

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ И ПРОГРАММИРОВАНИЯ

УДК 519.714

О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ СИСТЕМЫ МОНОМОВ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ СХЕМАМИ КОМПОЗИЦИИ

С. А. Корнеев

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия
Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша Российской академии наук,
г. Москва, Россия*

Исследуется сложность реализации систем мономов схемами композиции. Для этой вычислительной модели установлена сложность реализации системы из p мономов от двух переменных с точностью до слагаемого порядка p . Показано, что для схем композиции, в отличие от других моделей, асимптотика роста сложности реализации системы из ограниченного числа мономов от двух переменных, вообще говоря, не определяется сложностью никакого несобственного подмножества мономов.

Ключевые слова: система мономов, сложность вычисления, схемная сложность, схема композиции.

DOI 10.17223/20710410/53/7

THE COMPLEXITY OF IMPLEMENTATION OF A SYSTEM OF MONOMIALS IN TWO VARIABLES BY COMPOSITION CIRCUITS

S. A. Korneev

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

E-mail: korneev.sa.42@gmail.com

The computational complexity of systems of monomials by compositional circuits is investigated. In such a model, complexity is understood as the smallest number of composition operations required to compute a system of monomials. For this model we have found the computational complexity of a system of p monomials in two variables up to a term that grows as p . By $l_{sh}(A)$ we mean the complexity of implementation of the system of monomials defined by the matrix A by composition circuits. For any integer a we assume $a^+ = \max(a, 1)$.

Theorem. Let $A = (a_{ij})$ be a $(p \times q)$ -matrix without zero rows and columns consisting of non-negative integers. Then $G(A) \leq l_{sh}(A) \leq G(A) + 2p - 3$, where

$$G(A) = \max_{(i_1, \dots, i_p) \in S_p} \sum_{k=1}^p \left\lceil \log \max \left(\frac{a_{i_k 1}^+}{\max_{l: l < k} a_{i_l 1}^+}, \frac{a_{i_k 2}^+}{\max_{l: l < k} a_{i_l 2}^+}, 1 \right) \right\rceil.$$

We also show that for composition circuits, in contrast to other models, the asymptotical growth of the computational complexity of system of monomials in two variables in the general case is not determined by any improper subset of this system of monomials.

Keywords: *set of monomials, computation complexity, circuit complexity, composition circuit.*

1. Введение, основные определения

Исследуется сложность вычисления системы мономов схемами композиции [1–4].

Операция композиции, предложенная в [5], является обобщением операции умножения: композицией мономов $U = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_q^{a_{1q}}$ и $V = x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_q^{a_{2q}}$ относительно монома $R = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_q^{b_q}$ называется моном

$$(U, V)_R = \frac{UV}{R} = x_1^{a_{11}+a_{21}-b_1} x_2^{a_{12}+a_{22}-b_2} \dots x_q^{a_{1q}+a_{2q}-b_q},$$

при этом степени монома R не могут превосходить соответствующих степеней мономов U и V . Если R — нулевой моном (моном с нулевым набором степеней), то соответствующая операция композиции является просто операцией умножения.

Схемой композиции будем называть такую последовательность мономов

$$S = (x_1, \dots, x_q, U_1, \dots, U_n),$$

что каждый из мономов U_k , $k = 1, \dots, n$, получается композицией двух каких-либо предшествующих мономов (не обязательно различных) относительно некоторого монома R_k (вообще говоря, своего для каждой операции композиции). Под *сложностью* $l_{sh}(S)$ *схемы композиции* S будем понимать число n .

Схема композиции S *реализует моном* U , если U является одним из мономов последовательности S (в дальнейшем будем записывать это в виде $U \in S$). Аналогично, *схема композиции* S *реализует систему мономов* M , если для каждого монома U из системы M выполнено условие $U \in S$.

Часто бывает удобно строить схемы поэтапно: например, для реализации системы мономов M сначала построить схему, реализующую некоторую вспомогательную систему мономов M_0 , а затем добавить элементы, используя мономы системы M_0 . Этот метод неоднократно используется и в данной работе. Из этих соображений обобщим понятие схемы следующим образом.

Схемой композиции над системой мономов $M = \{V_1, \dots, V_r\}$ будем называть такую последовательность мономов

$$S = (V_1, \dots, V_r, U_1, \dots, U_n),$$

что каждый из мономов U_k , $k = 1, \dots, n$, получается композицией двух предшествующих мономов относительно некоторого монома R_k . Под *сложностью* $l_{sh}(S)$ *схемы композиции* S *над системой мономов* M будем понимать число n .

Для системы мономов M , следуя [2], положим $l_{sh}(M) = \min l_{sh}(S)$, где минимум берётся по всем схемам композиции, реализующим систему M . Величину $l_{sh}(M)$ будем называть *сложностью реализации системы мономов* M *схемами композиции*. Аналогично, для систем мономов M и M_0 положим $l_{sh}(M/M_0) = \min l_{sh}(S)$, где минимум берётся по всем схемам композиции, реализующим систему мономов M над системой

мономов M_0 . Величину $l_{sh}(M/M_0)$ будем называть *сложностью реализации системы мономов M над системой мономов M_0 схемами композиции*. Если выполнено условие $l_{sh}(S) = l_{sh}(M/M_0)$, то будем называть схему S *минимальной схемой композиции* (реализующей систему мономов M над системой мономов M_0).

Заметим, что систему мономов

$$M = \{x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}} \dots x_q^{a_{1q}}, x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}} \dots x_q^{a_{2q}}, \dots, x_1^{a_{p1}}x_2^{a_{p2}} \dots x_q^{a_{pq}}\}$$

можно однозначно задать с помощью матрицы (без нулевых строк) из целых неотрицательных чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

Сложностью $l_{sh}(A)$ реализации матрицы A схемами композиции будем называть сложность реализации схемами композиции соответствующей этой матрице системы мономов. Таким образом, если матрице A соответствует система мономов M_A , то $l_{sh}(A) = l_{sh}(M_A)$. В дальнейшем во всех терминах и обозначениях сложности будем допускать замену системы мономов на соответствующую матрицу (и наоборот).

2. Сравнение схем композиции с другими вычислительными моделями

Интерес к задаче о сложности вычисления систем мономов схемами композиции обусловлен несколькими факторами.

