

МАТЕМАТИКА

УДК 519.622, 517.912
DOI 10.17223/19988621/72/1

MSC 34A34

М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ
И ДРУГИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОДУ
К СИСТЕМАМ ЛИНЕЙНЫХ ОДУ В ЯВНОМ ВИДЕ

Предложен и продемонстрирован на примере уравнения Риккати способ преобразования полиномиальных систем ОДУ к линейным системам ОДУ. С помощью дополнительного первого интеграла одномерное уравнение Риккати преобразовано к линейной системе из трех ОДУ с переменными коэффициентами, решая которую можно найти решение исходного уравнения Риккати в общем виде или только задачи Коши. Предлагается первый интеграл, с помощью которого можно свести решение полиномиальных систем ОДУ к нахождению решений линейных систем ОДУ. Данная процедура выгодна с точки зрения численных методов решения дифференциальных уравнений

Ключевые слова: *переопределенные системы дифференциальных уравнений, редукция, полиномиальные системы ОДУ, задача Коши, уравнение Риккати, линейные системы ОДУ, символьные вычисления.*

1. Уравнение Риккати является одним из наиболее интересных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка [1]. Одномерные и многомерные уравнения Риккати встречаются в различных областях математики (например, в алгебраической геометрии, в теории конформных отображений, в вариационном исчислении) и физики (например, в квантовой теории поля) [1, 2]. Они также нередко возникают в прикладных математических задачах. Доказано, что общего решения уравнения Риккати в виде квадратур не существует, но, если известно хотя бы одно частное решение, то находится и его общее решение. Уравнение Риккати является простейшим полиномиальным уравнением.

Идея сведения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) к полиномиальной форме восходит к А. Пуанкаре [3, гл. XVI, XVII]. В этой работе он утверждал, что всякое дифференциальное уравнение (при известных условиях) может быть представлено в форме $dx_1/dt = X_1, \dots, dx_n/dt = X_n$, где все X_i – «целые многочлены», и предложил метод получения такого представления исходного уравнения при помощи введения дополнительных переменных. В дальнейшем введение дополнительных переменных применялось различными авторами для сведения конкретных систем ОДУ к полиномиальной форме (см., например, [4, 5]), а в работе [6] были предложены условия, обеспечивающие возможность сведения к полиномиальной форме методом дополнительных переменных (МДП) нелинейных систем ОДУ общего вида. Наконец, в [7] получены алгоритм и про-

грамма (в рамках пакета Mathematica) сведения к полиномиальной форме полных систем и, в частности, систем ОДУ, если они удовлетворяют определенным условиям.

Существуют и развиваются различные методы решения полиномиальных систем дифференциальных уравнений. Например, в теориях управления и моделирования часто используются нормальные, т.е. разрешенные относительно производной, матричные дифференциальные уравнения первого порядка, правая часть которых является либо линейной, либо квадратичной относительно искомой матрицы. Для их решения можно использовать введенные в работе [8] косые ряды. Они позволяют сводить матричные уравнения к аналогичным уравнениям над матрицами более низкого порядка. Изучаются также полиномиальные решения у систем уравнений в частных производных (УрЧП) [9]. Они позволяют находить многие важные частные решения у дифференциальных уравнений.

Цель данной работы заключается в том, чтобы предложить способ преобразования полиномиальных систем ОДУ к линейным системам ОДУ в явном виде. С помощью дополнительного первого интеграла одномерное уравнение Риккати мы преобразовываем к линейной системе из трех ОДУ с переменными коэффициентами, решая которую можно найти решение исходного уравнения Риккати в общем виде или только задачи Коши. Полученную линейную систему ОДУ решать гораздо легче, чем исходное уравнение Риккати. Применяемый метод преобразования является частным случаем метода, который изложен в работе авторов [10]. Для многомерных уравнений Риккати соответствующей линейной системы ОДУ мы не приводим из-за большого числа получаемых линейных уравнений (больше 100). Однако мы приводим первый интеграл, с помощью которого это можно сделать.

