

УДК 532.5

DOI 10.17223/19988621/72/8

З.М. Маликов, М.Э. Мадалиев

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ С ВНЕЗАПНЫМ РАСШИРЕНИЕМ

Проводится численное исследование внезапно расширяющегося сильно закрученного потока с помощью моделей Рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM и EARSМ. Полученные результаты сравниваются с известными экспериментальными данными. Целью настоящей работы является проверка способности моделей описывать анизотропную турбулентность. Показано, что модель SSG/LRR-RSM является более подходящей для исследования подобных течений.

Ключевые слова: осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье – Стокса, явные алгебраические модели напряжения Рейнольдса, модель SSG/LRR-RSM-w2012, вихревая вязкость, прогонка, SIMPLE.

В настоящее время для решения задач турбулентности используются метод прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS) [1, 2], метод моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) [3] и метод осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса (Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations, RANS). Современные возможности метода DNS с определением всех составляющих движения ограничены расчетами при относительно невысоких числах Рейнольдса, не превышающих величину порядка 10^3 . Метод LES по сравнению с DNS может применяться для расчетов течений с существенно большими числами Рейнольдса. Однако использование метода LES для расчета пристеночных течений требует либо введения дополнительного «эмпиризма», заключающегося в параметризации прилегающего к стенке слоя, либо применения сеток, приближающихся по своим характеристикам к сеткам метода DNS [4]. Например, в работе [5] метод LES применен для расчета внезапно расширяющегося закрученного потока. Однако для этого была использована трехмерная блочно-структурированная сетка в количестве 716 тыс. ячеек, что привело к большим затратам вычислительных ресурсов.

Поэтому для технических приложений более применимыми являются методы, которые базируются на решении уравнений Навье – Стокса, осредненные по Рейнольдсу. Эти методы называются RANS-моделями турбулентности. Большинство моделей турбулентности RANS используют обобщенную гипотезу Буссинеска, которая связывает тензоры Рейнольдсовых напряжений с тензорами скоростей деформаций, что является аналогом реологического закона Ньютона для молекулярной вязкости. Достоинством гипотезы Буссинеска является то, что она позволяет сократить количество определяемых в процессе моделирования переменных с 6 до 1. Модели, в основе которых лежит гипотеза Буссинеска называются линейными. Однако в основе этой гипотезы лежит изотропная турбулентность. Поэтому в анизотропных турбулентных течениях гипотеза Буссинеска несправедлива и ее использование приводит к получению качественно неверного результата.

Следовательно, в таких случаях необходимо использование нелинейных моделей, где не используется гипотеза Буссинеска.

К нелинейным RANS-моделям можно отнести модели Рейнольдсовых напряжений. Представителем из данного класса моделей является модель SSG/LRR-RSM. Эта модель напряжений Рейнольдса со вторым моментом смешанного SSG/LRR, в которых используется уравнение ω для уравнения масштаба длины. Модели напряжений Рейнольдса с полным вторым моментом сильно отличаются от более простых линейных или нелинейных моделей с одним уравнением, так как последние используют конститутивное соотношение, дающее напряжения Рейнольдса τ_{ij} в терминах других тензоров через некоторое предполагаемое соотношение (такое, как гипотеза Буссинеска). С другой стороны, полные модели напряжений Рейнольдса второго момента вычисляют каждое из 6 напряжений Рейнольдса напрямую (тензор напряжений Рейнольдса симметричен, поэтому имеется 6 независимых членов). Каждое напряжение Рейнольдса имеет свое собственное уравнение переноса. Существует также седьмое уравнение переноса для переменной, определяющей масштаб. Данная модель в настоящее время в основном используется там, где обычные RANS-модели не в состоянии описывать сложные анизотропные турбулентные течения.

Существуют также облегченный вариант модели Рейнольдсовых напряжений, это так называемая алгебраическая модель напряжений Рейнольдса. Например, в работе [6, 7] Hellsten, Wallin и Johansson была предложена нелинейная модель *EARSM* $k-\omega$. В этой модели также используется гипотеза Буссинеска, однако вводится дополнительный нелинейный член. Данная модель была успешно применена для решения ряда задач с анизотропной турбулентностью.