Во-первых, задача об исследовании различных свойств, связанных в том числе с вопросами сложности, известной в алгебре операции композиции [5], возникает естественным образом. Операция умножения является частным случаем операции композиции, и при вычислении одного монома от нескольких переменных, а также при вычислении системы мономов от одной переменной сложность в классе схем композиции устанавливается очень просто [1], что помогает при исследовании сложности аналогичных задач в классе схем умножения выделить содержательную часть, отделив её от технически сложной и трудоёмкой, но малосодержательной части.

Во-вторых, исследование этой задачи даёт надежду на разработку новых методов для асимптотически точного решения задачи Пиппенджера [6], т. е. задачи о сложности реализации систем мономов схемами из элементов, реализующих операцию умножения. В этом направлении есть достижения — результат об асимптотике роста функции шенноновского типа, характеризующей максимальную сложность реализации систем мономов с индивидуальными ограничениями на показатели степеней в мономах, удалось при некоторых слабых ограничениях перенести с модели схем композиции на классическую модель схем умножения [4].

В-третьих, при изучении сложности реализации систем мономов схемами композиции были обнаружены новые неожиданные эффекты, представляющие значительный интерес [2]. Ещё один из таких эффектов описан в данной работе.

Отметим особенности модели схем композиции в сравнении с другими моделями. В первую очередь рассмотрим классическую задачу о сложности возведения в степень [7, разд. 4.6.3] и её обобщения [8].

Для простейшего случая (вычисление одного монома от одной переменной x^a) задача о сложности реализации схемами композиции имеет тривиальное решение — сложность равна $\lceil \log a \rceil$ (здесь и далее под записью $\log x$ понимается $\log_2 x$). Для классиче-

ской модели установлено [9], что для вычисления величины x^a при $a \rightarrow \infty$ достаточно

$$\log a + \frac{\log a}{\log \log a} (1 + o(1))$$

операций умножения; мощностным (неконструктивным) методом доказано [10, 11], что при любом положительном ε для почти всех значений a для вычисления величины x^a требуется не менее

$$\log a + (1 - \varepsilon) \frac{\log a}{\log \log a}$$

операций умножения; при этом не известно конструктивной нижней оценки лучше, чем доказанная в [12] оценка

$$l(x^a) \geq \log a + \log s(a) - 2, 13,$$

где $s(a)$ — количество единиц в двоичной записи числа a . Таким образом, для схем умножения при вычислении одной степени x^a для почти всех значений a разность между верхней и нижней оценками (а также между реальной сложностью и нижней оценкой) имеет порядок $\log a / \log \log a$.

Задачи о сложности реализации матриц размеров $1 \times q$ и $p \times 1$ (т. е. о сложности вычисления одного монома от q переменных и p степеней одной переменной соответственно) схемами композиции также имеют простое решение с точным ответом [1]. Аналогичные задачи для схем умножения — это задачи Беллмана [13] и Кнута [7, разд. 4.6.3, упр. 32]. Для них в работах [14, 15] найдена сложность при фиксированных параметрах p и q , а в [16–18] — асимптотика роста сложности. Здесь и далее, говоря об асимптотике роста сложности матрицы $A = (a_{ij})$, мы подразумеваем асимптотику роста сложности при условии $\sum a_{ij} \rightarrow \infty$.

Для классической модели в случае матриц размера $2 \times q$ и $p \times 2$ даже поиск асимптотики роста сложности становится значительно труднее. В работе [19] установлено, что при некоторых слабых ограничениях асимптотика роста сложности реализации матрицы A размера $p \times 2$ схемами умножения равна $\log D(A)$, где $D(A)$ — максимум абсолютных величин миноров матрицы A . При этом для схем умножения работает принцип двойственности [20]: если в матрице A размера $p \times q$ из целых неотрицательных чисел нет нулевых строк и столбцов, то $l(A) + p = l(A^T) + q$, где $l(A)$ — сложность реализации матрицы A схемой умножения. Таким образом, применение принципа двойственности к оценке для матрицы размера $p \times 2$ сразу доставляет аналогичную оценку для матрицы размера $2 \times q$.

Как показано в работе [21], для модели с двумя операциями — умножением и делением — асимптотика сложности матрицы произвольного размера также определяется величиной $D(A)$. Таким образом, для моделей с операцией умножения и с операциями умножения и деления сложность матриц размера $2 \times q$ и $p \times 2$ определяется некоторой подматрицей размера 2×2 .

Для модели с одной операцией умножения, но допускающей использование отрицательных степеней переменных, в [22] также установлен результат, показывающий, что сложность матрицы размера $2 \times q$ определяется некоторой её подматрицей размера 2×2 .

Возвращаясь к задаче реализации матриц схемами композиции, отметим, что для реализации матрицы размера $2 \times q$ в [3] установлено точное значение сложности, а также показано, что эта сложность, как и во всех перечисленных случаях, определяется подматрицей размера 2×2 . Аналогичное утверждение для сложности реализации

реализующей моном U_1 . Очевидно, для реализации этого монома потребуется как минимум $2n + 1$ операций: $2n$ операций для увеличения степени с 1 до $2n$ и ещё одна операция для «объединения» переменных x и y . Таким образом,

$$l_{sh}(S_1) \geq 2n + 1.$$

Теперь рассмотрим систему мономов $M_2 = \{U \in S_0 : U \leq U_2\}$ и последовательность мономов S_2 , состоящую из всех мономов системы M_2 , упорядоченных так же, как и в схеме S_0 . Легко видеть, что последовательность S_2 является схемой, реализующей моном U_2 над системой мономов M_1 . Очевидно, для такой схемы потребуется по крайней мере $3n$ операций, то есть

$$l_{sh}(S_1) \geq 3n.$$

Продолжая это рассуждение, будем для $i = 3, \dots, p$ рассматривать систему мономов $M_i = \{U \in S_0 : U \leq U_i\}$ и последовательность мономов S_i , состоящую из всех мономов системы M_i , упорядоченных так же, как и в схеме S_0 . Последовательность S_i является схемой, реализующей моном U_i над системой мономов $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{i-1}$. При этом

$$l_{sh}(S_i) \geq 2n, \quad i = 3, \dots, p.$$

Так как любой моном схемы S_0 учитывается при подсчёте сложности только одной из схем $S_1, S_2, \dots, S_p$, то

$$l_{sh}(S_0) \geq \sum_{i=1}^p l_{sh}(S_i).$$

Отсюда, используя минимальность схемы S_0 и нижние оценки сложности схем S_i , $i = 1, \dots, p$, получаем

$$l_{sh}(A) = l_{sh}(S_0) \geq \sum_{i=1}^p l_{sh}(S_i) \geq 2n + 1 + 3n + 2n(p - 1) = (2p + 1)n + 1.$$

