

УДК 533

DOI 10.17223/19988621/72/7

А.М. Липанов

**НЕЯВНЫЙ МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК НА РЕГУЛЯРНОЙ СЕТКЕ
(ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ)**

Предложен неявный метод численного решения одномерных нестационарных уравнений газовой динамики, преобразованных к виду вдоль характеристик. Расчёт величин газодинамических параметров осуществляется в узлах регулярной координатной сетки. Показана высокая (20-тикратная) эффективность предлагаемого алгоритма по сравнению с явным разностным методом.

Ключевые слова: *неявный метод, характеристика, газовая динамика, внутренняя точка.*

Метод характеристик – один из наиболее ранних методов численного решения дифференциальных уравнений с частными производными [1]. В данном случае речь идёт о гиперболических уравнениях, имеющих действительные характеристики. В докомпьютерный период данный метод использовался, как явный. В этом случае область (t, x) при решении одномерной нестационарной задачи покрывалась нерегулярно расположенными точками, в которых были определены величины газодинамических параметров (ГДП). Данное явление имело место при решении уравнений как с первым порядком точности, так и со 2-м (метод Массо) [2]. Это создавало неудобства при анализе результатов расчётов. Оно же явилось одной из причин, почему при решении систем гиперболических уравнений перешли к использованию явных [3, 4] и неявных разностных схем [5] вместо решения дифференциальных уравнений, выполняющихся вдоль характеристических направлений. В этом случае определяемые в результате решения задачи величины ГДП находятся в узловых точках регулярной разностной сетки и удобно располагаются при использовании результатов.

Однако этому же требованию можно удовлетворить и при использовании метода характеристик, если воспользоваться неявным методом решения уравнений, записанных вдоль характеристических направлений. Предлагаемый в данной работе подход удовлетворяет этому требованию. В данном случае вся область интегрирования (t, x) заранее разделена шагами Δt и Δx , образующими регулярную сетку, в узлах которой и определяются величины ГДП. Шаги этой сетки Δt и Δx могут быть переменными или постоянными. При резком изменении величин ГДП сетка может сгущаться как вдоль пространственной координаты, так и при интегрировании по времени. Величины шагов Δt и Δx определяются в результате решения задачи на основе асимптотической сходимости [6].

В данной работе будем рассматривать канал в заряде твёрдотопливного ракетного двигателя [7] (рис. 1), по которому без разрывов ГДП движется нестационарный поток газа. Данный канала 3 слева граничит с объёмом 4, в котором находится источник 5 прихода массы газов и их энергии. Через правую, или сопловую границу канала газы истекают в сопло, а по нему в окружающую среду.

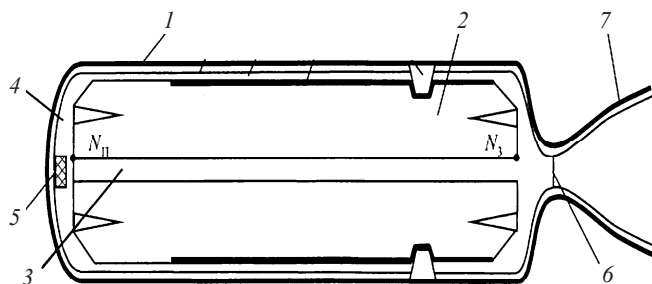


Рис. 1. Продольное сечение твёрдотопливного ракетного двигателя: 1 – корпус двигателя; 2 – заряд твёрдого топлива; 3 – канал заряда; 4 – левый объём; 5 – источник прихода массы газов и их энергии; 6 – расширяющаяся часть сопла; 7 – минимальное (критическое) сечение сопла

Fig. 1. Longitudinal section of a solid propellant rocket engine: 1 – engine housing; 2 – solid-propellant charge; 3 – charge channel; 4 – left volume; 5 – source of the mass of gases and their energy; 6 – divergent section of the nozzle; 7 nozzle throat (a critical section)

Рассматриваем следующую систему уравнений [8, 9]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho} + v \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho} + (k-1) \frac{p}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

где p – давление, ρ – плотность, v – скорость движения газа, k – отношение изобарной (c_p) и изохорной (c_v) теплоёмкостей газа. Начальными условиями будем считать $v = 0$; $p = p_{\text{нач}}$, $\rho = \rho_{\text{нач}}$. Если переменные в системе уравнений (1) – (3) приводятся к безразмерному виду, то в качестве масштабов можно использовать:

для давления $p_{\text{нач}}$; для плотности $\rho_{\text{нач}}$; для скорости потока газа $\sqrt{\frac{p_{\text{нач}}}{\rho_{\text{нач}}}}$. Масштабом для координаты x можно взять радиус канала r_0 , на его левой границе.