Недавно появилась работа одного из соавторов настоящей статьи [8], где предложен иной подход к проблеме турбулентности. В указанной работе получена математическая модель турбулентности на основе нового подхода, которая способна описывать анизотропную турбулентность. Еще одно достоинство новой математической модели – это то, что она проста для решения инженерных задач. Однако вышеуказанные нелинейные модели RANS уже широко используются практически во всех пакетах программ для расчета турбулентных течений. Поэтому целью настоящей работы является тестирование моделей SSG/LRR-RSM и *EARSM* $k-\omega$ для внезапно расширяющегося закрученного потока. Для верификации, проводится сравнение численных результатов этих моделей с известными экспериментальными данными [9].

Постановка задачи

Схема канала с внезапным расширением приведена на рис. 1. Область течения представляла собой канал радиусом 1 м и длиной 1 м, расширяющийся в канал радиусом 2 м и длиной 40 м (рис. 1). Сильно закрученный поток из маленького канала поступал в большой канал со следующими характеристиками [9]:

$$Re = 3.0 \cdot 10^4, S_w = 0.6,$$

где число Рейнольдса определяется как

$$Re = \frac{\rho U_{in} D}{\mu}.$$

Здесь U_{in} – среднерасходная скорость на входе, D – диаметр меньшей трубы, ρ – плотность, а μ – динамическая вязкость.

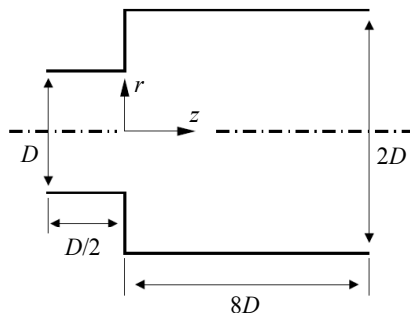


Рис. 1. Схема канала с внезапным расширением
Fig. 1. Schematic representation of a channel with an abrupt expansion

Степень закрутки потока определяется как

$$S_w = \frac{1}{R} \frac{\int_0^R r^2 U W dr}{\int_0^R r W^2 dr}, \quad (1)$$

где R – радиус; r – радиальное положение; U – осевая, а W – тангенциальная скорости.

Известно, что если ограниченная струя закручивается достаточно сильно, образуется центральная точка застоя и область рециркуляции. Разрушение вихря обычно происходит после точки застоя из-за быстрого расширения тонкого вихря в гораздо более широкий вихрь [10]. Турбулентный вихревой поток через внезапное осесимметричное расширение обладает несколькими отчетливо различными режимами потока, такими, как разделение, одна или две области рециркуляции, высокие уровни турбулентности и периодическая асимметрия при некоторых условиях. Разрушение вихря часто вызывает крупномасштабную прецессирующую спиральную когерентную структуру. Известно, что расходящийся характер расширяющегося потока инициирует и блокирует место разрушения вихря и неустойчивости потока. Многие исследователи сообщают об экспериментальных [11], аналитических [12] и численных исследованиях [13] разрушения вихрей. Этот тип потока, однако, все еще не совсем понятен, особенно для сильно закрученного потока с числом вихрей около единицы.

Есть только несколько подробных численных исследований, которые тщательно анализируют когерентные структуры и разрушение вихрей при внезапном расширении [14, 15]. Пробой вихря происходит, когда степень закрутки потока превышает критическое значение [16]. Он характеризуется профилем скорости в виде следа с точкой застоя, за которой следует изменение направления потока. При высокой степени закрутки ($S_w \geq 0.6$) вихревая струя, возникающая в результате внезапного расширения, отклоняется к стенке, внешняя область рециркуляции уменьшается и становится очевидным изменение направления потока вблизи центральной линии расширения [9].

