веса дуг, то в результате аппроксимации получаем степенное распределение с показателем, равным 1,53.

Все эти характеристики отличают G_{cj}^{SCC} от известных моделей случайных графов, например от модели Барабаши–Альберт [16], основанной на принципе предпочтительного присоединения, когда с новой вершины ссылки преимущественно делаются на вершины, уже имеющие много ссылок. Поэтому принцип предпочтительного присоединения в качестве объяснения появления ссылок не может рассматриваться в данном случае. Этот результат косвенно подтверждает отсутствие в Math-Net.ru эффекта монополизации ссылок, показанного ранее.

Значимость вершин для ориентированного графа можно определить различными способами, и каждый из них требует содержательной интерпретации. Оценка PageRank (PR) дает возможность сравнить относительную «важность» вершин графа по аналогии с важностью веб-страниц [17]. Содержательная интерпретация значимости вершин по PR в графе G_{cj}^{SCC} может быть следующей: если представить себе некоего «ученого-серфера», бесконечное число раз перемещающегося от одного журнала к другому по пристатейным ссылкам, то с наибольшей вероятностью он будет попадать на журнал с наибольшим значением PR . Например, вероятность попадания «серфера» на «Математический сборник» в 75 раз больше, чем на журнал с наименьшим PR в нашем графе.

Таблица 2

Значения PR и EC для некоторых журналов Math-Net.ru, входящих в G_{cj}^{SCC}

Название журнала	PR	EC
Математические заметки	0,979	0,072
Теоретическая и математическая физика	0,874	0,025
Журнал вычислительной математики и математической физики	0,973	0,035
Успехи математических наук	1,000	0,106
Математический сборник	0,994	0,107
Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики	0,554	0,018
Известия высших учебных заведений. Математика	0,959	0,029
Известия Российской академии наук. Серия математическая	0,973	0,075
...	...	...
Вестник российских университетов. Математика	0,018	0,001
Theory of Stochastic Processes	0,013	0,001

Значимость вершин может быть определена и как степень их влиятельности с использованием собственного вектора центральности – Eigenvector Centrality (EC) [18]. Высокая степень влиятельности вершины в графе G_{cj}^{SCC} означает, что журнал связан со многими журналами, также имеющими высокие степени влиятельности. В табл. 2 приведены значения PR и EC для журналов из табл. 1.

3. Показатели журналов в eLibrary.ru

Научная электронная библиотека eLibrary.ru представляет собой гигантское хранилище электронной информации о 12 миллионах публикаций российских авторов, а также о цитировании этих публикаций для более чем 6 000 российских журналов.

Как уже было сказано, несмотря на кажущуюся малочисленность, рассматриваемые в статье журналы Math-Net.ru по математике занимают здесь существенное место. Значительно меньшее представительство журналов Math-Net.ru – всего 17 из 180 – наблюдается по тематикам «автоматика и вычислительная техника», «информатика» и «кибернетика»: от 12 до 15% с низким представительством в первой десятке (от 1 до 3 журналов). При этом 9 из указанных 17 журналов позиционируют себя и по тематике «математика». Отметим для полноты картины, что среди 180 журналов Math-Net.ru есть еще 6 журналов по тематике «физика» и 2 многопрофильных журнала, которые формально не относятся к широкому направлению «математика, компьютерные и информационные науки».

Для последующего сравнения и анализа с полученными ранее значениями *PR* и *CE* журналов Math-Net.ru было выбрано два показателя журналов eLibrary.ru: показатель в рейтинге Science Index (*SI*) и средняя оценка по результатам общественной экспертизы (*PEX*).

Методика расчета *SI* описана в [9], основой для ее расчета является пятилетний импакт-фактор с поправками на принадлежность журнала не более чем к трем из десяти предложенных направлений рубрикатора. Кроме того, делается корректировка результатов с учетом индекса Херфиндаля–Хиршмана. Процедура экспертной оценки качества российских научных журналов описана в [6].

Для сбора данных использовались базовые возможности eLibrary.ru, в частности раздел «Сравнение библиометрических показателей российских научных журналов» (https://elibrary.ru/titles_compare.asp) с соответствующей настройкой параметров (тематика, показатель *SI* или *PEX* и 2018 г.). По некоторым журналам, отсутствующим в соответствующих выборках, выполнялись поиск по наименованию и просмотр данных об их публикационной активности. В табл. 3 приводятся значения *SI* и *PEX* для журналов из табл. 1.