Верхняя и нижняя оценки совпали. Таким образом, мы нашли сложность реализации матрицы A :

$$l_{sh}(A) = (2p + 1)n + 1.$$

Обозначим через $A^{(k)}$ матрицу, полученную из A удалением k -й строки. Находя сложность этой матрицы аналогичным способом, получим

$$l_{sh}(A^{(k)}) = (2p - 1)n + 1.$$

Вычислим соотношение сложностей данных матриц:

$$\frac{l_{sh}(A)}{l_{sh}(A^{(k)})} = \frac{(2p + 1)n + 1}{(2p - 1)n + 1} = 1 + \frac{2n}{(2p - 1)n + 1} = 1 + \frac{1}{p - 1/2 + 1/(2n)}.$$

Рассмотрим последовательности матриц A_n и $A_n^{(k_n)}$, которые получаются из матриц A и $A^{(k)}$ соответственно при $n = 1, 2, 3, \dots$ и произвольных $k_n \in \{1, 2, \dots, p\}$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{sh}(A_n)}{l_{sh}(A_n^{(k_n)})} = 1 + \frac{1}{p - 1/2},$$

т.е. асимптотика роста сложности последовательности матриц $A_n^{(k_n)}$ отличается от асимптотики роста сложности последовательности матриц A_n .

Этот пример легко обобщается на случай нечётного p .

Приведённый пример показывает, что при реализации системы мономов, задаваемой матрицей размера $p \times 2$, схемами композиции, в отличие от моделей с операцией умножения и с операциями умножения и деления, асимптотика роста сложности не только не определяется подматрицей размера 2×2 , но даже, вообще говоря, не определяется никакой подматрицей размера $(p-1) \times 2$. Поэтому ожидать простой и компактной формулы, определяющей асимптотику роста сложности реализации матриц размера $p \times 2$ схемами композиции, не приходится. В данной работе эта асимптотика найдена с точностью до слагаемого порядка p , и соответствующий результат сформулирован в терминах соотношений элементов в каждом столбце.

3. Вспомогательные утверждения

Для доказательства основных результатов потребуется ряд вспомогательных утверждений (леммы 1–10). Доказательство леммы 2 можно найти в работе [2], доказательства лемм 3–5, а также другое доказательство леммы 2 — в [3].

Для произвольного числа a будем использовать обозначение $a^+ = \max(a, 1)$. В лемме 5 и всюду далее S_p обозначает группу перестановок множества $\{1, 2, \dots, p\}$, а максимум, берущийся по пустому множеству элементов, считается равным единице.

Пусть даны схема

$$S_1 = (U_1, \dots, U_s, U_{s+1}, \dots, U_{s+l_1})$$

над системой мономов $\{U_1, \dots, U_s\}$ и схема

$$S_2 = (V_1, \dots, V_t, V_{t+1}, \dots, V_{t+l_2})$$

над системой мономов $\{V_1, \dots, V_t\}$, и при этом каждый моном системы $\{V_1, \dots, V_t\}$ содержится в схеме S_1 . Легко видеть, что тогда последовательность мономов

$$(U_1, \dots, U_s, U_{s+1}, \dots, U_{s+l_1}, V_{t+1}, \dots, V_{t+l_2})$$

является схемой сложности $l_1 + l_2$ над системой мономов $\{U_1, \dots, U_s\}$. Построенную таким образом схему будем обозначать через $S(S_1; S_2)$. Отмеченный факт сформулируем в виде утверждения.

Лемма 1. Пусть S_1 — схема, реализующая систему мономов M_1 над системой мономов M_0 , а S_2 — схема, реализующая систему мономов M_2 над системой мономов M'_1 , причём $M'_1 \subseteq M_1$. Тогда существует такая схема S_{12} , реализующая систему мономов M_2 над системой мономов M_0 , что

$$l_{sh}(S_{12}) = l_{sh}(S_1) + l_{sh}(S_2).$$

Приведём несколько известных утверждений.

Лемма 2 [1, теорема 2]. Для монома $U = x_1^{a_1} \dots x_q^{a_q}$ справедливо равенство

$$l_{sh}(U) = \left\lceil \log \max_{k: 1 \leq k \leq q} a_k \right\rceil + q - 1.$$

Лемма 3 [3, лемма 3]. Пусть S — минимальная схема, реализующая систему мономов M над системой мономов M_0 , мономы из системы M_0 не имеют общих переменных, моном U_0 содержится в каждом из мономов системы M , а также является

элементом схемы S . Тогда

$$l_{sh}(M/M_0) = l_{sh}(U_0/M'_0) + l_{sh}(M/M''_0),$$

где $M'_0 = \{U \in M_0 : U \leq U_0\}$, $M''_0 = (M_0 \setminus M'_0) \cup \{U_0\}$.

Лемма 4 [3, лемма 4]. Пусть мономы $U = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_q^{a_q}$ и $V = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_q^{b_q}$ удовлетворяют условиям $a_k \geq b_k > 0$, $k = 1, \dots, q$. Тогда

$$l_{sh}(U/V) = \left\lceil \log \max_{k: 1 \leq k \leq q} \frac{a_k}{b_k} \right\rceil.$$

Лемма 5 [3, лемма 7]. Пусть в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

все элементы — натуральные числа. Тогда

$$l_{sh}(A/x_1 x_2 \dots x_q) \geq \max_{(i_1, \dots, i_p) \in S_p} \sum_{k=1}^p \left\lceil \log \max \left(\max_{j: 1 \leq j \leq q} \left(\frac{a_{i_k j}}{\max_{l: l < k} a_{i_l j}} \right), 1 \right) \right\rceil.$$

Лемма 6. Пусть A — матрица размера $p \times 2$ из натуральных чисел. Тогда

$$l_{sh}(A) = l_{sh}(A/xy) + 1.$$

Доказательство. Верхняя оценка следует из леммы 1.