Математическое моделирование задачи

Для моделирования поставленной задачи использовалась система уравнений Навье – Стокса, осредненных по Рейнольдсу в цилиндрической системе координат [17]:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial rV}{r\partial r} = 0, \\ \frac{dU}{dt} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial U}{r\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{r\partial r} (-rv'u') + \frac{\partial}{\partial z} (-u'u'), \\ \frac{dV}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial V}{r\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{V}{r^2} \right) + \frac{\partial}{r\partial r} (-rv'v') + \frac{\partial}{\partial z} (-u'v') - \frac{1}{r} (-w'v'), \\ \frac{dW}{dt} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\partial W}{r\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{W}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} (-v'w') + \frac{\partial}{\partial z} (-w'u') + \frac{2}{r} (-v'w'). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь U, V, W – соответственно аксиальная, радиальная и тангенциальная составляющие вектора скорости воздушного потока; p – гидростатическое давление; ρ – плотность газа; ν – молекулярная его вязкость; $\rho u'v', \rho u'u', \rho u'w', \rho v'w', \rho v'v', \rho w'w'$ – компоненты тензора Рейнольдсовых напряжений.

В качестве начальных условий задавались параметры закрученного потока во всей расчетной области. Для численного расчета на входе задавался экспериментальный профиль скорости, измеренный для сечения $z/D = -0.5D$, соответствующего расположению входа расчетной области.

На стенках ставились условия прилипания:

$$U|_{r=R} = 0, V|_{r=R} = 0, W|_{r=R} = 0,$$

а на оси:

$$U|_{r=0} = \frac{\partial U}{\partial r}, V|_{r=0} = 0, W|_{r=0} = 0.$$

На выходе ставились условия экстраполяции [24].

Система уравнений Навье – Стокса, осредненная по Рейнольдсу (2), является незамкнутой. Для замыкания в методе EARSМ используется нелинейная гипотеза Буссинеска

$$\tau_{ij} = -u_i' u_j' = 2\nu_t \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} - a_{ij}^{ex} k.$$

Здесь ν_t – турбулентная вязкость; S_{ik} – тензор скоростей деформации; W_{ik} – тензор завихренности; δ_{ij} – символ Кронекера и тензор

$$a_{ij}^{(ex, 2D)} = \beta_4^{2D} (S_{ik}^* W_{kj}^* - W_{ik}^* S_{kj}^*).$$

Остальные величины подробно представлены в [6, 7]. Турбулентная вязкость вычислялась по формуле

$$\nu_t = \frac{C_\mu k}{\beta^* \omega}.$$

Чтобы найти энергию турбулентности k и удельную скорость диссипации ω используется модель турбулентности k – ω Вилкокса. Модель с двумя уравнениями (записанная в форме сохранения) определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial U_k k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + P - \beta^* \omega k, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial U_k \omega}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] + \frac{\gamma \omega}{k} P - \beta \omega^2 + \frac{\sigma_d}{\omega} \max \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k} \frac{\partial k}{\partial x_k}, 0 \right). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь P – генерация; $\sigma_k, \sigma_\omega, \sigma_d, \gamma$ – масштабные константы. Остальные функции и константы для модели k – ω представлены в [18].

Модель напряжений Рейнольдса SSG/LRR-RSM изложена в работах [19, 20], поэтому здесь приведем лишь уравнения для напряжений и длины масштаба:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial U_k R_{ij}}{\partial x_k} &= P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + D_{ij}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial U_k \omega}{\partial x_k} &= \frac{a_\omega \omega}{k} \frac{P_{kk}}{2} - B_\omega \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(\mu + \sigma_\omega \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) + \sigma_d \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\rho R_{ij} = -\tau_{ij} = \rho u_i' u_j'$; P_{ij} – генерация Рейнольдсовых напряжений; D_{ij} – диффузия; ε_{ij} – диссипация; Π_{ij} – член перераспределения давления.

Для численной реализации уравнений (2), (3) и (4) использовалась равномерная сетка 200×200 . Уравнения в безразмерный вид приводились соотношением всех скоростей к U_{in} , а пространственные масштабы – к радиусу меньшей трубы. При этом производные в радиальном направлении в уравнениях аппроксимировались в неявном виде центральной разностью, а конвективные члены в продольном направлении аппроксимировались в явном виде против потока со вторым порядком точности [21]. Поэтому использованная схема имела погрешности порядка $o(\Delta t, \Delta z^2, \Delta r^2)$. Для реализации полунейвной схемы использован метод прогонки в радиальном направлении. Численный эксперимент показал, что увеличение числа узлов сетки практически не влияет на конечные результаты. Интегрирование по времени проводилось безразмерным шагом $\Delta t = 0.0001$. Коррекции давления и скоростей потока производились методом SIMPLEC [23, 25] и использовалась шахматная разностная сетка методом контрольного объема.

