

УДК 532.546: 519.6

DOI 10.17223/19988621/72/5

Х.М. Гамзаев

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРФОРИРОВАННОМ ТРУБОПРОВОДЕ

Предложена математическая модель, описывающая нестационарное течение несжимаемой вязкой жидкости в перфорированном трубопроводе. В рамках предложенной модели поставлена задача по определению давления и расхода жидкости в начале трубопровода, необходимых для обеспечения заданного расхода жидкости и давления в конце трубопровода. Исходная задача преобразуется к граничной обратной задаче с нелокально возмущенным краевым условием. Построен дискретный аналог задачи и предложено специальное представление для решения полученной системы разностных уравнений. В результате получены явные формулы для определения приближенных значений расхода жидкости и давления в начале трубопровода.

Ключевые слова: *перфорированный трубопровод, нестационарное течение, граничная обратная задача, метод нелокального возмущения граничных условий, разностная задача.*

Известно, что гидродинамические исследования движения жидкостей в перфорированных трубопроводах имеют важное теоретическое значение и многочисленные практические применения. Перфорированные трубопроводы широко применяются при разработке нефтяных и газовых месторождений горизонтальными скважинами, в гидротранспорте, химической технологии, ракетной технике, мелиорации, гидрологии, биомеханике и т.д. [1–4]. Обычно при исследовании движения жидкостей в перфорированных трубопроводах дискретное распределение точек перфорации (точек отбора или подкачки жидкости) заменяется непрерывным и исследования сводятся к изучению нестационарного движения жидкости в трубопроводах с проницаемыми стенками. При этом для описания способности стенки трубопровода пропустить через себя жидкость вводится понятие коэффициента проницаемости стенки. Численному и аналитическому исследованию математических моделей стационарного и нестационарного течения жидкостей с различными реологическими свойствами в трубопроводах, каналах и сосудах с проницаемыми стенками посвящены работы [1–11]. Для практики транспорта жидкостей в перфорированных трубопроводах важное значение имеют исследования по определению гидродинамических условий в начале трубопровода, необходимых для обеспечения заданного режима на выходе трубопровода.

Целью данной работы является определение давления и расхода жидкости в начале трубопровода, обеспечивающих требуемый режим в выходном сечении трубопровода, на основе решения обратной задачи для одномерной модели нестационарного течения несжимаемой жидкости в перфорированном трубопроводе.

Постановка задачи и метод решения

Пусть рассматривается процесс нестационарного течения несжимаемой вязкой жидкости в горизонтально расположенном перфорированном трубопроводе длиной l диаметром d . Плотность перфорации, т.е. число перфорационных отверстий, приходящихся на единицу длины трубопровода, обозначим через k . Для построения математической модели данного процесса используем дифференциальное уравнение движения и дифференциальное уравнение неразрывности потока жидкости [12]. Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости в трубопроводе с переменных расход жидкости – давление можно представить в виде

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + \frac{q(x,t)}{s} \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = -\frac{s}{\rho} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{\lambda |q(x,t)|}{2sd} q(x,t), \quad (1)$$

где $p(x,t)$ – давление жидкости в трубопроводе, $q(x,t)$ – объемный расход жидкости, ν – кинематическая вязкость жидкости, ρ – плотность жидкости, $s = \pi d^2 / 4$ – площадь поперечного сечения трубопровода, λ – коэффициент гидравлического сопротивления.

Скорость оттока жидкости через перфорационное отверстие на стенке трубы обозначим через $w(x,t)$. Тогда дифференциальное уравнение неразрывности потока жидкости с учетом оттока жидкости через перфорационные отверстия запишется как

$$-\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = k s_0 w(x,t), \quad (2)$$

где d_0 и $s_0 = \pi d_0^2 / 4$ – соответственно диаметр и площадь перфорационного отверстия.

Для описания оттока жидкости через перфорационное отверстие используем известное соотношение гидростатики

$$\frac{p(x,t) - p_e(x,t)}{\rho g} = \frac{w^2(x,t)}{2g}$$

или

$$w(x,t) = \sqrt{\frac{2(p(x,t) - p_e(x,t))}{\rho}}, \quad (3)$$

$p_e(x,t)$ – давление внешней среды; g – ускорение свободного падения.