В работах [11, 12] предложено сведение систем УрЧП к системам УрЧП меньшей размерности, в частности к системам ОДУ путем их переопределения дополнительными уравнениями связи. Были предложены различные способы переопределения как отдельных систем УрЧП, так и УрЧП общего вида. При редукции некоторых систем УрЧП, в частности унифицированных УрЧП или уравнений Навье – Стокса, на основе метода переопределения, изложенного в работе [13], возникают переопределенные параметрические системы полиномиальных ОДУ. В данной работе мы предлагаем первый интеграл, с помощью которого можно свести решение полиномиальных систем ОДУ к нахождению решений линейных систем ОДУ. В частности, если коэффициенты в этих уравнениях будут постоянные, то решение находится в явном виде.

2. Рассмотрим уравнение Риккати:

$$\frac{dx}{dt} = ax^2 + bx + c, \quad (1)$$

где $a = a(t) \neq 0$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции от $t \in [0, T]$, $T > 0$. Пусть поставлена задача Коши $x|_{t=0} = x_0$. Преобразуем уравнение (1) к автономной системе из двух уравнений:

$$\frac{dx}{d\tau} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t); \quad (2)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad (3)$$

где поставлена задача Коши $x|_{\tau=0} = x_0$, $t|_{\tau=0} = 0$. Рассмотрим функцию от переменных x , t , p_x , p_t :

$$H(x, t, p_x, p_t) = (a(t)x^2 + b(t)x + c(t))p_x + p_t. \quad (4)$$

Уравнения (2) и (3) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x}; \quad (5)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_t}. \quad (6)$$

Определим функции $p_x = p_x(\tau)$, $p_t = p_t(\tau)$ из следующих уравнений:

$$\frac{dp_x}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(2a(t)x + b(t))p_x; \quad (7)$$

$$\frac{dp_t}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial t} = -\left(\frac{da(t)}{dt}x^2 + \frac{db(t)}{dt}x + \frac{dc(t)}{dt}\right)p_x, \quad (8)$$

где поставим задачу Коши $p_x|_{\tau=0} = 1$, $p_t|_{\tau=0} = 0$. Как известно, система уравнений (5) – (8) является гамильтоновой [14]. Функция (4) является ее первым интегралом [14]. Следовательно, с учетом начальных данных имеем

$$(a(t)x^2 + b(t)x + c(t))p_x + p_t = (a^0x_0^2 + b^0x_0 + c^0), \quad (9)$$

где $a(t)|_{\tau=0} = a^0$, $b(t)|_{\tau=0} = b^0$, $c(t)|_{\tau=0} = c^0$. Из уравнения (3) с учетом начальных данных следует $t = \tau$. Тогда систему уравнений (5) – (8) можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dt} = ax^2 + bx + c; \quad (10)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -(2ax + b)p_x; \quad (11)$$

$$\frac{dp_t}{dt} = -\left(\frac{da}{dt}x^2 + \frac{db}{dt}x + \frac{dc}{dt}\right)p_x; \quad (12)$$

$$(ax^2 + bx + c)p_x + p_t = (a^0x_0^2 + b^0x_0 + c^0). \quad (13)$$

К системе (10) – (13) ставится следующая задача Коши: $x|_{t=0} = x_0$, $p_x|_{t=0} = 1$, $p_t|_{t=0} = 0$. Имеем

$$\frac{d(xp_x)}{dt} = \frac{dx}{dt}p_x + x\frac{dp_x}{dt} = -ax^2p_x + cp_x. \quad (14)$$