Докажем нижнюю оценку. Пусть $\{U_1, \dots, U_p\}$ — система мономов, соответствующая матрице A , и S — минимальная схема, реализующая A . Рассмотрим множества

$$S_k = \{U \in S : U \leq U_k\}, \quad k = 1, \dots, p.$$

В каждом из этих множеств есть хотя бы один моном вида $x^a y$ ($a > 0$). Среди всех мономов такого вида в схеме S выберем моном с наименьшим показателем a и обозначим его через U_0 . Очевидно, тогда $U_0 \leq U_k$, $k = 1, \dots, p$. Используя леммы 1–3, получаем

$$l_{sh}(A) = l_{sh}(A/U_0) + l_{sh}(U_0) = l_{sh}(A/U_0) + l_{sh}(U_0/xy) + 1 \geq l_{sh}(A/xy) + 1,$$

что и требовалось. ■

Следующая лемма обобщает утверждение леммы 5 на случай матрицы с нулевыми элементами.

Лемма 7. Пусть в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} \end{pmatrix}$$

все элементы — целые неотрицательные числа. Тогда

$$l_{sh}(A) \geq \max_{(i_1, \dots, i_p) \in S_p} \sum_{k=1}^p \left\lceil \log \max \left(\frac{a_{i_k 1}^+}{\max_{l: l < k} a_{i_l 1}^+}, \frac{a_{i_k 2}^+}{\max_{l: l < k} a_{i_l 2}^+}, 1 \right) \right\rceil.$$

Доказательство. Пусть $S = (x, y, U_1, U_2, \dots, U_l)$ — минимальная схема, реализующая матрицу A . Для произвольного монома $U = x^a y^b$ положим

$$U' = \begin{cases} xy^b, & \text{если } a = 0; \\ x^a y, & \text{если } b = 0; \\ x^a y^b & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко видеть, что тогда последовательность мономов $S' = (xy, U'_1, U'_2, \dots, U'_l)$ является схемой, реализующей матрицу $A' = (a'_{ij})$ над мономом xy . Отсюда, используя леммы 5 и 6, получаем

$$l_{sh}(A) = l_{sh}(S) = l_{sh}(S') \geq l_{sh}(A'/xy) \geq \max_{(i_1, \dots, i_p) \in S_p} \sum_{k=1}^p \left[\log \max \left(\frac{a_{i_k 1}^+}{\max_{l: l < k} a_{i_l 1}^+}, \frac{a_{i_k 2}^+}{\max_{l: l < k} a_{i_l 2}^+}, 1 \right) \right],$$

что и требовалось. ■

Лемма 8. Пусть для мономов $V = x^{a_1} y^{a_2}$, $V_0 = x^{b_1} y^{b_2}$, $V_1 = x^{a_{11}} y^{a_{12}}$ и $V_2 = x^{a_{21}} y^{a_{22}}$ выполнены условия

$$0 < \max(a_{11}, a_{21}) \leq b_1 \leq a_1, \quad 0 < \max(a_{12}, a_{22}) \leq b_2 \leq a_2, \quad \frac{b_1}{2} < a_{11}, \quad \frac{b_2}{2} < a_{22}.$$

Тогда существует схема S , реализующая моном V над системой мономов $\{V_1, V_2\}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) Для сложности схемы S верно равенство

$$l_{sh}(S) = \left\lceil \log \max \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \right) \right\rceil + 2.$$

2) Для любого натурального числа c_1 , для которого справедливы неравенства

$$b_1 \leq c_1 \leq a_1, \quad \frac{a_2}{b_2} \leq \frac{c_1}{b_1}, \quad (1)$$

существуют такие натуральные числа d_1, d_2 , что

$$\frac{c_1}{2} < d_1 \leq c_1, \quad \frac{a_2}{2} < d_2 \leq a_2 \quad (2)$$

и $x^{d_1} y^{d_2} \in S$.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\frac{a_1}{b_1} \geq \frac{a_2}{b_2}$ (отметим, что это неравенство следует из условий (1)). Положим $n = \left\lceil \log \frac{a_1}{b_1} \right\rceil$. Искомая схема будет иметь вид

$$S = (x^{a_{11}} y^{a_{12}}, x^{a_{21}} y^{a_{22}}, x^{a_{11}} y^{a_{22}}, x^{b_1} y^{b_2}, x^{b_{11}} y^{b_{12}}, x^{b_{21}} y^{b_{22}}, \dots, x^{b_{n1}} y^{b_{n2}}),$$

где $b_{ij} = \min(2^i b_j, a_j)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, 2$. Легко видеть, что $b_{n1} = a_1$ и $b_{n2} = a_2$, т. е. схема S реализует моном V .

Пусть теперь для натурального числа c_1 выполнены условия (1). Положим $m = \left\lfloor \log \frac{c_1}{b_1} \right\rfloor$ и заметим, что из условий леммы следует неравенство $m \leq n$. Покажем, что для чисел $d_1 = b_{m1}$ и $d_2 = b_{m2}$ выполнены условия (2). Действительно,

$$\begin{aligned} b_{m1} &\leq 2^m b_1 = 2^{\lfloor \log(c_1/b_1) \rfloor} b_1 \leq 2^{\log(c_1/b_1)} b_1 = c_1, \\ b_{m1} &= \min(2^{\lfloor \log(c_1/b_1) \rfloor} b_1, a_1) > \min(2^{\log(c_1/b_1)-1} b_1, a_1) = \min\left(\frac{c_1}{2}, a_1\right) = \frac{c_1}{2}, \\ b_{m2} &\leq a_2, \\ b_{m2} &= \min(2^{\lfloor \log(c_1/b_1) \rfloor} b_2, a_2) > \min(2^{\log(c_1/b_1)-1} b_2, a_2) = \min\left(\frac{c_1 b_2}{2b_1}, a_2\right) \geq \min\left(\frac{a_2}{2}, a_2\right) = \frac{a_2}{2}, \end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Следующая лемма уточняет утверждение леммы 9 для случая, когда мономы V_0 , V_1 и V_2 совпадают.