Пусть состояние потока жидкости в трубопроводе в начальный момент времени $t = 0$ известно, т.е. для системы уравнений (1)– (3) известно следующее начальное условие

$$q(x, 0) = \phi(x). \quad (4)$$

Предполагается, что в сечении трубопровода $x = 0$ обеспечивается подача жидкости в трубопровод, а в конце трубопровода $x = l$ расход жидкости и давление соответствуют назначению трубопровода и считаются заданными. Тогда для системы уравнений (1)– (3) будем иметь следующие краевые условия:

$$q(l, t) = q_l(t), \quad (5)$$

$$p(l, t) = p_l(t), \quad (6)$$

где $q_l(t)$, $p_l(t)$ – заданные функции.

Требуется найти законы изменения во времени давления $p(0,t)$ и расхода жидкости $q(0,t)$ в начале трубопровода, которые обеспечивали бы пропуск заданного расхода жидкости $q_l(t)$ по трубопроводу при сохранении давления $p_l(t)$ в конце трубопровода.

Сначала преобразуем систему уравнений (1)–(3). Учитывая соотношение (3), уравнение (2), запишем в виде

$$-\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = ks_0 \sqrt{\frac{2(p(x,t) - p_e(x,t))}{\rho}}. \quad (7)$$

Найдем $p(x,t)$ из уравнения (7):

$$p(x,t) = p_e(x,t) + \frac{\rho}{2k^2 s_0^2} \left(\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \right)^2 \quad (8)$$

и полученное выражение подставим в уравнение (1). В результате будем иметь

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + \frac{q(x,t)}{s} \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = -\frac{s}{\rho} \frac{\partial p_e(x,t)}{\partial x} + (v - \sigma \frac{\partial q(x,t)}{\partial x}) \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{\lambda |q(x,t)|}{2sd} q(x,t), \quad (9)$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq T;$$

$$q(x,0) = \phi(x); \quad (10)$$

$$q(l,t) = q_l(t), \quad (11)$$

$$\text{где } \sigma = \frac{1}{k^2 s_0^2}.$$

Очевидно, что краевое условие (11) недостаточно для однозначного разрешения уравнения (9). Для получения дополнительного условия для уравнения (9) запишем уравнение (7) при $x = l$

$$-\frac{\partial q(l,t)}{\partial x} = ks_0 \sqrt{\frac{2(p(l,t) - p_e(l,t))}{\rho}}.$$

Отсюда, учитывая краевое условие (6), получим дополнительное условие для уравнения (9)

$$\frac{\partial q(l,t)}{\partial x} = -ks_0 \sqrt{\frac{2(p_l(t) - p_e(l,t))}{\rho}}. \quad (12)$$

Поставленная задача (9) – (12) относится к классу граничных обратных задач [13, 14]. Для решения граничной обратной задачи (2)–(7) используем метод нелокального возмущения граничных условий [14]. Граничное условие (11) заменим на нелокальное

$$q(l,t) + \alpha q(0,t) = q_l(t), \quad (13)$$

где α – параметр нелокального возмущения выступает в качестве параметра регуляризации.

Для численного решения граничной обратной задачи (9), (10), (12), (13) сначала построим ее дискретный аналог. С этой целью введем равномерную разностную сетку в прямоугольной области $\{0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T\}$

$$\bar{\omega} = \{(t_j, x_i) : x_i = i\Delta x, \quad t_j = j\Delta t, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m\}$$

с шагами $\Delta x = l/n$ по переменной x и $\Delta t = T/m$ по времени t . Используя полуневяную аппроксимацию по времени для нелинейных членов уравнения (9), дискретный аналог задачи (9), (10), (12), (13) на сетке $\bar{\omega}$ представим в виде

$$\begin{aligned} & \frac{q_i^j - q_i^{j-1}}{\Delta t} + \frac{q_i^{j-1}}{s} \frac{q_i^j - q_{i-1}^j}{\Delta x} = \\ & = -\frac{s}{\rho} \frac{p_{ei+1}^j - p_{ei-1}^j}{2\Delta x} + (v - \sigma \frac{q_i^{j-1} - q_{i-1}^{j-1}}{\Delta x}) \frac{q_{i+1}^j - 2q_i^j + q_{i-1}^j}{\Delta x^2} - \frac{\lambda |q_i^{j-1}|}{2sd} q_i^j, \\ & i = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

$$q_i^0 = \phi_i, \quad i = 0, 2, \dots, n,$$

$$\frac{q_n^j - q_{n-1}^j}{\Delta x} = -ks_0 \sqrt{\frac{2(p_l^j - p_{en}^j)}{\rho}},$$

$$q_n^j + \alpha q_0^j = q_l^j,$$

где $q_i^j \approx q(x_i, t_j)$, $p_{ei}^j \approx p_e(x_i, t_j)$, $p_l^j = p_l(t_j)$, $\phi_i = \phi(x_i)$.