Таблица 3

Значения *SI* и *PEX* для некоторых журналов Math-Net.ru

Название журнала	<i>SI</i>	<i>PEX</i>
Математические заметки	3,098	3,807
Теоретическая и математическая физика	1,480	3,683
Журнал вычислительной математики и математической физики	4,022	3,817
Успехи математических наук	7,696	3,888
Математический сборник	3,529	3,888
Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики	3,953	3,918
Известия высших учебных заведений. Математика	2,058	3,249
Известия Российской академии наук. Серия математическая	4,321	3,871
...	...	...
Theory of Stochastic Processes	0	0
Вестник российских университетов. Математика	0	0

Первоначально полная таблица значений *SI* и *PEX* журналов Math-Net.ru была сформирована для всех 180 журналов, но затем она была подвергнута следующим корректировкам:

1. Из таблицы были удалены все журналы, которые не вошли в граф G_{cj}^{SCC} , поскольку далее предполагается сравнение показателей *SI* и *PEX* с показателями *EC* и *PR*, которые вычислены именно для этого графа. Осталось 106 журналов.

2. Удалено 6 журналов, относящихся по терминологии eLibrary.ru к тематике «физика», а значит, имеющих другие критерии оценки *SI* и *PEX*, нежели журналы по математике. Осталось 100 журналов.

3. Удалено 8 зарубежных журналов, поскольку они имеют нулевые показатели *SI* и *PEX*. Осталось 92 журнала.

4. Удалено 27 российских журналов, не имеющих оценок показателя *SI*. Осталось 65 журналов.

Проверка выборок *SI* и *PEX* на нормальность распределения результатов дает отрицательный ответ, то же самое можно сказать и о распределении показателей *CE* и *PR*. Наиболее близкое к нормальному распределению показывает *PEX* – со средним значением 2,8 и дисперсией 0,57. Показатель *CE* имеет ярко выраженное равномерное распределение со средним значением 0,5 и дисперсией 0,08.

4. Статистическая взаимосвязь показателей Math-Net.ru и eLibrary.ru

Коэффициенты ранговой корреляции, в отличие от традиционного коэффициента линейной корреляции Пирсона, позволяют успешно обнаруживать нелинейные зависимости, не требуют предположения о нормальном распределении выборки и более устойчивы к ошибкам измерения в реальных данных [19]. Поэтому для анализа корреляционных связей показателей *PR*, *EC*, с одной стороны, и *SI*, *PEX* – с другой, был использован ранговый коэффициент Спирмена.

В основу метода положен принцип нумерации значений статистического ряда. Каждому элементу совокупности присваивается порядковый номер в ряду, который упорядочен по уровню признака (например, по убыванию). Таким образом, ряд значений признака ранжируется, а номер каждого элемента будет его рангом. Пусть n – количество наблюдаемых значений признака, x_i – ранг i -го элемента первого статистического ряда, y_i – ранг i -го элемента второго статистического ряда, а d_i – разность между рангами.

Тогда ранговый коэффициент Спирмена равен

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}.$$

Коэффициент ρ принимает значения от -1 (строго обратная связь) до $+1$ (строго прямая связь), 0 показывает, что признаки независимы. Чем ближе $|\rho|$ к единице, тем более сильной является связь между измеряемыми величинами. Связь принято считать сильной, если $|\rho| \geq 0,7$, средней силы – для $0,5 < |\rho| \leq 0,69$. Критические значения α для рангового коэффициента Спирмена определяются из соответствующей таблицы, например [20].

В нашем случае коэффициент Спирмена был вычислен для пар переменных $\rho(PR, SI)$, $\rho(PR, PEX)$, $\rho(EC, SI)$ и $\rho(EC, PEX)$, а результаты сведены в табл. 4.

Таблица 4

Значения коэффициента Спирмена

ρ	<i>SI</i>	<i>PEX</i>
<i>EC</i>	0,665	0,661
<i>PR</i>	0,696	0,760

Как видно из табл. 4, наибольшее значение имеет коэффициент $\rho(PR, PEX)$, что свидетельствует о сильной положительной статистической взаимосвязи результатов, полученных для оценки PageRank в Math-Net.ru и средней оценки по результатам общественной экспертизы eLibrary.ru.