Лемма 9. Пусть для мономов $V = x^{a_1} y^{a_2}$ и $V_0 = x^{b_1} y^{b_2}$ выполнены условия

$$0 < b_1 \leq a_1, \quad 0 \leq b_2 \leq a_2.$$

Тогда существует схема S , реализующая моном V над мономом V_0 и удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) Для сложности схемы S верно равенство

$$l_{sh}(S) = \left\lceil \log \max\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right) \right\rceil.$$

- 2) Для любого натурального числа c_1 , для которого справедливы неравенства

$$b_1 \leq c_1 \leq a_1, \quad \frac{a_2}{b_2} \leq \frac{c_1}{b_1},$$

существуют такие натуральные числа d_1, d_2 , что

$$\frac{c_1}{2} < d_1 \leq c_1, \quad \frac{a_2}{2} < d_2 \leq a_2$$

и $x^{d_1} y^{d_2} \in S$.

Также сформулируем аналог леммы 9 для случая мономов от одной переменной.

Лемма 10. Пусть $0 < b \leq a$. Тогда существует такая схема S , реализующая моном x^a над мономом x^b , что

$$l_{sh}(S) = \left\lceil \log \frac{a}{b} \right\rceil.$$

Кроме того, если для натурального числа c выполнено условие $b \leq c \leq a$, то схема S содержит моном x^d , для которого выполнено условие $c/2 < d \leq c$.

4. Формулировка и доказательство основных результатов

Сформулируем и докажем основной результат для случая матрицы без нулевых элементов.

Теорема 1. Пусть в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} \end{pmatrix}$$

все элементы — натуральные числа. Тогда

$$F(A) + 1 \leq l_{sh}(A) \leq F(A) + 2p - 3,$$

где

$$F(A) = \max_{(i_1, \dots, i_p) \in S_p} \sum_{k=1}^p \left[\log \max \left(\frac{a_{i_k 1}}{\max_{l: l < k} a_{i_l 1}}, \frac{a_{i_k 2}}{\max_{l: l < k} a_{i_l 2}}, 1 \right) \right].$$

Доказательство. Нижняя оценка следует из лемм 5 и 6.

Докажем верхнюю оценку. Без ограничения общности будем считать, что в матрице A все строки различны. Определим перестановку $(j_1, j_2, \dots, j_p)$ строк матрицы A по следующим индуктивным правилам.

Рассмотрим все строки матрицы A , содержащие её минимальный элемент. Среди них выберем такую строку, чтобы другой (оставшийся) элемент этой строки был минимально возможным (если таких строк две, то берём любую из них). Обозначим номер этой строки через j_1 .

Пусть уже определён набор $(j_1, \dots, j_{i-1})$. Положим

$$K_i = \{1, 2, \dots, p\} \setminus \{j_1, \dots, j_{i-1}\}, \quad b_{il} = \max_{j \in \{j_1, \dots, j_{i-1}\}} a_{jl}, \quad l = 1, 2.$$

Рассмотрим все пары (j, l) , $j \in K_i$, $l \in \{1, 2\}$, на которых достигается минимум величины a_{jl}/b_{il} . Среди этих пар выберем такую, чтобы величина $a_{j, 3-i}$ принимала минимально возможное значение (если таких пар две, то берём любую из них). Обозначим первый элемент выбранной пары через j_i .

Так как изменение порядка строк не влияет на сложность реализации матрицы, то без ограничения общности будем считать, что $j_1 = 1, j_2 = 2, \dots, j_p = p$.

Пусть $\{U_1, U_2, \dots, U_p\}$ — система мономов, соответствующая матрице A . Заданный порядок удовлетворяет следующим условиям:

- 1) Если $1 \leq i < j \leq p$, то $U_j \not\leq U_i$.
- 2) Для всех $i = 1, \dots, p$ выполнено равенство

$$\min_{l=1,2} \frac{a_{il}}{b_{il}} = \min_{j: i \leq j \leq p} \min_{l=1,2} \frac{a_{jl}}{b_{il}}. \quad (3)$$

Обозначим схему (x, y, xy) через $\tilde{S}_0$ и положим

$$t_1 = \lceil \log \max(a_{11}, a_{12}) \rceil, \quad t_2 = \lceil \log \max(a_{21}, a_{22}) \rceil, \\ t_{12} = \left\lceil \log \max \left(\frac{a_{11}}{a_{21}}, \frac{a_{12}}{a_{22}} \right) \right\rceil, \quad t_{21} = \left\lceil \log \max \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}, \frac{a_{22}}{a_{12}} \right) \right\rceil.$$

Рассмотрим все возможные случаи соотношения мономов U_1 и U_2 :

1. Пусть один из мономов U_1, U_2 не превосходит другого.

1.1) Пусть выполняется соотношение $U_1 \leq U_2$.

Применяя лемму 9, построим схему S_1 , реализующую моном U_1 над мономом xy , и схему S_2 , реализующую моном U_2 над мономом U_1 . Положим $\tilde{S}_1 = S(\tilde{S}_0; S_1)$, $\tilde{S}_2 = S(\tilde{S}_1; S_2)$. Тогда

$$l_{sh}(S_1) + l_{sh}(S_2) = t_1 + t_{21}.$$

1.2) Пусть выполняется соотношение $U_2 \leq U_1$.

Применяя лемму 9, построим схему S_2 , реализующую моном U_2 над мономом xy , и схему S_1 , реализующую моном U_1 над мономом U_2 . Положим $\tilde{S}_1 = S(\tilde{S}_0; S_2)$, $\tilde{S}_2 = S(\tilde{S}_1; S_1)$. Тогда

$$l_{sh}(S_1) + l_{sh}(S_2) = t_2 + t_{12}.$$

2. Пусть выполняются соотношения $U_1 \not\leq U_2$ и $U_2 \not\leq U_1$.

Положим $c = 2^{\max(t_1-t_{12}, t_2-t_{21})}$, $U_0 = x^{\min(c, a_{11}, a_{21})} y^{\min(c, a_{12}, a_{22})}$.

Применяя лемму 9, построим схему S_0 , реализующую моном U_0 над мономом xy , схему S_{01} , реализующую моном U_1 над мономом U_0 , и схему S_2 , реализующую моном U_2 над мономом U_0 . Положим $S_1 = S(\tilde{S}_0; S_{01})$, $\tilde{S}_1 = S(\tilde{S}_0; S_1)$, $\tilde{S}_2 = S(\tilde{S}_1; S_2)$.