Полученная разностная задача представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, в которой в качестве неизвестных выступают приближенные значения искомых функций $q(x, t)$ в узлах разностной сетки $\bar{\omega}$, т.е. q_i^j , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, 3, \dots, m$. Данную систему разностных уравнений преобразуем к виду

$$a_i q_{i-1}^j - c_i q_i^j + b_i q_{i+1}^j = f_i^{j-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad (14)$$

$$q_n^j = q_{n-1}^j - \Delta x k s_0 \sqrt{\frac{2(p_l^j - p_{en}^j)}{\rho}}; \quad (15)$$

$$q_n^j + \alpha q_0^j = q_l^j, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (16)$$

$$q_i^0 = \phi_i, \quad i = 0, 2, \dots, n, \quad (17)$$

где $a_i = s\Delta t(v - \sigma \frac{q_i^{j-1} - q_{i-1}^{j-1}}{\Delta x}) + q_i^{j-1} \Delta t \Delta x$, $c_i = a_i + b_i + s\Delta x^2 + \frac{\lambda |u_i^{j-1}|}{2d} \Delta x^2 \Delta t$,

$$b_i = s\Delta t(v - \sigma \frac{q_i^{j-1} - q_{i-1}^{j-1}}{\Delta x}), \quad f_i^{j-1} = s^2 \Delta t \Delta x \frac{p_{ei+1}^j - p_{ei-1}^j}{2\rho} - s\Delta x^2 q_i^{j-1}.$$

С целью разделения разностной задачи (14)–(17) на взаимно независимые подзадачи, каждая из которых может решаться самостоятельно, решение этой системы при каждом фиксированном значении j , $j = 1, 2, \dots, m$, представим в виде [14–16]

$$q_i^j = g_i^j + q_0^j \theta_i^j, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (18)$$

где g_i^j , θ_i^j – неизвестные переменные. Подставив выражение q_i^j в (14), (15) и

учитывая справедливость соотношения $q_0^j = g_0^j + q_0^j \theta_0^j$, получим следующие разностные задачи для определения вспомогательных переменных g_i^j, θ_i^j :

$$a_i g_{i-1}^j - c_i g_i^j + b_i g_{i+1}^j = f_i^{j-1}; \quad (19)$$

$$g_0^j = 0; \quad (20)$$

$$g_n^j = g_{n-1}^j - \Delta x k s_0 \sqrt{\frac{2(p_l^j - p_{en}^j)}{\rho}}; \quad (21)$$

$$a_i \theta_{i-1}^j - c_i \theta_i^j + b_i \theta_{i+1}^j = 0; \quad (22)$$

$$\theta_0^j = 1; \quad (23)$$

$$\theta_n^j = \theta_{n-1}^j. \quad (24)$$

Разностные задачи (19)–(21) и (22)–(24) при каждом фиксированном значении $j = 1, 2, \dots, m$ представляют собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей и решения этих систем можно найти методом Томаса [14].

Подставив представление (18) в (16), будем иметь

$$g_n^j + q_0^j \theta_n^j + \alpha q_l^j = q_l^j.$$

Отсюда получим формулу для определения расхода жидкости в начале трубопровода

$$q_0^j = \frac{q_l^j - g_n^j}{\theta_n^j + \alpha}. \quad (25)$$

Определив q_0^j по формуле (25), можно последовательно найти $q_1^j, q_2^j, \dots, q_n^j$ по рекуррентной формуле (18).