Обозначим $B = xp_x$, $C = x^2p_x$. Тогда уравнения (11) – (14) можно переписать в виде

$$\frac{dp_x}{dt} = -2aB - bp_x; \quad (15)$$

$$\frac{dp_t}{dt} = -\frac{da}{dt}C - \frac{db}{dt}B - \frac{dc}{dt}p_x; \quad (16)$$

$$aC + bB + cp_x + p_t = (a^0 x_0^2 + b^0 x_0 + c^0); \quad (17)$$

$$\frac{dB}{dt} = -aC + cp_x. \quad (18)$$

Продифференцируем уравнение (17) по t и подставим (15), (16), (18). После преобразований получим, что

$$\frac{dC}{dt} = bC + 2cB. \quad (19)$$

Таким образом, мы имеем систему из трех линейных дифференциальных уравнений (15), (18) и (19) от трех неизвестных p_x , B , C , где старшие их производные выражены через остальные неизвестные. Начальные данные следующие: $p_x|_{t=0} = 1$, $B|_{t=0} = x_0$, $C|_{t=0} = (x_0)^2$. Зная решение (15), (18) и (19) с этими начальными данными, по формуле $x = B/p_x$ находим решение уравнения (1).

Покажем обратное. Пусть нам известно решение (15), (18) и (19) с начальными данными $p_x|_{t=0} = 1$, $B|_{t=0} = x_0$, $C|_{t=0} = (x_0)^2$. Тогда должно выполняться соотношение

$$B^2 = p_x C. \quad (20)$$

При $t = 0$ это равенство выполняется. Продифференцируем (20) по t . Имеем

$$2B \frac{dB}{dt} = \frac{dp_x}{dt} C + p_x \frac{dC}{dt}$$

$$\text{или} \quad 2B(-aC + cp_x) = (-2aB - bp_x)C + p_x(bC + 2cB). \quad (21)$$

Равенство (21) очевидно является тождеством. Таким образом соотношение (20) доказано. Пусть $h = B/p_x$. Тогда из (20) следует, что $C = h^2 p_x$. Имеем также $h|_{t=0} = x_0$. Докажем, что тогда h является решением (1). Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{d(B/p_x)}{dt} = \frac{\frac{dB}{dt} p_x - \frac{dp_x}{dt} B}{(p_x)^2} = \frac{(-aC + cp_x) p_x - (-2aB - bp_x) B}{(p_x)^2} = \\ &= \frac{(-ah^2 p_x + cp_x) p_x - (-2ahp_x - bp_x) hp_x}{(p_x)^2} = ah^2 + bh + c. \end{aligned}$$

Как известно, если $a = a(t) \neq 0$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции от $t \in [0, T]$, $T > 0$, то решение задачи Коши $p_x|_{t=0} = 1$, $B|_{t=0} = x_0$, $C|_{t=0} = (x_0)^2$ для системы (15), (18) и (19) существует глобально на отрезке $[0, T]$ [15]. Если при этом $p_x \neq 0$ для любого $t \in [0, T]$, то $x = B/p_x$ будет являться решением задачи Коши $x|_{t=0} = x_0$ для уравнения (1) также глобально на отрезке $[0, T]$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (22)$$

где $a_n = a_n(t) \neq 0$, $a_i = a_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$, – непрерывно дифференцируемые функции от $t \in [0, T]$, $T > 0$. Уравнение (22) называется обобщенным уравнением Риккати. Пусть поставлена задача Коши $x|_{t=0} = x_0$. Аналогично можно получить, что из уравнения (22) следует, что

$$\frac{dp_x}{dt} = -(na_n x^{n-1} + \dots + a_1) p_x; \quad (23)$$

$$\frac{dp_t}{dt} = -\left(\frac{da_n}{dt} x^n + \dots + \frac{da_1}{dt} x + \frac{da_0}{dt}\right) p_x; \quad (24)$$

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) p_x + p_t = a_n^0 (x_0)^n + a_{n-1}^0 (x_0)^{n-1} + \dots + a_1^0 x_0 + a_0^0, \quad (25)$$

где $a_i(t)|_{t=0} = a_i^0$, $i = 0, 1, \dots, n$, $p_x|_{t=0} = 1$, $p_t|_{t=0} = 0$. Систему уравнений (22) – (25) можно рассматривать как переопределенную. К этой системе можно применить подход, изложенный в работе [10], и также преобразовать ее системе линейных ОДУ. Однако количество полученных уравнений слишком много, чтобы представить в данной работе. Оценка количества этих уравнений из работы [10] следующая: $N_H \geq 54n$. Аналогичным образом можно переопределить систему ОДУ, где в правых частях стоят дробно-рациональные выражения от неизвестных. Переопределенная система ОДУ будет также состоять из дробно-рациональных выражений от неизвестных и к ней можно применить метод из работы [10]. К таким системам можно преобразовать многие системы ОДУ.