Тогда масштабом для времени будет произведение $r_0 \sqrt{\frac{\rho_{\text{нач}}}{p_{\text{нач}}}}$.

Данная работа посвящена изложению сути неявного метода 2-го порядка точности как при интегрировании во времени, так и при расчёте величин ГДП по длине канала. Рассмотрим внутренние точки канала. Расчёту величин ГДП на границах канала посвящена отдельная работа.

Исключим в уравнении (3) градиент $\frac{\partial v}{\partial x}$ с помощью уравнения (1). Получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{kp}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0. \quad (4)$$

Видим, что вдоль характеристического направления (траектории движения газа)

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (5)$$

выполняется уравнение

$$\frac{dp}{dt} - \frac{kp}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (6)$$

Решая уравнение (6), получим равенство для энтропийной функции:

$$\frac{p}{\rho^k} = s, \quad (7)$$

где s – постоянная величина при переходе с одного временного слоя на другой вдоль траектории движения газа. Параметр s при переходе от одной траектории к другой может меняться.

В уравнении (4) полную производную $\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x}$ исключим с помощью уравнения (1). Получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + kp \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Последнее уравнение запишем в виде

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{kp}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

где
$$c^2 = \frac{kp}{\rho}. \quad (9)$$

(c – скорость звука).

Умножим уравнение (2) на c и сложим с уравнением (8). Получим

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + (v+c) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + c \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v+c) \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \quad (10)$$

Видим, что вдоль характеристического направления (характеристик 1-го семейства)

$$\frac{dx}{dt} = v + c \quad (11)$$

выполняется уравнение

$$\frac{dp}{dt} + \rho c \frac{dv}{dt} = 0. \quad (12)$$

Вычтем, далее, из уравнения (8) уравнение (2), умноженное на c . Будем иметь

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + (v-c) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + c \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v-c) \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \quad (13)$$

Получили уравнение

$$\frac{dp}{dt} - \rho c \frac{dv}{dt} = 0, \quad (14)$$

выполняющееся вдоль характеристического направления (характеристик 11-го семейства)

$$\frac{dx}{dt} = v - c. \quad (15)$$

Таким образом, вместо уравнений (1) – (3) имеем три характеристических направления (5), (11), (15), вдоль которых выполняются три уравнения (6), (12), (14) соответственно.

Рассмотрим, далее, регулярную сетку, фрагмент которой показан на рис. 2.

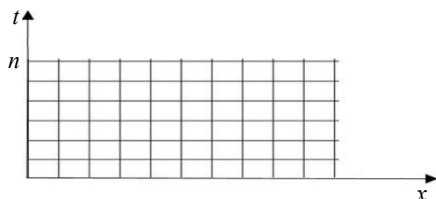


Рис. 2. Фрагмент регулярной сетки в координатах (t, x) ; n – номер временного слоя, до которого доведён расчёт

Fig. 2. Fragment of a regular grid in coordinates (t, x) ; n is the number of the limiting time layer for calculations

Пусть расчёт величин ГДП доведён до временного слоя, отмеченного на рис. 2 буквой n . Требуется найти величины ГДП на $(n+1)$ -м временном слое. Изложим алгоритм расчёта их величин на примере i -й точки, находящейся на $(n+1)$ -м временном слое, где $i = 2, 3, \dots, N-1$ – для дозвукового потока (рис. 3) и $i = 2, 3, \dots, N$ – для сверхзвукового потока (рис. 4). Здесь N – общее количество узловых точек вдоль оси x (вдоль рассматриваемого канала).

Характеристический треугольник ABC , показанный на рис. 3, соответствует дозвуковому потоку. В этом случае при $i = N-1$ точка C будет находиться между $(N-1)$ -й и N -й точками, то есть будет находиться внутри канала.