После определения распределения расхода жидкости по длине трубопровода можно перейти к определению распределения давления. Построив дискретный аналог уравнения (8) на сетке $\bar{\omega}$, получим следующую расчетную формулу для вычисления давления

$$p_i^j = p_{ei}^j + \frac{\rho}{2k^2 s_0^2 \Delta x^2} (q_{i+1}^j - q_i^j)^2, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (26)$$

В частности, для давления в начале трубопровода будем иметь

$$p_0^j = p_{e0}^j + \frac{\rho}{2k^2 s_0^2 \Delta x^2} (q_1^j - q_0^j)^2.$$

Таким образом, вычислительный алгоритм решения обратной задачи (1)–(6) по восстановлению давления и расхода жидкости в начале трубопровода при каждом дискретном значении временной переменной $t_j, j = 1, 2, \dots, m$, состоит в следующем:

- определяются решения двух линейных разностных задач второго порядка (19)–(21) и (22)–(24) относительно вспомогательных переменных $g_i^j, \theta_i^j, i = \overline{0, n}$;

- по формуле (25) определяется расход жидкости в начале трубопровода q_0^j ;
- определяется распределение расхода жидкости по длине трубопровода, т.е. вычисляются значения переменных q_i^j , $i = \overline{0, n}$, по формуле (18);
- определяется распределение давления по длине трубопровода, т.е. вычисляются значения переменных p_i^j , $i = \overline{0, n}$, по формуле (26).

Результаты численных расчетов

Для выяснения эффективности предложенного вычислительного алгоритма были проведены численные эксперименты для модельных задач. Схема численного эксперимента заключалась в следующем:

- для заданных функций $\phi(x)$, $q_0(t)$ и $p_l(t)$ конечно-разностным методом решается прямая краевая задача для системы уравнений

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + \frac{q(x, t)}{s} \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = -\frac{s}{\rho} \frac{\partial p_e(x, t)}{\partial x} + (v - \sigma \frac{\partial q(x, t)}{\partial x}) \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{\lambda |q(x, t)|}{2sd} q(x, t),$$

$$p(x, t) = p_e(x, t) + \frac{\rho}{2k^2 s_0^2} \left(\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \right)^2, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

$$q(x, 0) = \phi(x),$$

$$q(0, t) = q_0(t),$$

$$\frac{\partial q(l, t)}{\partial x} = -ks_0 \sqrt{\frac{2(p_l(t) - p_e(l, t))}{\rho}},$$

$$p(l, t) = p_l(t),$$

При этом путем проведения серии расчетов со сгущающейся разностной сеткой обеспечивается практическая сходимость разностного метода;

- определяются функции $q(l, t)$ и $p(0, t)$;
- найденная зависимость $q_l(t) = q(l, t)$ и заданная функция $p_l(t) = p(l, t)$ принимаются за точные данные для численного решения обратной задачи по восстановлению $q(0, t)$ и $p(0, t)$.

Первая серия расчетов выполнялась с использованием невозмущенных данных. Вторая – проводилась при наложении на $q_l(t)$ и $p_l(t)$ некоторой функции, моделирующей погрешность экспериментальных данных

$$\tilde{q}_l(t) = q_l(t) + \delta \eta(t) q_l(t),$$

$$\tilde{p}_l(t) = p_l(t) + \delta \eta(t) p_l(t),$$

где δ – уровень погрешности, $\eta(t)$ – случайная величина, моделируемая с помощью датчика случайных чисел. Величина параметра регуляризации определяется в соответствии с принципом невязки [13, 14], т.е. задаются α_0 , χ и строится последовательность $\alpha_{k+1} = \alpha_k \chi$. Вычисления проводятся до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\left[\sum_{j=1}^m (\tilde{q}_l(t_j) - q_n^j)^2 \Delta t \right]^{1/2} \leq \varepsilon ,$$

где ε – заданная погрешность.

Для возмущения входных данных в качестве уровня погрешности использовались $\delta = 0.05$.

Результаты численного эксперимента, проведенного для случая $d = 1.2$ м, $d_0 = 0.01$ м, $l = 100$ м, $\rho = 1000$ кг/м³, $\nu = 10^{-6}$ м²/с, $\lambda = 0.02$, $k = 20$ 1/м, $p_e(x, t) = 0.1$ МПа, $p_l(t) = 0.12$ МПа, $q(0, t) = 3 + 1.1 \sin 5t$ м³/с, $\phi(x) = 0$ с использованием невозмущенных и возмущенных входных данных представлены в табл. 1, где t – время; q^t , $\bar{q}$, $\tilde{q}$ – соответственно точные, вычисленные при невозмущенных и вычисленные при возмущенных данных значения функции $q(0, t)$; p^t , $\bar{p}$ и $\tilde{p}$ – аналогичные обозначения для значения функции $p(0, t)$.