Положительная статистическая взаимосвязь средней силы наблюдается и для остальных трех случаев. Заметим также, что взаимосвязи *EC* с *SI* и *PEX* несколько ниже, чем те же взаимосвязи для *PR*.

Заключение

Основной вопрос исследования заключался в том, может ли интернет-площадка, объединяющая ученых в некоторой области знаний, и сопутствующая этому объединению база публикаций в значимых журналах по данной теме служить основой для верификации наукометрических показателей, признанных органами управления наукой? В более узкой постановке этот же вопрос формулируется так: насколько показатели журналов, получаемые с помощью данных математического портала Math-Net.ru, соответствуют наукометрическим показателям Научной библиотеки eLibrary.ru.

Работа основана на анализе взаимоцитирования множества из 180 журналов Math-Net.ru, содержащего в себе ядро из 59 ведущих математических журналов России в области фундаментальной и прикладной математики, подтверждаемое также их высокими позициями в eLibrary.ru. Определение степени концентрации распределения статей и ссылок между журналами в Math-Net.ru с помощью индекса Херфиндаля–Хиршмана показало отсутствие концентрации как таковой, т.е. журналы, обладающие малыми «долями» в общем количестве статей и ссылок на них, занимают важное место.

В качестве показателей значимости журналов Math-Net.ru были вычислены PageRank и собственный вектор центральности. Соответственно, из eLibrary.ru для этих же журналов были получены ScienceIndex и средняя оценка по результатам общественной экспертизы.

Было проверено наличие статистической связи между показателями значимости Math-Net.ru и показателями eLibrary.ru, показавшими сильную положительную статистическую взаимосвязь PageRank и средней оценки по результатам общественной экспертизы.

Результаты выполненного исследования позволяют сделать два основных вывода:

1) использование данных математического портала Math-Net.ru дают возможность из нескольких рейтинговых оценок eLibrary.ru определить такую оценку, которая наилучшим образом соответствует показателям значимости Math-Net.ru, давая инструментальное обоснование такого ранжирования в eLibrary.ru;

2) поскольку в качестве наилучшей рейтинговой оценки eLibrary.ru выявлена средняя оценка по результатам общественной экспертизы, можно говорить о ее определенной успешности, подкрепляемой сравнением с ранжированием в Math-Net.ru.

Благодарности. Автор выражает благодарность всем разработчикам проекта Math-Net.ru и Дмитрию Евгеньевичу Чебукову, заведующему информационно-издательским сектором Математического института им. В.А. Стеклова РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубинштейн А.Я., Слуцкий Л.Н. «Multiway data analysis» и общая задача ранжирования журналов // Прикладная экономика. 2018. Т. 50. С. 90–113.
2. Новиков Д.А. Померяемся «Хиршами»? (размышления о наукометрии) // Высшее образование в России. 2015. № 2. С. 5–13.
3. Третьякова О.В. К вопросу об импакт-факторе научного журнала и методиках его формирования // Вопросы территориального развития. 2014. № 5 (15). URL: <http://vtr.isert-ran.ru/article/1412>
4. Мельникова Е.В. Современное состояние системы индексации и цитирования Web of Science: базы данных, индексы // Территория новых возможностей. Вестник Владивостокского государственного университета экономики и сервиса. 2018. Т. 10, № 1 (40). С. 93–101.
5. Рубинштейн А.Я. Ранжирование российских экономических журналов: научный метод или «игра в цифры»? // Журнал Новой экономической ассоциации. 2016. № 2 (30). С. 162–175.
6. Экспертная оценка качества российских научных журналов. URL: https://www.elibrary.ru/expert_titles_terms.asp (дата обращения: 12.01.2021).
7. Chebukov D., Izaak A., Misyurina O., Pupyrev Yu., Zhizhchenko A. Math-Net.Ru as a digital archive of the Russian mathematical knowledge from the XIX century to today // Lecture Notes in Comput. Sci. 2013. V. 7961. P. 344–348.
8. Hirschman A.O. The Paternity of an Index // Am. Econ. Rev. 1964. № 54 (5). P. 761–762.
9. Методика расчета интегрального показателя научного журнала в рейтинге ScienceIndex. URL: elibrary.ru/help_title_rating.asp (дата обращения: 08.01.2021).
10. Chen D.Z., Lee Y.Y. Longitudinal analysis of mechanism and machine theory: Geospatial productivity, journal citation networks, and researcher communities // Journal of Mechanical Design. 2016. V. 138, № 3. DOI: 10.1115/1.4032397
11. Horizontal Merger Guidelines // U.S. Department of Justice and Federal Trade Commission. 2010. URL: www.ftc.gov/sites/default/files/attachments/merger-review/100819hmg.pdf (accessed: 08.01.2021).
12. Коцопана Т.В., Стажкова П.С. Сравнительный анализ применения показателей концентрации на примере банковского сектора РФ // Вестник СПбГУ. Сер. 5. Экономика. 2011. № 4. С. 30–40.
13. Heneberg P. From Excessive Journal Self-Cites to Citation Stacking: Analysis of Journal Self-Citation Kinetics in Search for Journals, Which Boost Their Scientometric Indicators // PLoS ONE. 2016. № 11 (4). e0153730. DOI: 10.1371/journal.pone.0153730
14. Бредихин С.В., Ляпунов В.М., Щербакова Н.Г. Структура сети цитирования научных журналов // Проблемы информатики. 2017. № 2 (35). С. 38–52.
15. Newman M.E.J. Power laws, Pareto distributions and Zipf's law // Contemporary Physics. 2005. V. 46, № 5. P. 323–351.
16. Barabasi L.-A., Albert R., Jeong H. Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide web // Physica. 2000. V. A281. P. 69–77.
17. Brin S., Page L. The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine // Computer Networks and ISDN Systems. 1998. № 30. P. 107–117.
18. Щербакова Н.Г. Аксиоматика центральности в комплексных сетях // Проблемы информатики. 2015. № 3 (28). С. 3–14.
19. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Теория вероятностей и прикладная статистика. 2-е изд. М. : Юнити, 2001. 656 с.
20. Critical Values of the Spearman's Ranked Correlation Coefficient. URL: ru.scribd.com/document/392256411/TABEL-RANK-SPEARMAN-spearman-ranked-correlation-table-docx (accessed: 11.01.2021).