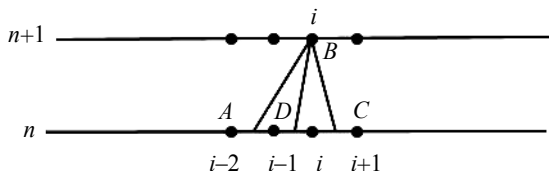


Рис. 3. Характеристический треугольник ABC с вершиной в i -й точке на $(n+1)$ -м временном слое (дозвуковой поток)

Fig. 3. Characteristic triangle ABC with an apex at i -th point on $(n+1)$ -th time layer (subsonic flow)

Аналогичная ситуация имеет место, если $i = 2$. В этом случае точка A будет находиться между нулевой и первой точками, то есть тоже будет находиться внутри канала. Расчёт величин ГДП в первой точке и на границах канала здесь не рассматриваем.

Если поток сверхзвуковой, то характеристический треугольник ABC будет иметь вид, показанный на рис. 4.

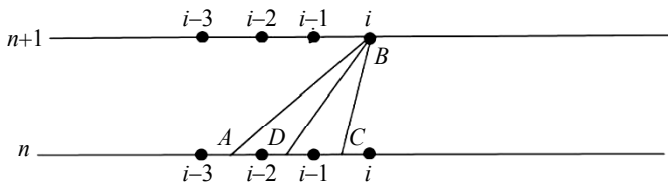


Рис. 4. Характеристический треугольник ABC при сверхзвуковом потоке.

Точка B на $(n+1)$ -м временном слое является i -й на оси x

Fig. 4. Characteristic triangle ABC for a supersonic flow.

Point B on $(n+1)$ -th time layer is the i -th point on the x -axis

Стороны AB треугольников ABC на рис. 3 и 4 соответствуют характеристикам 1-го семейства (11). Если поток сверхзвуковой, то при $i = N$, то есть на правой границе канала граничные условия не требуются и расчёт величин ГДП в точке N будет осуществляться так же, как, например, в точке $N-1$ или в любой другой внутренней точке. В окрестности левой границы считаем, что поток всегда дозвуковой. Поэтому при $i = 2$, когда в окрестности правой границы канала поток газа сверхзвуковой, точка A будет находиться между нулевой и первой точками. Проинтегрируем уравнение (11) вдоль отрезка AB по времени, учитывая, что интервал между временными слоями равен Δt . Выполнив интегрирование, получим

$$x_B - x_A = \frac{(v+c)_A + (v+c)_B}{2} \Delta t. \quad (16)$$

Аналогично, для отрезка BC находим

$$x_B - x_C = \frac{(v-c)_C + (v-c)_B}{2} \Delta t. \quad (17)$$

Далее, уравнения (12) и (14) проинтегрируем вдоль отрезков AB и BC соответственно. Будем иметь

$$p_B = p_A - \frac{(\rho c)_A + (\rho c)_B}{2} (v_B - v_A); \quad (18)$$

$$p_B = p_C - \frac{(\rho c)_C + (\rho c)_B}{2} (v_B - v_C). \quad (19)$$

В пределах характеристического треугольника ABC из точки B в точку D проведём отрезок DB траектории (5) движения газов (рис. 3 и 4). Вдоль отрезка DB выполняется уравнение (7), которое запишем в виде

$$\frac{\rho_B}{\rho_D} = \left(\frac{p_B}{p_D} \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (20)$$

Чтобы рассчитать величины газодинамических параметров в точке B , надо знать их значения в точках A , D и C на n -м временном слое.

При известных величинах ГДП в точках A , D и C трёх уравнений (18) – (20) достаточно для нахождения значений давления, плотности газов и скорости их

движения в точке B . Однако, связь между ними нелинейная и решить их относительно неизвестных переменных не представляется возможным. Для этого необходимо задаваться величиной давления p_B . Тогда из уравнения (20) найдём плотность ρ_B , а из уравнения (18) – скорость движения газов v_B . Полученные результаты необходимо подставить в уравнение (19) и, решая однопараметрическую трансцендентную задачу, найти и величину давления p_B в точке B .

Начнём с определения величин ГДП в точках A , D и C . Для этого воспользуемся их значениями на n -м временном слое в точках $i-2$, $i-1$, i и $i+1$ при дозвуковом потоке (рис. 3) или точками $i-3$, $i-2$, $i-1$ и i в случае сверхзвукового потока (рис. 4).

Введём в рассмотрение вектор ξ с компонентами $i-2$ и $i-3$. Использование вектора ξ в качестве индекса будет означать, что это индекс, равный $i-2$ и $i-3$, то есть годится как при дозвуковом потоке, так и при сверхзвуковом. С этой же целью введём векторы: χ с компонентами $i-1$, $i-2$; ψ с компонентами i , $i-1$ и ω с компонентами $i+1$, i .