Таблица 1

Численные результаты по определению функций $q(0, t)$, $p(0, t)$

$t_j, \text{с}$	Значение функции $q(0, t)$, м ³ /с			Значение функции $p(0, t)$, МПа		
	q^t	$\bar{q}$	$\tilde{q}$	p^t	$\bar{p}$	$\tilde{p}$
120	3.049	3.049	3.169	1.249	1.249	1.310
240	2.903	2.903	2.983	1.195	1.195	1.239
360	3.145	3.145	3.167	1.251	1.251	1.274
480	2.807	2.807	2.852	1.193	1.193	1.199
600	3.241	3.241	3.356	1.253	1.253	1.298
720	2.712	2.712	2.796	1.191	1.191	1.229
840	3.335	3.335	3.445	1.255	1.255	1.297
960	2.619	2.619	2.634	1.190	1.190	1.204
1080	3.426	3.426	3.450	1.257	1.257	1.264
1200	2.530	2.530	2.579	1.188	1.188	1.213
1320	3.514	3.514	3.667	1.259	1.259	1.308
1440	2.444	2.444	2.457	1.188	1.188	1.210
1560	3.598	3.598	3.606	1.261	1.261	1.271
1680	2.362	2.362	2.363	1.187	1.187	1.199
1800	3.677	3.677	3.693	1.262	1.262	1.279
1920	2.285	2.285	2.307	1.187	1.187	1.207
2040	3.751	3.751	3.859	1.263	1.263	1.341
2160	2.214	2.214	2.204	1.187	1.187	1.183
2280	3.819	3.819	3.870	1.264	1.264	1.289
2400	2.149	2.149	2.166	1.188	1.188	1.208

Результаты численного эксперимента показывают, что при использовании невозмущенных входных данных искомые функции $q(0, t)$ и $p(0, t)$ восстанавливаются с высокой точностью (2–3-й и 5–6-й столбцы таблицы). При $\alpha = 2 \cdot 10^{-6}$ относительные погрешности восстановления значений искомых функций не превышают 0.00002 %. А при использовании возмущенных входных данных, в которых погрешность имеет флуктуационный характер, относительные погрешности восстановления значений искомых функций не превышают 5.32 % (4-й и 7-й столбцы) при $\alpha = 0.02$.

Для изучения влияния плотности перфорации на гидродинамические параметры трубопровода были проведены численные расчеты. Результаты численных расчетов для случая $\nu = 10^{-6}$ м²/с; $\rho = 1000$ кг/м³, $d = 1.2$ м, $d_0 = 0.01$ м, $l = 100$ м, $\lambda = 0.02$, $p_e(x, t) = 0.1$ МПа, $p_l(t) = 0.12$ МПа представлены в табл. 2. В ней указаны заданные объемные расходы жидкости на выходном сечении трубопровода $q_l(t)$ и вычисленные значения расхода $q(0, t)$ и давления в начале трубопровода $p(0, t)$ при различных значениях плотности перфорации k .

Т а б л и ц а 2

Определение гидродинамических параметров трубопровода

$q_l(t)$	$k = 10$		$k = 20$		$k = 40$	
	$q(0, t)$	$p(0, t)$	$q(0, t)$	$p(0, t)$	$q(0, t)$	$p(0, t)$
2	2.511	1.226	3.017	1.223	4.004	1.214
3	3.530	1.260	4.053	1.256	5.068	1.245
4	4.556	1.307	5.102	1.301	6.158	1.288
5	5.587	1.367	6.161	1.360	7.270	1.343

Из табл. 2 следует, что для обеспечения пропускa заданного расхода жидкости по перфорированному трубопроводу необходимое давление в начале трубопровода с увеличением плотности перфорации уменьшается, а необходимый расход жидкости увеличивается.

Анализ результатов численных расчетов показывает, что предложенный метод численного моделирования можно применять при исследовании процессов течения однофазных жидкостей в перфорированных трубопроводах.