Pechnikov A.A. (2021) COMPARATIVE ANALYSIS OF SCIENTOMETRICS INDICATORS OF JOURNALS MATH-NET.RU AND ELIBRARY.RU. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 56. pp. 112–121

DOI: 10.17223/19988605/56/12

The formal performance indicators of scientific activity, recognized by science governing bodies, directly or indirectly determine salaries, incentives, career advancement and grant opportunities for most scientists. Despite constant criticism against the governing bodies, it is they who approve these indicators, while other stakeholders (heads of institutes, universities and foundations, scientists themselves) are forced to agree with these indicators, and even adapt to them.

In Russia and other countries, a family of impact factors is used as indicators. They are formed on the basis of data obtained from large online platforms that take into account mutual citation of papers. Moreover, most researchers dealing with this problem agree that assessments of the activities of organizations, scientific journals and scientists themselves, based on scientometric indicators, must be confirmed by expert evaluations. Note that the collective expert evaluation procedure itself is very complicated, often time-consuming and costly, and is also subject to criticism.

As a basis for expert evaluation of official indicators, this paper proposes the use of existing Internet platforms, informally and voluntarily uniting scientists in a specific field of knowledge and possessing a sufficiently large amount of information on papers and citations on a given topic. If we have official performance indicators of scientific activities and a certain Internet platform, then the main question becomes, can such platform serve as a means for verifying indicators recognized by science governing bodies?

This approach is demonstrated by comparing the indicators of scientific journals in the field of mathematics and some areas of its application. The Science Index and the average score based on public examination conducted by scientific e-library eLIBRARY.RU served as official indicators. The features of All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru were used to form an expert assessment.

It is shown that Math-Net.Ru journals make up a significant part of mathematics journals in eLIBRARY.RU. Moreover, many Math-Net.Ru journals have such important properties as absence of monopolization of articles and references in Math-Net.Ru, which is behind the high reputation of this online resource.

For the constructed citation graph of Math-Net.Ru journals, indicators such as Page Rank and eigenvector centrality, measuring the significance of vertices, corresponding to the journals in the graph, were calculated.

Further, Spearman's rank correlation coefficient was used to analyze the correlation between Math-Net.Ru indicators and eLIBRARY.RU indicators. It showed that Page Rank in Math-Net.Ru has a strong positive statistical correlation with the average score obtained from public examination conducted by eLIBRARY.RU.