Для определения величин координат x_A , x_D и x_C введём в рассмотрение вектор-индекс θ с компонентами A , D и C . Тогда для определения величины координаты x_θ воспользуемся уравнением, аналогичным уравнению (16):

$$x_B - x_\theta = \frac{\Phi_\theta + \Phi_B}{2} \Delta t, \quad (21)$$

В уравнении (21) Φ – вектор с компонентами $v+c$, v и $v-c$.

Если переменная Φ относится к n -му временному слою, то её можно записать в виде квадратичной функции от x , проходящей через точки, соответствующие векторам ξ , χ и ψ для точки A , векторам χ , ψ и ω – для точки D и векторам ω , ψ и χ – для точки C . Поэтому имеем

$$\Phi = a_{0\theta} + a_{1\theta}(x - x_\pi) + a_{2\theta}(x - x_\pi)^2, \quad (22)$$

где π – вектор с компонентами ξ , χ и ω , соответствующими началам аппроксимации квадратичными выражениями (22).

$$a_{0\theta} = \Phi_\pi,$$

а коэффициенты $a_{1\theta}$ и $a_{2\theta}$ находим, решая следующую систему двух уравнений:

$$a_{1\theta} + a_{2\theta}(x_\nu - x_\pi) = \frac{\Phi_\nu - \Phi_\pi}{x_\nu - x_\pi}, \quad (23)$$

где ν – вектор с тремя компонентами (α, β, γ) ; α , β и γ – векторы с двумя компонентами: (χ, ψ) , (ψ, ω) , (ψ, χ) – соответственно.

В каждой точке A , D или C (компоненты вектора θ) имеем свои вектор α и компонент ξ , вектор β и компонент χ , вектор γ и компонент ψ соответственно. В свою очередь, векторы α , β и γ имеют по два компонента. Это значит, что в каждой точке (A , D или C) с помощью уравнения (23) получим по два уравнения для определения коэффициентов $a_{1\theta}$, $a_{2\theta}$ ($\theta = A, D, C$).

Зная коэффициенты $a_{1\theta}$, $a_{2\theta}$ ($\theta = A, D, C$), в каждой точке $x = x_\theta$ можем записать

$$\Phi_\theta = \Phi_\pi + a_{1\theta}(x_\theta - x_\pi) + a_{2\theta}(x_\theta - x_\pi)^2. \quad (24)$$

Для определения величины координаты x_θ из уравнения (21) получаем квадратное уравнение. Решив его, будем иметь

$$x_\theta = x_\pi + \frac{b_1}{1 + \sqrt{1 + a_{2\theta}\Delta t \frac{b_1}{1 + a_{1\theta}0.5\Delta t}}}. \quad (25)$$

Здесь

$$b_1 = \frac{2(x_B - x_\pi) - (\Phi_B + \Phi_\pi)\Delta t}{1 + 0.5\Delta t a_{1\theta}}.$$

Зная x_θ , величины ГДП квадратичным интерполированием из узловых точек на n -м временном слое пересчитаем в точку x_θ . В результате будем знать величины ГДП в каждой точке $x = x_\theta$.

Однако коэффициент b_1 в выражении для x_θ содержит слагаемое Φ_B , относящееся к $(n+1)$ -му временному слою и пока ещё не известное. Поэтому решение задачи по определению величин координат x_A и x_D разделим на два этапа. На первом этапе уравнение (21), относящееся к точкам A и D , будем решать, предполагая, что величины ГДП в точке B равны таковым в точках A и D . Поэтому вместо уравнения (21) будем иметь

$$x_B - x_\theta = \Phi_\theta \Delta t. \quad (26)$$

Здесь

$$\Phi_A = (v + c)_A; \Phi_D = v_D.$$

Переменную Φ , как функцию координаты x на n -м временном слое, по-прежнему записываем в виде (22). Поэтому для Φ_θ будем иметь равенство (24). Подставим его в уравнение (26). Получим

$$x_B - x_\theta = \Delta t \left[\Phi_\pi + a_{1\theta}(x_\theta - x_\pi) + a_{2\theta}(x_\theta - x_\pi)^2 \right] \quad (27)$$

квадратное уравнение. Решая его, будем иметь

$$x_\theta = x_\pi + \frac{b_2}{1 + \sqrt{1 + 2a_{2\theta}\Delta t \frac{b_2}{1 + a_{1\theta}\Delta t}}}, \quad (28)$$

$$b_2 = 2 \frac{x_B - x_\pi - \Phi_\pi \Delta t}{1 + a_{1\theta}\Delta t}.$$

Из уравнения (27) для θ , равного A или D , получим координаты x_A и x_D . После этого, квадратичным интерполированием значений ГДП, в точки x_A и x_D найдём их величины в этих точках. Имея величины ГДП в точках A и D можно приступить к расчёту величин ГДП в точке B .