Пример 1. Рассмотрим систему из двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} + x \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + t + x + y^2 = 0; \quad (26)$$

$$\frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + tx + y + 1 = 0. \quad (27)$$

Обозначим

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v. \quad (28)$$

Подставим (28) в (26), (27) и продифференцируем полученные выражения по t . Находим, что

$$\frac{du}{dt} + 2xv \frac{dv}{dt} + uv^2 + u + 2yv + 1 = 0; \quad (29)$$

$$v \frac{du}{dt} + u \frac{dv}{dt} + x + tv + v = 0. \quad (30)$$

Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2xv \\ v & u \end{vmatrix} = u - 2xv^2 \neq 0, \quad (31)$$

то уравнения (29), (30) можно записать в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{\Delta_u}{\Delta}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta_v}{\Delta}, \quad (32)$$

где
$$\Delta_u = \begin{vmatrix} -uv^2 - 1 - u - 2yv & 2xv \\ -x - tu - v & u \end{vmatrix}, \quad \Delta_v = \begin{vmatrix} 1 & -uv^2 - 1 - u - 2yv \\ v & -x - tu - v \end{vmatrix}. \quad (33)$$

Введем новую переменную τ по формуле

$$\frac{dt}{d\tau} = 1. \quad (34)$$

Пусть $t|_{\tau=0} = 0$. Тогда систему уравнений (28), (32) можно представить в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = u, \quad \frac{dy}{d\tau} = v, \quad \frac{du}{d\tau} = \frac{\Delta_u}{\Delta}, \quad \frac{dv}{d\tau} = \frac{\Delta_v}{\Delta}. \quad (35)$$

Таким образом, вместо сложной системы уравнений (26), (27) мы имеем систему уравнений (34), (35), где в правых частях стоят дробно-рациональные выражения с постоянными коэффициентами и которую можно еще переопределить. Методом из работы [10] ее можно свести к решению систем линейных ОДУ с постоянными коэффициентами.

Пример 2. Рассмотрим произвольную систему из n уравнений от n неизвестных функций $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ вида

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = 0, \quad (36)$$

где $\mathbf{G}(\mathbf{u}) = (G_1(\mathbf{u}), \dots, G_n(\mathbf{u}))$ – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов. Будем искать функцию $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{u}_0, t)$, удовлетворяющую системе уравнений

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{G}(\mathbf{u}_0)(1-t). \quad (37)$$

Пусть
$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0. \quad (38)$$

При $t=1$ числа $\mathbf{u}|_{t=1}$ будут решениями системы (36). Продифференцируем уравнения (37) по переменной t :

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{G}(\mathbf{u}_0). \quad (39)$$

Положим, что определитель матрицы в (39) отличен от нуля. Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right)^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{u}_0). \quad (40)$$

Таким образом, при фиксированном $\mathbf{u}_0$ мы имеем систему ОДУ (40) по переменной t с задачей Коши (38). Если система уравнений (36) полиномиальная, то система ОДУ (40) будет состоять из дробно-рациональных выражений от неизвестных.