Заключение

Численно исследована обратная задача по определению давления и расхода жидкости в начале перфорированного трубопровода по заданному гидродинамическому режиму в выходном сечении трубопровода. Предложенный безытерационный вычислительный алгоритм, основанный на использовании метода нелокального возмущения граничных условий, позволяет в каждом временном слое последовательно определить распределения расхода жидкости и давления по всей длине трубопровода только на основании информации в выходном сечении перфорированного трубопровода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Marshall E.A., Trowbridge E.A. Flow of a Newtonian fluid through a permeable tube: The application to the proximal renal tubule // Bulletin of Mathematical Biology. 1974. V. 36. P. 457–476.
2. Ross S.M. A mathematical model of mass transport in a long permeable tube with radial convection // Journal of Fluid Mechanics. V. 63. 1974. No. 4. P. 157–175.
3. Pozrikidis C. Stokes flow through a permeable tube // Archive of Applied Mechanics. 2010. V. 80. No. 4. P. 323–333. DOI: 10.1007/s00419-009-0319-9.
4. Zhang Q., Wang Z. Modeling study on fluid flow in horizontal perforated pipes with wall influx // International Journal of Fluid Mechanics Research. 2014. V. 41. No. 6. P. 556–566. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v41.i6.80.

5. Elshahed M. Blood flow in capillary under starling hypothesis // *Applied Mathematics and Computation*. 2004. V. 149. No. 2. P. 431–439.
6. Muthu P., Berhane T. Mathematical model of flow in renal tubules // *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2010. V. 6. No. 20. P. 94–107.
7. Mariamma N.K., Majhi S.N. Flow of a Newtonian Fluid in a blood vessel with permeable wall – a theoretical model // *Computers & Mathematics with Applications*. 2000. V. 40. No. 12. P. 1419–1432.
8. Гамзаев Х.М. Обратная задача нестационарного течения несжимаемой жидкости в трубе с проницаемой стенкой // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»*. 2020. Т. 12. № 1. С. 24–30.
9. Мерзляков А.В., Крюкова Е.А. Свободные колебания идеальной жидкости в прямоугольном сосуде с горизонтальной проницаемой перегородкой // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. № 60. С. 107–118. DOI: 10.17223/19988621/60/8.
10. Thomas C. Flow in perforated pipes: A comparison of models and experiments // *SPE Production & Operations*. 2006. V. 21. No. 2. P. 302–311.
11. Zhang Q., Wang Z., Wang X., Zhai Y., Wei J., Gao Q. Analysis of the modeling of single-phase flow in a perforated pipe with wall fluid influx // *Applied Mechanics and Materials*. 2013. V. 275–277. P. 491–495.
12. Лурье М.В. Математическое моделирование процессов трубопроводного транспорта нефти, нефтепродуктов и газа. М.: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2012. 456 с.
13. Alifanov O.M. Inverse heat transfer problems. Berlin: Springer, 2011. 280 p.
14. Samarskii A. A., Vabishchevich P.N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. Walter de Gruyter, 2007. 438 p.
15. Vabishchevich P.N., Vasil'ev V.I. Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations // *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2016. V. 24. No. 1. P. 42–59. DOI: 14.1080/17415977.2014.993984.
16. Gamzaev Kh.M. Numerical method of pipeline hydraulics identification at turbulent flow of viscous liquids // *Pipeline Science and Technology*. 2019. V. 3. No. 2. P. 118–124. DOI: 10.28999/2514-541X-2019-3-2-118-124.

Статья поступила 19.03.2020

Gamzaev Kh.M. SIMULATION OF AN UNSTEADY INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW THROUGH A PERFORATED PIPELINE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 60–69

DOI 10.17223/19988621/72/5

Keywords: perforated pipeline, unsteady flow, boundary inverse problem, method of nonlocal perturbation of boundary conditions, difference problem.

A mathematical model of the unsteady flow of an incompressible viscous fluid through a perforated pipeline is proposed, which is described by a system of nonlinear partial differential equations. In the framework of the model, the purpose is to determine the pressure and the flow rate of the fluid at the pipeline inlet, providing the flow rate and the pressure required at the pipeline outlet. By combining the system of the equations, the original problem is reduced to a boundary-value inverse problem for a nonlinear parabolic equation with respect to fluid flow rate. To solve the boundary inverse problem, the method of nonlocal perturbation of boundary conditions is proposed. A discrete analog of the inverse problem is obtained using the finite-difference approximation, and a special approach is suggested for solving the resulting system of difference equations. As a result, the difference problem for each discrete value of the time variable splits into two second-order difference problems and a linear equation with respect to an approximate value of the desired flow rate at the pipeline inlet. The absolutely stable Thomas method is used to numerically solve the obtained difference problems. After determining the flow

rate distribution along the entire pipeline, the pressure at the pipeline inlet is also calculated using an explicit formula. Based on the proposed computational algorithm, the numerical experiments are performed for benchmark problems.