Величину давления в точке B будем задавать. После этого из уравнения (20) найдём величину плотности ρ_B . При заданном давлении и найденной плотности из уравнения (18) определим величину скорости потока газов v_B . Имея величины ГДП в точке B , значения координат x_A и x_D с помощью уравнения (25) можно уточнить. А квадратичным интерполированием значений ГДП в точки x_A и x_D найдём их уточнённые величины в этих точках. После этого с помощью уравнения (25) находим величину координаты x_C . Квадратичным интерполированием значений ГДП в точку C , найдём значения ГДП в этой точке. Найденные величины ГДП подставляем в уравнение (19). Получим невязку σ_{0i} . Введём в рассмотрение величину допустимой невязки σ_* , соответствующей требуемой точности решения уравнения (19). И если полученная невязка

$$\sigma_{0i} \leq \sigma_*, \quad (29)$$

то величина давления p_B была задана правильно.

Поэтому вопросу определения правильно прогнозируемой величины давления p_B следует уделить специальное внимание, чтобы не выполнять лишних дополнительных расчётов. Величина p_B может быть равна

$$p_B = p_{in} + \delta p_{in}, \quad (30)$$

где p_{in} – величина давления в i -й точке на n -м временном слое; δp_{in} – изменение давления при переходе с $(n-1)$ -го временного слоя на n -й.

Но лучше воспользоваться двумя шагами изменения давления δp_{in} и $\delta p_{i(n-1)}$ (при переходе с $(n-2)$ -го временного слоя на $(n-1)$ -й). В этом случае можем записать

$$p_i = p_{in} + a_{1ip}(t - t_n) + a_{2ip}(t - t_n)^2. \quad (31)$$

Имея $p_i = p_{i(n-1)}$ при $t_i = t_{(n-1)}$ и $p_i = p_{i(n-2)}$ при $t_i = t_{(n-2)}$, получим два равенства для определения коэффициентов a_{1ip} и a_{2ip} . Определив a_{1ip} и a_{2ip} и подставив их выражения в равенство (31), при $t_i = t_{(n+1)}$ получим

$$p_{i(n+1)} = p_{in} + 2\delta p_{in} - \delta p_{i(n-1)}. \quad (32)$$

Видим, что если δp_{in} окажется равным $\delta p_{i(n-1)}$, то величина $p_{i(n+1)}$ при использовании равенства (32) окажется такой же, как и при использовании равенства (30). В общем же случае величины δp_{in} и $\delta p_{i(n-1)}$ совпадать не будут и

$$\delta p_{эф} = 2\delta p_{in} - \delta p_{i(n-1)}, \quad (33)$$

полученное с помощью равенства (33), учитывающее кривизну зависимости $p_i(t)$ при переходе с n -го временного слоя на $(n+1)$ -й, позволит получать более точную прогнозируемую величину давления $p_{i(n+1)}$.

Использование равенства (32) при переходе с n -го временного слоя на $(n+1)$ -й позволит на нескольких шагах интегрирования по времени без повторных приближений получать величины ГДП, удовлетворяющие неравенству (29).

Однако в нестационарном газодинамическом потоке могут распространяться волны сжатия и волны разрежения, при наличии которых на кривой $p(t)$ будут наблюдаться изломы. По тем же причинам кривая $p(t)$ может достаточно резко изменяться и без изломов при переходе с n -го временного слоя на $(n+1)$ -й. При этих условиях величины ГДП, найденные с использованием равенства (32) не будут удовлетворять неравенству (29). В таких ситуациях для кривой невязки $\sigma_i(p)$ уравнения (19) важно знать и использовать частную производную $\frac{\partial \sigma_i}{\partial p}$.