Пример 3. Рассмотрим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a(t) + \cos(b(t)x)}{x^3 + c(t)}, \quad (41)$$

где $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функ-

ции от $t \in [0, T]$, $T > 0$. Обозначим

$$x^3 + c(t) = \frac{1}{y}, \quad u = \cos(b(t)x), \quad (42)$$

тогда
$$\frac{dx}{dt} = a(t)y + uy. \quad (43)$$

Продифференцируем по t уравнения (42). Имеем

$$3x^2 \frac{dx}{dt} + \frac{dc(t)}{dt} = -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dt} = -y^2 \left(3x^2 \frac{dx}{dt} + \frac{dc(t)}{dt} \right).$$

Учитывая (43), получаем

$$\frac{dy}{dt} = -3a(t)y^3x^2 - 3uy^3x^2 - \frac{dc(t)}{dt}y^2. \quad (44)$$

Имеем
$$\frac{du}{dt} = -\sin(b(t)x) \left(\frac{db(t)}{dt}x + b(t)\frac{dx}{dt} \right)$$

или
$$\frac{du}{dt} = -\sin(b(t)x) \left(\frac{db(t)}{dt}x + b(t)a(t)y + b(t)uy \right). \quad (45)$$

Возведем обе части последнего уравнения в (45) в квадрат. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 &= \sin^2(b(t)x) \left(\frac{db(t)}{dt}x + b(t)a(t)y + b(t)uy \right)^2 = \\ &= (1-u^2) \left(\frac{db(t)}{dt}x + b(t)a(t)y + b(t)uy \right)^2. \end{aligned} \quad (46)$$

Обозначим
$$\frac{du}{dt} = w, \quad w = \frac{1}{v}. \quad (47)$$

С учетом обозначений (47) продифференцируем уравнение (46) по t . Имеем после преобразований,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= -u \left(\frac{db(t)}{dt}x + b(t)a(t)y + b(t)uy \right)^2 + \\ &+ v(1-u^2) \left(\frac{db(t)}{dt}x + b(t)a(t)y + b(t)uy \right) G, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$G = \left(\frac{d^2b(t)}{dt^2}x + \frac{db(t)dx}{dt} + \frac{d(b(t)a(t))}{dt}y + (b(t)a(t) + b(t)u)\frac{dy}{dt} + \frac{db(t)}{dt}uy + b(t)wy \right). \quad (49)$$

Имеем также из (47)

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dt}$$

или
$$\frac{dv}{dt} = -v^2 \frac{dw}{dt}. \quad (50)$$

Таким образом, если подставить (43), (44) в (49), (50), то вместо сложного уравнения (41) мы имеем систему из 5-ти уравнений (43), (44), (47), (48) и (50) и 5-ти неизвестных x , y , u , w и v , которая является полиномиальной. Методом из работы [10] ее можно свести к решению систем линейных ОДУ с переменными коэффициентами.

3. В данной статье мы предложили и продемонстрировали на примере уравнения Риккати способ преобразования полиномиальных систем ОДУ к линейным системам ОДУ. Этот результат может быть интересен с теоретической точки зрения. Рассмотрим полиномиальные системы ОДУ с постоянными коэффициентами. Решение таких нелинейных систем с помощью нашего метода может быть представлено в виде нелинейной функции от суммы очень большого, но конечно-го количества нарастающих и затухающих колебаний во времени с разными частотами, которые теоретически можно вычислить [15]. Например, для уравнения Риккати это выражение $h = B/p_x$, где B и p_x – колебательные решения из системы уравнений (15), (18) и (19), так как эта система является системой линейных ОДУ с постоянными коэффициентами. Амплитуды этих колебаний зависят от начальных данных нелинейно. Мы можем также вычислить, в какой момент решения будет обращаться в бесконечность, т.е. область существования решения, например, задачи Коши.