2.1) Пусть выполняется неравенство $t_1 - t_{12} \geq t_2 - t_{21}$. В этом случае

$$\begin{aligned} l_{sh}(S_0) &= \lceil \log \max(\min(c, a_{11}, a_{21}), \min(c, a_{12}, a_{22})) \rceil \leq \log c = t_1 - t_{12}, \\ l_{sh}(S_{01}) &= \left\lceil \log \max\left(\frac{a_{11}}{\min(c, a_{11}, a_{21})}, \frac{a_{12}}{\min(c, a_{12}, a_{22})}\right) \right\rceil = \left\lceil \log \max\left(\frac{a_{11}}{c}, \frac{a_{11}}{a_{12}}, \frac{a_{12}}{c}, \frac{a_{12}}{a_{22}}\right) \right\rceil = \\ &= \max\left(\left\lceil \log \max\left(\frac{a_{11}}{c}, \frac{a_{12}}{c}\right) \right\rceil, \left\lceil \log \max\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}, \frac{a_{12}}{a_{22}}\right) \right\rceil\right) = \max(t_1 - (t_1 - t_{12}), t_{12}) = t_{12}, \\ l_{sh}(S_2) &= \left\lceil \log \max\left(\frac{a_{21}}{\min(c, a_{11}, a_{21})}, \frac{a_{22}}{\min(c, a_{12}, a_{22})}\right) \right\rceil = \left\lceil \log \max\left(\frac{a_{21}}{c}, \frac{a_{21}}{a_{11}}, \frac{a_{22}}{c}, \frac{a_{22}}{a_{12}}\right) \right\rceil = \\ &= \max\left(\left\lceil \log \max\left(\frac{a_{21}}{c}, \frac{a_{22}}{c}\right) \right\rceil, \left\lceil \log \max\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}, \frac{a_{22}}{a_{12}}\right) \right\rceil\right) = \\ &= \max(t_2 - (t_1 - t_{12}), t_{21}) \leq \max(t_2 - (t_2 - t_{21}), t_{21}) = t_{21}, \end{aligned}$$

и поэтому

$$l_{sh}(S_1) + l_{sh}(S_2) = l_{sh}(S_0) + l_{sh}(S_{01}) + l_{sh}(S_2) \leq t_1 + t_{21}.$$

2.2) Пусть выполняется неравенство $t_1 - t_{12} \geq t_2 - t_{21}$. В этом случае аналогично получаем

$$l_{sh}(S_1) + l_{sh}(S_2) \leq t_2 + t_{12}.$$

Таким образом, в любом случае схема $\tilde{S}_2$ реализует систему мономов $\{U_1, U_2\}$ и при этом справедливо неравенство

$$l_{sh}(\tilde{S}_2) \leq \max(t_1 + t_{21}, t_2 + t_{12}) + 1. \quad (4)$$

Будем индуктивно строить последовательность схем $\tilde{S}_3, \tilde{S}_4, \dots, \tilde{S}_p$, где схема $\tilde{S}_i$, $i = 3, \dots, p$, реализует систему мономов $\{U_1, U_2, \dots, U_i\}$.

Пусть схема $\tilde{S}_{i-1}$ уже построена. Построим схему S_i , реализующую моном U_i над некоторой системой мономов $\{V_1, V_2\}$ (вообще говоря, своей для каждого шага), содержащейся в схеме $\tilde{S}_{i-1}$. Выберем такое $k < i$, что U_k — наименьший из мономов вида $x^{b_{i1}} y^b$. Опять рассмотрим все возможные случаи:

1. Если $a_{k1} \leq a_{i1}$ и $a_{k2} \leq a_{i2}$, то положим $V_1 = U_k$.

2. Если $a_{k1} \leq a_{i1}$ и $a_{k2} > a_{i2}$, то из условия (3) следует, что $a_{k1}/b_{k1} \leq a_{i2}/b_{k2}$. Отсюда, используя лемму 8 и учитывая построение схемы S_k , получаем, что эта схема содержит моном $V_1 = x^{d_1}y^{d_2}$, где

$$a_{k1}/2 < d_1 \leq a_{k1}, \quad a_{i2}/2 < d_2 \leq a_{i2}.$$

3. Если $a_{k1} > a_{i1}$ и $a_{k2} \leq a_{i2}$, то из условия (3) следует, что $a_{k2}/b_{k2} \leq a_{i1}/b_{k1}$. Отсюда, используя лемму 8 и учитывая построение схемы S_k , получаем, что эта схема содержит моном $V_1 = x^{d_1}y^{d_2}$, где

$$a_{i1}/2 < d_1 \leq a_{i1}, \quad a_{k2}/2 < d_2 \leq a_{k2}.$$

Аналогично, рассматривая степени при переменной y , выберем в схеме $\tilde{S}_i$ моном V_2 .

Применяя лемму 8 для мономов $V = U_i$, $V_0 = x^{\min(a_{i1}, b_{i1})}y^{\min(a_{i2}, b_{i2})}$, V_1 и V_2 , построим схему S_i , реализующую моном U_i над системой мономов $\{V_1, V_2\}$, для которой выполнено равенство

$$l_{sh}(S_i) = \left\lceil \log \max \left(\frac{a_{i1}}{\min(a_{i1}, b_{i1})}, \frac{a_{i2}}{\min(a_{i2}, b_{i2})} \right) \right\rceil + 2. \quad (5)$$

Положим $\tilde{S}_i = S(\tilde{S}_{i-1}; S_i)$. Тогда схема $\tilde{S}_i$ реализует систему мономов $\{U_1, \dots, U_i\}$, при этом

$$l_{sh}(\tilde{S}_i) = l_{sh}(\tilde{S}_{i-1}) + l_{sh}(S_i). \quad (6)$$

Наконец, используя (4)–(6), получаем

$$\begin{aligned} l_{sh}(A) &\leq l_{sh}(\tilde{S}_p) = l_{sh}(\tilde{S}_2) + \sum_{i=3}^p l_{sh}(S_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^p \left\lceil \log \max \left(\frac{a_{i1}}{\min(a_{i1}, b_{i1})}, \frac{a_{i2}}{\min(a_{i2}, b_{i2})} \right) \right\rceil + 2p - 3 = \\ &= \sum_{i=1}^p \left\lceil \log \max \left(\frac{a_{i1}}{b_{i1}}, \frac{a_{i2}}{b_{i2}}, 1 \right) \right\rceil + 2p - 3 = \sum_{i=1}^p \left\lceil \log \max \left(\frac{a_{i1}}{\max_{j < i} a_{j1}}, \frac{a_{i2}}{\max_{j < i} a_{j2}}, 1 \right) \right\rceil + 2p - 3 \leq \\ &\leq \max_{(i_1, \dots, i_p) \in S_p} \sum_{k=1}^p \left\lceil \log \max \left(\frac{a_{i_k1}}{\max_{l: l < k} a_{i_l1}}, \frac{a_{i_k2}}{\max_{l: l < k} a_{i_l2}}, 1 \right) \right\rceil + 2p - 3, \end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Следующая теорема обобщает результат теоремы 1 на случай матрицы с нулевыми элементами.