Khanlar M.o. GAMZAEV (Doctor of Technical Sciences, Professor Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: xan.h@rambler.ru

REFERENCES

1. Marshall E.A., Trowbridge E.A. (1974) Flow of a Newtonian fluid through a permeable tube: the application to the proximal renal tubule. *Bulletin of Mathematical Biology*. 36. pp. 457–476. DOI: 10.1007/BF02463260.
2. Ross S.M. (1974) A mathematical model of mass transport in a long permeable tube with radial convection. *Journal of Fluid Mechanics*. 63(1). pp. 157–175. DOI: 10.1017/S0022112074001066.
3. Pozrikidis C. (2010) Stokes flow through a permeable tube. *Archive of Applied Mechanics*. 80(4). pp. 323–333. DOI: 10.1007/s00419-009-0319-9.
4. Zhang Q., Wang Z. (2014) Modeling study on fluid flow in horizontal perforated pipes with wall influx. *International Journal of Fluid Mechanics Research*. 41(6). pp. 556–566. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v41.i6.80.
5. Elshahed M. (2004) Blood flow in capillary under starling hypothesis. *Applied Mathematics and Computation*. 149(2). pp. 431–439. DOI: 10.1016/S0096-3003(03)00151-6.
6. Muthu P., Berhane T. (2010) Mathematical model of flow in renal tubules. *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 6(20). pp. 94–107.
7. Mariamma N.K., Majhi S.N. (2000) Flow of a Newtonian Fluid in a blood vessel with permeable wall – a theoretical model. *Computers & Mathematics with Applications*. 40(12). pp. 1419–1432. DOI: 10.1016/S0898-1221(00)00250-9.
8. Gamzaev Kh.M. (2020) Obratnaya zadacha nestatsionarnogo techeniya zhidkosti v trube s pronitsaemoy stenкой [Inverse problem of unsteady incompressible fluid flow in a pipe with a permeable wall]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Fizika – Bulletin of the South Ural State University. Mathematics. Mechanics. Physics*. 12(1). pp. 24–30.
9. Merzlyakov A.V., Kryukova E.A. (2019) Svobodnye kolebaniya ideal'noy zhidkosti v pryamougol'nom sosude s gorizontol'noy pronitsaemoy peregorodkoy [Free oscillations of an ideal fluid in a rectangular vessel with a horizontal permeable membrane]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 60. pp. 107–118. DOI: 10.17223/19988621/60/8.
10. Clemo T. (2006) Flow in perforated pipes: a comparison of models and experiments. *SPE Production & Operations*. 21(2). pp. 302–311. DOI: 10.2118/89036-PA.
11. Zhang Q., Wang Z., Wang X., Zhai Y., Wei J., Gao Q. (2013) Analysis of the modeling of single-phase flow in a perforated pipe with wall fluid influx. *Applied Mechanics and Materials*. 275–277. pp. 491–495. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.275-277.491.
12. Lurie M.V. (2012) *Matematicheskoe modelirovanie protsessov truboprovodnogo transporta nefli, nefteproduktov i gaza* [Mathematical modeling of oil products and gas pipeline transportation]. Moscow: National University of Oil and Gas "Gubkin University".
13. Alifanov O.M. (2011) *Inverse Heat Transfer Problems*. Berlin: Springer.
14. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. (2007) *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*. Berlin: De Gruyter.
15. Vabishchevich P.N., Vasil'ev V.I. (2016) Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 24(1). pp. 42–59. DOI: 10.1080/17415977.2014.993984.
16. Gamzaev Kh.M. (2019) Numerical method of pipeline hydraulics identification at turbulent flow of viscous liquids. *Pipeline Science and Technology*. 3(2). pp. 118–124. DOI: 10.28999/2514-541X-2019-3-2-118-124.

Received: March 19, 2020