С точки зрения численных методов сведение к линейным системам ОДУ также выгодно. Для линейных систем ОДУ созданы мощные методы решения и программные пакеты. Количество линейных уравнений, которых необходимо решить, быстро растет с увеличением количества уравнений в исходной системе полиномиальных уравнений [10]. Однако решать численно напрямую нелинейные ОДУ гораздо труднее из-за вычислительных особенностей, например неустойчивостей, точек бифуркации и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. Уравнения Риккати. М.: Физматлит, 2001. 319 с.
2. Зеликин М.И. Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении. М.: Факториал Пресс, 1998. 352 с.
3. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями: пер. с франц. М.: ОГИЗ, 1947. 392 с.
4. Мерман Г.А. О представлении общего решения задачи трех тел сходящимися рядами // Бюлл. ИТА АН СССР. Наука. 1958. Т. 6. № 10. С. 713–720.
5. Кривов А.В., Чернышева Н.А. Интегрирование уравнений движения низкого ИСЗ методом рядов Тейлора // Кинематика и физика небесных тел. 1990. Т.6. № 2. С. 13–16.
6. Бабаджанянц Л.К. Продолжаемость и представление решений в задачах небесной механики // Труды ИТА АН СССР. Наука. 1978. Вып. XII. С. 3–45.
7. Бабаджанянц Л.К., Брэгман К.М. Алгоритм метода дополнительных переменных // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер.10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2012. Вып. 2. С. 3–12.
8. Деревенский В.П. Квадратное уравнение над матричными косыми рядами // Известия вузов. Математика. 2014. № 1. С. 17–30.
9. Карачик В.В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2011. Вып. 4. № 10 (227). С. 4–17.
10. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. On the identification of solutions to Riccati equation and the other polynomial systems of ODEs // preprint, Research Gate, 2020. DOI: 10.13140/RG.2.2.26980.60807.

11. Зайцев М.Л., Аккерман В.Б. Еще один способ нахождения частных решений уравнений математической физики // Вестник ВолГУ. Серия 1, Математика. Физика. 2016. № 6(37). С. 119–127. DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.6.11.
12. Зайцев М.Л., Аккерман В.Б. Редукция переопределенных систем дифференциальных уравнений математической физики // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2017. Т. 20. № 4. С. 43–67. DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2017.4.5.
13. Зайцев М.Л., Аккерман В.Б. Алгоритм нахождения решений переопределенных систем дифференциальных уравнений в явном виде // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2020. Т. 12. № 4. С. 5–18. DOI: 10.14529/mmph200401.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: учеб. пособие в 10 т. Т. I. Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.
15. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб.: Лань, 2003. 448 с.

Статья поступила 11.02.2021

M.L. Zaytsev, V.B. Akkerman (2021) EXPLICIT TRANSFORMATION OF THE RICCATI EQUATION AND OTHER POLYNOMIAL ODES TO SYSTEMS OF LINEAR ODES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 5–14

DOI 10.17223/19988621/72/1

Keywords: overdetermined systems of differential equations; reduction; polynomial systems of ODE; Cauchy problem; Riccati equation; linear ODE systems; symbolic calculations.

The purpose of this work is to propose and demonstrate a way to explicitly transform polynomial ODE systems to linear ODE systems. With the help of an additional first integral, the one-dimensional Riccati equation is transformed to a linear system of three ODEs with variable coefficients. Solving the system, we can find a solution to the original Riccati equation in the general form or only to the Cauchy problem. The Riccati equation is one of the most interesting nonlinear first order differential equations. It is proved that there is no general solution of the Riccati equation in the form of quadratures; however, if at least one particular solution is known, then its general solution is also found. Thus, it is enough only to find a particular solution of the linear system of ODEs. The applied transformation method is a special case of the method described in our work [Zaytsev M. L., Akkerman V. B. (2020) On the identification of solutions to Riccati equation and the other polynomial systems of ODEs // preprint, Research Gate. DOI: 10.13140 / RG.2.2.26980.60807]. This method uses algebraic transformations and transition to new unknowns consisting of products of the original unknowns. The number of new unknowns becomes less than the number of equations. For the multidimensional Riccati equations, we do not present the corresponding linear system of ODEs because of the large number of linear equations obtained (more than 100). However, we present the first integral with which this can be done.

In this paper, we also propose a method for finding the first integral, which can be used to reduce a search for the solution of any polynomial systems of ODEs to a search of solutions to linear systems of ODEs. In particular, if the coefficients in these equations are constant, then the solution is found explicitly.