The outcome of the research suggests that the use of data obtained from mathematical portal Math-Net.Ru allows to determine (from several eLIBRARY.RU rankings) such an assessment that best matches the significance indicators in Math-Net.Ru, thereby providing an instrumental justification for such eLIBRARY.RU ranking.

Keywords: scientometrics; journal citation graph; rating indicators; Spearman ranked correlation.

PECHNIKOV Andrey Anatolievich (Doctor of Technical Science, Associate Professor, Chief Research Associate, Head of the Laboratory for Telecommunications Systems, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Centre of RAS, Petrozavodsk, Russian Federation).

E-mail: pechnikov@krc.karelia.ru

REFERENCES

1. Rubinstein, A. & Slutskin, L. (2018) "Multiway data analysis" and the general problem of journals' ranking. *Prikladnaya ekonometrika – Applied Econometrics*. 50. pp. 90–113.
2. Novikov, D.A. (2015) Compete by "Hirsch's"? *Vysshee obrazovanie v Rossii – Higher Education in Russia*. 2. pp. 5–13.
3. Tretyakova, O.V. (2014) On the issue of the impact factor of a scientific journals and methods of its formation. *Voprosy territorial'nogo razvitiya – Territorial development issues*. 5(15). [Online] Available from: <http://vtr.isert-ran.ru/article/1412>
4. Melnikova, E.V. (2018) Sovremennoe sostoyanie sistemy indeksatsii i tsitirovaniya Web of Science: bazy dannykh, indeksy [Current situation within citation-indexing system web of science: data bases, indexes]. *Territoriya novykh vozmozhnostey. Vestnik Vladivostokskogo gosudarstvennogo universiteta ekonomiki i servisa*. 10(1). pp. 93–101.
5. Rubinstein, A.Y. (2016) Ranking of Russian Economic Journals: The Scientific Method or "Numbers Game"? *Zhurnal Novoy ekonomicheskoy assotsiatsii – Journal of the New Economic Association*. 2(30). pp. 162–175.
6. Elibrary.ru. (n.d.) *Ekspertnaya otsenka kachestva rossiyskikh nauchnykh zhurnalov* [Expert evaluation of Russian academic journals]. [Online] Available from: elibrary.ru/expert_titles_terms.asp (Accessed: 12th January 2021).
7. Chebukov, D., Izaak, A., Misyurina, O., Pupyrev, Yu. & Zhizhchenko, A. (2013) Math-Net.Ru as a digital archive of the Russian mathematical knowledge from the XIX century to today. *Lecture Notes in Comput. Sci.* 7961. pp. 344–348. DOI: 10.1007/978-3-642-39320-4_26
8. Hirschman, A.O. (1964) The Paternity of an Index. *American Economic Review*. 54(5). pp. 761–762. DOI: 10.4236/as.2018.95041

9. Elibrary.ru. (n.d.) *Metodika rascheta integral'nogo pokazatelya nauchnogo zhurnala v reytinge ScienceIndex* [Methodology for calculating the integral indicator of a scientific journal in the Science Index rating]. [Online] Available from: elibrary.ru/help_title_rating.asp (Accessed: 8th January 2021).
10. Chen, D.Z. & Lee, Y.Y. (2016) Longitudinal analysis of mechanism and machine theory: Geospatial productivity, journal citation networks, and researcher communities. *Journal of Mechanical Design*. 138(3). DOI: 10.1115/1.4032397
11. U.S. Department of Justice and Federal Trade Commission. (2010) *Horizontal Merger Guidelines*. [Online] Available from: www.ftc.gov/sites/default/files/attachments/merger-review/100819hmg.pdf (Accessed: 8th January 2021).
12. Kotsofana, T. & Strazhkova, P. (2011) Comparative analysis of concentration indicators application: a case of Russian banking sector. *Vestnik SPbGU. Ser. 5. Ekonomika – St. Petersburg University Journal of Economic Studies*. 4. pp. 30–40.
13. Heneberg, P. (2016) From Excessive Journal Self-Cites to Citation Stacking: Analysis of Journal Self-Citation Kinetics in Search for Journals, Which Boost Their Scientometric Indicators. *PLoS ONE*. 11(4). e0153730. [Online] Available from: 10.1371/journal.pone.0153730
14. Bredikhin, S.V., Lyapunov, V.M. & Shcherbakova, N.G. (2017) Struktura seti tsitirovaniya nauchnykh zhurnalov [The structure of citation network of scientific journals]. *Problemy informatiki – Problems of Informatics*. 2(35). pp. 38–52.
15. Newman, M.E.J. (2005) Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. *Contemporary Physics*. 46(5). pp. 323–351. DOI: 10.1080/00107510500052444
16. Barabasi, L.-A., Albert, R. & Jeong, H. (2000) Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide web. *Physica*. A281. pp. 69–77. DOI: 10.1016/S0378-4371(00)00018-2
17. Brin, S. & Page, L. (1998) The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine. *Computer Networks and ISDN Systems*. 30. pp. 107–117. DOI: 10.1016/S0169-7552(98)00110-X
18. Shcherbakova, N.G. (2015) Aksiomatika tsentral'nosti v kompleksnykh setyakh [Axiomatics of centrality in complex networks]. *Problemy informatiki – Problems of Informatics*. 3(28). pp. 3–14.
19. Ayzvazyan, S. & Mkhitarian, V. (2001) *Teoriya veroyatnostey i prikladnaya statistika* [Probability Theory and Applied Statistics]. 2nd ed. Moscow: Yuniti.
20. ru.scribd.com. (n.d.) *Critical Values of the Spearman's Ranked Correlation Coefficient*. [Online] Available from: ru.scribd.com/document/392256411/TABEL-RANK-SPEARMAN-spearman-ranked-correlation-table-docx (Accessed: 11th January 2021).