Обсуждение результатов

На рис. 2 приведены графики сравнения расчетных и экспериментальных данных. На рисунках представлены профили тангенциальной W и осевой U составляющих скорости в двух измеренных сечениях на расстояниях от входа в широкий канал: $z/D = 0.25$ и $z/D = 0.75$.

Расчетные профили аксиальной и тангенциальной компонент скорости, представленные на рис. 2, показывают, что модель турбулентности SSG/LRR-RSM во всех сечениях дает более близкие результаты к опытным данным [22], чем по модели EARSM. Таким образом, рассмотренная задача показывает, что моделирование закрученных турбулентных потоков требует специального подхода к моделям турбулентности. Поскольку закрутка потока подавляет генерацию турбулентности, то избыточная турбулентная вязкость на входе может привести к существенному искажению решения и быстрому размыванию концентрированного вихря. По той же причине для получения более корректных результатов следует использовать модели турбулентности, учитывающие закрутку усредненного потока. В этом отношении модель SSG/LRR-RSM является приемлемой для расчета подобных сложных течений.

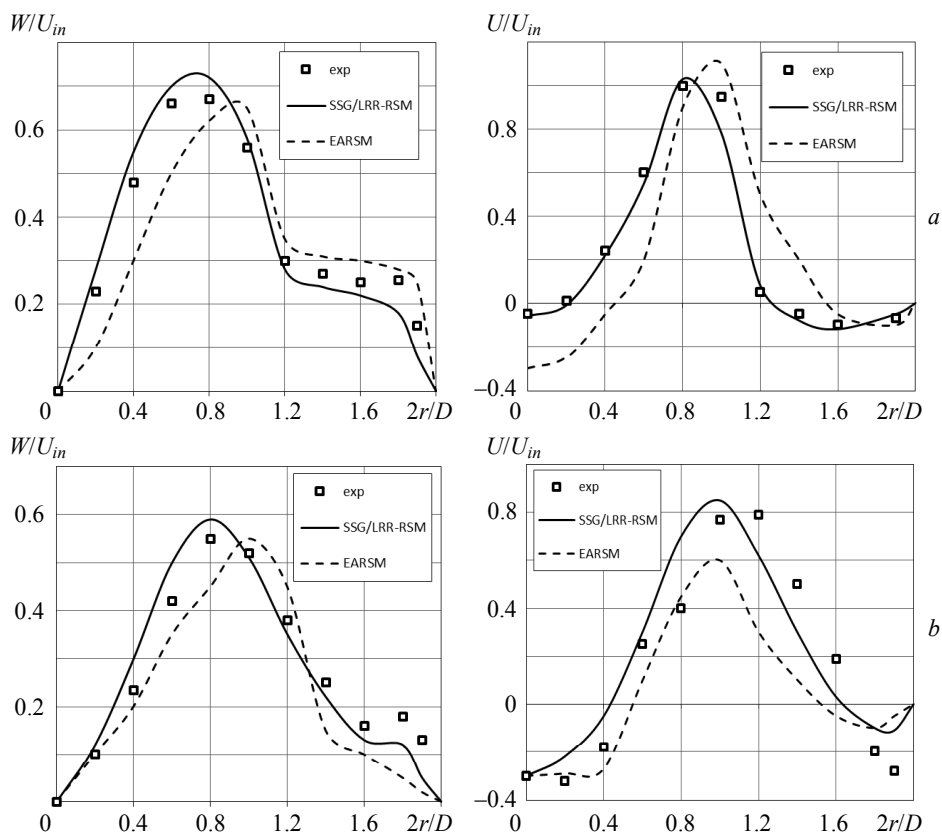


Рис. 2. Профили тангенциальной (W) и аксиальной (U) компонент скорости в сечениях $z = 0.25D$ (a), $z = 0.75D$ (b)