Теорема 2. Пусть в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} \end{pmatrix}$$

нет нулевых строк и столбцов и все её элементы — целые неотрицательные числа. Тогда

$$G(A) \leq l_{sh}(A) \leq G(A) + 2p - 3,$$

где

$$G(A) = \max_{(i_1, \dots, i_p) \in S_p} \sum_{k=1}^p \left[\log \max \left(\frac{a_{i_k 1}^+}{\max_{l: l < k} a_{i_l 1}^+}, \frac{a_{i_k 2}^+}{\max_{l: l < k} a_{i_l 2}^+}, 1 \right) \right].$$

Доказательство. Нижняя оценка следует из леммы 7. Верхняя оценка доказывается аналогично верхней оценке теоремы 1: в первую очередь нумеруются строки, содержащие нуль; для соответствующих мономов вместо лемм 8 и 9 используется лемма 10; если моном U_i содержит обе переменные, а все предыдущие мономы не содержат переменной x (или y), то для построения схемы S_i в качестве монома V_1 (соответственно V_2) используется моном x (соответственно y). ■

5. Достижимость верхних и нижних оценок

Легко видеть, что нижняя оценка теорем 1 и 2 достигается на матрицах

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 8 & 8 \\ \dots & \dots \\ 2^{p-2} & 2^{p-2} \\ 2^{p-1} & 2^{p-1} \\ 2^p & 2^p \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 8 & 0 \\ \dots & \dots \\ 2^{p-2} & 0 \\ 2^{p-1} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

соответственно. Приведём пример матрицы, на которой достигается верхняя оценка. Пусть

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2^p & 1 \\ 1 & 2^p \\ 7 & 7 \\ 15 & 15 \\ \dots & \dots \\ 2^{p-1} - 1 & 2^{p-1} - 1 \\ 2^p - 1 & 2^p - 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что максимум в верхней оценке теоремы для матрицы B достигается при $(i_1, i_2, \dots, i_p) = (1, 2, \dots, p)$ и равен $4p - 3$. Покажем, что $l_{sh}(A) \geq 4p - 3$. Пусть S — минимальная схема, реализующая матрицу B над мономом xy , и $\{U_1, U_2, \dots, U_p\}$ — система мономов, соответствующая матрице B . Положим

$$M_1 = \{U \in S : U \leq U_1\}, \quad M_2 = \{U \in S : U \leq U_2\}.$$

Рассмотрим последовательности мономов S_1 и S_2 , состоящие из всех мономов систем M_1 и M_2 соответственно, упорядоченных так же, как в схеме S . Легко видеть, что последовательности S_1 и S_2 являются схемами, реализующими мономы U_1 и U_2 соответственно, над мономом xy .

Если для некоторого k , $k = 3, \dots, p$, выполнено условие, что схема S_1 содержит хотя бы один из мономов $x^{2^k-1}y$ или $x^{2^k-2}y$, а схема S_2 содержит хотя бы один из мономов xy^{2^k-1} или xy^{2^k-2} , то

$$l_{sh}(U_k/M_1 \cup M_2 \cup \{U_{k-1}\}) = 1.$$

Если это условие не выполнено, то

$$l_{sh}(U_k/M_1 \cup M_2 \cup \{U_{k-1}\}) = 2.$$

Пусть условие выполнено ровно для s чисел из набора $\{3, \dots, p\}$. Тогда, применяя лемму 4 для всех соответствующих мономов схем S_1 и S_2 , получаем

$$l_{sh}(S_1) \geq p + s, \quad l_{sh}(S_2) \geq p + s.$$

Из этих оценок следует, что

$$\begin{aligned} l_{sh}(S) &= l_{sh}(S_1) + l_{sh}(S_2) + \sum_{k=3}^p l_{sh}(U_k/M_1 \cup M_2 \cup \{U_{k-1}\}) \geq \\ &\geq 2(p + s) + s + 2(p - 2 - s) = 4p + s - 4 \geq 4p - 4. \end{aligned}$$

Отсюда, используя лемму 6 и минимальность схемы S , получаем

$$l_{sh}(B) = l_{sh}(B/xy) + 1 = l_{sh}(S) + 1 \geq 4p - 3,$$

что и требовалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мерекин Ю. В. О порождении слов с использованием операции композиции // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2003. Т. 10. № 4. С. 70–78.
2. Трусевич Е. Н. О сложности вычисления некоторых систем одночленов схемами композиции // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2014. № 5. С. 18–22.
3. Корнеев С. А. О сложности реализации системы из двух мономов схемами композиции // Дискретная математика. 2020. Т. 32. № 2. С. 15–31.
4. Корнеев С. А. Об асимптотическом поведении функций шенноновского типа, характеризующих сложность вычисления систем мономов // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. 2020. Т. 162. № 3. С. 300–311.
5. Ширшов А. И. Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли // Сибирский математический журнал. 1962. Т. 3. С. 292–296.
6. Pippenger N. On the evaluation of powers and monomials // SIAM J. Comput. 1980. V. 9. No. 2. P. 230–250.
7. Кнут Д. Е. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. М.: Мир, 1977.
8. Кочергин В. В. О задачах Беллмана и Кнута и их обобщениях // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20. № 6. С. 159–188.
9. Brauer A. On addition chains // Bull. AMS. 1939. V. 45. P. 736–739.
10. Erdos P. Remarks on number theory, III: On addition chains // Acta Arithmetica. 1960. V. 6. P. 77–81.
11. Кочергин В. В., Кочергин Д. В. Уточнение нижней оценки сложности возведения в степень // Прикладная дискретная математика. 2017. № 38. С. 119–132.
12. Schönhage A. A lower bound for the length of addition chains // Theor. Comput. Sci. 1975. V. 1. P. 1–12.
13. Bellman R. E. Addition chains of vectors (Advanced problems 5125) // Amer. Math. Monthly. 1963. V. 70. P. 765.
14. Straus E. G. Addition chains of vectors // Amer. Math. Monthly. 1964. V. 71. P. 806–808.
15. Yao A. C.-C. On the evaluation of powers // SIAM J. Computing. 1976. V. 5. P. 100–103.
16. Гашков С. Б., Кочергин В. В. Об аддитивных цепочках векторов, вентильных схемах и сложности вычисления степеней // Методы дискретного анализа в теории графов и сложности. 1992. Вып. 52. С. 22–40.