Как показывает практика вычислений, при решении конкретной задачи частная производная $\frac{\partial \sigma_i}{\partial p}$ для уравнения (19) изменяется не очень сильно для достаточно широкого диапазона изменения давления p_i .

Её приближённую величину найдём, если полученное с помощью равенства (32) давление $p_{i(n+1)}$ изменим на величину δp_i , составляющую, например, 0.01 от $p_{i(n+1)}$. Используя новое значение p_B , с помощью уравнений (20) и (18) находим плотность ρ_B и скорость движения газов v_B , не уточняя ни величины координат x_A , x_D и x_C , ни величины ГДП в этих точках. Полученные результаты подставляем в уравнение (18). Найдём невязку σ_{li} и рассчитаем приближённую величину частной производной $\frac{\partial \sigma_i}{\partial p} \cong \frac{\sigma_{li} - \sigma_{0i}}{\delta p_i}$. Имея величину $\frac{\partial \sigma_i}{\partial p}$, в соответствии с методом касательных Ньютона [10] решения трансцендентных уравнений можем записать уравнение касательной

$$\sigma_i = \sigma_{0i} + \frac{\partial \sigma_i}{\partial p} (p - p_{i(n+1)})$$

к кривой невязки $\sigma_i(p)$. При $\sigma_i = 0$ найдём уточнённое значение давления

$$p'_B = p_{i(n+1)} - \frac{\sigma_{0i}}{\frac{\partial \sigma_i}{\partial p}}. \quad (34)$$

Используя давление p'_B , с помощью уравнений (20) и (18) находим плотность ρ'_B и скорость движения газов v'_B соответственно при неизменных величинах координат x_A и x_D и, следовательно, неизменных величинах ГДП в этих точках.

После этого с помощью формулы (25), используя найденные в первом приближении величины ГДП в точке B , уточняем величины координат x_A и x_D и после этого рассчитываем уточнённые значения ГДП в этих точках. Имея уточнённые величины ГДП в точках A и D при том же давлении p'_B повторно находим плотность ρ''_B с помощью уравнения (20) и скорость движения газов v''_B , используя уравнение (18). С помощью найденных параметров p'_B , ρ''_B и v''_B уточняем величину координаты x_C и рассчитываем величины ГДП в этой точке. Величины найденных ГДП для точек B и C подставляем в уравнение (19) и находим

невязку σ_{2i} . С большой долей вероятности она будет удовлетворять условию (29). После этого переходим к расчёту величин ГДП в следующей $(i+1)$ -й точке на $(n+1)$ -м временном слое.

Предлагаемый алгоритм решения уравнений газовой динамики на каждую узловую точку будет затрачивать примерно в 2 раза больше машинного времени, чем явный разностный метод (в 1.67 из-за двух приближений при расчёте величин ГДП в точках A и D и плюс ещё 0.2, если примерно через каждые 10 шагов интегрирования по времени величину давления p_B с помощью равенства (33) при

известном значении частной производной $\frac{\partial \sigma_i}{\partial p}$ необходимо уточнять). А так как

при использовании неявного метода шаг Δt интегрирования во времени при одинаковой точности примерно в 40 раз больше, чем при использовании явного разностного метода [6], то время, затрачиваемое на решение одного варианта газодинамической задачи примерно в 20–25 раз будет меньше.

В качестве примера использования изложенного алгоритма выполним расчёт величин ГДП в точке B для дозвукового потока при известных значениях ГДП на n -м временном слое. Их значения в точках $i-2$, $i-1$, i и $i+1$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

**Величины давления, плотности, скорости движения газа
и скорости звука в узловых точках на n -м временном слое**

Координата, м Параметры	$i-2$	$i-1$	i	$i+1$
p , 10^5 кг/(с ² ·м)	5.134	5.0	4.90	4.822
ρ , кг/м ³	2.18	2.128	2.093	2.066
v , м/с	246.3	247.8	250.3	253.3
c , м/с	574.2	573.5	572.5	571.6

Шаг интегрирования по времени выбираем равным $\Delta t = 0.0002$ с. Тогда в 1-м приближении, используя формулы (26) – (28) для точек A и D , получим следующие величины координат x_A и x_D , приведенные в табл. 2 (верхние цифры).