Fig. 2. Profiles of tangential (W) and axial (U) velocity components in sections $z =$ (a) $0.25D$ and (b) $0.75D$

ЛИТЕРАТУРА

1. Versteegh T.A., Nieuwstadt F.T.M. Turbulent budgets of natural convection in an infinite, differentially heated, vertical channel // Intern. J. Heat Fluid Flow. 1998. V. 19. P. 135–149.
2. Boudjemadi R., Maupu V., Laurence D., Le Quere P. Direct numerical simulation of natural convection in a vertical channel: A tool for second-moment closure modelling // Proc. Engineering Turbulence Modelling and Experiments 3. Amsterdam: Elsevier, 1996. P. 39.
3. Peng S.-H., Davidson L. Large eddy simulation of turbulent buoyant flow in a confined cavity // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2001. V. 22. P. 323–331.
4. Cabot W., Moin P. Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow // Flow, Turbulence and Combustion. 1999. V. 63. P. 269–291.
5. Сентябрьев А.В., Гаврилов А.А., Дектерев А.А. Исследование моделей турбулентности для расчета закрученных течений // Теплофизика и аэромеханика. 2011. Т. 18. № 1. С. 81–94.
6. Hellsten A. New advanced $k-\omega$ turbulence model for high-lift aerodynamics // AIAA Journal. 2005. V. 43. No. 9. P. 1857–1869.
7. Валлин С., Йоханссон А.В. Явная алгебраическая модель напряжений Рейнольдса для несжимаемых и сжимаемых турбулентных течений // Жидкостная механика. 2000. Т. 403. С. 89–132.

8. *Malikov Z.M., Madaliev M.E.* Numerical simulation of two-phase flow in a centrifugal separator. fluid dynamics. 2020. V. 55. No. 8. P. 1012–1028.
9. *Dellenback P.A., Metzger D.E., Neitzel G.P.* Measurements in turbulent swirling flow through an abrupt axisymmetric expansion // *AIAA J.* 1988. V. 26(6). P. 669–681.
10. *Leibovich S.* Vortex stability and breakdown: survey and extension // *AIAA J.* 1984. V. 22. P. 1192–1206.
11. *Wang P., Bai X.S., Wessman M., Klingmann J.* Large eddy simulation and experimental studies of a confined turbulent swirling flow // *Phys. Fluids.* 2004. V. 16. P. 3306–3324. DOI: 10.1063/1.1769420.
12. *Gyllenram W., Nilsson H., Davidson L.* On the failure of the quasi-cylindrical approximation and the connection to vortex breakdown in turbulent swirling flow // *Phys. Fluids.* 2007. V. 19. P. 045108.
13. *Nilsson H.* Simulations of the vortex in the Dellenback abrupt expansion, resembling a hydro turbine draft tube operating at part-load // 26th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems. Beijing, China, 2012.
14. *Mak H., Balabani S.* Near field characteristics of swirling flow past a sudden expansion. *Chem. Eng. Sci.* 2007. V. 62. P. 6726–6746.
15. *Gyllenram W., Nilsson H. and Davidson L.* Large eddy simulation of turbulent swirling flow through a sudden expansion // 23rd IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems. Yokohama, Japan, 2006.
16. *Gyllenram W. and Nilsson H.* Design and validation of a scale-adaptive filtering technique for LRN turbulence modeling of unsteady flow // *J. Fluid Eng.-T ASME.* 2008. V. 130(5).
17. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
18. *Wilcox D.C.* Turbulence Modeling for CFD. California, 1994.
19. *Lauder B.E., Reece G.J., Rodi W.* Progress in the development of a Reynolds – stress turbulence closure // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 68. P. 537–566.
20. *Speziale C.G., Sarkar S., Gatski T.B.* Modeling the pressure strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 227. P. 245–272.
21. *Nazarov F.X., Malikov Z.M., Rakhmanov N.M.* Simulation and numerical study of two-phase flow in a centrifugal dust catcher // *AMSD-2019 Journal of Physics: Conference Series* 1441 (2020) 012155 IOP Publishing. DOI: 10.1088/1742-6596/1441/1/012155.
22. *Julianne C. Dudek., Jan-Renee Carlson.* Evaluation of full Reynolds stress turbulence models in Fun3D // NASA/TM–2017-219468. P. 1–36, Texas, January 9–13, 2017.
23. *Турубаев Р.Р., Шваб А.В.* Численное исследование аэродинамики закрученного потока в вихревой камере комбинированного пневматического аппарата // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2017. № 47. С. 87–98.
24. *Хмелева М.Г., Даммер В.Х., Тохметова А.Б., Миньков Л.Л.* Численное исследование вихреобразования в жидком металле под действием дискового завихрителя // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2017. № 46. С. 76–85.
25. *Маликов З.М., Мадалиев М.Э.* Математическое моделирование турбулентного течения в центробежном сепараторе. // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2021. № 71. С. 121–138.