17. Кочергин В. В. О сложности вычислений одночленов и наборов степеней // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1994. Т. 27. С. 94–107.
18. Кочергин В. В. Уточнение оценок сложности вычисления одночленов и наборов степеней в задачах Беллмана и Кнута // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. Т. 21. № 6. С. 51–72.
19. Кочергин В. В. О сложности вычисления систем одночленов от двух переменных // Труды VII Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Покровское, 4–6 марта 2006). М.: МАКС Пресс, 2006. С. 185–190.
20. Сидоренко А. Ф. Сложность аддитивных вычислений семейства целочисленных линейных форм // Записки научных семинаров ЛОМИ. Л.: Наука, 1981. Т. 105. С. 53–61.
21. Кочергин В. В. Об асимптотике сложности аддитивных вычислений систем целочисленных линейных форм // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2006. Т. 13. № 2. С. 38–58.
22. Кочергин В. В. О сложности совместного вычисления трех элементов свободной абелевой группы с двумя образующими // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2008. Т. 15. № 2. С. 23–64.

REFERENCES

1. Merekin Yu. V. O porozhdenii slov s ispol'zovaniyem operatsii kompozitsii [On the generation of words using the composition operation]. Diskretnyy Analiz i Issledovaniye Operatsiy. Ser. 1, 2003. vol. 10, no. 4., pp. 70–78. (in Russian)
2. Trusevich E. N. Complexity of certain systems of monomials in calculation by composition circuits. Moscow University Math. Bull., 2014, vol. 69, iss. 5, pp. 193–197.
3. Korneev S. A. On the complexity of implementation of a system of two monomials by composition circuits // Discr. Math. Appl., 2021, vol. 31, no. 2, pp. 113–125.
4. Korneev S. A. Ob asimptoticheskom povedenii funktsiy shennonovskogo tipa, kharakterizuyushchikh slozhnost' vychisleniya sistem monomov [On the asymptotic behavior of Shannon-type functions characterizing the computing complexity of systems of monomials]. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Ser. Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2020, vol. 162, no. 3, pp. 300–311. (in Russian)
5. Shirshov A. I. Nekotorye algoritmicheskie problemy dlya algebr Li [Some algorithmic problems for Lie algebras]. Sibirskiy Matematicheskiy Zhurnal, 1962, vol. 3, pp. 292–296. (in Russian)
6. Pippenger N. On the evaluation of powers and monomials // SIAM J. Comput. 1980. vol. 9, no. 2, pp. 230–250.
7. Knuth D. E. The Art of Computer Programming, vol. 2. Reading, Addison-Wesley, 1969.
8. Kochergin V. V. On Bellman's and Knuth's problems and their generalizations. J. Math. Sci., 2018, vol. 233, no. 1, pp. 103–124.
9. Brauer A. On addition chains. Bull. AMS, 1939, vol. 45, pp. 736–739.
10. Erdos P. Remarks on number theory, III: On addition chains. Acta Arithmetica, 1960, vol. 6, pp. 77–81.
11. Kochergin V. V. and Kochergin D. V. Utochneniye nizhney otsenki slozhnosti vozvedeniya v stepen' [Improvement of the lower bound for the complexity of exponentiation]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2017, no. 38, pp. 119–132. (in Russian)
12. Schönhage A. A lower bound for the length of addition chains. Theor. Comput. Sci., 1975, vol. 1, pp. 1–12.
13. Bellman R. E. Addition chains of vectors (Advanced problems 5125). Amer. Math. Monthly, 1963, vol. 70, p. 765.
14. Straus E. G. Addition chains of vectors. Amer. Math. Monthly, 1964, vol. 71, pp. 806–808.

15. Yao A. C.-C. On the evaluation of powers. SIAM J. Computing, 1976, vol. 5, pp. 100–103.
16. Gashkov S. B. and Kochergin V. V. On addition chains of vectors, gate circuits, and the complexity of computations of powers. Siberian Adv. Math., 1994, vol. 4, no. 4, pp. 1–16.
17. Kochergin V. V. On the complexity of computations of monomials and tuples of powers. Siberian Adv. Math., 1996, vol. 6, no. 1, pp. 71–86.
18. Kochergin V. V. Improvement of the estimates of the computational complexity for monomials and sets of powers in Bellman’s and Knuth’s problems. J. Appl. Indust. Math., 2015, vol. 9, no. 1, pp. 68–82.
19. Kochergin V. V. O slozhnosti vychisleniya sistem odnochnenov ot dvukh peremennykh [On the complexity of computing systems of monomials in two variables]. Proc. VII Int. Conf. “Diskretnye Modeli v Teorii Upravlyayushchikh Sistem” (Pokrovskoe, March 4–6, 2006). Moscow, MAKS Press Publ., 2006, pp. 185–190. (in Russian)
20. Sidorenko A. F. Slozhnost’ additivnykh vychisleniy semeystva tselochislennykh lineynykh form [Complexity of additive computations of a family of integer linear forms]. Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI, 1981, vol. 105, pp. 53–61. (in Russian)
21. Kochergin V. V. Asymptotics of the complexity of systems of integer linear forms for additive computations. J. Appl. Indust. Math., 2007, vol. 1, no. 3, pp. 328–342.
22. Kochergin V. V. O slozhnosti sovmestnogo vychisleniya trekh elementov svobodnoy abelevoy gruppy s dvumya obrazuyushchimi [On the complexity of joint computation of three elements of a free abelian group with two generators]. Diskretnyy Analiz i Issledovaniye Operatsiy. Ser. 1, 2008, vol. 15, no. 2, pp. 23–64. (in Russian)