Таблица 2

Величины координат точек A , D и C

Координата	x_A	x_D	x_C
Величина координаты, м	0.355584 (0.354762)	0.470192 (0.469237)	0.583428

Квадратичным интерполированием между узловыми точками в каждую из точек A и D найдём величины ГДП (давления, плотности и скорости движения газа) в этих точках. По найденным величинам давления и плотности газа найдём в этих точках величины скорости звука в газе, принимая $k = 1.4$. Полученные значения ГДП приведены в табл. 3.

Таблица 3

Величины ГДП в точках *A*, *D* и *C*

Координата	x_A	x_D	x_C
$p, 10^5 \text{ кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{м})$	5.073350 (5.074799)	4.945147 (4.946069)	4.849799
$\rho, \text{ кг}/\text{м}^3$	2.156366 (2.156929)	2.106457 (2.106804)	2.073693
$v, \text{ м}/\text{с}$	246.810577 (246.795585)	249.040304 (249.017090)	252.070707
$c, \text{ м}/\text{с}$	573.918158 (573.925443)	573.294582 (573.300396)	572.207646

Имея величины ГДП в точках *A* и *D*, можно приступить к расчёту их значений в точке *B*. Для этого величину давления p_B находим (прогнозируем) с помощью равенства (32). Имея $\delta p_{эф} = 0.02886 \cdot 10^5 \text{ кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{м})$, получим $p_B = 4.92886 \cdot 10^5 \text{ кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{м})$. При этой величине p_B и $k = 1.4$ с помощью равенства (20) находим плотность $\rho_B = 2.101566 \text{ кг}/\text{м}^3$. Имея величины давления и плотности, определяем значение скорости звука $c_B = 573.014672 \text{ м}/\text{с}$. После этого с помощью уравнения (18) найдём величину скорости потока $v_B = 258.747293 \text{ м}/\text{с}$. Получив величины ГДП в точке *B*, найденные в 1-м приближении, необходимо выполнить расчёт координат точек *A* и *D* во 2-м приближении. Их величины приведены в табл.2 в скобках. Видим, что величины координат точек *A* и *D* во 2-м приближении от 1-го отличаются не более, чем на одну единицу в третьей значащей цифре. Поэтому и величины ГДП в этих точках во 2-м приближении (таблица 3) практически совпадают с их значениями в 1-м приближении (разница в 4-х и более высоких по порядку расположения значащих цифрах).

Поэтому величины ГДП в точке *B* во 2-м приближении совпадают с их величинами в 1-м приближении. Далее, находим величину координаты x_C точки *C*. Её значение приведено в табл. 2. После этого квадратичным интерполированием в точку *C* находим величины ГДП в этой точке. Их значения приведены в табл. 3. Величины ГДП в точках *B* и *C* подставляем в уравнение (19), поделив его слева и справа на 10^5 , чтобы не иметь дела со слишком большими числами. Получаем $\sigma_0 = 0.00075 \text{ кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{м})$. Если σ_* принять равной $10^{-3} \text{ кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{м})$, то неравенство (29) будет выполнено и можно переходить к расчёту величин ГДП в следующей $(i + 1)$ -й узловой точке на $(n + 1)$ -м временном слое.

Заключение

На основе одномерных нестационарных уравнений газовой динамики, преобразованных к виду вдоль характеристических направлений, на шаге интегрирования по времени Δt получены со 2-м порядком точности уравнения для любого характеристического треугольника, соответствующего *i*-й внутренней точке канала на $(n + 1)$ -м временном слое.

Сформулирован алгоритм решения полученных уравнений, выполняющихся вдоль характеристических направлений, неявным методом со 2-м порядком точ-

ности как при интегрировании по времени t , так и при расчётах вдоль пространственной координаты x на заданной сетке для области (t, x) .

Для i -й внутренней точки канала выполнен пример расчёта величин ГДП при переходе с n -го временного слоя на $(n+1)$ -й. Показана хорошая сходимость вычислительного процесса и высокая эффективность использования предлагаемого алгоритма при решении газодинамических задач неявным методом характеристик по сравнению с явным разностным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С.А. Задача Cauchy для нелинейных уравнений гиперболического типа // Математический сборник. Новая серия. 1937. Т. 2(44). Вып. 5. С. 871–899.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматгиз, 1959. 620 с.
3. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982.
4. Вязников К.В., Тишков В.Ф., Фаворский А.П. Построение монотонных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа // Математическое моделирование. 1989. Т. 1. № 5. С. 95–120.
5. Ермолаев Б.С., Новожилов Б.В., Посвянский В.С., Сулимоа А.А. Результаты численного моделирования конвективного горения порошкообразных взрывчатых систем при возрастании давления // Физика горения и взрыва. 1985. № 5. С. 3–12.
6. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1977.
7. Внутренняя баллистика РДТТ / под ред. А.М. Липанова и Ю.М. Милёхина. М.: Машиностроение, 2007. 502 с.
8. Бетехтин С.А., Виноцкий А.М., Горохов М.С., Станюкович К.П., Федотов И.Д. Газодинамические основы внутренней баллистики. М.: Оборонгиз, 1957. 386 с.
9. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1967. 559 с.
10. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1986. 544 с.