Статья поступила 24.02.2020

Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2021) NUMERICAL STUDY OF A SWIRLING TURBULENT FLOW THROUGH A CHANNEL WITH AN ABRUPT EXPANSION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 72. pp. 93–101

DOI 10.17223/19988621/72/8

Keywords: Reynolds-averaged Navier–Stokes equations, explicit algebraic Reynolds stress models, SSG/LRR-RSM-w2012 model, eddy viscosity, SIMPLE.

A strongly swirling turbulent flow through an abrupt expansion is studied using the highly resolved DNS, LES, and SAS to shed more light on a stagnation region and spiral vortex destruction, though these methods require high computational expenses. The vortex fracture induced by a sudden expansion resembles the so-called vortex rope that occurs in hydropower draft tubes. It is known that large-scale spiral vortex structures can be captured by regular RANS turbulence models. In this paper, a numerical study of a strongly swirling flow, which abruptly expands, is carried out using the Reynolds stress models SSG / LRR-RSM and EARSM with experimental measurements implemented by Dellenback et al. (1988). Calculations are carried out using the finite volume method. The flow dynamics is studied at the Reynolds number of 3.0×10^4 at almost constant large swirl numbers of 0.6. The time-averaged velocity and pressure fields, as well as the root-mean-square values of the velocity fluctuations are recorded and studied qualitatively.

The obtained results are compared with known experimental data. The aim of this work is to test the ability of the models to describe anisotropic turbulence. It is shown that the SSG / LRR-RSM model is more appropriate for studying such flows.

Zafar M. MALIKOV (Doctor of Technical Sciences, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbayev, Tashkent, Republic of Uzbekistan). E-mail: malikov.z62@mail.ru

Murodil E. MADALIEV (Fergana Polytechnic Institute, Fergana, Republic of Uzbekistan). E-mail: Madaliev.ME2019@mail.ru

REFERENCES

1. Versteegh T.A., Nieuwstadt F.T.M. (1998) Turbulent budgets of natural convection in an infinite, differentially heated, vertical channel. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 19(2). pp. 135–149. DOI: 10.1016/S0142-727X(97)10018-2.
2. Boudjemadi R., Maupu V., Laurence D., Le Quere P. (1996) Direct numerical simulation of natural convection in a vertical channel: a tool for second-moment closure modelling. *Engineering Turbulence Modelling and Experiments*. 3. Amsterdam: Elsevier.
3. [Peng S.H., Davidson L. (2001) Large eddy simulation of turbulent buoyant flow in a confined cavity. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 22(3). pp. 323–331. DOI: 10.1016/S0142-727X(01)00095-9.
4. Cabot W., Moin P. (1999) Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow. *Flow Turbulence and Combustion*. 63. pp. 269–291. DOI: 10.1023/A:1009958917113.
5. Sentyabov A.V., Gavrilov A.A., Dekterev A.A. (2011) Issledovanie modeley turbulentnosti dlya rascheta zakruchennykh techeniy [Study of turbulence models for calculating swirling flows]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 18(1). pp. 81–94.
6. Hellsten A. (2005) New advanced $k-\omega$ turbulence model for high-lift aerodynamics. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 43(9). pp. 1857–1869. DOI: 10.2514/1.13754.
7. Wallin S., Johansson A.V. (2000) An explicit algebraic model of Reynolds stresses for incompressible and compressible turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*. 403. pp. 89–132. DOI: 10.1017/S0022112099007004.
8. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2020) Numerical simulation of two-phase flow in a centrifugal separator. *Fluid Dynamics*. 55(8). pp. 1012–1028. DOI: 10.1134/S0015462820080066.
9. Dellenback P.A., Metzger D.E., Neitzel G.P. (1988) Measurements in turbulent swirling flow through an abrupt axisymmetric expansion. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 26(6). pp. 669–681. DOI: 10.2514/3.9952.
10. Leibovich S. (1984) Vortex stability and breakdown: survey and extension. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 22. pp. 1192–1206. DOI: 10.2514/3.8761.