AMS Mathematical Subject Classification: 34A34

Maxim L. Zaytsev (Assistant to an individual entrepreneur, Moscow, Russia). E-mail: mlzaytsev@mail.ru

Vyacheslav B. Akkerman (Prof., Department of Mechanical and Aerospace Engineering, West Virginia University, Morgantown, USA). E-mail: Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu

REFERENCES

1. Egorov A. I. (2001) *Uravneniya Rikkati* [Riccati equations]. Moscow: Fizmatlit.
2. Zelikin M. I. (1998) *Odnorodnyye prostranstva i uravneniye Rikkati v variatsionnom ischislenii* [Homogeneous spaces and the Riccati equation in the calculus of variations]. Moscow: Fartorial Press.
3. Poincaré A. (1947) O krivyykh, opredelyayemykh differentsial'nymi uravneniyami [On curves determined by differential equations]. Moscow: OGIZ.
4. Merman G.A. (1958) O predstavlenii obshchego resheniya zadachi trekh tel skhodyashchimisya ryadami [On the representation of the general solution of the three-body problem by converging series]. *Byulleten' ITA AN SSSR – Bulletin of the Institute of Theoretical Astronomy, Academy of Sciences of the USSR*. 6(10). pp. 713–720.
5. Krivov A.V., Chernysheva N.A. (1990) Integrirovaniye uravneniy dvizheniya nizkogo ISZ metodom ryadov Teylora [Integration of the equations of motion of a low satellite by the Taylor series method]. *Kinematika i fizika nebesnykh tel – Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 6(2). pp. 13–16.
6. Babadzhanyants L.K. (1978) Prodolzhaemost' i predstavleniye resheniy v zadachakh nebesnoy mekhaniki [Continuity and representation of solutions in problems of celestial mechanics]. *Trudy ITA AN SSSR. Nauka*. XII. pp. 3–45.
7. Babadzhanyants L.K., Bregman K.M. (2012) Algoritm metoda dopolnitel'nykh peremennykh [Algorithm of the method of additional variables]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10. Prikladnaya matematika. Informatika. Protssesy upravleniya – Vestnik of St. Petersburg University. Serie 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2. pp. 3–12.
8. Derevenskii V.P. (2014) Quadratic equations over matrix skew series. *Russian Mathematics*. 58(1). pp. 14–26.
9. Karachik V.V. (2011) Polinomial'nye resheniya differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh s postoyannymi koeffitsientami [Polynomial solutions of partial differential equations with constant coefficients]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Fizika – Bulletin of the South Ural State University. Mathematics. Mechanics. Physics*. 4(10). pp. 4–17.
10. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. (2020) On the identification of solutions to Riccati equation and the other polynomial systems of ODEs // preprint, Research Gate. DOI: 10.13140/RG.2.2.26980.60807.
11. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. (2016) Eshche odin sposob nakhozheniya chastnykh resheniy uravneniy matematicheskoy fiziki [Another method for finding particular solutions of equations of mathematical physics]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Fizika – Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics*. 37(6). pp. 119–127. DOI: <https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.11>.
12. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. (2017) Reduktsiya pereopredelennykh sistem differentsial'nykh uravneniy matematicheskoy fiziki [Reduction of overdetermined differential equations of mathematical physics]. *Matematicheskaya fizika i komp'yuternoye modelirovaniye – Mathematical Physics and Computer Simulation*. 20(4). pp. 43–67. DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2017.4.5.
13. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. (2020) Algoritm nakhozheniya resheniy pereopredelennykh sistem differentsial'nykh uravneniy v yavnom vide [Algorithm for finding explicit solutions of overdetermined systems of differential equations]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Fizika – Bulletin of the South Ural State University. Mathematics. Mechanics. Physics*. 12(4). pp. 5–18. DOI: 10.14529/mmph200401.
14. Landau L.D., Lifshits. Ye.M. (1988) *Teoreticheskaya fizika. I. Mekhanika* [Course of theoretical Physics, Vol. 1: Mechanics]. Moscow: Nauka.
15. Fedoryuk M. V. (2003) *Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya* [Ordinary Differential Equations]. St. Petersburg: Lan' Publ.

Received: February 11, 2021