Статья поступила 15.03.2021

Lipanov A.M. (2021) APPLICATION OF THE IMPLICIT METHOD OF CHARACTERISTICS ON A REGULAR GRID FOR SOLVING THE GAS-DYNAMIC PROBLEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 80–92

DOI 10.17223/19988621/72/7

Keywords: implicit method, characteristics, gas dynamics, interior point.

In this work, an implicit method is proposed to numerically solve a system of the one-dimensional nonstationary equations of gas dynamics transformed by the method of characteristics. Internal points of the channel for a solid-propellant charge are considered at a pre-ignition period of the solid-propellant rocket engine operation. The use of the implicit method makes it possible to calculate the values of gas-dynamic parameters at nodal points of the regular coordinate grid. Calculations of the gas-dynamic parameters both when integrating over time and along the spatial coordinate are performed with the second order of accuracy. Both subsonic and supersonic flows are studied. It is shown that, when predicting the expected pressure value during the transition from one time layer to another with the second order of accuracy, the twenty-fold efficiency of the implicit method is achieved in comparison with the explicit difference method. The trial calculation is performed.

Aleksey M. LIPANOV (Academician of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor, Institute of Applied Mathematics M.V. Keldysh RAS, Moscow, Russian Federation). E-mail: aml35@yandex.ru

REFERENCES

1. Khristianovich S.A. (1937) Zadacha Cauchy dlya nelineynykh uravneniy giperbolicheskogo tipa [Cauchy problem for nonlinear hyperbolic equations]. *Matematicheskiiy sbornik. Novaya seriya*. 44(5). pp. 871–899.
2. Berezin I.S., Zhidkov N.P. (1959) *Metody vychisleniy* [Calculation methods]. Moscow: Fizmatgiz.
3. Belotserkovskiy O.M., Davydov Yu.M. (1982) *Metod krupnykh chastits v gazovoy dinamike* [Method of large particles in gas dynamics]. Moscow: Nauka.
4. Vyaznikov K.V., Tishkov V.F., Favorskiy A.P. (1989) Postroenie monotonnnykh skhem povyshennogo poryadka approksimatsii dlya sistem uravneniy giperbolicheskogo tipa [Construction of monotone schemes of higher order of approximation for systems of hyperbolic equations]. *Zhurnal Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*. 1(5). pp. 95–120.
5. Ermolaev B.S., Novozhilov B.V., Posvyanskiy V.S., Sulimoa A.A. (1985) Rezul'taty chislennogo modelirovaniya konvektivnogo goreniya poroshkoobraznykh vzryvchatykh sistem pri vozrastanii davleniya [Numerical modeling results for convective combustion of powdery explosive systems at increasing pressure]. *Fizika goreniya i vzryva – Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 5. pp. 3–12.
6. Samarskiy A.A. (1977) *Vvedeniye v teoriyu raznostnykh skhem* [Introduction to the theory of difference schemes]. Moscow: Nauka.
7. Lipanov A.M., Milekhin Yu.M. (2007) *Vnutrennyaya ballistika RDTT* [Internal ballistics of solid propellants]. Moscow: Mashinostroenie.
8. Betekhtin S.A., Vinitskiy A.M., Gorokhov M.S., Stanyukovich K.P., Fedotov I.D. (1957) *Gazodinamicheskie osnovy vnutrenney ballistiki* [Gas-dynamic foundations of internal ballistics]. Moscow: Oborongiz.
9. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. (1967) *Teoreticheskaya gidromekhanika, chast' 2* [Theoretical hydromechanics, part 2]. Moscow: Fizmatgiz.
10. Bronstein I.N., Semendyaev K.A. (1986) *Spravochnik po vysshey matematike* [Handbook of higher mathematics]. Moscow: Nauka.

Received: March 15, 2021