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

DOI: 10.17223/19988605/56/13

75 ЛЕТ ПРОФЕССОРУ ГЕННАДИЮ МИХАЙЛОВИЧУ КОШКИНУ



24 июля 2021 года исполнилось 75 лет известному ученому в области обработки данных в условиях априорной статистической неопределенности доктору физико-математических наук, профессору, Почетному работнику Высшего профессионального образования РФ **Геннадию Михайловичу Кошкину**.

Г.М. Кошкин в 1970 г. окончил радиофизический факультет Томского государственного университета по специальности «Радиофизика и электроника». Руководителем его дипломной работы «Исследование асимптотических свойств перестановочных тестов проверки близких гипотез» был В.А. Симахин, ныне – профессор кафедры программного обеспечения, вычислительной техники и автоматизированных систем Курганского государственного университета. Сразу же после окончания университета Геннадий Михайлович был принят в лабораторию счетно-решающих устройств Сибирского физико-технического института при Томском госуниверситете на должность младшего научного сотрудника.

С 1978 г. по 1991 г. Г.М. Кошкин – старший научный сотрудник лаборатории статистических методов отдела кибернетики СФТИ, затем – старший преподаватель, доцент (1992–2001) кафедры теоретической кибернетики факультета прикладной математики и кибернетики ТГУ, с 2001 г. по 2020 г. – профессор этой же кафедры.

В настоящее время Геннадий Михайлович – профессор кафедры системного анализа и математического моделирования Института прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета. За эти годы он разработал и читал как общие курсы – основы высшей математики, математический анализ, теория вероятностей, прикладная статистика, микроэкономика, так и оригинальные спецкурсы – анализ временных рядов, статистические задачи технической кибернетики, математические модели социологии, моделирование социально-экономических процессов, методы социально-экономического прогнозирования, математические модели страхового и банковского дела. В течение своей научно-педагогической деятельности он руководил и руководит научной работой студентов, аспирантов, докторантов.

Характер и основные результаты научной деятельности Г.М. Кошкина определяются его принадлежностью к научной школе Ф.П. Тарасенко, заслуженного деятеля науки РФ, заслуженного профессора ТГУ. Г.М. Кошкиным разработан метод построения непараметрических оценок функциона-

лов от условных распределений, охватывающий большинство используемых при решении задач идентификации важных статистических характеристик (функция регрессии, остаточная дисперсия, функция чувствительности стохастической модели объекта и др.) с улучшенными статистическими свойствами, когда априорные сведения о виде распределений выборочных наблюдений практически отсутствуют.

Результатом исследований проблем идентификации и управления для сложных стохастических объектов стала защита в 1981 г. диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук «Непараметрическое оценивание функционалов от условных распределений», научным руководителем которой был его учитель – Ф.П. Тарасенко. Разработанные в диссертации алгоритмы и программы были включены в состав автоматизированной системы управления конвертерным процессом производства стали Кузнецкого металлургического комбината.