11. Wang P., Bai X.S., Wessman M., Klingmann J. (2004) Large eddy simulation and experimental studies of a confined turbulent swirling flow. *Physics of Fluids*. 16(9). pp. 3306–3324. DOI: 10.1063/1.1769420.
12. Gyllenram W., Nilsson H., Davidson L. (2007) On the failure of the quasi-cylindrical approximation and the connection to vortex breakdown in turbulent swirling flow. *Physics of Fluids*. 19(4). Article 045108. pp. 1–10. DOI: 10.1063/1.2717724.
13. Nilsson H. (2012) Simulations of the vortex in the Dellenback abrupt expansion, resembling a hydro turbine draft tube operating at part-load. *26th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems, Beijing, China*. DOI: 10.1088/1755-1315/15/2/022016.
14. Mak H., Balabani S. (2007) Near field characteristics of swirling flow past a sudden expansion. *Chemical Engineering Science*. 62(23). pp. 6726–6746. DOI: 10.1016/j.ces.2007.07.009.
15. Gyllenram W., Nilsson H., Davidson L. (2006) Large eddy simulation of turbulent swirling flow through a sudden expansion. *23rd IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems, Yokohama, Japan*.
16. Gyllenram W., Nilsson H. (2008) Design and validation of a scale-adaptive filtering technique for LRN turbulence modeling of unsteady flow. *Journal of Fluid Engineering*. 130(5). Article 051401. pp. 1–10. DOI: 10.1115/1.2911685.
17. Loytsyanskiy L.G. (1987) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow: Nauka.
18. Wilcox D.C. (1998) *Turbulence Modeling for CFD*. La Canada, California: DCW Industries, Inc.
19. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. (1975) Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *Journal of Fluid Mechanics*. 68(3). pp. 537–566. DOI: 10.1017/S0022112075001814.
20. Speziale C.G., Sarkar S., Gatski T.B. (1991) Modeling the pressure strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. *Journal of Fluid Mechanics*. 227. pp. 245–272. DOI: 10.1017/S0022112091000101.
21. Nazarov F.Kh., Malikov Z.M., Rakhmanov N.M. (2020) Simulation and numerical study of two-phase flow in a centrifugal dust catcher. *Journal of Physics: Conference Series*. 1441. Article 012155. DOI: 10.1088/1742-6596/1441/1/012155.
22. Dudek J.C., Carlson J.-R. (2017) Evaluation of Full Reynolds Stress Turbulence Models in Fun3D. *NASA/TM-219468*. pp. 1–36. DOI: 10.2514/6.2017-0541.
23. Turubaev R.R., Shvab A.V. (2017) Chislennoe issledovanie aerodinamiki zakruchennogo potoka v vikhreвой kamere kombinirovannogo pnevmaticheskogo apparata [Numerical study of swirled flow aerodynamics in the vortex chamber of the combined pneumatic machine]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 87–98. DOI: 10.17223/19988621/47/9.
24. Khmeleva M.G., Dammer V.Kh., Tokhmetova A.B., Min'kov L.L. (2017) Chislennoe issledovanie vikhreobrazovaniya v zhidkom metalle pod deystviem diskovogo zavikhritelya [Numerical investigation of the vortex formation in a liquid metal under the action of disk agitator]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 76–85. DOI: 10.17223/19988621/46/10.
25. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2021) Matematicheskoe modelirovanie turbulentnogo techeniya v tsentrobeznom separatore [Mathematical modeling of a turbulent flow in a centrifugal separator]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 71. pp. 121–138. DOI: 10.17223/19988621/71/10.

Received: February 24, 2020