Геннадий Михайлович разработал новые методы непараметрического оценивания характеристических и дополненных функционалов по зависимым наблюдениям (условные моменты, нетто-премии, пенсионные ренты). Предложенные им устойчивые кусочно-гладкие аппроксимации оценок позволяют находить точные асимптотические выражения для их моментов отклонений в широком классе распределений и типов зависимостей наблюдений и обобщают регуляризацию, разработанную академиком А.Н. Тихоновым. Итогом многолетних научных исследований стала защита в 2000 г. диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук на тему «Непараметрическое оценивание функционалов от распределений случайных последовательностей».

Г.М. Кошкин активно и плодотворно сотрудничает с российскими и зарубежными коллегами, результатом чего стало написание совместных статей, монографий и докладов на ведущих международных конференциях. Используя междисциплинарные постановки задач, Г.М. Кошкиным совместно с В.И. Смагиным модифицирован фильтр Калмана включением в его структуру непараметрических алгоритмов, что улучшило качество фильтрации, управления и прогноза по критерию среднеквадратических ошибок. В сотрудничестве с А.В. Китаевой в области непараметрической идентификации нелинейных авторегрессионных процессов написаны цикл статей и монография (в 2010 г. А.В. Китаевой защищена диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, научным консультантом которой был Г.М. Кошкин). В настоящее время Г.М. Кошкин совместно с профессором Ю.Г. Дмитриевым занимается проблемами привлечения различных типов дополнительной информации в процедуры статистической обработки данных.

Ученое звание доцента присвоено Г.М. Кошкину в 1993 г., а ученое звание профессора по кафедре теоретической кибернетики – в 2003 г.

Г.М. Кошкин опубликовал свыше трехсот научных работ, в том числе в ведущих журналах, таких как «Теория вероятностей и ее применения», «Проблемы передачи информации», «Автоматика и телемеханика», «Сибирский математический журнал», «Mathematical Methods of Statistics», «Statistical Papers» и др. Широко известны специалистам также семь его монографий, две из которых вышли в издательстве «Наука» (Москва), и шесть учебных пособий. Г.М. Кошкин пять раз награждался премиями ТГУ за высокие достижения в науке и образовании, в том числе за изданную в США монографию «Non-parametric State Space Models» (USA, Kendrick Press, 2014, 503 p.), написанную в соавторстве с профессорами А.В. Добровидовым и В.А. Васильевым. Наградами за научные достижения отмечена изданная Академией наук РФ монография Г.М. Кошкина (соавтор И.Г. Пивен) «Непараметрическая идентификация стохастических объектов» – Золотой медалью Парижской выставки 2014–2015 гг., Золотой медалью ВДНХ и премией Томского государственного университета (2011).

Геннадий Михайлович регулярно представляет Россию на престижных международных конференциях, симпозиумах и конгрессах (США, Великобритания, Израиль, Польша, Словакия, Франция, Испания, Чехия, ЮАР, Тайланд и др.). Профессор Г.М. Кошкин активно работает в двух диссертационных советах, является членом редакционной коллегии журнала «Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика», поддерживает международные научные контакты, входя в состав организационных и программных комитетов различных российских и зарубежных конференций, симпозиумов, семинаров.

За большую и плодотворную научную и учебную деятельность Г.М. Кошкин награжден знаком «Почетный работник высшего профессионального образования РФ», медалью «За заслуги перед ТГУ», многими почетными грамотами Министерства образования, Администрации города Томска и Томского государственного университета.

Дорогой Геннадий Михайлович!
Поздравляем Вас с юбилеем и желаем здоровья на многие годы!
Творческих Вам успехов!

*Институт прикладной математики и компьютерных наук ТГУ
Редакционная коллегия журнала «Вестник ТГУ. Управление,
вычислительная техника и информатика»
Кафедра системного анализа и математического моделирования*

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АБРАМОВА Евгения Александровна – аспирант факультета систем управления и робототехники Санкт-Петербургского Национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики. E-mail: vectra4444@mail.ru

БАСКАКОВА Елена Николаевна – ведущий системный аналитик департамента информационных технологий управления компании NAUMEN R&D (г. Екатеринбург). E-mail: enbaskakova@naumen.ru

БРАТЧИКОВ Степан Артемьевич – аспирант факультета систем управления и робототехники Санкт-Петербургского Национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики. E-mail: Loross90@gmail.com

БУИНЦЕВ Владимир Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладных информационных технологий и программирования Сибирского государственного индустриального университета (г. Новокузнецк). E-mail: buintcev@mail.ru

ГОЛОВАСТОВА Элеонора Александровна – аспирант кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. E-mail: golovastova.elina@yandex.ru

ДОРОНИНА Юлия Валентиновна – доцент, доктор технических наук, профессор кафедры информационных технологий и компьютерных систем Института информационных технологий и управления в технических системах Севастопольского государственного университета. E-mail: apkSev@yandex.ru

ЗАДИРАНОВА Любовь Александровна – кандидат физико-математических наук, начальник коммерческой службы ООО «ИЦ ГазИнформПласт». E-mail: zhidkovala@mail.ru

ЗЕНКОВА Жанна Николаевна – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и математического моделирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета; старший научный сотрудник Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва). E-mail: zhanna.zenkova@mail.tsu.ru

КАЛАШНИКОВ Сергей Николаевич – доцент, доктор технических наук, профессор кафедры прикладных информационных технологий и программирования Сибирского государственного индустриального университета (г. Новокузнецк). E-mail: s.n.kalashnikov@yandex.ru

КЕБА Анастасия Владимировна – магистрант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: mir.na.mig7@mail.ru

КРАСНОВ Федор Владимирович – кандидат технических наук, эксперт департамента информационных технологий управления компании NAUMEN R&D (г. Екатеринбург). E-mail: fkrasnov@naumen.ru

МАРТУСЕВИЧ Елена Владимировна – кандидат технических наук, доцент кафедры естественнонаучных дисциплин им. профессора В.М. Финкеля Сибирского государственного индустриального университета (г. Новокузнецк). E-mail: science_nvz@yandex.ru

МАРТУСЕВИЧ Ефим Александрович – младший научный сотрудник, аспирант кафедры прикладных информационных технологий и программирования Сибирского государственного индустриального университета (г. Новокузнецк). E-mail: program.pro666@yandex.ru

МОИСЕЕВ Александр Николаевич – доцент, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой программной инженерии Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: moiseev.tsu@gmail.com

НЕЖЕЛЬСКАЯ Людмила Алексеевна – доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ludne@mail.ru

ПАРШУКОВ Андрей Николаевич – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры электроэнергетики Тюменского индустриального университета. E-mail: anparshukov@mail.ru

ПЕЧНИКОВ Андрей Анатольевич – доцент, доктор технических наук, главный научный сотрудник, руководитель лаборатории телекоммуникационных систем Института прикладных математических исследований – обособленного подразделения ФИЦ «Карельский научный центр Российской академии наук» (г. Петрозаводск). E-mail: pechnikov@krc.karelia.ru

ПОДКУР Полина Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Кузбасского государственного технического университета им. Т.Ф. Горбачева (г. Кемерово). E-mail: paulina.podkur@gmail.com

СЕМЕНОВА Дарья Владиславовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики Сибирского федерального университета (г. Красноярск). E-mail: DVSemenova@sfu-kras.ru

СКАТКОВ Александр Владимирович – доктор технических наук, эксперт РАН, профессор кафедры информационных технологий и компьютерных систем Института информационных технологий и управления в технических системах Севастопольского государственного университета. E-mail: vm1945@mail.ru

СМАЗНЕВИЧ Ирина Сергеевна – бизнес-аналитик департамента информационных технологий управления компании NAUMEN R&D (г. Екатеринбург). E-mail: ismaznevich@naumen.ru

СМОЛЕНЦЕВ Николай Константинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики Кемеровского государственного университета. E-mail: smolennk@mail.ru

СОЛДАТЕНКО Александр Александрович – аспирант Сибирского федерального университета (г. Красноярск). E-mail: ASoldatenko@sfu-kras.ru

ФЕДОСОВ Юрий Валерьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры систем управления и робототехники Санкт-Петербургского Национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики. E-mail: yf01@yandex.ru

ЦЫБУЛЬНИКОВА Нина Романовна – аспирант кафедры системного анализа и математического моделирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: tsybulnikova94@gmail.com

ШКЛЕННИК Мария Александровна – ассистент кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: Shklennikm@yandex.ru

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

2021. № 56

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 27.09.2021 г. Формат 60х84^{1/8}.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 14,9.
Тираж 250 экз. Заказ № 4782. Цена свободная.

Дата выхода в свет 29.09.2021 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru