

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

---

---

*Научный журнал*

---

---

**2021**

**№ 73**

Свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.  
выдано Федеральной службой по надзору  
в сфере массовых коммуникаций, связи  
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

### **Учредитель:**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Национальный исследовательский  
Томский государственный университет»

## **РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменшиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

### **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА**

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Робаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

### **EDITORIAL COUNCIL**

#### **Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

### **EDITORIAL BOARD**

#### **Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaev (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shragер, Ernst R. Shragер.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

**Адрес редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

**Электронный адрес:** <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

**Контактный тел./факс:** (3822) 529-740

**E-mail:** [vestnik\\_tgu\\_mm@math.tsu.ru](mailto:vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

<b>Кудратов Х.Э., Хусанбаев Я.М.</b> Об асимптотических соотношениях для критического процесса Гальтона – Ватсона .....	5
<b>Микишанина Е.А.</b> Исследование влияния случайных возмущений на динамику системы в задаче Сулова .....	17
<b>Павлов Е.А., Фурменко А.И.</b> О некоторых теоремах вложения идеальных структур .....	30

### МЕХАНИКА

<b>Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Мамонтов Д.В., Капарулин Д.С., Лун-Фу А.В.</b> Вращения торов в структуре жидкого кристалла .....	42
<b>Бураков В.А., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н., Касимов В.З., Рогаев К.С., Саморокова Н.М.</b> Учет влияния наличия конденсированных частиц на баллистические параметры выстрела .....	50
<b>Гладков С.О., Богданова С.Б.</b> Об изменении формы брахистохроны при учете ограничения нагрузки на желоб .....	60
<b>Павлов М.С., Каравацкий А.К., Костюшин К.В., Исмаилов К.К., Костюшина Н.О., Орлов С.А.</b> Оптимальное проектирование корпуса беспилотного летательного аппарата .....	71
<b>Рашидов Т.Р., Джураева Н.Б., Уринов А.П.</b> Моделирование процесса деформирования и движения почвы в зоне воздействия глубокорыхлителя .....	81
<b>Русяк И.Г., Тенев В.А.</b> Влияние размерности математической модели внутренней баллистики на расчетные параметры выстрела для зарядов из зерненого пороха .....	95
<b>Stepanyan S.P.</b> On the numerical solution to a non-classical problem of bending and stability for an orthotropic beam of variable thickness .....	111
<b>Чуманов И.В., Ячиков И.М., Ячиков М.И., Матвеева М.А., Сергеев Д.В.</b> Влияние вращения расходуемого электрода при электрошлаковом переплаве на гидродинамику шлаковой ванны .....	121

### МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

<b>Берцун В.Н., Косова Е.С.</b> Страницы жизни выпускника трех университетов (К 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко) .....	135
--	-----

<b>СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ</b> .....	146
----------------------------------	-----

## CONTENTS

### MATHEMATICS

<b>Kudratov K.E., Khusanbaev Y.M.</b> On asymptotic relations for the critical Galton – Watson process .....	5
<b>Mikishanina E.A.</b> Investigation of the influence of random perturbations on the dynamics of the system in the Suslov problem .....	17
<b>Pavlov E.A., Furmenko A.I.</b> On some embedding theorems for ideal structures.....	30

### MECHANICS

<b>Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Mamontov D.V., Kaparulin D.S., Lun-Fu A.V.</b> Rotations of tori in a liquid crystal structure.....	42
<b>Burakov V.A., D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Rogaev K.S., Samorokova N.M.</b> Allowance for the effect of condensed particles on ballistic parameters of a shot.....	50
<b>Gladkov S.O., Bogdanova S.B.</b> On the varying brachistochrone shape with allowance for chute loading limitation .....	60
<b>Pavlov M.S., Karavatskiy A.K., Kostyushin K.V., Ismailov K.K., Kostyushina N.O., Orlov S.A.</b> Design optimization for an unmanned drone frame .....	71
<b>Rashidov T.R., Djuraeva N.B., Urinov A.P.</b> Modeling the process of strain and motion of the soil in a subsoiler operation area.....	81
<b>Rusyak I.G., Tenenev V.A.</b> The impact of the dimension of a mathematical model of internal ballistics on design parameters of a shot for grain gunpowder charges.....	95
<b>Stepanyan S.P.</b> On the numerical solution to a non-classical problem of bending and stability for an orthotropic beam of variable thickness .....	111
<b>Chumanov I.V., Yachikov I.M., Yachikov M.I., Matveeva M.A., Sergeev D.V.</b> Influence of the consumable electrode rotation during electroslag remelting on hydrodynamics of a slag bath .....	121

### MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES

<b>Bertsun V.N., Kosova E.S.</b> Life history stages of three universities graduate (To the 100th anniversary birth of the Academician N.N. Yanenko).....	135
---	-----

<b>BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS</b> .....	146
--	-----

## МАТЕМАТИКА

УДК  
DOI 10.17223/19988621/73/1

MSC 60J80

**Х.Э. Кудратов., Я.М. Хусанбаев**

### ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЯХ ДЛЯ КРИТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ГАЛЬТОНА – ВАТСОНА

Исследуется асимптотика критического процесса Гальтона – Ватсона, начинающегося со случайного числа частиц. Доказаны аналог теоремы Колмогорова и теоремы Яглома и получены асимптотические разложения для вероятности вырождения процесса.

**Ключевые слова:** процесс Гальтона – Ватсона, вероятность продолжения процесса, производящая функция, теорема Колмогорова, теорема Яглома.

#### 1. Введение

Хорошо известно (см., например, [1]), что математический объект, называемый «ветвящимся процессом», является математической моделью многих прикладных задач, возникающих в физике, химии, биологии, демографии и других направлениях науки. Ветвящиеся процессы особенно хорошо отражают эволюцию биологических систем, что продемонстрировано, например, в книгах Р. Нассоу, Р. Ягера, В. Ватутина [2] и Р. Ягера [3], в которых математические результаты по ветвящимся процессам применены к исследованию роста популяции.

Пусть  $\{\xi(k, j), k, j \in N\}$  взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение  $p_i = P(\xi(k, j) = i), i = 0, 1, \dots, \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1, p_0 > 0, p_0 + p_1 < 1$  и производящую функцию  $f(s) := E s^{\xi(k, j)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i, 0 \leq s \leq 1$ . Рассмотрим процесс  $\{Z(k), k \geq 0\}$ , определенный рекуррентными соотношениями

$$Z(0) = \eta, \quad Z(n) = \sum_{j=1}^{Z(n-1)} \xi(n, j), \quad n \in N. \quad (1.1)$$

Здесь  $\eta$  – случайная величина, принимающая целые положительные значения и независимая от случайных величин  $\{\xi(k, j), k, j \in N\}$ . Процесс  $\{Z(k), k \geq 0\}$  называют процессом Гальтона – Ватсона, начинающегося с  $\eta$  частиц. В дальнейшем будем предполагать, что  $A = E\xi(1, 1) < \infty$  и  $a = E\eta < \infty$ .

Если  $A < 1$ , то процесс  $\{Z(k), k \geq 0\}$  называется докритическим, при  $A = 1$  он называется критическим, а если  $A > 1$ , то процесс называется надкритическим.

Хорошо известно (см. например, теорему 6.1 [1]), что в случае, когда  $\eta \equiv 1$ , при  $A \leq 1$  ветвящийся процесс  $Z(n)$  вырождается с вероятностью 1, а если  $A > 1$ , то вероятность вырождения равна единственному неотрицательному решению уравнения  $f(s) = s$ , меньшему 1.

Обозначим через  $\{Z_i(n), n \geq 0\}$  ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона, порожденный  $i$ -й частицей начального состояния. Ясно, что в силу сделанных предположений процессы  $\{Z_i(n), n \geq 0, i \geq 1\}$  являются взаимно-независимыми и одинаково распределенными ветвящимися процессами Гальтона – Ватсона, начинающиеся с одной частицы. Через  $Q(n)$  обозначим вероятность продолжения процесса  $\{Z(k), k \geq 0\}$  на  $n$ -м шаге, т.е.  $Q(n) = P(Z(n) > 0)$ , а через  $R(n)$  обозначим вероятность продолжения процесса  $\{Z_1(n), n \geq 0\}$  (начинающегося с одной частицы) на  $n$ -м шаге, т.е.  $R(n) = P(Z_1(n) > 0)$ . Предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - R(n))$  называется вероятностью вырождения ветвящегося процесса  $Z_1(n)$ .

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения:

$$W(n) = P(Z(n) = 0) = 1 - Q(n), \quad h(s) := Es^n, \quad H_n(s) := Es^{Z(n)},$$

$$B = f''(1), \quad C = f'''(1), \quad D = f^{IV}(1), \quad \sigma^2 = \text{Var}\xi(1,1),$$

$$b = h''(1), \quad c = h'''(1), \quad d = h^{IV}(1), \quad \tau^2 = \text{Var}\eta.$$

$$f_0(s) = s, \quad f_1(s) = f(s), \quad f_n(s) = f(f_{n-1}(s)) - n\text{-я итерация } f(s).$$

Символ  $a_n \sim b_n$  будет обозначать соотношение  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ .

В случае когда  $\eta \equiv 1$ , случайный процесс  $\{Z(k), k \geq 0\}$  изучен многими авторами (см. [1, 4–6]). При этом одной особенно интересной математической задачей для ветвящихся процессов является определение асимптотики вероятности  $R(n)$  при  $n \rightarrow \infty$ . В 1938 году А.Н. Колмогоровым [7], был получен следующий замечательный результат для асимптотики вероятности  $R(n)$ :

$$R(n) \sim \begin{cases} KA^n, & \text{если } A < 1, B < \infty, \\ \frac{2}{Bn}, & \text{если } A = 1, B > 0, C < \infty, \\ 1 - \lambda, & \text{если } A > 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь  $K$  – положительная постоянная, зависящая только от распределения  $p_i$ ,  $i \geq 0$ ;  $\lambda$  – неотрицательный корень уравнения  $f(s) = s$ , отличный от единицы.

Отметим, что в случае  $A > 1$  и  $p_0 = 0$  для любого  $n \in N$  имеет место событие  $Z_n > 0$  с вероятностью 1, так что в этом случае  $R(n) = 1$  для любого  $n \in N$ .

Результат, аналогичный (1.2), для ветвящихся процессов с непрерывным временем был получен Б.А. Севастьяновым [8]. Напомним, что однородный во времени марковский процесс в фазовом пространстве  $\{0, 1, 2, \dots\}$  и с переходными вероятностями  $P_{ij}(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , называют ветвящимся процессом с непрерывным

временем, если имеет место соотношение  $P_{ij}(t) = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_i=j} P_{j_1}(t)P_{j_2}(t)\dots P_{j_i}(t)$  (условие ветвления) (более подробно см. гл. 1 из [9]). В.М. Золотаревым [10], в случае  $p_0 > 0$ , был получен следующий результат для ветвящихся процессов с непрерывным временем:

$$R(t) = \begin{cases} Ke^{\bar{a}t} - \frac{\bar{b}}{2\bar{a}} K^2 e^{2\bar{a}t} + o(e^{2\bar{a}t}), & \text{если } \bar{a} < 0, \bar{b} < \infty, \\ \frac{2}{\bar{b}t} + \frac{4\bar{c}}{3\bar{b}^3} \frac{\log t}{t^2} + o\left(\frac{\log t}{t^2}\right), & \text{если } \bar{a} = 0, \bar{b} > 0, \bar{c} < \infty; \end{cases} \quad (1.3)$$

$$R_\lambda(t) = K_\lambda e^{\bar{a}_\lambda t} - \frac{\bar{b}_\lambda}{2\bar{a}_\lambda} K_\lambda^2 e^{2\bar{a}_\lambda t} + o(e^{2\bar{a}_\lambda t}), \quad \text{если } \bar{a} > 0,$$

где

$$\begin{aligned} R_\lambda(t) &= \lambda - P(t), \quad \bar{a} = g'(1), \quad \bar{b} = g''(1), \quad \bar{c} = g'''(1), \\ \bar{a}_\lambda &= g'(\lambda), \quad \bar{b}_\lambda = g''(\lambda), \quad \bar{c}_\lambda = g'''(\lambda), \\ g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^k, \quad \gamma_k = \frac{dP_k(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Здесь  $P_k(t)$  – вероятность того, что одна частица за время  $t$  производит  $k$  частиц. В.П. Чистяков [11] получил следующий член в разложении (1.3), когда  $\bar{a} = 0$  и  $\bar{d} = g^{IV}(1) < \infty$ ; асимптотическое разложение для  $\bar{a} < 0$  и конечности  $k$ -факториального момента получено Р. Мухамедхановой [12]. Результат, аналогичный разложению (1.3) для дискретного случая получен А.В. Нагаевым [13].

В 1966 г. С.В. Нагаевым и Р. Мухамедхановой [14] для ветвящихся процессов Гальтона – Ватсона получен следующий результат, который является аналогом (1.3) для дискретного случая при  $n \rightarrow \infty$ :

$$R(n) \sim \begin{cases} K_1 A^n + K_2 A^{2n} + \dots + K_m A^{mn} + o(A^{mn}), & \text{если } A < 1, \alpha_m < \infty, m > 1, \\ \frac{2}{Bn} + \left(\frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B}\right) \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), & \text{если } A = 1, B > 0, C < \infty, \\ \frac{2}{Bn} + \left(\frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B}\right) \frac{\ln n}{n^2} + \frac{4K}{B^2 n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right), & \text{если } A = 1, B > 0, D < \infty, \end{cases} \quad (1.4)$$

и если  $A > 1$ , то для любого фиксированного  $m \in N$

$$R_\lambda(n) \sim K_{1\lambda} A_\lambda^n + K_{2\lambda} A_\lambda^{2n} + \dots + K_{m\lambda} A_\lambda^{mn} + o(A_\lambda^{mn}),$$

где  $R_\lambda(n) = \lambda - P(n)$ ,  $\alpha_k^\lambda = f^{(k)}(\lambda)$ ,  $\alpha_1^\lambda = A_\lambda$ ,  $K_{j\lambda}$  и  $K_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , – положительные постоянные, зависящие только от распределения  $p_i$ ,  $i \geq 0$ ,  $\lambda$  – отличный от единицы корень уравнения  $f(s) = s$ .

Как уже было сказано, критический ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона, начинающийся с одной частицы, с вероятностью 1 рано или поздно попадает в состояние ноль и останется в нем навсегда, так что при этом нет никаких интересных предельных теорем. Заметим, что для таких процессов  $EZ(n) = 1$ . Однако трудно убедиться в том, что

$$E(Z(n)/Z(n) > 0) = \frac{EZ(n)}{P(Z(n) > 0)} \sim \frac{Bn}{2} \rightarrow \infty$$

в силу теоремы Колмогорова. Значит, должно иметь смысл исследование асимптотики условного распределения случайной величины  $Z(n)$ , когда  $Z(n) > 0$ . Так, в 1947 году А.М. Ягломом [15], в случае  $A=1$ ,  $C < \infty$ , был получен следующий результат:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P((1 - f_n(0))Z(n) \leq y / Z(n) > 0) = 1 - e^{-y}. \quad (1.5)$$

В работе [16] Spitzer, Kesten, Ney доказали что для справедливости результата (1.5) достаточно требовать  $A=1$ ,  $B < \infty$ . Аналогичный результат для ветвящихся процессов с непрерывным временем был установлен В.М. Золотаревым [10]. Отметим, что интерес к установлению аналогов результата Колмогорова и Яглома для различных схем до сих пор не ослабевает, что доказывают, в частности, недавно опубликованные работы G. Kersting [17] и N. Cardona, S. Palau [18] по ветвящимся процессам в изменяющейся среде, а также книга G. Kersting, V.A. Vatutin [19], посвященная ветвящимся процессам в случайной среде.

Во всех работах, приведенных в обзоре, рассматриваются процессы начинающиеся с одной частицы. Однако очевидно, что в практических задачах это условие не всегда выполняется. Нашей основной целью является выявление влияния числовых характеристик начального состояния на развитие ветвящегося процесса. Отметим, что если начальное состояние  $\eta$  принимает конечное число значений, то применяя формулу полной вероятности, асимптотика, например  $Q(n)$ , легко определяется через асимптотику  $R(n)$  вероятности невырождения ветвящегося процесса, начинающегося с одной частицы, и среднее значение  $\eta$ . Полученные результаты показывают, что и в общем случае «принцип усреднения» имеет место. В настоящей работе процесс (1.1) изучен в критическом случае, и для этого случая получены результаты, аналогичные (1.2), (1.4) и (1.5).

## 2. Основные результаты

Пусть задан процесс (1.1). Имеют место следующие теоремы:

**Теорема 2.1.** Если  $A=1$ ,  $0 < B < \infty$ ,  $a < \infty$ , то при  $n \rightarrow \infty$

$$Q(n) \sim \frac{2a}{Bn}(1 + o(1)).$$

**Теорема 2.2.** Если  $A=1$ ,  $B > 0$ ,  $C < \infty$ ,  $c < \infty$ , то при  $n \rightarrow \infty$

$$Q(n) = \frac{2a}{Bn} + \left( \frac{4Ca}{3B^2} - \frac{2a}{B} \right) \frac{\ln n}{n^2} + o\left( \frac{\ln n}{n^2} \right).$$

**Теорема 2.3.** Если  $A=1$ ,  $B > 0$ ,  $D < \infty$ ,  $d < \infty$ , то при  $n \rightarrow \infty$

$$Q(n) = \frac{2a}{Bn} + \left( \frac{4Ca}{3B^3} - \frac{2a}{B} \right) \frac{\ln n}{n^2} + \frac{2(2Ka - b)}{B^2 n^2} + \left( \frac{4b}{B^2} - \frac{8Cb}{3B^4} \right) \frac{\ln n}{n^3} + o\left( \frac{\ln n}{n^3} \right),$$

где  $K$  – постоянная, зависящая только от распределений  $\xi(1,1)$  и  $\eta$ .

**Теорема 2.4.** Если  $A=1$ ,  $B \in (0, \infty)$ , то имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P((1 - H_n(0))Z(n) \leq y / Z(n) > 0) = 1 - e^{-\frac{y}{a}}.$$

**Замечание.** Если  $a = a(n) \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ , то в случае  $a(n) = o(n)$  из теоремы 2.1 при  $n \rightarrow \infty$  следует, что  $Q(n) \rightarrow 0$ , т.е. даже в случае, когда в начальном состоянии имеется большое количество частиц, критический процесс Гальтона – Ватсона вырождается с вероятностью единица. Но в этом случае стремление  $Q(n)$  к нулю может быть достаточно медленным.

Следующие примеры показывают, что даже в случае  $E\eta = \infty$  вероятность невырождения  $Q(n)$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , однако со скоростью сходимости в разных случаях по-разному.

**Пример 2.1.** Пусть случайная величина  $\eta$  имеет следующий закон распределения:

$$p_0 = P(\eta = 0) = \frac{5}{6}, \quad p_k = P(\eta = k) = \frac{1}{\pi^2 k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Понятно, что  $E\eta = \infty$ . Предположим, что  $E\xi(1, 1) = 1$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} h(f_n(0)) &= \frac{5}{6} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - R(n))^k}{k^2} = \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{(1 - R(n))^k}{k^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(1 - R(n))^k}{k^2} = I_n^{(1)} + I_n^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Принимая во внимание хорошо известное неравенство Бернулли  $(1 - x)^n \geq 1 - nx$ ,  $|x| \leq 1$ ,  $n \in N$ , воспользовавшись формулой Эйлера для гармонического ряда и результатом Колмогорова (1.2), для интеграла  $I_n^{(1)}$  имеем следующее:

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &= \frac{5}{6} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{(1 - R(n))^k}{k^2} \geq \frac{5}{6} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{(1 - \frac{2k}{Bn})}{k^2} = \frac{5}{6} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{2}{\pi^2 Bn} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \\ &= 1 - \frac{2 \ln n}{\pi^2 Bn} - \frac{2C}{\pi^2 Bn} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim 1 - \frac{2 \ln n}{\pi^2 Bn} - \frac{1}{\pi^2 n} \left( 1 + \frac{2C}{B} \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $C$  – постоянная Эйлера. Воспользовавшись теперь неравенством  $(1 - x)^k \leq 1 - kx + \frac{k(k+1)}{2} x^2$ ,  $|x| \leq 1$ ,  $k \in N$ , оценим интеграл  $I_n^{(1)}$  сверху:

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &= \frac{5}{6} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{(1 - R(n))^k}{k^2} \leq \frac{5}{6} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \left( 1 - \frac{2k}{Bn} + \frac{2k(k+1)}{B^2 n^2} \right) = \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{2}{\pi^2 Bn} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{2}{\pi^2 B^2 n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = 1 - \frac{2(\ln n + C)}{\pi^2 Bn} + \frac{2}{\pi^2 B^2 n} + \frac{2(\ln n + C)}{\pi^2 Bn^2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \\ &\sim 1 - \frac{2 \ln n}{\pi^2 Bn} + \frac{1}{\pi^2 n} \left( \frac{2}{B^2} - \frac{2C}{B} - 1 \right) + \frac{2(\ln n + C)}{\pi^2 Bn^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из соотношений (2.2) и (2.3) заключаем, что

$$1 - \frac{2 \ln n}{\pi^2 B n} - \frac{1}{\pi^2 n} \left( 1 + \frac{2C}{B} \right) \leq I_n^{(1)} \leq 1 - \frac{2 \ln n}{\pi^2 B n} + \frac{1}{\pi^2 n} \left( \frac{2}{B^2} - \frac{2C}{B} - 1 \right) + \frac{2(\ln n + C)}{\pi^2 B n^2}. \quad (2.4)$$

Рассмотрим теперь  $I_n^{(2)}$ . Учитывая, что  $0 \leq R(n) \leq 1$ , получаем неравенство

$$0 \leq I_n^{(2)} \leq \frac{1}{\pi^2 n}.$$

Принимая во внимание (2.4) и последнее неравенство, согласно (2.1) приходим к следующему соотношению:

$$h(f_n(0)) \sim 1 - \frac{2 \ln n}{\pi^2 B n} (1 + o(1)).$$

Отсюда заключаем, что

$$Q(n) \sim \frac{2 \ln n}{\pi^2 B n} (1 + o(1)).$$

**Пример 2.2.** Пусть случайная величина  $\eta$  имеет следующий закон распределения:

$$p_0 = P(\eta = 0) = 1 - \frac{\beta}{\gamma}, \quad p_k = P(\eta = k) = \frac{\ln k}{\gamma k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь  $\beta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ ,  $\gamma$  – любое число, удовлетворяющее условию  $\gamma > \beta$ .

Аналогичными рассуждениями, как в примере 2.1, получаем соотношение

$$Q(n) \sim \frac{\ln^2 n}{\gamma B n} (1 + o(1)).$$

### 3. Вспомогательные результаты

Пусть задан процесс (1.1).

**Лемма 3.1.** Для производящей функции процесса  $Z(n)$  имеет место следующее соотношение:

$$H_n(s) = h(f_n(s)), \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (3.1)$$

**Доказательство.** Принимая во внимание независимость случайных величин  $\{\eta, \xi(1, j), j \in N\}$ , заключаем, что

$$H_1(s) = E s^{Z(1)} = E s^{\xi(1,1)+\dots+\xi(1,\eta)} = E \left( E s^{\xi(1,1)+\dots+\xi(1,\eta)} / \eta \right) = E (f(s))^\eta = h(f(s)).$$

Следовательно, равенство (3.1) имеет место при  $n=1$ . Предположим теперь, что равенство имеет место при  $n=k$ . Докажем его справедливость для  $n=k+1$ . Опять принимая во внимание взаимную независимость случайных величин  $\{\xi(k+1, j), j \in N\}$  и независимость от  $Z(k)$ , имеем

$$\begin{aligned} H_{k+1}(s) &= E s^{Z(k+1)} = E s^{\xi(k+1,1)+\dots+\xi(k+1,Z_k)} = \\ &= E \left( E s^{\xi(k+1,1)+\dots+\xi(k+1,Z_k)} / Z_k \right) = E (f(s))^{Z_k} = h(f_{k+1}(s)). \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (3.1) имеет место для любого  $n \in N$ . Лемма доказана.

**Лемма 3.2.** Для математического ожидания, дисперсии и ковариации  $Z(n)$  имеют место следующие соотношения:

$$EZ(n) = aA^n; \tag{3.2}$$

$$VarZ(n) = \begin{cases} \sigma^2 aA^{n-1} \frac{A^n - 1}{A - 1} + \tau^2 A^{2n}, & \text{если } A \neq 1, \\ \sigma^2 an + \tau^2, & \text{если } A = 1; \end{cases} \tag{3.3}$$

$$Cov(Z(k), Z(n)) = A^{|n-k|} VarZ(\min(k, n)). \tag{3.4}$$

**Доказательство.** Сначала докажем равенство (3.2). Продифференцировав обе части равенства (3.1), получим

$$H'_n(s) = h'(f_n(s))f'_n(s). \tag{3.5}$$

Теперь равенство (3.2) следует из равенства (3.5), если в нем положить  $s = 1$  и учесть, что  $f_n(1) = 1$ ,  $h'(1) = a$ ,  $f'_n(1) = A^n$ .

Покажем теперь справедливость равенства (3.3). Продифференцировав для этого обе части равенства (3.5), получим

$$H''_n(s) = h''(f_n(s))(f'_n(s))^2 + h'(f_n(s))f''_n(s). \tag{3.6}$$

Равенство (3.3) следует из равенства (3.6), если в нем положить  $s = 1$  и учесть, что

$$f_n(1) = 1, h'(1) = a, f'_n(1) = A^n, f''_n(1) = f''(1) \frac{A^{n-1}(A^n - 1)}{A - 1}.$$

Очевидно, что равенство (3.4) следует из рекуррентного соотношения

$$Cov(Z(k), Z(n)) = ACov(Z(k), Z(n-1)), \quad 0 \leq k < n. \tag{3.7}$$

Поэтому покажем справедливость соотношения (3.7). Положим для определенности  $k < n$ , и пусть  $\mathfrak{Z}(k)$  –  $\sigma$ -алгебра, порожденная случайными величинами  $\{Z(1), Z(2), \dots, Z(k)\}$ . Принимая во внимание независимость величин  $\{\xi(n, j), j \in N\}$  от  $\mathfrak{Z}(n-1)$ , имеем

$$\begin{aligned} & E((Z(k) - EZ(k))(Z(n) - EZ(n)) / \mathfrak{Z}(n-1)) = \\ & = (Z(k) - EZ(k))E((Z(n) - EZ(n)) / \mathfrak{Z}(n-1)) = \\ & = (Z(k) - EZ(k))E\left(\left(\sum_{j=1}^{Z(n-1)} (\xi(n, j) - A) + A(Z(n-1) - EZ(n-1))\right) / \mathfrak{Z}(n-1)\right) = \\ & = A(Z(k) - EZ(k))(Z(n-1) - EZ(n-1)). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает равенство (3.7). Лемма доказана.

**Лемма 3.3.** Если  $A \leq 1$ , то вероятность вырождения процесса (1.1) равна единице, т.е.  $W(n) \rightarrow 1$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Очевидно, что  $W(n) = P(Z(n) = 0) = H_n(0) = h(f_n(0))$ . Согласно теореме Стеффенсена [1] (теорема 6.1, с. 19),  $f_n(0) \uparrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Так как производящая функция  $h(s)$  непрерывна при  $0 \leq s \leq 1$  и  $h(1) = 1$ , то отсюда следует, что  $h(f_n(0)) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $W(n) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Лемма доказана.

**Замечание.** Отметим, что в лемме 3.3 не ставится условие существования среднего значения случайной величины  $\eta$ .

#### 4. Доказательство основных результатов

**Доказательство теоремы 2.1.** Согласно лемме 2.1,

$$Q(n) = 1 - H_n(0) = 1 - h(f_n(0)). \quad (4.1)$$

Так как  $a = h'(1) < \infty$ , то согласно теореме Лагранжа о среднем значении

$$h(s) = h(1) + h'(\theta(s))(s-1) = 1 + a(s-1) + [h'(\theta(s)) - a](s-1), \quad (4.2)$$

где  $s \leq \theta(s) \leq 1$ . Подставляя в (4.2)  $s = f_n(0)$ , получаем

$$h(f_n(0)) = 1 + a(f_n(0) - 1) + [h'(\theta(f_n(0))) - a](f_n(0) - 1). \quad (4.3)$$

Так как  $f_n(0) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\theta(f_n(0)) \rightarrow 1$ .

Теперь, учитывая, что  $h'(s) \rightarrow a$  при  $s \rightarrow 1$  и соотношения (4.1), (4.3) и результат Колмогорова (1.2), получаем следующее соотношение:

$$Q(n) = a(1 - f_n(0)) + o(1 - f_n(0)) = \frac{2a}{Bn}(1 + o(1)).$$

Теорема доказана.

Теоремы 2.2 и 2.3 доказываются аналогичными рассуждениями, поэтому приведем только доказательство теоремы 2.3.

**Доказательство теоремы 2.3.** Так как  $h^{IV}(1) < \infty$ , то согласно формуле Тейлора

$$\begin{aligned} h(s) &= h(1) + h'(1)(s-1) + \frac{h''(1)}{2}(s-1)^2 + \frac{h'''(1)}{6}(s-1)^3 + \frac{h^{IV}(\theta_s)}{24}(s-1)^4 = \\ &= h(1) + a(s-1) + \frac{b}{2}(s-1)^2 + \frac{c}{6}(s-1)^3 + \frac{h^{IV}(\theta_s)}{24}(s-1)^4, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $s \leq \theta_s \leq 1$ . Ясно, что производные функции  $h(s)$  монотонно возрастают на  $s \in [0, 1]$ . Следовательно,

$$h^{IV}(\theta_s) \leq h^{IV}(1) < \infty. \quad (4.5)$$

Тогда, принимая во внимание (4.1), (4.4), (4.5) и (1.4), получаем

$$\begin{aligned} Q(n) &= a(1 - f_n(0)) - \frac{b}{2}(1 - f_n(0))^2 + \frac{c}{6}(1 - f_n(0))^3 + O((1 - f_n(0))^4) = \\ &= \frac{2a}{Bn} + \left( \frac{4Ca}{3B^3} - \frac{2a}{B} \right) \frac{\ln n}{n^2} + \frac{2(2Ka - b)}{B^2 n^2} + \left( \frac{4b}{B^2} - \frac{8Cb}{3B^4} \right) \frac{\ln n}{n^3} + o\left( \frac{\ln n}{n^3} \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Доказательство теоремы 2.4.** Для доказательства теоремы достаточно показать выполнение соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\exp\{-\lambda(1 - H_n(0))Z(n)\} / Z(n) > 0] = \frac{1}{1 + a\lambda}.$$

Докажем это. Имеем

$$\begin{aligned} E[\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\}] &= E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\})I(Z(n)=0) + \\ &+ E(\exp\{-\lambda(1-h(f_n(0)))Z(n)\})I(Z(n)>0) = \\ &= P(Z(n)=0) + P(Z(n)>0)E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\}/Z(n)>0). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Отсюда следует соотношение

$$\begin{aligned} &E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\}/Z(n)>0) = \\ &= \frac{1}{1-P(Z(n)=0)}\{E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\}) - P(Z(n)=0)\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Определим асимптотику  $E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\})$ . Известно [1], что  $Z(n)$  можно представить в виде

$$Z(n) = \sum_{i=1}^{\eta} Z_i(n), \quad n \in N.$$

Из независимости случайных величин  $\eta$  и  $\{\xi(i, j), i \geq 1, j \geq 1\}$  следует также независимость  $Z_i(n)$  от случайной величины  $\eta$ . Теперь, принимая во внимание независимость и одинаковую распределенность случайных величин  $Z_i(n)$ , получаем

$$\begin{aligned} E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\}) &= E\left(\exp\left\{-\lambda(1-H_n(0))\sum_{i=1}^{\eta} Z_i(n)\right\}\right) = \\ &= E\left[E\left(\exp\left\{-\lambda(1-H_n(0))\sum_{i=1}^{\eta} Z_i(n)\right\}\right)/\eta\right] = E\prod_{i=1}^{\eta} E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z_i(n)\}) = \\ &= E(f_n(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))\}))^{\eta}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Согласно формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned} f_n(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))\}) &= E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z_1(n)\}) = \\ &= P(Z_1(n)=0) + P(Z_1(n)>0)E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z_1(n)\}/Z_1(n)>0) = \\ &= f_n(0) + (1-f_n(0))E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z_1(n)\}/Z_1(n)>0). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Согласно теореме 2.1 и результату Колмогорова (1.2), получаем

$$\frac{1-H_n(0)}{1-f_n(0)} \sim a. \quad (4.12)$$

Из неравенства  $|e^{-x} - e^{-y}| \leq |x - y|$ ,  $x \geq 0, y \geq 0$ ,

(4.12) и хорошо известного соотношения для критических процессов

$$E(Z_1(n)/Z_1(n)>0) = \frac{1}{(1-f_n(0))}$$

получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} &|E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z_1(n)\}/Z_1(n)>0) - \\ &- E(\exp\{-\lambda a(1-f_n(0))Z_1(n)\}/Z_1(n)>0)| \leq \\ &\leq E\left(\left|\frac{1-H_n(0)}{1-f_n(0)} - a\right|(1-f_n(0))Z_1(n)/Z_1(n)>0\right) = \\ &= \left|\frac{1-H_n(0)}{1-f_n(0)} - a\right|(1-f_n(0))E(Z_1(n)/Z_1(n)>0) = \left|\frac{1-H_n(0)}{1-f_n(0)} - a\right| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Принимая во внимание (4.13), а также теоремы Яглома и Колмогорова, из равенства (4.11) получим

$$\begin{aligned} f_n(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))\}) &\sim 1 - \frac{2}{Bn}(1+o(1)) + \frac{2}{Bn} \frac{1}{1+a\lambda}(1+o(1)) = \\ &= 1 - \frac{2}{Bn} \frac{a\lambda}{1+a\lambda}(1+o(1)). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из (4.10) и (4.14) заключаем, что

$$E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\}) = E\left(1 - \frac{2}{Bn} \frac{a\lambda}{1+a\lambda}(1+o(1))\right)^\eta. \quad (4.15)$$

Теперь, принимая во внимание асимптотические соотношения

$$\ln(1-x) = -x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

$$e^{-x} = 1 - x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} E\left(1 - \frac{2}{Bn} \frac{a\lambda}{1+a\lambda}(1+o(1))\right)^\eta &= Ee^{\eta \ln\left(1 - \frac{2}{Bn} \frac{a\lambda}{1+a\lambda}(1+o(1))\right)} = Ee^{-\frac{2\eta}{Bn} \frac{a\lambda}{1+a\lambda}(1+o(1))} = \\ &= E\left(1 - \frac{2\eta}{Bn} \frac{a\lambda}{1+a\lambda}(1+o(1))\right) \sim 1 - \frac{2\eta}{Bn} \frac{a\lambda}{1+a\lambda}(1+o(1)). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Теперь в силу (4.9), (4.15), (4.16) и теоремы 2.1 получаем следующее:

$$\begin{aligned} &E(\exp\{-\lambda(1-H_n(0))Z(n)\} / Z(n) > 0) \sim \\ &\sim \frac{1}{\frac{2a}{Bn}(1+o(1))} \left\{1 - \frac{2\eta}{Bn} \frac{a\lambda}{1+a\lambda}(1+o(1)) - 1 + \frac{2\eta}{Bn}(1+o(1))\right\} = \\ &= \frac{1}{\frac{2a}{Bn}(1+o(1))} \left\{\frac{2\eta}{Bn} \frac{1}{1+a\lambda}(1+o(1))\right\} = \frac{1}{1+a\lambda}(1+o(1)), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство теоремы 2.4.

Авторы выражают свою искреннюю благодарность рецензенту, замечания которого способствовали улучшению данной работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Харрис Т. Теория ветвящихся случайных процессов. М., 1966.
2. Haccou P., Jagers P., Vatutin V. Branching Processes. Variation, Growth, and Extinction of Populations. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
3. Jagers P. Branching Processes with Biological Applications. London: John Wiley and Sons, 1975.
4. Athreya K.B., Ney P. Branching Processes. Berlin: Springer, 1972. 287 p.
5. Asmussen S., Hering H. Branching Processes. Boston: Birkhauser, 1983. 461 p.
6. Mitov K.V., Mitov G.K., Yanev N.M. Limit theorems for critical randomly indexed branching processes // Workshop on Branching Processes and Their Applications. Springer, 2010.
7. Колмогоров А.Н. К решению одной биологической задачи // Изв. НИИ мат. и мех. Томского университета. 1938. Т. 2. Вып. 1.
8. Севастьянов Б.А. Теория ветвящихся случайных процессов // УМН. 1951. Т. VI. Вып. 6.
9. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 436 с.

10. Золотарев В.М. Уточнение ряда теорем теории ветвящихся случайных процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1957. Т. 2. Вып. 2.
11. Чистяков В.П. Локальные предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1957. Т. 2. Вып. 3.
12. Мухамедханова Р. Уточнение предельной теоремы из теории ветвящихся случайных процессов // Труды Института математики им В.И. Романовского. Ташкент, 1961. Вып. 22.
13. Нагаев А.В. Уточнение некоторых теорем теории ветвящихся случайных процессов // Труды Ташкентского госуниверситета. Ташкент, 1961. Вып. 189.
14. Нагаев С.В., Мухамедханова Р. Некоторые предельной теоремы из теории ветвящихся случайных процессов // Пред. теор. и стат. выводы. Ташкент: Фан, 1966. С. 90–112.
15. Яглом А.М. Некоторые предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов // ДАН СССР. 1947. Т. 56. № 8. С. 795–798.
16. Spitzer F., Kesten H., Ney P. The Galton-Watson process with mean one and finite variance // Теория вероятностей и ее применения. 1966. Т. 11. С. 579–611.
17. Kersting G. A unifying approach to branching processes in a varying environment // Journal of Applied Probability. 2020. V. 57(1). P. 196–220.
18. Cardona-Tobon N., Palau S. Yaglom’s limit for critical Galton-Watson processes in varying environment: A probabilistic approach // arXiv preprint arXiv:2005.10186v1, 2020.
19. Kersting G., Vatutin V.A. Discrete Time Branching Processes in Random Environment. Wiley Online Library, 2017.

Статья поступила 25.03.2021

Kudratov K.E., Khusanbaev Y.M. (2021) ON ASYMPTOTIC RELATIONS FOR THE CRITICAL GALTON – WATSON PROCESS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 73. pp. 5–16

**Keywords.** Galton–Watson process, probability of continuation of the process, generating function, Kolmogorov’s theorem, Yaglom’s theorem.

DOI 10.17223/19988621/73/1

Determining the asymptotics of the continuation probability for a Galton–Watson branching process is one of the most important problems in the theory of branching processes. This problem was solved by A.N. Kolmogorov (1938) in the case when the process starts with a single particle, and the classical result is obtained. A similar result for continuous branching processes was proved by B.A. Sevastyanov (1951). The next term in the expansion for continuous branching processes was obtained by V.M. Zolotarev (1957). The next term in the expansion for continuous branching processes in the critical case was obtained by V.P. Chistyakov (1957); the asymptotic expansion in the subcritical case under the condition of finiteness of the  $k$ -factorial moment was obtained by R. Mukhamedkhanova (1966). Asymptotic expansions for discrete branching processes in the subcritical and supercritical cases, provided that any  $m$ -factorial moment is finite, were obtained by S.V. Nagaev and R. Mukhamedkhanova (1966). In the critical case, the weak convergence of the conditional distribution of the quantity  $P(Z(n) > 0)Z(n)$  under the condition  $Z(n) > 0$  to the exponential distribution was proved by A.M. Yaglom (1947) for processes starting with a single particle in the case of finiteness of the third moment of the number of generations. Subsequently, Spitzer, Kesten, and Ney (1966) proved this result under the condition that the second moment is finite. A similar result for branching processes with continuous parameters was established by V.M. Zolotarev (1957).

In this paper, we study the asymptotics of the probability of continuation of the critical Galton-Watson process, starting with  $\eta$  particles. In addition, we prove an analogue of Yaglom’s theorem for critical Galton – Watson processes starting with a random number of particles.

AMS Mathematical Subject Classification: 60J80

Khamza E. KUDRATOV (PhD student, National University of Uzbekistan, Uzbekistan). E-mail: qudratovh\_83@mail.ru

Yakubdjan M. KHUSANBAEV (Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, V.I. Romanovskiy Institut of Mathematics, Uzbekistan). E-mail: yakubjank@mail.ru

#### REFERENCES

1. Harris T.E. (1963) *The Theory of Branching Processes*. Berlin: Springer-Verlag.
2. Haccou P., Jagers P., Vatutin V. (2005) *Branching Processes. Variation, Growth, and Extinction of Populations*. Cambridge: Cambridge University Press.
3. Jagers P. (1975) *Branching Processes with Biological Applications*. London: John Wiley and Sons.
4. Athreya K.B., Ney P. (1972) *Branching Processes*. Berlin: Springer.
5. Asmussen S., Hering H. (1983) *Branching Processes*. Boston: Birkhauser.
6. Mitov K.V., Mitov G.K., Yanev N.M. (2010) Limit theorems for critical randomly indexed branching processes. *Workshop on Branching Processes and Their Applications*. Springer.
7. Kolmogorov A.N. (1938) K resheniyu odnoy biologicheskoy zadachi [A contribution to the solution of a biological problem]. *Izvestiya NII matematiki i mekhaniki Tomskogo universiteta – Bulletin of the Scientific Research Institute of Mathematics and Mechanics of Tomsk state University*. 2(1).
8. Sevast'yanov B.A. (1951) The theory of branching random processes. *Uspekhi matematicheskikh nauk*. 6(6). pp. 47–99.
9. Sevast'yanov B.A. (1971) *Vetvyashchiyessya protsessy* [Branching processes]. Moscow: Nauka.
10. Zolotarev V.M. (1957) More exact statements of several theorems in the theory of branching processes. *Theory of Probability and its Applications*. 2(2). pp. 245–253.
11. Chistyakov V.P. (1957) Local limit theorems in the theory of branching random processes. *Theory of Probability and its Applications*. 2(3). pp. 345–363.
12. Mukhamedkhanova R. (1961) Utochneniye predel'noy teoremy iz teorii vetvyashchikhsya sluchaynykh protsessov [More exact statement of the limit theorem from the theory of branching random processes]. *Trudy Instituta matematiki im. V.I. Romanovskogo – Transactions of V.I. Romanovskii Institute of Mathematics*. 22.
13. Nagayev A.V. (1961) Utochneniye nekotorykh teorem teorii vetvyashchikhsya sluchaynykh protsessov [More exact statements of some theorems of the theory of branching random processes]. *Trudy Tashkentskogo gosuniversiteta – Transactions of Tashkent State University*. 189.
14. Nagayev S.V., Mukhamedkhanova R. (1966) Nekotoryye predel'nyye teoremy iz teorii vetvyashchikhsya sluchaynykh protsessov [Some limit theorems from the theory of branching random processes]. *Predel'nyye teoremy i statisticheskiye vyvody – Limit theorems and statistical inference*. Tashkent: Fan. pp. 90–112.
15. Yaglom A. M. (1947) Nekotoryye predel'nyye teoremy teorii vetvyashchikhsya sluchaynykh protsessov [Certain limit theorems of the theory of branching processes] *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 56(8). pp. 795–798.
16. Kesten H., Ney P., Spitzer F. (1966) The Galton-Watson process with mean one and finite variance. *Theory of Probability and its Applications*. 11(4). pp. 513–540.
17. Kersting G. (2020) A unifying approach to branching processes in a varying environment. *Journal of Applied Probability*. 57(1). pp. 196–220.
18. Cardona-Tobón N., Palau S. (2021) Yaglom's limit for critical Galton–Watson processes in varying environment: A probabilistic approach. *Bernoulli*. 27(3). pp. 1643–1665.
19. Kersting G., Vatutin V.A. (2017) *Discrete Time Branching Processes in Random Environment*. Wiley Online Library.

Received: March 25, 2021

**Е.А. Микишанина****ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ  
НА ДИНАМИКУ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧЕ СУСЛОВА<sup>1</sup>**

Рассматривается обобщенная задача Суслова с изменяющимися параметрами и влияние случайных возмущений на динамику рассматриваемой системы. В случае детерминированной системы показано наличие хаотической динамики в системе и таких эффектов, как появление странного аттрактора и некомпактных (убегающих) траекторий. Также рассматривается динамика возмущенной системы, которая возникает за счет добавления в одно из уравнений «белого» шума, моделируемого винеровским процессом.

**Ключевые слова:** *Неголономная система, задача Суслова, странный аттрактор, случайные возмущения, стохастическое дифференциальное уравнение.*

**1. Введение**

Динамика механических систем моделируется, как правило, системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Особый интерес вызывают процессы, моделируемые нелинейными системами. Такой, например, является обобщенная задача Суслова. С точки зрения механики это неголономная задача. А как известно, именно в подобных задачах можно наблюдать различные динамические эффекты: странные аттракторы, ускорения, эффект реверса и другие. Физическая интерпретация задачи Суслова – это движение по внутренней поверхности сферы твердого тела, внутри которого по изменяющемуся по времени периодическому закону движутся точечные массы, причем периодическое возбуждение системы сводится к периодическому изменению гиростатического момента.

Исследованию как классической задачи Суслова, так и обобщенной задачи Суслова посвящено достаточное количество работ [1–5]. Впервые она была рассмотрена в работе [1]. Позже в статье Вагнера [2] была описана аналогия между задачей Суслова и движением саней Чаплыгина. Чуть позже эта задача исследовалась в работах [3, 4]. Довольно подробное исследование обобщенной задачи Суслова с выявлением возможного ускорения в системе и странных аттракторов проведено в работе [5]. Можно также отметить еще ряд работ по указанной тематике [6–8].

Однако при исследовании механических систем возникает следующий вопрос. На динамику движущегося тела могут влиять различные случайные факторы: сопротивление воздуха, которое часто не учитывается при моделировании, отсутствие абсолютной гладкости поверхностей, незначительные сбои в работе механизмов и другие случайные возмущения. Нелинейные динамические системы могут демонстрировать за счет своей нелинейности случайные эффекты, например появление в системе хаоса. А не будут ли случайные возмущения влиять на эффекты, порожденные нелинейностью системы?

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом РФФИ № 18-29-10051 мк.

Данная работа посвящена исследованию влияния случайных возмущений, по-другому «белого шума», на динамику механической системы в обобщенной задаче Суслова. В данной работе показано, что задачу Суслова можно свести к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений. Здесь также приведены некоторые результаты исследования данной детерминированной системы. Также в работе исследуется динамика возмущенной системы, которая представляется собой систему двух стохастических дифференциальных уравнений Ито [9, 10]. Решение как детерминированной, так и возмущенной системы происходит численно с одним и тем же шагом интегрирования. Однако численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений существенным образом отличаются от методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Подробному исследованию методов численного интегрирования стохастических дифференциальных посвящены работы Д.Ф. Кузнецова [11–13] и ряд работ других авторов [14, 15]. Кузнецовым было показано влияние случайных возмущений на странный аттрактор Лоренца в модели конвективной турбулентности Лоренца, на динамику системы уравнений Ресслера, на моделирование чандлеровских колебаний.

В данной работе сделана еще одна попытка исследования влияния случайных возмущений на динамику обобщенной системы Суслова. На основе численного интегрирования [16] построены фазовые траектории и графики искомых функций в случае как детерминированной, так и возмущенной системы. Описаны интересные динамические эффекты при переходе к возмущенной системе.

## 2. Математическая модель и уравнения движения

Рассматривается система, состоящая из нескольких тел:

- твердое тело с неподвижной точкой, которое не может вращаться в некотором фиксированном (относительно тела) направлении;
- $n$  материальных точек массами  $m_i$ , движущихся внутри твердого тела по заданным законам  $p_i(t)$ .

Движение происходит в отсутствие внешних сил, материальные точки движутся так, что моменты инерции остаются постоянными.

Для описания движения твердого тела введем две системы координат:

- неподвижную систему координат  $OXYZ$  с центром в неподвижной точке  $O$ , которая является центром масс системы, и ортами  $\alpha, \beta, \gamma$ ;
- подвижную систему координат  $Ox_1x_2x_3$  с центром в той же самой неподвижной точке  $O$  и ортами  $e_1, e_2, e_3$ , выбранную так, чтобы твердое тело не могло вращаться в направлении вектора  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Это условие будет иметь вид

$$(\omega, e_3) = 0, \quad (1)$$

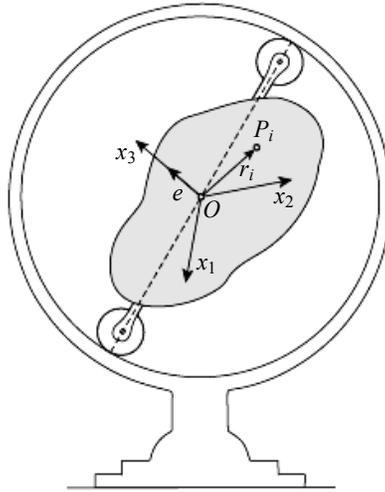
где  $\omega$  – угловая скорость твердого тела. Условие (1) переписывается как

$$\omega_3 = 0. \quad (2)$$

Кинетическая энергия всей системы определяется формулой

$$T = \frac{1}{2}(\mathbf{I}(t)\omega, \omega) + (\mathbf{k}(t), \omega),$$

где  $\mathbf{I}(t)$  и  $\mathbf{k}(t)$  – заданные тензор инерции и гиостатический момент.



**Рис. 1.** Механическая конструкция как реализация задачи Суслова  
**Fig.1.** Mechanical design as an implementation of the Suslov problem

Определенным расположением осей и добавлением вдоль этих осей маховиков, уравновешенных с помощью неподвижных масс, можно добиться того, чтобы тензор инерции имел только два недиагональных элемента:

$$\mathbf{I}(t) = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

а гиростатический момент имел вид  $\mathbf{k} = (0, k_2, k_3)$ , где  $I_{ij}, k_i$  – периодические функции времени одного периода.

Уравнения движения в подвижной системе координат, связанной с телом, могут иметь вид

$$(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k})' = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}) \times \boldsymbol{\omega} + \lambda \mathbf{e}_3, \quad (4)$$

где  $\lambda$  – постоянная, которую можно определить из уравнения (4) с учетом равенства нулю третьей компоненты вектора угловой скорости. Тогда система уравнений для компонент  $(\omega_1, \omega_2)$  переписывается в виде

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= -I_{23}\omega_2^2 - k_3\omega_2, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= I_{23}\omega_1\omega_2 + k_3\omega_1 - \dot{k}_2. \end{aligned} \quad (5)$$

В случае  $I_{23} = 0$  задача сводится к интегрированию неавтономной системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Случай  $I_{23} \neq 0$  более интересен. В этом случае с помощью замен

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{I_{22}}{I_{23}}v, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{I_{11}I_{22}}}{I_{23}}u, \\ \dot{k}_2(t) &= \frac{I_{22}\sqrt{I_{11}I_{22}}}{I_{23}}\Phi(t), \quad k_3(t) = \sqrt{I_{11}I_{22}}\Psi(t), \end{aligned}$$

систему (5) можно привести к неавтономной нелинейной системе

$$\begin{aligned}\dot{v} &= u^2 + \Psi(t)u, \\ \dot{u} &= -uv - \Psi(t)v - \Phi(t).\end{aligned}\quad (6)$$

### 3. Краткий обзор результатов исследования

В работе [5] достаточно подробно была изучена динамика системы (6). Приведем в этом разделе результаты исследования с некоторыми дополнениями.

Пусть функции  $\Phi(t)$  и  $\Psi(t)$  заданы в виде

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= a \sin(t) + b \cos(t), \\ \Psi(t) &= c \cos(t) + d \sin(t),\end{aligned}$$

где  $a, b, c, d$  – заданные постоянные. В зависимости от значений параметров  $a, b, c, d$  отображения через период могут содержать неподвижные точки, инвариантные кривые, некомпактные притягивающие инвариантные кривые и странные аттракторы. Для системы также можно было построить фазовый портрет вместо отображения за период. Но в данном случае отображение нагляднее, нежели чем фазовый портрет. Виды некоторых отображений, содержащих аттракторы и некомпактные кривые, представлены на рис. 2.

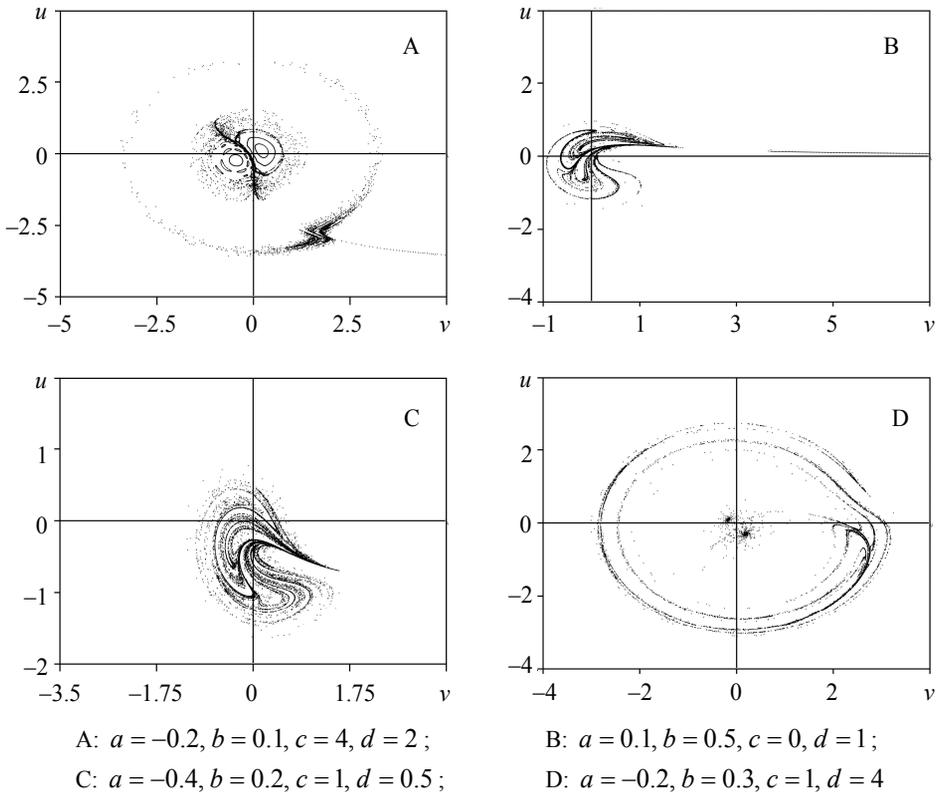


Рис. 2. Отображения Пуанкаре  
Fig.2. Poincare maps

Для уточнения сценария перехода к хаосу, например для отображения на рис. 2, С (далее будем также рассматривать возмущенную систему с параметрами  $a = -0.4, b = 0.2, c = 1, d = 0.5$ ), построим карту динамических режимов (рис. 3), меняя значения постоянных  $d \in [0, 0.5], b \in [-0.2, 0.3]$ .

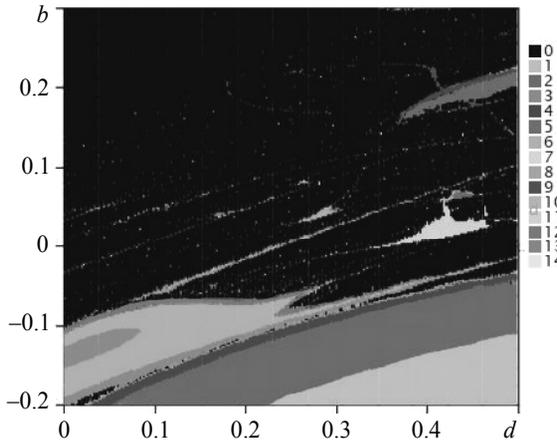


Рис. 3. Карта динамических режимов  
 Fig. 3. Chart of dynamical regimes

Цветные области соответствуют устойчивым циклам соответствующего периода (диаграмма соответствия цвета определенному периоду указана справа от рисунка). Черные области с цветными вкраплениями соответствуют областям, занятым, главным образом, хаосом. Именно, при значении параметров, соответствующих указанной области, можно ожидать появление странного аттрактора. Стоит отметить, что переход к области хаоса происходит через последовательную смену областей периодов 3–6–12 и 1–2–4–8. То есть очевиден каскад бифуркаций удвоения периода. Это один из классических сценариев перехода к хаосу в системе [17–19]. В этом случае можно говорить о фейгенбаумовской природе странных аттракторов в данной системе.

Теперь рассмотрим, как на динамику системы будет влиять появление случайных возмущений в уравнении. Рассмотрим, какие эффекты можно наблюдать в этом случае.

**4. Математическая модель возмущенной системы и численное интегрирование**

Систему (6) с учетом случайных возмущений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v}_t &= u_t^2 + \Psi(t)u_t + \sigma_1(v_t, u_t, t)\dot{f}_t^1, \\ \dot{u}_t &= -u_t v_t - \Psi(t)v_t - \Phi(t) + \sigma_2(v_t, u_t, t)\dot{f}_t^2, \end{aligned} \tag{7}$$

где  $u_t, v_t$  – искомые случайные функции;  $\sigma_1(v, u, t), \sigma_2(v, u, t)$  – заданные регулярные функции;  $\dot{f}_t^1, \dot{f}_t^2$  – стандартные независимые винеровские процессы. Система (7) будет называться возмущенной, а уравнения – стохастическими дифференциальными уравнениями.

Решение системы (7) сводится к численному интегрированию. Интегрирование стохастических дифференциальных уравнений несколько отличается от интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе и набором методов интегрирования. Подробному исследованию численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений посвящены труды Д.Ф. Кузнецова [1, 2].

Для использования численных методов перепишем дифференциальные уравнения (7) в виде дифференциальных уравнений Ито:

$$\begin{aligned} dv_t &= (u_t^2 + \Psi(t)u_t)dt + \sigma_1(v_t, u_t, t)df_t^1, \\ du_t &= (-u_tv_t - \Psi(t)v_t - \Phi(t))dt + \sigma_2(v_t, u_t, t)df_t^2, \end{aligned} \quad (8)$$

и зададим коэффициенты случайных компонент в наиболее простом виде, когда они не зависят от самих механических параметров:

$$\sigma_1(v, u, t) = 0, \quad \sigma_2(v, u, t) = \sigma.$$

Так как каждая из искомых функций  $v, u$  соответствует компонентам угловой скорости  $\omega_1, \omega_2$ , то подобное возможно при воздействии на тело случайных возмущений только при вращении в одном направлении (в направлении  $\omega_2$ ).

На основании унифицированных разложений Тейлора – Ито на дискретной равномерной временной сетке  $\{t_k\}_0^\infty$  численные схемы для системы

$$\begin{aligned} dv_t &= (u_t^2 + \Psi(t)u_t)dt, \\ du_t &= (-u_tv_t - \Psi(t)v_t - \Phi(t))dt + \sigma df_t \end{aligned}$$

примут вид

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \Delta(u_n^2 + \Psi_n u_n) + \\ &+ \frac{\Delta^2}{2} \left[ (-u_n v_n - \Psi_n v_n - \Phi_n)^2 + \Psi_n (-u_n v_n - \Psi_n v_n - \Phi_n) \right] + \\ &+ \sigma(2u_n + \Psi_n)(\Delta I_0 + I_1), \\ u_{n+1} &= u_n + \Delta(-u_n v_n - \Psi_n v_n - \Phi_n) + \\ &+ \frac{\Delta^2}{2} \left[ (u_n^2 + \Psi_n u_n)(u_n v_n + \Psi_n v_n + \Lambda_n) - \Psi_n (u_n^2 + \Psi_n u_n) - \Phi_n \right] + \\ &+ \sigma I_0 - \sigma v_n (\Delta I_0 + I_1), \\ I_0 &= \sqrt{\Delta} \zeta_0, \quad I_1 = -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left( \zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 \right), \end{aligned}$$

где  $\Delta = t_{k+1} - t_k$  – шаг интегрирования;  $\zeta_0, \zeta_1$  – независимые случайные величины со стандартным гауссовским распределением (с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией). Оставим в стороне вопрос о сходимости численных методов и разложений, так как целью работы является демонстрация механических эффектов возмущенной системы. Очень подробно вопрос сходимости численных методов для стохастически дифференциальных уравнений изучен в [11].

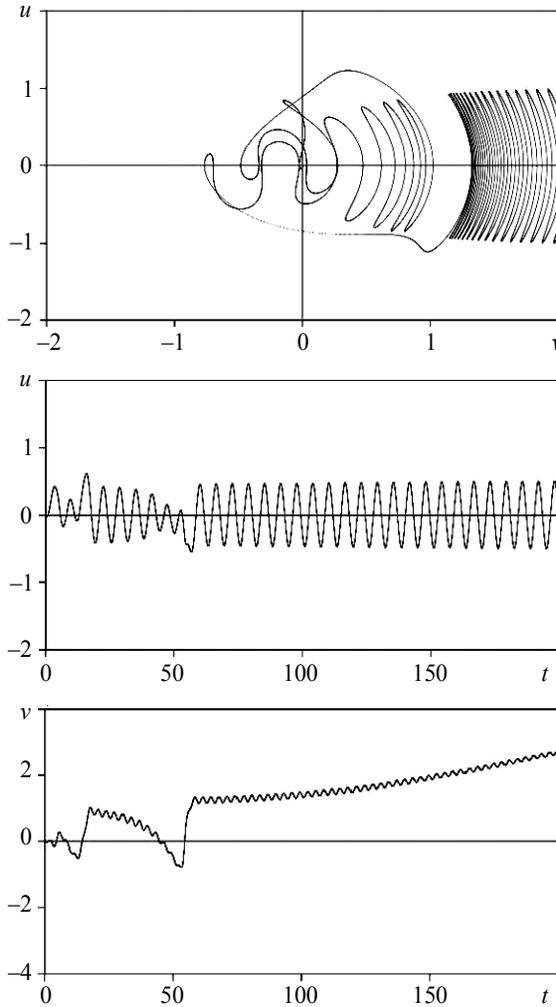
Поведение фазовой кривой, очевидно, будет зависеть от значения величины  $\sigma$ , характеризующей интенсивность возмущения, и от величины шага интегрирования.

Для сравнения результатов в детерминированной и стохастической модели построим фазовые траектории и графики искомых функций для заданных значений параметров.

### 5. Численные результаты

#### 5.1. Появление в системе убегающих траекторий

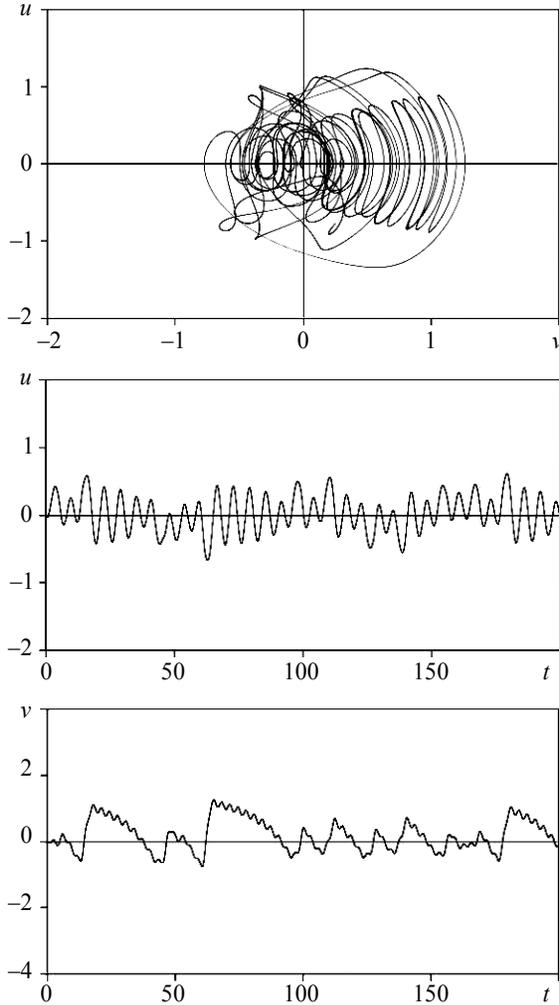
Построим фазовую кривую и графики искомых функций детерминированной системы для значения параметров  $a = -0.4, b = 0.2, c = 1, d = 0.06$  (рис. 4) и  $a = -0.4, b = 0.2, c = 1, d = 0.18$  (рис. 5) для начальных значений  $v(0) = u(0) = 0$ .



**Рис. 4.** Фазовая кривая и графики функций  $u(t), v(t)$  при  $a = -0.4, b = 0.2, c = 1, d = 0.06$  и начальных условиях  $v(0) = u(0) = 0$

**Fig. 4.** Phase curve and graphs of functions  $u(t), v(t)$  for  $a = -0.4, b = 0.2, c = 1, d = 0.06$  and under initial conditions  $v(0) = u(0) = 0$

На рис. 4 можно наблюдать убегающую траекторию:  $v \rightarrow +\infty$ . На рис. 5 присутствует только странный аттрактор, убегание траектории на бесконечность не наблюдается. На отображении через период этот странный аттрактор будет иметь форму, аналогичную аттрактору, изображенному на рис. 1, С.



**Рис. 5.** Фазовая кривая и графики функций  $u(t)$ ,  $v(t)$   
при  $a = -0.4$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 1$ ,  $d = 0.18$  и начальных условиях  $v(0) = u(0) = 0$

**Fig. 5.** Phase curve and graphs of functions  $u(t)$ ,  $v(t)$   
for  $a = -0.4$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 1$ ,  $d = 0.18$  and under initial conditions  $v(0) = u(0) = 0$

Рассмотрим фазовые портреты, изображенные на рис. 6. При воздействии на систему случайных возмущений в зависимости от интенсивности можно наблюдать следующий эффект: фазовая кривая в возмущенной системе убегает в бесконечность, в то время как в невозмущенной системе она формирует странный аттрактор.

трактор (рис. 5). Таким образом, странный аттрактор разрушился под воздействием случайных возмущений.

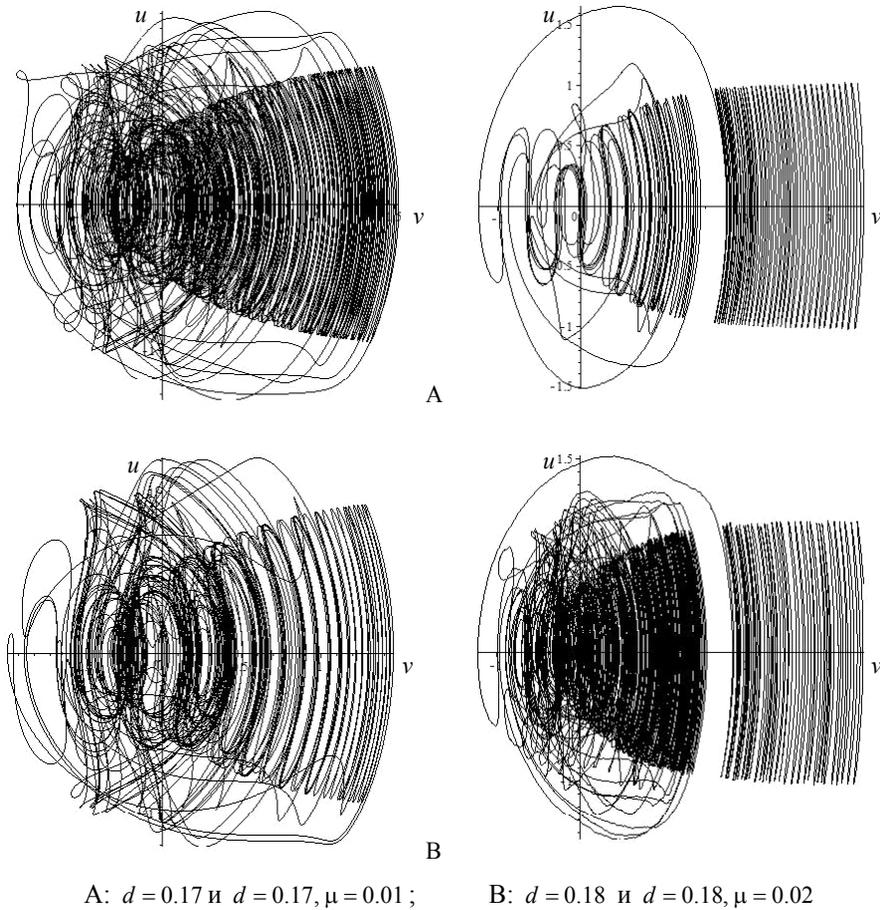


Рис. 6. Эволюция фазовой кривой при  $a = -0.4, b = 0.2, c = 1$

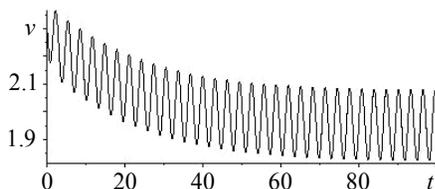
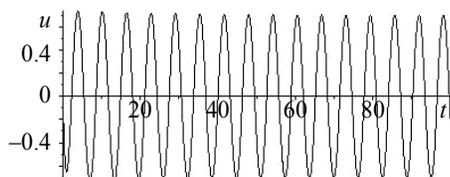
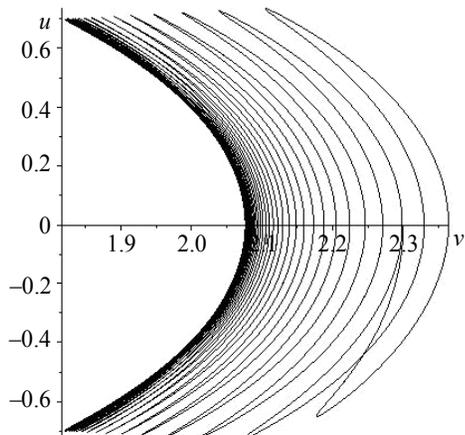
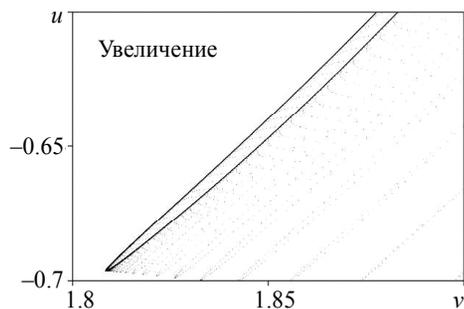
Fig. 6. Evolution of the phase curve for  $a = -0.4, b = 0.2, c = 1$

### 5.2. Нарушение цикличности траекторий

Траектории исследуемой системы при определенных значениях параметров могут притягиваться к устойчивым циклам, которым соответствуют периодические решения системы.

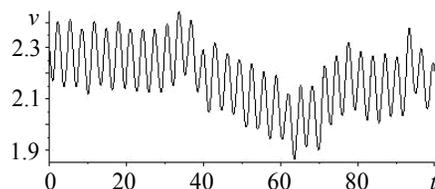
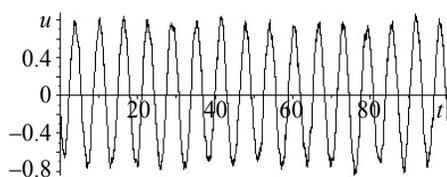
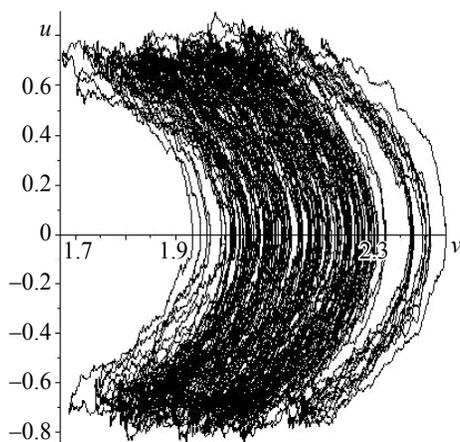
Рассмотрим влияние случайного возмущения на периодичность решений системы. Например, при значениях параметров  $a = 0.5, b = -0.5, c = 1, d = 0$  и начальных условиях  $v(0) = 2.3, u(0) = 0$  решения системы будут носить периодический характер. Это подтверждается наличием устойчивого цикла на фазовом портрете и соответствующих ему решений системы.

На рис. 8 показана эволюция искомых решений при появлении случайных возмущений интенсивности  $\mu$ .



**Рис. 7.** Фазовая кривая с увеличением и графики искомых функций  $u(t)$ ,  $v(t)$  детерминированной механической системы

**Fig. 7.** Phase curve with magnification and graphs of the sought functions  $u(t)$ ,  $v(t)$  of a deterministic mechanical system



**Рис. 8.** Фазовая кривая и графики функций  $u(t)$ ,  $v(t)$  возмущенной механической системы при  $\mu = 0.1$

**Fig. 8.** Phase curve and graphs of functions  $u(t)$ ,  $v(t)$  of a perturbed mechanical system at  $\mu = 0.1$

В возмущенной системе вместо периодических колебания появились хаотические колебания, устойчивый цикл на фазовом портрете сменился хаотической кривой.

### Заключение

Наличие случайных возмущений, действующих на механическую систему в задаче Суслова, может приводить к следующим эффектам: появлению некомпактных траекторий, преждевременному разрушению странного аттрактора, нарушению периодичности решений и переходу к хаотическим колебаниям. Открытым остается вопрос о том, какую интенсивность шума можно реализовать на практике?

Данная стохастическая схема предполагала воздействие белого шума (случайных возмущений) постоянной интенсивности только на динамику одного механического параметра. В случае постоянной интенсивности шума накопительный эффект случайных возмущений не столь ярко выражен. В контексте изучаемой проблемы стоит рассмотреть воздействие случайных возмущений более сложной структуры, в том числе и на обе искомые функции. Возможно, в этом случае изменение динамики возмущенной системы по сравнению с детерминированной системой будет еще более очевидно.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Суслов Г.К. Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1946.
2. Вагнер В.В. Геометрическая интерпретация неголономных динамических систем // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1941. Вып. 5. С. 301–327.
3. Ифраимов С.В., Кулешиов А.С. Об аналогии между задачей Суслова и задачей о движении саней Чаплыгина по сфере // Современные проблемы математики и механики. К 80-летию механико-математического факультета МГУ. 2013. Т. 7. С. 53–60.
4. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. Hamiltonicity and integrability of the Suslov problem // Regul. Chaotic Dyn. 2011. V. 16. No. 1–2. P. 104–116. DOI: 10.1134/S1560354711010035.
5. Borisov A.V., Mikishanina E.A. Two nonholonomic chaotic systems. Part I. On the Suslov problem // Regul. Chaotic Dyn. 2020. V. 25. Iss. 3. P. 313–322. DOI: 10.1134/S1560354720030065.
6. Бизяев И.А., Борисов А.В., Казаков А.О. Динамика задачи Суслова в поле силы тяжести: реверс и странные аттракторы // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. № 2. С. 263–287.
7. Козлова З.П. К задаче Суслова // МТТ. 1989. № 1. С. 13–16.
8. Fernandez O.E., Bloch A.M., Zenkov D.V. The geometry and integrability of the Suslov problem // J. Math. Phys. 2014. V. 55. No. 11. 112704. 14 p. DOI: 10.1063/1.4901754.
9. Arnold L. Stochastic Differential Equation. New York: Wiley, 1974.
10. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введ. в теорию и прил. / пер. с англ. Н.И. Королевой, А.И. Матасова; под ред. В. Б. Колмановского. М.: Мир-АСТ, 2003. 406 с.
11. Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: Теория и практика численного решения. СПб.: СПбГПУ, 2009. 767 с.
12. Кузнецов Д.Ф. Методы численного моделирования решений систем стохастических дифференциальных уравнений Ито в задачах механики: дис. ... канд. физ.-мат.наук. СПб.: СПбГТУ, 1996.
13. Кузнецов Д.Ф. К проблеме численного моделирования стохастических систем // Вестник молодых ученых. Прикладная математика и механика. 1999. № 2.
14. Kloeden P.E., Platen E., Schurz H. Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments. Berlin: Springer-Verlag, 1994. 292 p.
15. Chang C.C. Numerical solution of stochastic differential equations with constant diffusion coefficients // Math. Comput. 1987. V. 49. P. 523–542.
16. Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Унифицированное разложение Тейлора – Ито // Записки научных семинаров ПОМИ им. В.А.Стеклова. Вероятность и статистика. 1997. Т. 244. С.186–204.
17. Сатаев И.Р., Казаков А.О. Сценарии перехода к хаосу в неголономной модели волчка Чаплыгина // Нелинейная динам. 2016. Т. 12. № 2. С. 235–250.

18. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.  
 19. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat.Phys. 1978. V. 19. No. 1. P. 25–52. DOI: 10.1007/BF01020332.

Статья поступила 24.03.2021

Mikishanina E.A. (2021) INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF RANDOM PERTURBATIONS ON THE DYNAMICS OF THE SYSTEM IN THE SUSLOV PROBLEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 73. pp. 17–29

DOI 10.17223/19988621/73/2

Keywords: nonholonomic system, Suslov problem, strange attractor, random perturbations, stochastic differential equation.

The paper considers the generalized Suslov problem with variable parameters and the influence of random perturbations on the dynamics of the system under consideration. The physical meaning of the Suslov problem is Chaplygin's sleigh, which moves along the inner side of the circle. In the case of a deterministic system, a brief review of the previously obtained results is made, the presence of chaotic dynamics in the system and such effects as the appearance of a strange attractor and noncompact (escaping) trajectories is shown. Moreover, the latter may indicate a possible acceleration in the system. The appearance of chaotic strange attractors occurs due to a cascade of bifurcations of doubling the period. We also consider the dynamics of a perturbed system which arises due to the addition of «white noise» modeled by the Wiener process to one of the equations. Changes in the dynamics of a perturbed system compared to an unperturbed one are studied: chaotization of periodic regimes, the appearance of noncompact trajectories, and the premature destruction of strange attractors. In this paper, phase portraits, maps for the period, graphs of system solutions, and a chart of dynamical regimes are constructed using the Maple software package and the software package «Computer Dynamics: Chaos» ([http://site4.ics.org.ru//chaos\\_pack](http://site4.ics.org.ru//chaos_pack)).

AMS Mathematical Subject Classification: 37N15, 60H10, 74H65

**Financial support.** The work was supported by RFBR grant 18-29-10051 mk.

*Evgeniya A. Mikishanina* (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Actuarial and Financial Mathematics, Chuvash State University, Cheboksary, Russia). E-mail: [evaeva\\_84@mail.ru](mailto:evaeva_84@mail.ru)

#### REFERENCES

1. Suslov G.K. (1946) *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical mechanics]. Moscow: Gostekhizdat.
2. Wagner V.V. (1941) Geometricheskaya interpretatsiya negolonomnykh dinamicheskikh sistem [Geometric interpretation of nonholonomic dynamical systems]. *Trudy seminarov po vektornomu i tenzornomu analizu*. 5. pp. 301–327.
3. Ibraimov S.V., Kuleshov A.S. (2013) Ob analogii mezhdru zadachey Suslova i zadachey o dvizhenii saney Chaplygina po sfere [On the analogy between the Suslov problem and the Chaplygin sledge movement problem in the sphere]. *Sovremennyye problemy matematiki i mekhaniki. K 80-letiyu mekhaniko-matematicheskogo fakul'teta MGU*. 7. pp. 53–60.
4. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. (2011) Hamiltonicity and Integrability of the Suslov Problem. *Regular and Chaotic Dynamics*. 16(1–2). pp. 104–116. DOI: 10.1134/S1560354711010035.
5. Borisov A.V., Mikishanina E.A. (2020) Two nonholonomic chaotic systems. Part I. On the Suslov problem. *Regular and Chaotic Dynamics*. 25(3). pp. 313–322. DOI: 10.1134/S1560354720030065.

6. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kazakov A.O. (2016) Dinamika zadachi Suslova v pole sily tyazhesti: revers i strannyye attraktory [Dynamics of the Suslov problem in the field of gravity: reverse and strange attractors]. *Nelineynaya dinamika*. 12(2). pp. 263–287.
7. Kozlova Z.P. (1989) K zadache Suslova [Concerning Suslov's problem]. *Izvestiya RAN, Mekhanika Tverdogo Tela – Mechanics of Solids*. 1. pp. 13–16.
8. Fernandez O.E., Bloch A.M., Zenkov D.V. (2014) The geometry and integrability of the Suslov problem. *Journal of Mathematical Physics*. 55(11). 112704. DOI: 10.1063/1.4901754.
9. Arnold L. (1974) *Stochastic Differential Equations, Theory and Applications*. New York: Wiley.
10. Øksendal B. (2003) *Stochastic Differential Equations*. Berlin: Springer-Verlag.
11. Kuznetsov D.F. (2009) *Stokhasticheskie differentsial'nyye uravneniya: Teoriya i praktika chislennogo resheniya* [Stochastic differential equations: Theory and practice of numerical solution]. St. Petersburg: St. Petersburg State Polytechnic University.
12. Kuznetsov D.F. (1996) *Metody chislennogo modelirovaniya resheniy sistem stokhasticheskikh differentsial'nykh uravneniy Ito v zadachakh mekhaniki* [Methods of numerical modeling of solutions of systems of stochastic differential equations of ITO in problems of mechanics]. Dissertation. St. Petersburg State Polytechnic University.
13. Kuznetsov D.F. (1999) K probleme chislennogo modelirovaniya stohasticheskikh sistem [On the problem of numerical modeling of stochastic systems]. *Vestnik molodykh uchenykh. Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2.
14. Kloeden P.E., Platen E., Schurz H. (1994) *Numerical Solution of SDE through Computer Experiments*. Berlin: Springer-Verlag.
15. Chang C.C. (1987) Numerical solution of stochastic differential equations with constant diffusion coefficients. *Mathematics of Computation*. 49. pp. 523–542.
16. Kulchitsky O.Yu., Kuznetsov D.F. (1997) Unifitsirovannoye razlozheniye Teylora – Ito [Unified Taylor–Ito decomposition]. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI im. V.A. Steklova. Veroyatnost' i statistika*. 244. pp. 186–204.
17. Sataev I.R., Kazakov A.O. (2016) Stsenarii perekhoda k khaosu v negolonomnoy modeli volchka Chaplygina [Scenarios of transition to chaos in the nonholonomic model of the Chaplygin top]. *Nelineynaya dinamika*. 12(2). pp. 235–250.
18. Kuznetsov S.P. (2006) *Dinamicheskyy khaos* [Dynamic chaos]. Moscow: Fizmatlit.
19. Feigenbaum M.J. (1978) Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*. 19(1). pp. 25–52. DOI: 10.1007/BF01020332.

Received: March 24, 2021

Е.А. Павлов, А.И. Фурменко

**О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ВЛОЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНЫХ СТРУКТУР**

Появление первых теорем вложения, как и самого термина «вложения», связано с именем академика С.Л. Соболева. Дальнейшее развитие теории вложения пространств шло в двух направлениях: 1) теоремы вложения дифференцируемых функций; 2) теоремы вложения пространств измеримых функций. Авторами получены теоремы вложения для симметричных и более общих идеальных пространств измеримых, в смысле Лебега, функций.

*Ключевые слова:* теоремы вложения, симметричные пространства, идеальные структуры, оператор растяжения.

Появлению теории вложения пространств способствовал ряд неравенств, полученных Г.Г. Харди [1], Ф. Риссом [2]. Сам термин «вложение», как и первые теоремы вложения для пространств дифференцируемых функций нескольких переменных были получены в работах академика С.Л. Соболева [3]. Дальнейшие результаты в этом направлении получены в работах академика С.М. Никольского [4], О.В. Бесова, В.П. Ильина [5]. Значительный вклад в теорию вложения сделан П.Л. Ульяновым [6] и Н.Т. Темиргалиевым [7].

Для пространств измеримых, в смысле Лебега, функций первые результаты были получены Г.Г. Лоренцем [8, 9], В.А. Люксембургом [10], Ж.А. Лионсом [11], Е.М. Семёновым, С.Г. Крейном и Ю.И. Петуниным [12–15], В.И. Колядой [16]. В статье [16] дана обширная литература по теоремам вложения измеримых, в смысле Лебега, функций.

В фундаментальных трудах Х.Г. Трибеля [17, 18] собран огромный материал по теории вложения разных классов функций, содержатся результаты, полученные Х.Г. Трибелем, Е.М. Семёновым [12, 13] и В.А. Люксембургом [10]. Для симметричных пространств  $E$  было доказано вложение

$$L_1 \cap L_\infty \subset E \subset L_1 + L_\infty.$$

В [13] для общих идеальных структур приведено доказательство вложения

$$E \supset L_1 \cap L_\infty.$$

Следует отметить, что ряд теорем вложения идеальных структур содержится в [19].

В данной работе для общих идеальных структур, включающих в себя симметричные пространства, доказано вложение

$$E \subset L_1 + L_\infty.$$

Для достаточно широкого класса идеальных структур, включающих в себя симметричные пространства, доказано вложение

$$L_1 \cap L_\infty \subset E \subset L_1 + L_\infty.$$

В терминах норм операторов растяжения и в терминах индексов Бойда [20] доказаны теоремы вложения для симметричных пространств с ограниченным, измеримым носителем.

В статье введено новое пространство  $\overline{M}\varphi$ , которое называется обобщенным пространством Марцинкевича. Доказано вложение

$$E \subset \overline{M}\varphi_{E^1},$$

где  $\varphi_E(t) = \|\chi_{[0,t]}(s)\|_E$ .

### 1. Предварительные сведения

**Определение 1.** Функциональное банахово пространство  $E$  называется идеальной структурой, если из условий  $|x| \leq |y|$ , где  $x(t)$  – измеримая функция, а  $y(t) \in E$ , следует, что  $x(t) \in E$  и  $\|x\|_E \leq \|y\|_E$ .

**Определение 2.** Ассоциированным пространством  $E^1$  для идеальной структуры  $E$  называется совокупность всех измеримых функций, носители которых содержатся в носителе  $E$ , для которых (см. [13, 19, 21])

$$\|y\|_{E^1} = \sup_{\|x\|_E=1} \int_{\Omega} x(t)y(t) dt < \infty,$$

где  $\Omega$  – носитель пространства  $E$ , а интеграл понимается в смысле Лебега.

Для простоты изложения под носителем будем понимать один из промежутков:  $(-\infty, +\infty)$ ,  $(0, +\infty)$ ,  $(0, a)$ , хотя результаты легко переносятся на более общие пространства с мерой, т.е. пространства  $S(m, \mu)$ .

**Теорема 1** [13, 21]. Пусть  $U(t, \tau)$  – такая функция двух переменных  $t, \tau$ , что при каждом фиксированном  $t$  она, как функция  $\tau$ , принадлежит идеальной структуре  $E$ , функция  $\|U(t, \tau)\|_E$  – измерима по переменной  $t$  и выполняется соотношение

$$\int_{\Omega} \|U(t, \tau)\|_E dt < \infty.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left\| \int_{\Omega} U(t, \tau) dt \right\|_{E^{11}} \leq \int_{\Omega} \|U(t, \tau)\|_E dt,$$

где  $E^{11} = (E^1)^1$ .

**Определение 3.** Пусть  $S(0, \infty)$  – пространство всех измеримых по Лебегу функций, определенных на полуоси  $(0, \infty)$  и почти всюду конечных. Функцией распределения называется функция, определенная формулой для функции  $x(t) \geq 0$ :

$$\eta_x(\tau) = \text{mes} \{t: x(t) > \tau\}.$$

**Определение 4.** Две неотрицательные функции  $x(t)$  и  $y(t)$  называются равноизмеримыми, если выполняется равенство

$$\eta_x(\tau) = \eta_y(\tau).$$

Рассматриваются только такие функции  $x(t)$  и  $y(t)$ , для которых

$$\eta_x(\tau) < \infty, \quad \forall \tau \in (0, \infty),$$

$$\eta_y(\tau) < \infty, \quad \forall \tau \in (0, \infty).$$

**Определение 5.** Перестановкой неотрицательной функции  $x(t)$  называется функция, определенная равенством

$$x^*(t) = \inf \{ \tau: \eta_x(\tau) < t \}.$$

**Определение 6.** Функциональное банахово пространство на  $(0, +\infty)$  с мерой Лебега называется симметричным [8, 10, 12], если:

1) из того, что  $y \in E$  и  $|x| \leq |y|$  почти всюду на  $y \in E$ , следует, что  $x(t) \in E$  и  $\|x\|_E \leq \|y\|_E$ ;

2) из того, что  $y \in E$  и  $|x(t)|$  равноизмерима с  $|y(t)|$ , следует, что  $x \in E$  и  $\|x\|_E = \|y\|_E$ .

**Определение 7.** Оператор растяжения функций из  $E$  определяется равенством [13, 22]

$$\sigma_\tau x(t) = x\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad t, \tau \in (0, +\infty).$$

Если функции определены на интервале  $(0, a)$ , то

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x\left(\frac{t}{\tau}\right), & \text{если } t \leq \tau a, \\ 0, & \text{если } t > \tau a. \end{cases}$$

**Теорема 2** [13, 22]. Оператор растяжения  $\sigma_\tau$  ограниченно действует в симметричном пространстве  $E$ .

**Определение 8.** Пусть  $E$  – симметричное пространство. Верхним индексом Бойда [13, 20] называется число

$$\beta_E = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln(\tau)}.$$

Нижним индексом Бойда называется число

$$\alpha_E = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln(\tau)}.$$

Справедливо следующее неравенство:  $0 \leq \alpha_E \leq \beta_E \leq 1$ .

**Теорема 3.** (Обобщенное неравенство Геделя) [13, 19]. Справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} x(t)y(t) dt < \|x\|_E \cdot \|y\|_{E^1}.$$

**Определение 9.** Пространством Лоренца на  $(0, +\infty)$  называется множество функций, для которых конечна норма [8, 13]

$$\|x\|_{\Lambda_\varphi} = \int_0^\infty x^*(t) d\varphi(t),$$

где  $\varphi(t)$  – неотрицательная, вогнутая (квазивогнутая) на  $(0, +\infty)$ .

Пространством Марцинкевича на  $(0, +\infty)$  называется множество функций, для которых конечна норма [13, 23])

$$\|x\|_{M_\psi} = \sup_{0 < h < \infty} \frac{1}{\psi(h)} \int_0^h x^*(s) ds,$$

где  $\psi$  – вогнутая (квазивогнутая), неотрицательная функция на  $(0, +\infty)$  [8, 13, 23]).

**Теорема 4** [12, 13]). Справедливо соотношение

$$\Lambda_{\varphi_E} \subset E \subset M_{\frac{t}{\varphi_E}},$$

где  $\varphi_E(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_E$  – фундаментальная функция.

**Лемма Е.М. Семёнова** ([13], с. 136). Пусть  $\psi(t)$  – непрерывная возрастающая функция. Тогда для любой функции  $x \in E$ , где  $E$  – симметричное пространство, справедливо неравенство

$$\left\| \int_0^\infty \sigma_\tau x^*(t) d\psi(t) \right\|_E \leq \int_0^\infty \|\sigma_\tau x\|_E d\psi(t).$$

**Определение 10.** Идеальная структура называется обладающей свойством Минковского, если выполняется обобщенное неравенство Минковского [13, 21])

$$\left\| \int_\Omega F(t, s) ds \right\|_E \leq \int_\Omega \|F(t, s)\|_E ds.$$

В [13] (см. с. 124) была доказана следующая теорема.

**Теорема 5.** Пусть  $E((0, +\infty); dt)$  симметричное пространство. Тогда справедливо вложение [10, 12])

$$L_1 \cap L_\infty \subset E \subset L_1 + L_\infty. \tag{1}$$

## 2. Основные результаты

Оказывается, что более широкий класс (чем симметричные пространства) идеальных структур является промежуточным между  $L_1$  и  $L_\infty$ .

**Теорема 6.** Пусть  $E((0, +\infty); dt)$  – идеальная структура, содержащая все характеристические функции  $\chi_e(t)$ , где  $e \subset (0, +\infty)$  и  $\text{mes } e < \infty$ , и выполняется соотношение

$$\sup_{e: \text{mes } e=1} \|\chi_e\|_{E_1} \leq c < \infty, \tag{2}$$

где  $c$  не зависит от  $e : \text{mes } e = 1$ .

Тогда справедливо вложение

$$E \subset L_1 + L_\infty. \quad (3)$$

**Доказательство.** В [13] (см. с. 89) доказано равенство

$$\int_0^{\theta} x^*(s) ds = \sup_{e: \text{mes } e = \theta} \int_e |x(s)| ds \quad (4)$$

и равенство (см. [13], с. 108)

$$\|x\|_{L_1+L_\infty} = \int_0^1 x^*(s) ds. \quad (5)$$

Из [11] и [23] получаем

$$\|x\|_{L_1+L_\infty} = \int_0^1 x^*(s) ds = \sup_{e: \text{mes } e = 1} \int_e |x(s)| ds = \sup_{e: \text{mes } e = 1} \int_e |x(s)| \chi_e(s) ds. \quad (6)$$

Используя обобщенное неравенство Гельдера [13, 19]), имеем

$$\begin{aligned} \|x\|_{L_1+L_\infty} &= \sup_{e: \text{mes } e = 1} \int_e |x(s)| \chi_e(s) ds \leq \sup_{e: \text{mes } e = 1} \left( \|x\|_E \cdot \|\chi_e\|_{E^1} \right) = \\ &= \|x\|_E \cdot \sup_{e: \text{mes } e = 1} \|\chi_e\|_{E^1} = c \|x\|_E, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$c = \sup_{e: \text{mes } e = 1} \|\chi_e\|_{E^1} < \infty. \quad (8)$$

В [13] Лемма 4.1 (см. с. 123) была доказана.

**Теорема 7.** Пусть идеальная структура  $E((0, +\infty); dt)$  содержит все характеристические функции  $\chi_e(t)$  с  $\text{mes } e = \mu_0$  и обладает свойством

$$\sup_{e: \text{mes } e = \mu_0} \|\chi_e\|_E \leq c < \infty, \quad (9)$$

где  $c$  не зависит от выбора  $e : \text{mes } e = \mu_0$ , а  $\mu_0$  – любое фиксированное положительное число.

Тогда справедливо вложение (см. [13], с. 123)

$$L_1 \cap L_\infty \subset E. \quad (10)$$

**Теорема 8.** Пусть идеальная структура  $E((0, +\infty); dt)$  обладает следующими свойствами:

а)  $E$  содержит все характеристические функции  $\chi_e(t)$  с  $\text{mes } e = \mu_0$  и выполняется неравенство

$$\sup_{e: \text{mes } e = \mu_0} \|\chi_e\|_E \leq c_1 < \infty, \quad (11)$$

где  $c_1$  зависит только от  $\mu_0$ ;

$$\text{б) } \sup_{e: \text{mes } e=1} \|\chi_e\|_{E^1} \leq c_2 < \infty, \quad (12)$$

где  $c$  не зависит от  $e : \text{mes } e = 1$ .

Тогда справедливо вложение

$$L_1 \cap L_\infty \subset E \subset L_1 + L_\infty. \quad (13)$$

Доказательство следует из теорем 6 и 7.

**Следствие 1.** Пусть  $E((0, +\infty); dt)$  – симметричное пространство. Тогда (см. [13], с. 123) справедливо вложение

$$L_1 \cap L_\infty \subset E \subset L_1 + L_\infty. \quad (14)$$

*Доказательство.* Проверим выполнение условий а) и б) теоремы 8.

$$\text{а) } \|\chi_e\|_E = \varphi_E(\text{mes } e) = \varphi_E(\mu_0) < \infty, \quad (15)$$

где  $c_1 = \varphi_E(\mu_0)$  не зависит от  $e : \text{mes } e = \mu_0$ ;

$$\text{б) } \|\chi_e\|_{E^1} = \varphi_{E^1}(\text{mes } e) \leq \frac{\text{mes } e}{\varphi_E(\text{mes } e)} = \frac{1}{\varphi_E(\text{mes } 1)} = c_2 < \infty. \quad (16)$$

**Теорема 9.** Пусть  $E_1((0, +\infty); dt)$  и  $E_2((0, +\infty); dt)$  – два симметричных пространства и выполняется соотношение

$$\|\sigma_{\frac{1}{t}}\|_{E_1} \in E_2. \quad (17)$$

Тогда справедливо вложение

$$E_1 \subset E_{2_{t,1}}, \quad (18)$$

$$\text{где } \|x\|_{E_{t,1}} = \|x^{**}(t)\|_E = \left\| \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s) ds \right\|_E. \quad (19)$$

*Доказательство.* Получаем, пользуясь обобщенным неравенством Гёльдера и делая замену переменной  $s = t \cdot \tau$ :

$$\begin{aligned} x^{**}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s) ds = \int_0^1 x^*(\tau \cdot t) d\tau = \int_0^\infty x^*(\tau \cdot t) \cdot \chi_{[0,1]}(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \|x^*(\tau \cdot t)\|_{E_1} \cdot \|\chi_{[0,1]}(\tau)\|_{E_1} \leq \|\chi_{[0,1]}(\tau)\|_{E_1} \cdot \|\sigma_{\frac{1}{t}}\|_{E_1} \cdot \|x\|_{E_1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Беря норму в  $E_2$  от обеих частей неравенства (20), получаем

$$\|x^{**}\|_{E_2} \leq c \cdot \|\sigma_{\frac{1}{t}}\|_{E_1} \|x\|_{E_1}, \quad (21)$$

где  $c = \|\chi_{[0,1]}(s)\|_{E_1}$ .

**Следствие 2.** Полагая в теореме 9  $E = E_1, \Lambda_\Psi = E_2$ , получим вложение

$$E \subset \Lambda_{\Psi_{t,1}}. \quad (22)$$

**Замечание 1.** В теореме 6 (см. [13], с. 161) при выполнении соотношения

$$\|\sigma_{\frac{1}{t}}\|_E \in \Lambda_\Psi \quad (23)$$

было доказано вложение

$$E \subset \Lambda_\Psi. \quad (24)$$

Так как очевидно вложение

$$\Lambda_{\Psi_{t,1}} \subset \Lambda_\Psi, \quad (25)$$

то утверждение следствия является более сильным, чем утверждение теоремы 6 из [13].

**Замечание 2.** Далеко не для всех пар симметричных пространств выполняется включение

$$\|\sigma_{\frac{1}{t}}\|_{E_1} \in E_2. \quad (26)$$

Примером могут быть пары

$$L_p((0, +\infty); dt) \quad 1 \leq p < \infty; \quad (27)$$

$$L_q((0, +\infty); dt) \quad 1 \leq q < \infty. \quad (28)$$

**Теорема 10.** Пусть симметричные пространства  $E_1((0, 1); dt)$  и  $E_2((0, 1); dt)$  таковы, что выполняется соотношение

$$\|\sigma_{\frac{1}{t}}\|_{E_1} \in E_2. \quad (29)$$

Тогда справедливо вложение

$$E_1 \subset E_{2,t,1}. \quad (30)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9.

**Следствие 3.** Пусть симметричные пространства  $E_1((0, 1); dt)$  и  $E_2((0, 1); dt)$  таковы, что

$$\beta_{E_1} < \alpha_{E_2}. \quad (31)$$

Тогда справедливо вложение

$$E_1 \subset E_{2,t,1}. \quad (32)$$

Доказательство следует из теоремы 9 и свойств индексов Бойда [20]).

**Следствие 4.** Пусть  $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ . Тогда справедливо вложение

$$\Lambda_{p_2}((0, 1); dt) \subset \Lambda_{p_1}((0, 1); dt). \quad (33)$$

*Доказательство.* Несложно проверить, что  $\|\sigma_\tau\|_{\Lambda_p} = t^{(1/p)}$ ,  $\alpha_{\Lambda_p} - \beta_{\Lambda_p} = \frac{1}{p}$ .

Утверждение следствия 4 вытекает из следствия 2 теоремы 9.

**Определение 11.** Пусть  $E((\Omega; dt))$  – идеальная структура, а  $\Omega$  – измеримое, в смысле Лебега, подмножество из  $R$ .  $E((\Omega; dt))$  обладает следующим свойством: в  $E$  ограниченно действует оператор растяжения

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x\left(\frac{t}{\tau}\right), & \text{если } \frac{t}{\tau} \in \Omega, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (34)$$

Пространством Харди называется функциональное пространство с нормой

$$\|x\|_{E_H} = \left\| \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \right\|_E. \quad (35)$$

**Теорема 11.** Пусть  $E_1((\Omega; dt))$  и  $E_2((\Omega; dt))$ , где  $\Omega = (0, 1)$  или  $\Omega = (0, +\infty)$  – идеальные структуры. В  $E_1$  ограниченно действует оператор растяжения.  $E_2((\Omega; dt))$  обладает свойством Минковского [13, 19]). Тогда, если выполняется соотношение  $\|\sigma_{\frac{1}{t}}\|_{E_1} \in E_2$ , то справедливо вложение

$$E_1 \subset E_{2_H}. \quad (36)$$

*Доказательство.* Делая замену переменной  $s = t \cdot \tau$ , получаем

$$\|x\|_{E_{2_H}} = \left\| \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \right\|_{E_2} = \left\| \int_0^1 x(t \cdot \tau) d\tau \right\|_{E_2}. \quad (37)$$

Пользуясь обобщенным неравенством Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned} \|x\|_{E_{2_H}} &= \left\| \int_0^1 x(t \cdot \tau) \cdot \chi_{[0,1]}(\tau) d\tau \right\|_{E_2} \leq \|x(t \cdot \tau)\|_{E_1} \| \chi_{[0,1]}(\tau) \|_{E_1^1} \leq \\ &\leq \| \sigma_{\frac{1}{t}} \|_{E_1} \|_{E_2} \cdot \| \chi_{[0,1]}(\tau) \|_{E_1^1} \cdot \|x\|_{E_1} = c \|x\|_{E_1}, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$c = \| \sigma_{\frac{1}{t}} \|_{E_1} \|_{E_2} \cdot \| \chi_{[0,1]}(\tau) \|_{E_1^1}. \quad (39)$$

**Определение 12.** Обобщённым пространством Марцинкевича назовём пространство, наделённое нормой

$$\|x\|_{\overline{M}_\varphi} = \sup_{0 < h < \infty} \frac{\varphi(h)}{h} \int_0^h |x(s)| ds, \quad (40)$$

где  $\varphi(t)$  определена и измерима на  $(0, +\infty)$  и неотрицательная на  $(0, +\infty)$ .

**Теорема 12.** Пусть идеальная структура обладает следующими свойствами:

1.  $E$  содержит все характеристические функции  $\chi_e(t)$ , где  $e \subset (0, +\infty)$ ,  $e$  – измеримо;

2. Выполняется неравенство

$$\|\chi_{[0, h]}\|_{E^1} \leq \frac{h}{\|\chi_{[0, h]}\|_E}. \quad (41)$$

Тогда справедливо вложение

$$E \subset \overline{M}_{\varphi_E(t)}, \quad (42)$$

где  $\varphi_E(t) = \|\chi_{[0, t]}\|_E$ .

**Доказательство.** Получаем

$$\|x\|_{\overline{M}_{\varphi_E}} = \sup_{0 < h < \infty} \frac{\varphi_E(h)}{h} \int_0^h |x(s)| ds = \sup_{0 < h < \infty} \frac{\varphi_E(h)}{h} \int_0^\infty |x(s)| \chi_{[0, h]} ds. \quad (43)$$

Пользуясь обобщенным неравенством Гёделя [13]), имеем

$$\|x\|_{\overline{M}_{\varphi_E}} \leq \sup_{0 < h < \infty} \frac{\varphi_E(h)}{h} \cdot \|x\|_E \cdot \|\chi_{[0, h]}\|_{E^1}.$$

Пользуясь свойством 2 для  $E$ , получаем

$$\|x\|_{\overline{M}_{\varphi_E}} \leq \sup_{0 < h < \infty} \frac{\varphi_E(h)}{h} \cdot \frac{h}{\varphi_E(h)} \cdot \|x\|_E = \|x\|_E. \quad (44)$$

**Замечание 3.** Для случая, когда  $E$  – симметричное пространство, вложение (42) будет выполняться. Вложение (42) в этом случае будет слабее вложения

$$E \subset M_{\frac{t}{\varphi_E(t)}}, \quad (45)$$

так как очевидно вложение

$$M_{\frac{t}{\varphi_E(t)}} \subset \overline{M}_{\varphi_E(t)}. \quad (46)$$

### Заключение

1. Доказано, что достаточно общая идеальная структура (см. теорему 8) является промежуточной между пространством  $L_1$  и  $L_\infty$ .

2. Показано, что промежуточность симметричного пространства между  $L_1$  и  $L_\infty$  является следствием теоремы о промежуточности идеальной структуры между  $L_1$  и  $L_\infty$ .

3. Доказаны теоремы вложения для идеальных структур с весом, в которых ограничено действует оператор растяжения.

4. Доказано вложение идеальной структуры (см. теорему 12) в обобщённое пространство Марцинкевича.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Поля Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
2. Рисс Ф., Секефальди-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. С. 590.
3. Соболев С.Л. Об одной теореме функционального анализа // Матем. сборник. 1938. № 4. С. 471–497.
4. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения // М.: Наука. 1969.
5. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. С. 480.
6. Ульянов П.Л. О вложении некоторых классов функции // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 4. С. 405–414.
7. Темиргалиев Н.Т. О вложении в некоторые пространства Лоренца // Изв. вузов. Матем. 1980. № 6. С. 83–85.
8. Lorentz G.G. On the theory of spaces  $\Lambda$ . // Pac. J. Math. 1951. V. 1. P. 411–429. DOI: 10.2140/pjm.1951.1.411.
9. Lorentz G.G. Some new functional spaces // Ann. Math. 1950. V. 51. P. 37–55.
10. Luxemburg, W.A.J. Banach function spaces: Ph.D. Dissertation. Technische Hogeschool te Delft, 1955.
11. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
12. Семенов Е.М. Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156. № 6. С. 1292–1295.
13. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
14. Крейн С.Г. О понятии нормальной шкалы пространств // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132. № 3. С. 510–513.
15. Крейн С.Г., Петунин Ю.И. Шкалы банаховых пространств // УМН. Т. 21. № 2. 1966. С. 89–168. DOI: 10.1070/RM1966v021n02ABEH004151.
16. Коляда В.И. Перестановки функций и теоремы вложения // УМН. 1989. Т. 44. № 3(269). С. 61–95. DOI: 10.1070/RM1989v044n03ABEH002287.
17. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. С. 664.
18. Трибель Х. Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986. С. 447.
19. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. С. 744.
20. Boyd D.W. Indices and their relationship to interpolation // Canad. J. Math. 1969. V. 21. No. 5. P. 1245–1254. DOI: 10.4153/CJM-1969-137-x.
21. Павлов Е.А. Об операторах, инвариантных относительно сдвига в симметричных пространствах // Сибирский математический журнал. 1977. Т. 18. № 1. С. 80–85.
22. Shimogaki, Tetsuya. A note on norms of compression operators on function spaces // Proc. Japan Acad. 1970. V. 46. No. 3. P. 239–242. DOI: 10.3792/pja/119552039.
23. Maucnkiewicz J. Sur I interpolation d'opérations // C. R. Acad. Sc. 1939. V. 208. P. 1272–1273.
24. Берг Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир. 1980. 264 с.

Pavlov E.A., Furmenko A.I. (2021) ON SOME EMBEDDING THEOREMS FOR IDEAL STRUCTURES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 73. pp. 30–41

DOI 10.17223/19988621/73/3

Keywords: embedding theorems, symmetric spaces, ideal structures, extension operator

For general ideal structures involving symmetric spaces, the following embedding is proved:

$$E \subset L_1 + L_\infty.$$

For a class of ideal structures involving symmetric spaces, it is proved that

$$L_1 \cap L_\infty \subset E \subset L_1 + L_\infty.$$

Embedding theorems for symmetric spaces with bounded measurable support are proved in terms of the norms of the extension operators and in terms of Boyd indices (see [20]).

A new space  $\overline{M}_\varphi$  called the generalized Marcinkiewicz space is introduced. The following embedding is proved:

$$E \subset \overline{M}_{\varphi_{E^1}},$$

where  $\varphi_E(t) = \|\chi_{[0,t]}(s)\|_E$ .

AMS Mathematical Subject Classification:

*Evgeniy A. Pavlov* (Professor, Head of Department of Mathematics, The Crimean State Engineering Pedagogical University, Simferopol, Russian Federation). E-mail: pavlov-oe@b.k.ru

*Aleksandr I. Furmenko* (Associate Professor of the Department of Mathematics, «N.E. Zhukovskiy and Yu.A. Gagarin Air Force Academy", Voronezh, Russian Federation). E-mail: furmenko@mail.ru

#### REFERENCES

1. Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. (1952) *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press.
2. Riesz F., Szőkefalvi-Nagy B. (1990) *Functional Analysis*. New York: Dover.
3. Sobolev S.L. (1938) On a theorem of functional analysis. *American Mathematical Society Translations*. 2(34). pp. 39–68.
4. Nikolskiy S.M. (1969) *Priblizheniye funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya* [Approximation of functions of many variables and embedding theorems]. Moscow: Nauka.
5. Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skii S.M. (1978) *Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems*. Washington: V. H. Winston.
6. Ul'yanov P.L. (1967) Imbedding of certain classes of functions. *Mathematical Notes*. 1. pp. 270–276.
7. Temirgaliev N.T. (1980) Embedding in some Lorentz spaces. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Matematika*. (6). pp. 83–85.
8. Lorentz G.G. (1951) On the theory of spaces  $\Lambda$ . *Pacific Journal of Mathematics*. 1. pp. 411–429. DOI: 10.2140/pjm.1951.1.411.
9. Lorentz G.G. (1950) Some new functional spaces. *Annals of Mathematics*. 51(1). pp. 37–55.
10. Luxemburg W.A.J. (1955) Banach Function Spaces. Ph.D. Dissertation, Technische Hogeschool te Delft.
11. Lyons J.L., Magenes E. (1972) *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*. Berlin: Springer-Verlag.
12. Semenov E.M. (1964) Teoremy vlozheniya dlya banakhovykh prostranstv izmerimyykh funktsiy [Embedding theorems for Banach spaces of measurable functions]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 156(6). pp. 1292–1295.

13. Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. (1978) *Interpolyatsiya lineynykh operatorov* [Interpolation of linear operators]. Moscow: Nauka.
14. Krein S.G. (1960) O ponyatii normal'noy shkaly prostranstv [On the concept of the normal scale of spaces]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 132(3). pp. 510–513.
15. Krein S.G., Petunin Yu.I. (1966) Scales of Banach spaces. *Russian Mathematical Surveys*. 21(2). pp. 85–159.
16. Kolyada V.I. (1989) Rearrangements of functions and embedding theorems. 44(5). pp. 73–117. DOI: 10.1070/RM1989v044n05ABEH002287.
17. Triebel H. (1978) *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
18. Triebel H. (1983) *Theory of Function Spaces*. Boston: Birkhäuser.
19. Kantorovich L.V., Akilov G.P. (1982) *Functional Analysis*. Amsterdam: Elsevier.
20. Boyd D.W. (1969) Indices of function spaces and their relationship to interpolation. *Canadian Journal of Mathematics*. 21. pp. 1245–1254. DOI: 10.4153/CJM-1969-137-x.
21. Pavlov E.A. (1977) Operators invariant relative to displacement in symmetric spaces. *Siberian Mathematical Journal*. 18(1). pp. 138–142.
22. Shimogaki T. (1970) A note on norms of compression operators on function spaces. *Proceedings of the Japan Academy*. 46(3). pp. 239–242. DOI:10.3792/pja/1195520398.
23. Marcinkiewicz J. (1939) Sur l'interpolation d'opérations. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. 208. pp. 1272–1273.
24. Bergh J., Löfström J. (1976) *Interpolation Spaces. An Introduction*. Berlin: Springer-Verlag.

Received: June 22, 2021

## МЕХАНИКА

УДК 531.352

DOI 10.17223/19988621/73/4

А.М. Бубенчиков, М.А. Бубенчиков, Д.В. Мамонтов,  
Д.С. Капарулин, А.В. Лун-Фу

ВРАЩЕНИЯ ТОРОВ В СТРУКТУРЕ ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА<sup>1</sup>

Рассмотрено движение крупных молекул углерода, представляющих из себя наноторы. Эти объекты находятся в колончатой фазе жидкого кристалла. Выделен минимальный фрагмент жидкокристаллической фазы. Анализируется динамическое состояние типичной молекулы рассматриваемой структуры.

**Ключевые слова:** наноматериалы, математическое моделирование, молекулярная динамика, наноторы, углеродные материалы, поверхностные материалы.

Наноторы как углеродные конструкции сами по себе представляют научный интерес, поскольку сами торы являются поверхностными кристаллами. Во многих теоретических работах с позиций кристаллографии исследуются геометрические характеристики атомной конструкции наноторов. Работа [1] посвящена стабильности формирования идеального углеродного тора. В [2] рассмотрены группы симметрии идеальных наноторов. Авторами [3] использованы методы атом-атомных взаимодействий для описания конструкций наноторов  $C_{180}$ ,  $C_{270}$ ,  $C_{360}$ ,  $C_{750}$ . В [4] говорится о применениях наноторов в качестве датчиков электрических сигналов, а также для захвата и регистрации отдельных атомов и их ионов. Авторами [5] на основе концепции фактор-пространства строится геометрическая модель нанотора и с использованием методов алгебры и теории многообразий проводится анализ симметрии разработанных геометрических моделей. В [6] рассмотрено электрическое сопротивление наноторов при их контакте с одностенными углеродными нанотрубками, а в [7] – колебательные гармоники углеродных торов. Исследования, представленные в обзоре [8] классифицированы по группам: конструкция, моделирование и приложения. В [9] говорится о возможном использовании наноторов в качестве высокочастотных генераторов. Авторами [10] рассмотрены борные аналоги наноторов, а в [11–13] определены магнитные моменты тороидальных конструкций. Из представленного краткого обзора следует, что теоретические работы по молекулярным структурам на основе торов отсутствуют. Авторы настоящей работы имели положительный опыт моделирования структур на основе фуллеренов, а также пластинок  $B_{42}$  [14–17].

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-71-10049.

Рассматривается элементарный фрагмент пластического кристалла с первоначально гексагональной укладкой столбцов. Центральный столбец имеет пять торов. Столбцы окружения – по четыре тора. Бублики стержневого столбца попадают в углубления между торами столбцов окружения. В результате имеется симметрично расположенный тор в центре фрагмента и 28 торов окружения. На рис. 1 показан элементарный фрагмент (вид сверху). Здесь же серым цветом показаны позиции центра масс бублика, находящегося в середине стержневого столбца. Расчетным образом определяются кинематические и динамические характеристики трех центральных и симметрично расположенных торов. Целью настоящей работы является получение устойчивости положений торов в элементарном фрагменте жидкого кристалла и анализ их вращений в самосогласованном поле окружающих тороидальных молекул.

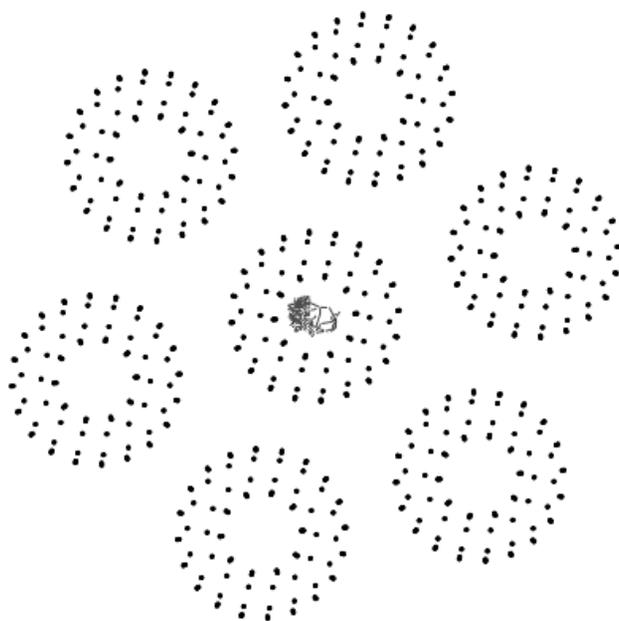


Рис. 1. Гексагональная структура наноторов (вид сверху)

Fig. 1. Hexagonal structure of nanotori (top view)

### Математическая модель

Чтобы описать вращательное движение молекулы нанотора вокруг ее собственного центра масс, используется проекция уравнения момента количества движения на подвижные оси, связанные с этим объектом:

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= M_{\xi}, \\
 B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= M_{\eta}, \\
 C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= M_{\zeta}.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь  $p, q, r$  – проекции угловой скорости на оси подвижной системы отсчета  $C\xi\eta\zeta$ ;  $A, B, C$  – главные моменты инерции молекулы для её центра масс. Проекции моментов сил на оси системы координат  $C\xi\eta\zeta$ , связанные с центральным тором, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{\xi} &= a_{11}M_x + a_{12}M_y + a_{13}M_z, \\ M_{\eta} &= a_{21}M_x + a_{22}M_y + a_{23}M_z, \\ M_{\zeta} &= a_{31}M_x + a_{32}M_y + a_{33}M_z, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\{a_{ij}\} (i, j = 1, 3)$  – матрица направляющих косинусов, связывающая неподвижную и подвижную декартовы системы координат;  $M_x, M_y, M_z$  – проекции моментов сил на неподвижные оси координат;

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^S \mathbf{M}_k, \quad \mathbf{M}_k = [\mathbf{r}_{kC}, \mathbf{F}_k] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{kC} & y_{kC} & z_{kC} \\ X_k & Y_k & Z_k \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{M}_k$  – момент равнодействующей всех ван-дер-ваальсовских сил, действующих на  $k$ -й атом молекулы, взятый относительно центра масс молекулы;  $\mathbf{r}_{kC}$  – радиус-вектор атома относительно центра масс молекулы  $C_{158}$ ;  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – орты неподвижной системы координат.

Тогда величины силовых воздействий на отдельный атом нанотора можно определить следующим образом:

$$X_k = -\sum_{j=1}^{N_p} \frac{\partial U}{\partial x}(\rho_{kj}), \quad Y_k = -\sum_{j=1}^{N_p} \frac{\partial U}{\partial y}(\rho_{kj}), \quad Z_k = -\sum_{j=1}^{N_p} \frac{\partial U}{\partial z}(\rho_{kj}). \quad (4)$$

Здесь  $X_k, Y_k, Z_k$  – проекции равнодействующей всех сил на оси неподвижной системы отсчета;  $N_p$  – количество атомов в окружающих торах;  $\rho_{kj}$  – расстояния между  $k$ -м атомом центрального тора и  $j$ -м атомом окружения. Уравнения (2) замыкаются кинематическими соотношениями, связывающими проекции вектора мгновенной угловой скорости с углами Эйлера и их производными:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (2) и (5) интегрируются при следующих начальных условиях:

$$t = 0; \quad p = q = r = 0; \quad \varphi = \psi = 0; \quad \theta = \pi/2. \quad (6)$$

Последнее равенство в (6), нарушающее однородность условий, берется для того, чтобы отойти от координатной особенности, которая имеется в уравнениях (5) при  $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$  и т.д.

Типичный тор, находящийся в центре выделенного кристаллического фрагмента, будет представлен совокупностью 158 атомов углерода. Таким образом, эти атомы будут являться силовыми центрами и результирующие воздействия окружения будут направлены в позиции отдельных атомов. Суммируя все эти воздействия, можно найти главный вектор внешних сил, который по теореме о движении центра масс объекта будет пропорционален его ускорению:

$$M \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = - \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{k=1}^S \nabla U(\rho_{jk}), \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \mathbf{v}_c. \quad (7)$$

Здесь  $M$  – масса тора;  $v_c$  – скорость центра масс перемещающейся молекулы;  $S = 158$  – число атомов в молекуле;  $\rho_{jk} = \rho_{kj}$ ;  $U(\rho_{jk})$  – LJ-потенциал атом-атомного взаимодействия;  $\nabla$  – оператор градиента, индекс «с» определяет центр вращающегося тора.

Система векторных уравнений (7) может интегрироваться со следующими простейшими начальными условиями:

$$t = 0, \mathbf{v}_c = \mathbf{v}_c^0, \mathbf{r}_c = 0. \quad (8)$$

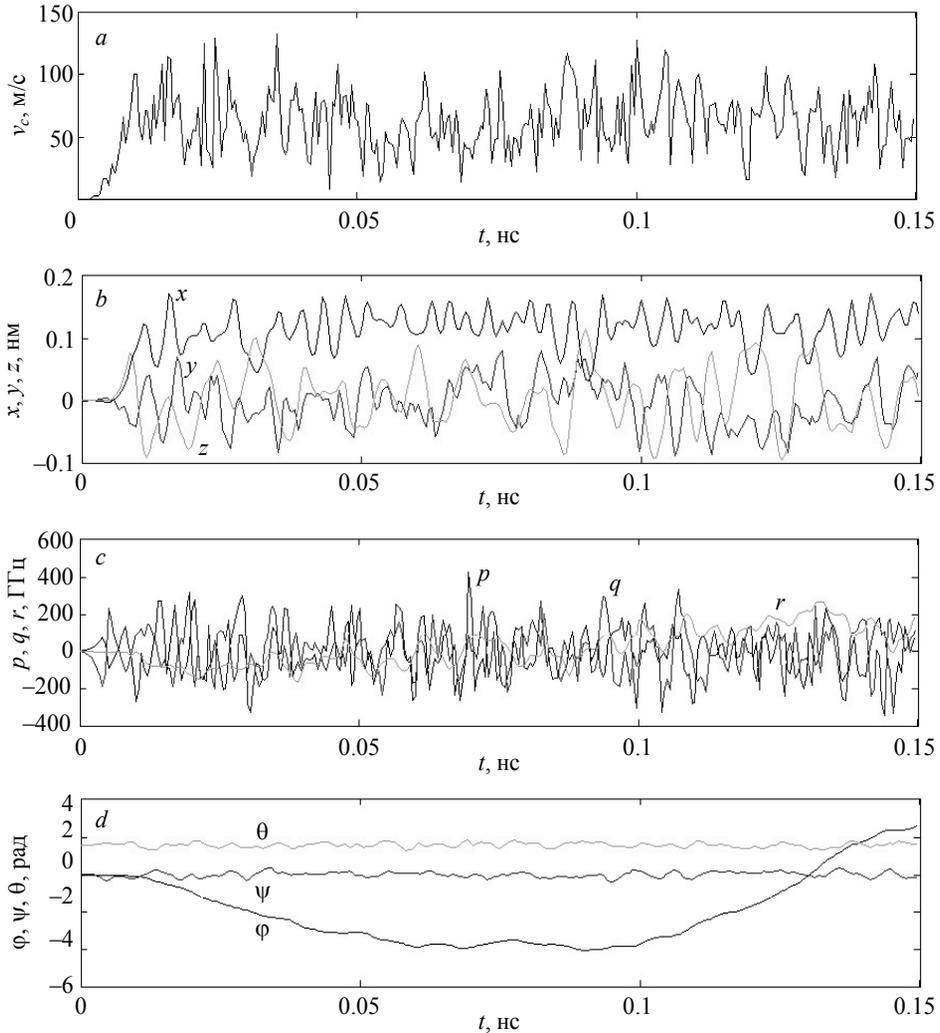
Здесь  $\mathbf{r}_c$  – радиус-вектор центра масс молекулы;  $\mathbf{v}_c^0$  – начальная тепловая скорость молекулы.

### Численная реализация математической модели и результаты расчетов

В основу математической модели положены атом-атомные взаимодействия атомов, находящихся в поверхностных структурах различных торов. Центральный тор имеет особый статус, поскольку его центр масс является центром симметрии фрагмента структуры. Отсутствие в молекулярной системе ковалентных связей дает возможность наноторам вращаться и участвовать в поступательных перемещениях вместе с центром масс. Для описания вращательного движения молекул используется подход Эйлера. Поступательные перемещения молекул определяются на основе теоремы о движении центра масс молекулярной частицы. Система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, определяющих динамику молекулярного кластера обычным приемом, сводится к системе уравнений первого порядка, которая интегрируется с использованием пошаговых методов высокого порядка точности. Все расчеты проведены с постоянным шагом интегрирования по времени  $\Delta t = 10^{-6}$  нс. Рассмотрим некоторые результаты расчетов динамики центрального тора.

На рис. 2 приведены распределения кинематических характеристик типичного тора гексагональной столбчатой структуры. В центральном столбце этой структуры три смежных тора являются подвижными, положения других торов окружения зафиксированы.

Как следует из рис. 2, *a* среднее значение скорости центра масс составляет величину  $v_c = 60$  м/с. Это значение отвечает колебательной температуре молекул  $T = 290$  К. На рис. 2, *b* показаны координаты центра масс тора, находящегося в середине выделенного фрагмента структуры. Видно, что тор покидает изначальное симметричное положение, поскольку черная кривая колеблется около значения 0.1 нм. Из рис. 2, *c* видно, что одна из проекций угловой скоростей, а именно проекция на главную ось тора, на достаточно продолжительных интервалах принимает значения определенного знака. Последнее выражается в том (рис. 2, *d*), что угол собственного вращения тора изменяется более плавно и с большой амплитудой, а период его изменения составляет величину около 0.25 нс. В связи с этим главная частота колебаний тора  $C_{158}$  составляет величину 4 ГГц.



**Рис. 2.** Кинематические характеристики центрального тора: *a* – величина скорости движения центра масс тора, *b* – координаты центра масс, *c* – проекции вектора угловой скорости, *d* – углы Эйлера

**Fig. 2.** Kinematic characteristics of the central torus: (*a*) velocity magnitude for the torus center of mass, (*b*) coordinates of the center of mass, (*c*) projections of the angular velocity vector, and (*d*) the Euler angles

### Заключение

Классический алгоритм атом-атомных взаимодействий применен к моделированию динамики наноторов в колончатых структурах. Расчеты показывают, что типичный тор рассматриваемой структуры совершает вокруг собственной оси угловые колебания с амплитудой по углу больше одного оборота и имеет определенную частоту этих колебаний. Таким образом, жидкий кристалл, составленный торами  $C_{158}$  может выступать генератором колебаний в гигагерцовом диапазоне.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Chang I-L., Chou J-W.* A molecular analysis of carbon nanotori formation // *Journal of Applied Physics*. 2012. V. 112. P. 063523. DOI: 10.1063/1.4754538.
2. *Staic M., Petrescu-Nita A.* Symmetry group of two special types of carbon nanotori // *Acta Cryst. Section A. Foundations of Cryst.* V. 69. P. 435–439. 2013. DOI: 10.1107/S0108767313010325.
3. *Tasci E., Yazgan E., Malcioglu O.B., Erkoq S.* Stability of carbon nanotori under head treatment: molecular-dynamics simulations // *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*. 2005. V. 13(2). P. 147–154. DOI: 10.1081/FST-200050695.
4. *Kharissova O.V., Castanon M.G., Kharisov B.I.* Inorganic nanorings and nanotori: State of the art. // *Journal of Materials Research*. 2019. V. 34(24). P. 3998–4010. DOI: 10.1557/jmr.2019.370.
5. *Loyola M., Santoso E.B., Estrada G.* A quotient space approach to model nanotori and determine their symmetry groups // *Journal of Applied Physics Conference Proceedings*. 2014. V. 1602(1). P. 620–626. DOI: 10.1063/1.4882549.
6. *Chou Y.Y., Guo G.-Y.* Electrical conductance of carbon nanotori in contact with single-wall carbon nanotubes // *Journal of Applied Physics*. 2004. V. 96. P. 2249. DOI: 10.1063/1.1766415.
7. *Faraji U.M., Alaeiyan M., Golriz M., Gilani A.* Harmonic indices of polyhex zigzag TUZC 6 [m;n] nanotube and nanotori // *Journal of Information and Optimization Science*. V. 41(4). P. 1–8. 2020. DOI: 10.1080/02522667.2020.1744309.
8. *Sarapat P., Hill J.M., Baowan D.* A review of geometry, construction and modelling for carbon nanotori // *Appl. Sci.* 2019. V. 9(11). P. 2301. DOI: 10.3390/app9112301.
9. *Hilder T.A., Hill J.M.* Orbiting atoms and C60 fullerenes inside carbon nanotori // *Journal of Applied Physics*. 2007. V. 101. P. 064319. DOI: 10.1063/1.2511490.
10. *Dadashev V., Gindulyte A., Lipscomb W.N., Massa L., Squire R.H.* Proposed new materials: boron fullerenes, nanotubes, and nanotor // *ACS Symposium Series*. 2002. P. 79–102. DOI: 10.1021/bk-2002-0827.ch005.
11. *Liu C.P., Chen H.B., Ding J.W.* Magnetic response of carbon nanotori: the importance of curvature and disorder // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2007. V. 20. DOI: 10.1088/0953-8984/20/01/015206.
12. *Low Y., McGuigan M.* Visualization and simulation of the material properties of carbon nanotori // *New York Scientific Data Summit (NYSDS)*. 2016. V. 1-4. DOI: 10.1109/NYSDS.2016.7747824.
13. *Liu L., Gui G.Y., Jayanthi C.S., Wu S.Y.* Colossal paramagnetic moments in metallic carbon nanotori // *Physical Review Letters*. 2002. V. 88(21). DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.217206.
14. *Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Mamontov D.V., Lun-Fu A.V.* Md-simulation of fullerene rotations in molecular crystal fullerite // *Crystals*. 2019. V. 9. Art. 496. DOI: 10.3390/cryst9100496.
15. *Bubenchikov A., Bubenchikov M., Mamontov D.* The dynamic state of a pseudo-crystalline structure of B<sub>42</sub> molecules // *Crystals*. 2020. V. 10. Art. 510. DOI: 10.3390/cryst10060510.
16. *Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Tarasov E.A., Usenko O.V., Chelnokova A.S.* Calculating permeability of the low-temperature phase of a fullerite // *Diamond and Related Materials*. V. 86. P. 146–180. 2018. DOI: 10.1016/j.diamond.2018.04.017.
17. *Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Jambaa S., Lun-Fu A.V., Chelnokova A.S.* Low-temperature separation of helium-helion mixture // *Rev. on Adv. Materials Science*. 2020. V. 59(1). P. 361–370. DOI: 10.1515/rams-2020-0004.

Поступила в редакцию: 09.04.2021

Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Mamontov D.V., Kaparulin D.S., Lun-Fu A.V. (2021) ROTATIONS OF TORI IN A LIQUID CRYSTAL STRUCTURE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 73. pp. 42–49

DOI 10.17223/19988621/73/4

Keywords: nanomaterials, mathematical modeling, molecular dynamics, nanotori, carbon materials, surface materials.

Liquid crystals are a collection of flattened molecules. On the one hand, they have a well-defined structure, on the other hand, this structure is deformable, since its elements can change their position in space. In columnar structures, consisting of disks, plates, and tori, the fluid lines and cords are distinguished. In the case of tori and circular disks, a hexagonal structure of the arrangement of molecules is observed in a combination of the cord.

The aim of this work is to obtain the stability of tori positions in an elementary fragment of a liquid crystal and to analyze their rotations in a self-consistent field of the surrounding toroidal molecules. To solve this problem, the method of mathematical modeling was used, based on classical models of molecular dynamics. The calculation is carried out on the basis of the model of cross-atom-atom interactions for molecular tori. The minimal fragment of the cord is selected, which makes it possible to determine the characteristic dynamic state of the central torus in the fragment. To describe the motion of the molecular tori, the equations of motion for their centers of mass and the Euler equations for their angular displacements are used. The minimal fragment of the material contains twenty-nine tori. The equations for displacements of the centers of mass of the tori are initially represented as ordinary differential equations of the second order. However, by introducing fictitious points into the consideration of velocities, they can be reduced to a system of first-order equations with a doubled number of lower-order equations. The resulting system of the first-order differential equations is integrated numerically using a high-order accuracy step-by-step scheme. All calculations are performed with a constant time step. The accuracy of the obtained numerical results is verified in terms of the balance of total energy of the system. Calculations show that the central torus of the presented fragment executes angular oscillations around its main axis with amplitude of more than one revolution. Thus, the performed calculations show that a representative fragment of the liquid crystal structure of molecular tori can be used as a generator of high-frequency mechanical vibrations.

**Financial support.** This work was partially supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-71-10049).

*Aleksey M. BUBENCHIKOV* (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: [bubenchikov\\_am@mail.ru](mailto:bubenchikov_am@mail.ru)

*Mikhail A. BUBENCHIKOV* (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: [michael121@mail.ru](mailto:michael121@mail.ru)

*Dmitriy V. MAMONTOV* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: [orevaore@mail.ru](mailto:orevaore@mail.ru)

*Dmitriy S. KAPARULIN* (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: [dsc@phys.tsu.ru](mailto:dsc@phys.tsu.ru)

*Aleksandr V. LUN-FU* (Lead Engineer, OOO Gazprom Transgaz Tomsk, Tomsk, Russian Federation). E-mail: [a.Lun-Fu@gtt.gazprom.ru](mailto:a.Lun-Fu@gtt.gazprom.ru)

## REFERENCES

1. Chang I-L., Chou J-W. (2012) A molecular analysis of carbon nanotori formation. *Journal of Applied Physics*. 112(6). Article 063523. DOI: 10.1063/1.4754538.
2. Staic M., Petrescu-Nita A. (2013) Symmetry group of two special types of carbon nanotori. *Acta Crystallographica. Section A. Foundations of Crystallography*. 69. pp. 435–439. DOI: 10.1107/S0108767313010325.
3. Tasci E., Yazgan E., Malcioglu O.B., Erkoq S. (2005) Stability of carbon nanotori under head treatment: molecular-dynamics simulations. *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*. 13(2). pp. 147–154. DOI: 10.1081/FST-200050695.
4. Kharissova O.V., Castanon M.G., Kharisov B.I. (2019) Inorganic nanorings and nanotori: State of the art. *Journal of Materials Research*. 34(24). pp. 3998–4010. DOI: 10.1557/jmr.2019.370.
5. Loyola M., Santoso E.B., Estrada G. (2014) A quotient space approach to model nanotori and determine their symmetry groups. *AIP Conference Proceedings*. 1602(1). pp. 620–626. DOI: 10.1063/1.4882549.
6. Chou Y.Y., Guo G.-Y. (2004) Electrical conductance of carbon nanotori in contact with single-wall carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*. 96(4). Article 2249. DOI: 10.1063/1.1766415.
7. Faraji U.M., Alaeiyan M., Golriz M., Gilani A. (2020) Harmonic indices of polyhex zigzag TUZC<sub>6</sub> [m;n] nanotube and nanotori. *Journal of Information and Optimization Science*. 41(4). pp. 1–8. DOI: 10.1080/02522667.2020.1744309.
8. Sarapat P., Hill J.M., Baowan D. (2019) A review of geometry, construction and modelling for carbon nanotori. *Applied Science*. 9(11). Article 2301. pp. 1–20. DOI: 10.3390/app9112301.
9. Hilder T.A., Hill J.M. (2007) Orbiting atoms and C60 fullerenes inside carbon nanotori. *Journal of Applied Physics*. 101(6). Article 064319. DOI: 10.1063/1.2511490.
10. Dadashev V., Gindulyte A., Lipscomb W.N., Massa L., Squire R.H. (2002) Proposed new materials: boron fullerenes, nanotubes, and nanotor. *Structures and Mechanisms. ACS Symposium Series*. pp. 79–102. DOI: 10.1021/bk-2002-0827.ch005.
11. Liu C.P., Chen H.B., Ding J.W. (2007) Magnetic response of carbon nanotori: the importance of curvature and disorder. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 20(1). DOI: 10.1088/0953-8984/20/01/015206.
12. Low Y., McGuigan M. (2016) Visualization and simulation of the material properties of carbon nanotori. *New York Scientific Data Summit (NYSDS)*. pp. 1–4. DOI: 10.1109/NYSDS.2016.7747824.
13. Liu L., Gui G.Y., Jayanthi C.S., Wu S.Y. (2002) Colossal paramagnetic moments in metallic carbon nanotori. *Physical Review Letters*. 88(21). Article 217206. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.217206.
14. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Mamontov D.V., Lun-Fu A.V. (2019) Mdsimulation of fullerene rotations in molecular crystal fullerite. *Crystals*. 9(10). Article 496. pp. 1–17. DOI: 10.3390/cryst9100496.
15. Bubenchikov A., Bubenchikov M., Mamontov D. (2020) The dynamic state of a pseudo-crystalline structure of B<sub>42</sub> molecules. *Crystals*. 10(6). Article 510. pp. 1–10. DOI: 10.3390/cryst10060510.
16. Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Tarasov E.A., Usenko O.V., Chelnokova A.S. (2018) Calculating permeability of the low-temperature phase of a fullerite. *Diamond and Related Materials*. 86. pp. 146–180. DOI: 10.1016/j.diamond.2018.04.017.
17. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Jambaa S., Lun-Fu A.V., Chelnokova A.S. (2020) Low-temperature separation of helium-helion mixture. *Review on Advanced Materials Science*. 59(1). pp. 361–370. DOI: 10.1515/rams-2020-0004.

Received: April 9, 2021

УДК 531.57  
DOI 10.17223/19988621/73/5

**В.А. Бураков, А.С. Дьячковский, А.Н. Ищенко,  
В.З. Касимов, К.С. Рогаев, Н.М. Саморокова**

## **УЧЕТ ВЛИЯНИЯ НАЛИЧИЯ КОНДЕНСИРОВАННЫХ ЧАСТИЦ НА БАЛЛИСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ВЫСТРЕЛА<sup>1</sup>**

Представлена математическая модель выстрела, учитывающая образование конденсированных продуктов при горении метательного заряда. Рассматривается влияние наличия конденсированной фазы на распределение основных баллистических характеристик в заснарядном пространстве при использовании пороховой метательной установки. Проведено теоретическое параметрическое исследование, направленное на оценку влияния массового содержания конденсированных частиц на основные баллистические характеристики выстрела.

**Ключевые слова:** *внутренняя баллистика, ствольные системы, газодинамика, горение порохового заряда, конденсированные частицы.*

В настоящее время в ствольных системах в основном используются бездымные пироксилиновые пороха. Данные пороха практически полностью исчерпали свои энергетические возможности. Перспективными порохами считаются высокоэнергетические баллиститные пороха с различными добавками [1–4]. Данные перспективные пороха горят с образованием конденсированной фазы или сажи. Наличие конденсированных продуктов горения в заснарядном пространстве приводит к потере химической энергии газопороховой смеси на разгон данных негорящих частиц.

### **Математическая модель**

Используемые в настоящее время математические модели внутрибаллистических процессов [5] в баллистических установках не учитывают явным образом наличие конденсированных продуктов горения, используя для их описания упрощенный подход с введением газа с усредненными приведенными параметрами.

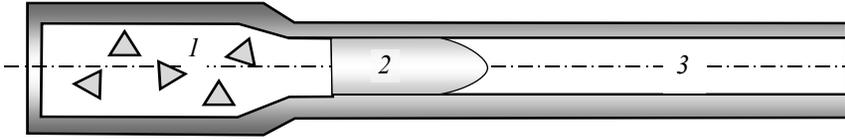
Целью настоящей работы является модификация математической модели [5] и проведение параметрических исследований влияния наличия сажи в продуктах сгорания на внутрибаллистические процессы.

Объектом исследования является пороховая метательная установка, схематически показанная на рис. 1.

В математической модели [5] предполагается, что в метательном заряде имеются частицы различных сортов, различающихся между собой размером и другими характеристиками. Частицы могут быть сгораемыми, в этом случае продукты сгорания представляет собой гомогенную смесь невязких нетеплопроводных га-

<sup>1</sup> В настоящей работе используются результаты, полученные в ходе выполнения проекта № 8.2.09.2018 Программы повышения конкурентоспособности Национального исследовательского Томского государственного университета.

зов с известными уравнениями состояния. Кроме сгораемых частиц могут присутствовать несгораемые, которые могут быть в смеси изначально, либо появляться в смеси как сажа в результате горения. Но в общем случае в рассмотрении находится всего  $J$  сортов частиц и  $J$  газов, образующихся при горении частиц соответствующего сорта.



**Рис. 1.** Общая схема пороховой метательной установки:  
 1 – пороховой метательный заряд; 2 – снаряд; 3 – ствол  
**Fig. 1.** General scheme of a powder propellant setup:  
 1 – a powder propellant charge; 2 – a projectile; 3 – a barrel

Движение полидисперсной смеси по каналу переменного поперечного сечения описывается законами сохранения массы, импульса и энергии, вид которых приводится ниже.

Для каждой компоненты гомогенной газовой смеси можем записать уравнения сохранения массы

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_j s) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_j u s) = m_{gj} s, \quad j = 1, \dots, J. \quad (1)$$

Для каждого сорта частиц имеем аналогично уравнения сохранения массы:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta_j \delta_j s) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta_j \delta_j u_j s) = m_{pj} s, \quad j = 1, \dots, J. \quad (2)$$

Уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u s) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 s) = -\alpha s \frac{\partial p}{\partial x} + 2\pi R \sigma_w^{nc} - s \sum_{j=1}^J (f_j - m_{gj} u_{gj}) \quad (3)$$

является законом сохранения импульса для газовой фазы, а уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta_j \delta_j u_j s) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta_j \delta_j u_j^2 s) = -s \beta_j \frac{\partial p}{\partial x} + s (f_j + m_{pj} u_{pj}) \quad (4)$$

– для  $j$ -й фракции частиц.

Для газовой фазы закон сохранения полной энергии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho E s) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u E s) = & -\frac{\partial}{\partial x}(\alpha p u s) - \sum_{j=1}^J \frac{\partial}{\partial x}(p \beta_j u_j s) + s \sum_{j=1}^J u_j \left( \beta_j \frac{\partial p}{\partial x} - f_j \right) + \\ & + s \sum_{j=1}^J m_{gj} \left[ Q_{gj} + \frac{u_{gj}^2}{2} \right] - s Q_r - s q. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогичное уравнение можем записать для  $j$ -й фракции частиц

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta_j \delta_j E_j s) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta_j \delta_j u_j E_j s) = -u_j \left( \beta_j \frac{\partial p}{\partial x} - f_j \right) + s m_{pj} \left[ Q_{pj} + \frac{u_{pj}^2}{2} \right] + s q_j. \quad (6)$$

Используемые в практике внутрибаллистических расчетов термодинамические свойства пороховых газов описываются уравнениями состояния типа Дюпре [5, 6]. В нашем случае для  $j$ -го элемента газовой смеси имеем калорическое уравнение состояния вида

$$e_{gj} = \frac{1}{\gamma_j - 1} p \left( \frac{1}{\rho_j^0} - b_j \right). \quad (7)$$

Для расчета притока массы при горении применяются соотношения, общепринятые во внутренней баллистике [5, 6]:

$$m_{pj} = - \frac{\beta_j \delta_j s_{0j}}{1 - \psi_j W_{0j}} \sigma_j (\psi_j) U_j \left( p, \frac{dp}{dt} \right). \quad (8)$$

В уравнениях (1) – (8) используются следующие обозначения:  $t$  – время;  $x$  – пространственная координата, отсчитываемая вдоль оси осесимметричного канала ствола в направлении метания;  $s(x, t)$  – площадь поперечного сечения канала;  $\rho_j$  – распределенная плотность газов, образовавшихся при сгорании  $j$ -го сорта частиц;  $\rho_j^0$  – истинная плотность  $j$ -го газа;  $\rho = \sum_{j=1}^J \rho_j$  – распределенная плотность гомогенной смеси газов;  $\rho^0$  – истинная плотность смеси газов;  $c_j = \rho_j / \rho$  – массовая доля  $j$ -го газа в газовой смеси  $\left( \sum_{j=1}^J c_j = 1 \right)$ ;  $\alpha_j$  – объемная доля  $j$ -го газа в газовой смеси  $\left( \sum_{j=1}^J \alpha_j = \alpha \right)$ ;  $\delta_j$  – истинная плотность  $j$ -го сорта частиц;  $\beta_j$  – объемная доля  $j$ -го сорта частиц в газопороховой смеси  $\left( \sum_{j=1}^J \beta_j = \beta = 1 - \alpha \right)$ ;  $u_j$  – скорость частиц  $j$ -го сорта;  $p, T, u$  – соответственно давление, температура и скорость газовой смеси;  $m_{gj} (m_{pj})$  – приток массы  $j$ -го газа (частиц) в единицу времени, приходящийся на единицу объема смеси;  $f_j$  – проекция на ось  $x$  силы, отнесенной к единице объема смеси, с которой газ действует на частицы  $j$ -го сорта вследствие разности скоростей фаз;  $u_{gj} (u_{pj})$  – скорость, с которой газ (частицы) поступают в полидисперсную смесь;  $R$  – текущее значение радиуса поперечного сечения канала ствола;  $\sigma_w^{n\tau}$  – напряжение на поверхности канала;  $E = e + \frac{u^2}{2}$  – полная энергия смеси газов;  $e = \sum_{j=1}^J c_j e_{gj}$  – внутренняя энергия смеси газов;  $Q_{gj}$  – удельная внутренняя энергия поступающих в смесь газообразных продуктов сгорания;  $Q_r$  – приходящаяся на единицу объема смеси интенсивность тепловых потерь вследствие

вие теплообмена со стенками канала ствола;  $q = \sum_{j=1}^J q_j$ ,  $q_j$  – интенсивность притока энергии к частицам  $j$ -го сорта в единице объема смеси вследствие теплообмена с газом;  $E_j = e_j + \frac{u_j^2}{2}$ ,  $e_j$  – удельная внутренняя энергия частиц (известная функция температуры);  $Q_{pj}$  – удельная внутренняя энергия поступающих в смесь частиц;  $b_j$  – коволюм;  $\gamma_j$  – показатель адиабаты;  $M_j$  – средний молекулярный вес данного газа;  $R$  – универсальная газовая постоянная.  $\psi$  – степень превращения;  $s_0$  – начальная поверхность частицы;  $W_0$  – начальный объем частицы;  $\sigma(\psi)$  – отношение текущей поверхности горения к начальной;  $U(p)$  – закон скорости послыного горения.

Система уравнений (1) – (8) при заданных конкретных зависимостях  $m_{pj}$ ,  $m_{gj}$ ,  $Q_{pj}$ ,  $Q_{gj}$ ,  $f_j$ ,  $q_j$ , определяющих межфазное взаимодействие газ – частицы;  $\sigma_w^{n\tau}$ ,  $Q_r$  – задающих трение и теплообмен на границе со стволом; уравнениях состояния газовой смеси и  $e_j(T)$  представляет замкнутую систему для определения средних распределенных плотностей газовых компонентов  $\rho_j$ , скорости  $u_j$ , объемного содержания  $\beta_j$  и температуры  $T_j$  частиц, давления  $p$  и скорости  $u$  газовой смеси. При этом произвол в выборе этих зависимостей позволяет использовать систему (1) – (8) для моделирования широкого класса внутрибаллистических явлений.

Решение системы (1) – (8) проводится посредством модификации Д. Богданова метода С.К. Годунова.

Заметим, что запись уравнений в форме (1) – (8) позволяет в одной расчетной области учитывать наличие частиц любых типов. При этом, например, горячая частица в результате горения может образовывать газообразные продукты и конденсированные компоненты, каждая из которых, в свою очередь, может иметь тип конденсированной компоненты или горячей компоненты. Поэтому с точки зрения логической организации и компьютерной реализации целесообразно ввести в рассмотрение термин «множества частиц» (МЧ), под которым понимается некая замкнутая совокупность частиц. Под замкнутостью понимается то, что частицы из конкретного МЧ, во-первых, предназначены для описания отдельного элемента математической модели, во-вторых, занимают одну и ту же последовательность индексов и, в-третьих, для них в процессе расчета величины  $m_{pj}$ ,  $m_{gj}$ ,  $u_{pj}$ ,  $u_{gj}$  должны быть взаимно согласованы. Простейшим примером МЧ является модель элемента порохового заряда, при горении которого образуются только газообразная компонента. В этом случае данному «множеству частиц» отвечает только один индекс  $j = k$ , скорости горячей частицы и продуктов ее сгорания равны ( $u_{pk} = u_k$ ,  $u_{gk} = u_k$ ), а интенсивности объемного газопритока и убывания массы частиц равны по величине ( $m_{gk} = -m_{pk}$ ) и определяются по (8).

Для целей практической реализации уравнения (6), (7) целесообразно переписать в форме для внутренней энергии.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho es) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho ues) = -p \frac{\partial}{\partial x}(\alpha us) - p \sum_{j=1}^J \frac{\partial}{\partial x}(\beta_j u_j s) + s \sum_{j=1}^J f_j (u - u_j) - 2\pi R u \sigma_w^{n\tau} + s \sum_{j=1}^J m_{gj} \left[ Q_{gj} + \frac{(u - u_{gj})^2}{2} \right] - s Q_r - sq ; \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\beta_j \delta_j e_j s) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta_j \delta_j u_j e_j s) = s m_{pj} \left[ Q_{pj} + \frac{(u - u_{pj})^2}{2} \right] + sq_j , \quad j = 1, \dots, J . \quad (10)$$

Если среди частиц имеются принадлежащие к типу негорящих частиц, для которых нужно рассчитывать теплообмен с газовой фазой, то, суммируя (9) с (10) для этих частиц, можно получить уравнение энергии смеси газа с частицами типа негорящих частиц:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho es + \sum_{T_{un2}} \beta_j \delta_j e_j s \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho ues + \sum_{T_{un2}} \beta_j \delta_j u_j e_j s \right) = \\ & = -p \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\alpha us) + \sum_{T_{un2}} \frac{\partial}{\partial x}(\beta_j u_j s) \right] + s \sum_{j=1}^J f_j (u - u_j) - 2\pi R u \sigma_w^{n\tau} + \\ & + s \left\{ \sum_{T_{un1}} m_{gj} \left[ Q_{gj} + \frac{(u - u_{gj})^2}{2} \right] + \sum_{T_{un2}} m_{pj} \left[ Q_{pj} + \frac{(u - u_{pj})^2}{2} \right] \right\} - s Q_r . \quad (11) \end{aligned}$$

Уравнение энергии в форме (11) можно использовать для мелких частиц в предположении, что время термической релаксации смеси мало. В этом случае рассматриваемая модель вырождается в односкоростную и однотемпературную для газа и конденсированных негорящих частиц.

Применим математическую модель (1) – (11) для учета наличия в продуктах сгорания конденсированной фазы, тем более, что она рассматривает внутриканальную среду как гомогенную смесь несущей газовой фазы и частиц произвольного происхождения.

Для этого построим МЧ, которому отвечают индексы частиц номер  $k$  и  $q = k+1$ . Индекс  $j = k$  соответствует элементу метательного заряда, при горении которого образуются газообразные продукты сгорания (индекс  $j = k$ ) и сажа (индекс  $j = q$ ).

Зависимости для расчета  $m_{pk}$ ,  $m_{gk}$ ,  $u_{pj}$ ,  $u_{gk}$ ,  $Q_{pk}$  и  $Q_{gk}$  определяются в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_{pk} &= u_k , \quad u_{gk} = u_k , \quad m_{pk} = m_{pj} , \quad m_{gk} = -m_{pj} (1 - c_{sg}) , \\ Q_{pk} &= 0 , \quad Q_{gk} = \frac{F_k}{\gamma_k - 1} (1 - c_{sg}) T_{sm} , \end{aligned} \quad (12)$$

где  $c_{sg}$  – массовое содержание сажи в продуктах сгорания элемента МЗ;  $F_k$  – сила пороха;  $m_{pj}$  определяется по (8).

Аналогично  $m_{pq}$ ,  $m_{gq}$ ,  $u_{pq}$ ,  $u_{gq}$ ,  $Q_{pq}$  и  $Q_{gq}$  определяются следующим образом:

$$u_{pq} = u_k , \quad u_{gq} = 0 , \quad m_{pq} = m_{pj} c_{sg} , \quad m_{gq} = 0 , \quad Q_{pq} = c_v (T_{sm} - T_0) c_{sg} , \quad Q_{gq} = 0 , \quad (13)$$

где  $c_v$  – удельная теплоемкость материала сажи;  $T_0$  – начальная температура порохового заряда. Здесь в выражениях для  $Q_{gk}$  и  $Q_{pq}$  учитывается факт однотемпературности продуктов сгорания пороха и поступающих в смесь конденсированных негорящих частиц, а само значение температуры  $T_{sm}$  дается формулой

$$T_{sm} = \frac{[F_k(1 - c_{sg}) + (\gamma_k - 1)c_{sg}c_vT_0]}{(\gamma_k - 1)\left[(1 - c_{sg})\frac{R}{M_k} + c_{sg}c_v\right]} \quad (14)$$

### Параметрические теоретические исследования

С использованием представленной математической модели, позволяющей учитывать влияние в продуктах сгорания сажи, проведено теоретическое параметрическое исследование, направленное на получение газодинамической картины в заснарядном пространстве в выстреле из баллистической установки. Исследования проводились для метательной установки калибром 30 мм, масса снаряда составляла 50 г. Заряд массой 100 г состоял из одного элемента со следующими параметрами:

$$\delta_k = 1.65 \text{ г/см}^3, M_k = 24.61 \text{ г/моль}, \gamma_k = 1.2031, b_k = 1.009 \text{ см}^3/\text{г}.$$

Материал сажи ( $Al_2O_3$ ) имел следующие параметры [7]:

$$\delta_q = 3.97 \text{ г/см}^3, c_{vq} = 7.85 \text{ см}^2/(\text{К}\cdot\text{мс}^2).$$

Значение  $c_{sg}$  варьировалось в пределах от 0 до 0.5.

На рис. 2 – 4 приведены характерные распределения параметров по длине ствола в различные моменты времени. Рис. 2 иллюстрирует распределения давления по длине ствола в различные моменты времени для  $c_{sg} = 0.1$  (a) и 0.5 (b), рис. 3 и 4 соответствуют пороху, для которого  $c_{sg} = 0.1$  и  $c_{sg} = 0.5$ .

По рис. 2 – 4 можно отследить динамику уменьшения содержания частиц пороха и увеличения количества сажи в продуктах сгорания. Скорость частиц сажи практически равна скорости газа из-за малых размеров частиц и вследствие этого эффективности их ускорения за счет аэродинамической силы. Вместе с тем имеется эффект отставания частиц сажи от газа.

В таблице приведены зависимости от  $c_{sg}$  баллистических характеристик выстрела (дульной скорости снаряда  $V$  и максимального давления в зарядной камере  $P_{max}$ ), для частиц сажи диаметром  $d_p = 0.001$  см.

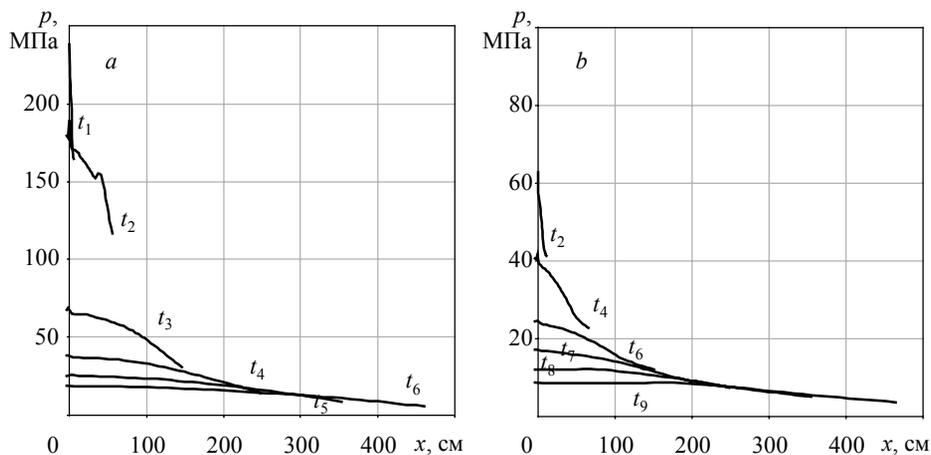
### Основные баллистические параметры выстрела

$c_{sg}$	$V$ , м/с	$P_{max}$ , МПа	Кинетическая энергия снаряда, $10^6 \text{ г}\cdot\text{см}^2/\text{мс}^3$	Внутренняя энергия сажи, $10^6 \text{ г}\cdot\text{см}^2/\text{мс}^3$	Кинетическая энергия сажи, $10^6 \text{ г}\cdot\text{см}^2/\text{мс}^3$
0.1	2192	390.1	1.2	0.17	0.04
0.2	1929	248.0	0.93	0.23	0.066
0.3	1672	160.8	0.69	0.34	0.075
0.4	1400	105.1	0.49	0.45	0.076
0.5	1131	69.1	0.32	0.54	0.065

Из рис. 2 и таблицы следует, что при увеличении массового содержания сажи давление в продуктах сгорания и скорость снаряда существенно уменьшаются.

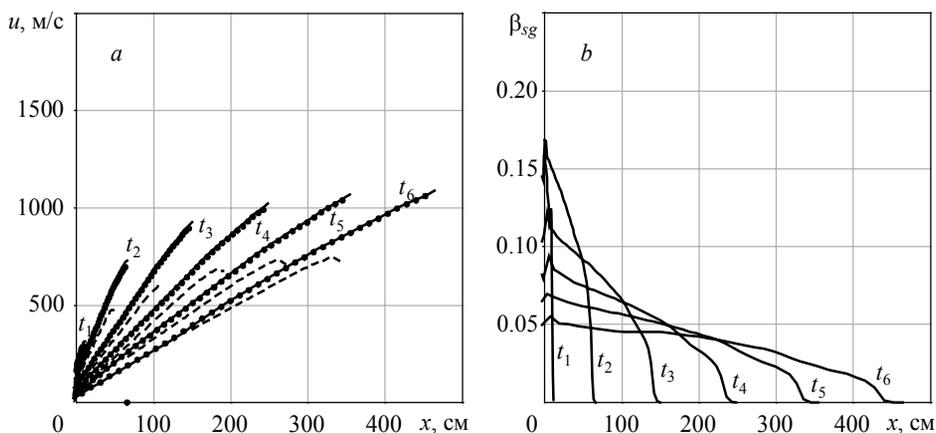
Например, при увеличении массовой доли к-фазы от 0 до 0.5 (снижении энергетиче- ки заряда до 50 %) максимальное давление снижается почти в 7 раз, а дульная скорость до 51.6 % в сравнении с выстрелом без образования сажи.

Рис. 3 и 4 иллюстрируют существенное уменьшение количества сгоревшего пороха при увеличении массового содержания сажи за счет более низкого уровня давления.



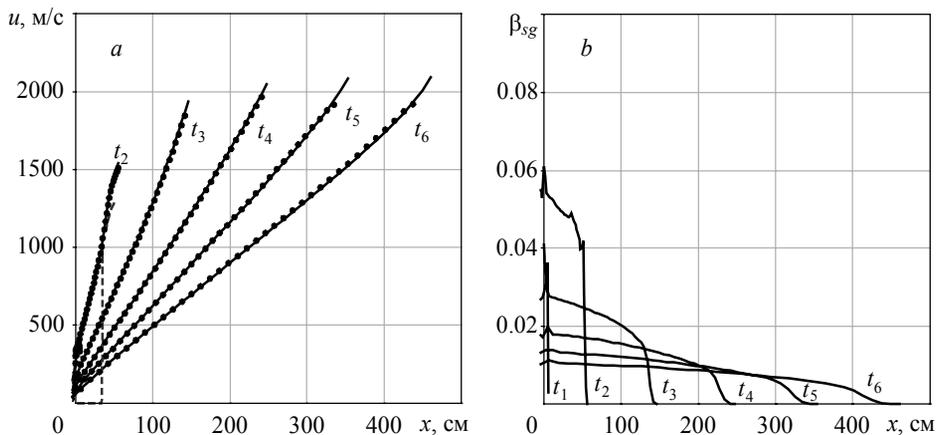
**Рис. 2.** Распределения давления по длине ствола в различные моменты времени для  $c_{sg} = 0.1$  (a) и  $c_{sg} = 0.5$  (b):  $t_1 - 0.5$  мс;  $t_2 - 1$  мс;  $t_3 - 1.5$  мс;  $t_4 - 2$  мс;  $t_5 - 2.5$  мс;  $t_6 - 3$  мс;  $t_7 - 4$  мс;  $t_8 - 5$  мс;  $t_9 - 6$  мс

**Fig. 2.** Pressure distributions along the barrel at different time points for  $c_{sg} = (a) 0.1$  and (b) 0.5:  $t_1 - 0.5$  ms;  $t_2 - 1$  ms;  $t_3 - 1.5$  ms;  $t_4 - 2$  ms;  $t_5 - 2.5$  ms;  $t_6 - 3$  ms;  $t_7 - 4$  ms;  $t_8 - 5$  ms; and  $t_9 - 6$  ms



**Рис. 3.** Распределения параметров по длине ствола в различные моменты времени для  $c_{sg} = 0.1$ : — — скорость газа; - - - - скорость частиц пороха; ••• — скорость сажи (a); объемное содержание сажи (b)  $t_1 - 0.5$  мс;  $t_2 - 1$  мс;  $t_3 - 1.5$  мс;  $t_4 - 2$  мс;  $t_5 - 2.5$  мс;  $t_6 - 3$  мс

**Fig. 3.** Distributions of parameters along the barrel at different time points for  $c_{sg} = 0.1$ : (a) — — gas velocity; - - - - velocity of powder particles; ••• — soot velocity; (b) soot volume  $t_1 - 0.5$  ms;  $t_2 - 1$  ms;  $t_3 - 1.5$  ms;  $t_4 - 2$  ms;  $t_5 - 2.5$  ms; and  $t_6 - 3$  ms



**Рис. 4.** Распределения параметров по длине ствола в различные моменты времени для  $c_{sg} = 0.5$ : — — — скорость газа; - - - - скорость частиц пороха; ••• — скорость сажи (a); объемное содержание сажи (b)  $t_1 - 1$  мс;  $t_2 - 2$  мс;  $t_3 - 3$  мс;  $t_4 - 4$  мс;  $t_5 - 5$  мс;  $t_6 - 6$  мс

**Fig. 4.** Distributions of parameters along the barrel at different time points for  $c_{sg} = 0.5$ : (a) — — — gas velocity; - - - - velocity of powder particles; ••• — soot velocity; (b) soot volume  $t_1 - 1$  ms;  $t_2 - 2$  ms;  $t_3 - 3$  ms;  $t_4 - 4$  ms;  $t_5 - 5$  ms; and  $t_6 - 6$  ms

Падение баллистических характеристик выстрела происходит за счет уменьшения общей энергетики заряда, а также отдачи части энергии пороховых газов на нагрев частиц сажи и разгон конденсированных частиц по каналу ствола баллистической установки. Большая часть энергии пороховых газов тратится на нагрев частиц сажи, меньшая – на ускорение сажи

### Заключение

Разработана математическая модель, позволяющая учитывать влияние конденсированной фазы в продуктах сгорания на внутрибаллистические процессы при расчете выстрела в пороховой метательной установке.

С использованием представленной математической модели проведено теоретическое параметрическое исследование, направленное на изучение влияния массового содержания конденсированных частиц на основные баллистические характеристики выстрела.

Получено, что при наличии в газопороховой смеси сажи из  $Al_2O_3$  с массовым содержанием 0.50 приводит к снижению максимального давления в 7 раз, а дульная скорость метаемого элемента в 2 раза по сравнению с выстрелом без образования сажи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Е Зо Тве, Денисюк А.П., Сизов В.А.* Влияние сажи на скорость и параметры волны горения высококалорийного пороха // Вестник Казанского технологического университета. 2013. Т. 16. № 8. С. 100–105.
2. *Денисюк А.П., Демидова Л.А., Сизов В.А., Меркушкин А.О.* Влияние углеродных нанотрубок на закономерности горения низкокалорийного пороха // Горение и взрыв. 2017. Т. 10. № 1. С. 59–63.

3. Шведова А.В., Крутилин А.В., Сизов В.А., Денисюк А.П. Влияние углеродных материалов на закономерности горения баллистичных порохов // Успехи в химии и химической технологии. 2017. Т. 31. № 13. С. 87–89.
4. Порязов В.А., Крайнов А.Ю., Крайнов Д.А. Математическое моделирование горения пороха Н с добавлением порошка алюминия // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88. № 1. С. 93–101.
5. Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическая модель и программный комплекс для теоретического исследования внутрибаллистических процессов в ствольных системах: учеб. пособие. Томск: Изд. Дом Томского государственного университета, 2015. 70 с.
6. Серебряков М.Е. Внутренняя баллистика ствольных систем и пороховых ракет. М.: Оборонгиз, 1962. 703 с.
7. Григорьев И.С., Мейлихов Е.З. (ред.) Физические величины. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с

Статья поступила 09.10.2020

Burakov V.A., D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Rogaev K.S., Samorokova N.M. (2021) ALLOWANCE FOR THE EFFECT OF CONDENSED PARTICLES ON BALLISTIC PARAMETERS OF A SHOT. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 73. pp. 50–59

DOI 10.17223/19988621/73/5

Keywords: internal ballistics, barrel systems, gas dynamics, powder charge combustion, condensed particles.

A mathematical model of the shot fired from a powder propellant setup is developed. An arbitrary number of powder particles of various types are supposed to be in a propellant charge, which are different in size, shape, energy characteristics, and layer-by-layer burning velocity. The products of their combustion represent a mixture of non-viscous non-heat conductive gases with known equations of state. These gases are generated during combustion of the powder particle of a corresponding type. Some condensed particles may occur in the mixture of combustion products during the burning of powder particles. The motion of the polydispersed mixture of combustion products along a varying-cross-section channel is described by the laws of conservation of mass, momentum, and energy. When formulating these laws, the mass, momentum, and energy exchange between gas and condensed phases is taken into account. The formulation is universal and allows one to use the laws for modelling a wide range of internal ballistic phenomena.

In this paper, a theoretical parametric research is shown as an example, which is aimed at estimating the effect of quantity of the occurring condensed particles on basic ballistic characteristics of a shot.

**Financial support.** The paper uses the results obtained while working on the project No. 8.2.09.2018 within the Tomsk State University Competitiveness Improvement Program.

*Valeriy A. BURAKOV* (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rogaev@ftf.tsu.ru

*Aleksey S. D'YACHKOVSKIY* (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lex\_okha@mail.ru

*Aleksandr N. ISHCENKO* (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

*Vladimir Z. KASIMOV* (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ksm@niipmm.tsu.ru

Konstantin S. ROGAEV (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rogaev@ff.tsu.ru

Nina M. SAMOROKOVA (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lex\_okha@mail.ru.

#### REFERENCES

1. E Zo Tve, Denisjuk A.P., Sizov V.A. (2013) Vliyanie sazhi na skorost' i parametry volny gorenija vysokokaloriynogo porokha [Effect of soot on the speed and parameters of the combustion wave of a high-calorie powder]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta – Bulletin of the Technological University*. 16(8). pp. 100–105.
2. Denisjuk A.P., Demidova L.A., Sizov V.A., Merkuskin A.O. (2017) Vliyanie uglerodnykh nanotrubok na zakonomernosti gorenija nizkokaloriynogo porokha [Influence of carbon nanotubes on the combustion laws of low-calorie propellant]. *Gorenie i vzryv – Combustion and Explosion*. 10(1). pp. 59–63.
3. Shvedova A.V., Krutilin A.V., Sizov V.A., Denisjuk A.P. (2017) Vliyanie uglerodnykh materialov na zakonomernosti gorenija ballistitnykh porokhov [Influence of the carbon materials on the combustion properties of the propellants]. *Uspekhi v khimii i khimicheskoy tekhnologii – Advances in Chemistry and Chemical Technology*. 31(13). pp. 87–89.
4. Poryazov V.A., Krainov A.Yu., Krainov D.A. (2015) Simulating the combustion of N powder with added finely divided aluminum. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 88(1). pp. 93–101. DOI: 10.1007/s10891-015-1171-0.
5. Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (2015) *Matematicheskaya model' i programmnyy kompleks dlya teoreticheskogo issledovaniya vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [A mathematical model and a software package for the theoretical study of intraballistic processes in barrel systems]. Tomsk: Tomsk State University Publishing House.
6. Serebryakov M.E. (1962) *Vnutrennyaya ballistika stvol'nykh sistem i porokhovykh raket* [Internal ballistics of barrel systems and powder rockets]. Moscow: Oborongiz.
7. Grigor'ev I.S., Meylikhov E.Z. (1991) *Fizicheskie velichiny* [Physical quantities]. Moscow: Energoatomizdat.

Received: October 9, 2020

УДК 531.332.1

DOI 10.17223/19988621/73/6

С.О. Гладков, С.Б. Богданова

**ОБ ИЗМЕНЕНИИ ФОРМЫ БРАХИСТОХРОНЫ  
ПРИ УЧЕТЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НАГРУЗКИ НА ЖЕЛОБ**

Получена система динамических уравнений, описывающая движение тела по желобу при условии, что имеет место ограничение нагрузки на материал желоба. Найдено аналитическое и численное решение этих уравнений. Показано, что в этом случае форма желоба (траектории) будет сильно отличаться от классической брахистохроны. Задача решена в пренебрежении силами трения.

**Ключевые слова:** динамические уравнения, форма желоба, сила реакции, предел прочности.

В настоящем сообщении мы продолжим решение весьма интересного, с нашей точки зрения, класса задач, придерживаясь методики, намеченной в предыдущих авторских работах [1–6]. Однако в отличие от упомянутых работ, имеющих обычный академический интерес, здесь мы приведем решение другой не менее любопытной проблемы, суть которой определяет ее чисто практическое значение.

Предположим, что имеется брахистохрона в виде желоба, по которой движется тело массой  $m$ . Понятно, что при его движении, как и положено, появляется некоторая сила реакции желоба  $N$ , обязанная результирующему воздействию центростремительной силы и силы тяжести.

При этом возникает следующий вполне закономерный вопрос о том, как может повлиять на форму брахистохроны условие ограничения нагрузки на материал желоба? Совершенно понятно, что в областях наибольшего изгиба траектории центростремительное ускорение становится довольно большим, а это, в свою очередь, означает, что если, например, желоб не металлический, а сделан, скажем, из пробки, то, несомненно, произойдет разрушение материала.

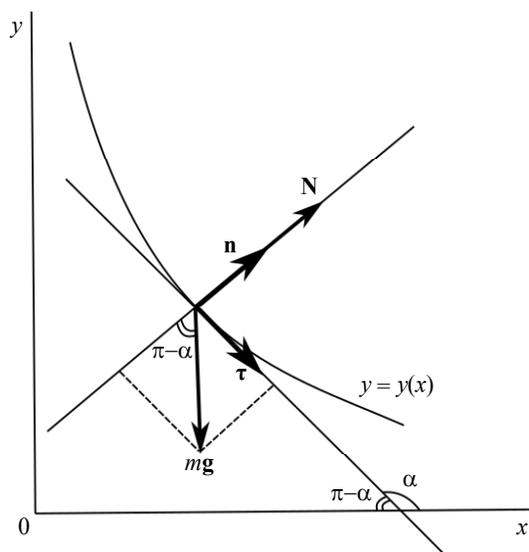
Таким образом, если материал имеет предел прочности, характеризуемый некоторой предельной нагрузкой  $N_{cr}$ , то в этом случае во избежание его разрушения всегда должно выполняться неравенство

$$N < N_{cr}. \quad (1)$$

**Система уравнений**

Если ввести удобный в рамках решаемой задачи подвижный базис  $\tau - \mathbf{n}$  (рис. 1), где  $\tau$  – единичный вектор касательной к кривой  $y = y(x)$ , задающей форму желоба, а  $\mathbf{n}$  – вектор единичной нормали к нему, то проекцию вектора силы реакции желоба  $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$  на направление единичной нормали  $\mathbf{n}$  можно представить в виде

$$N = m \left( \frac{v^2}{R} - g \cos \alpha \right), \quad (2)$$



**Рис. 1.** Схематическое изображение геометрии задачи  
**Fig. 1.** Schematic representation of the problem geometry

где  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\alpha$  – угол наклона касательной к оси ( $ox$ ), который в случае вогнутой кривой является тупым ( $\cos \alpha < 0$ ),  $v$  – скорость тела,  $R$  – радиус кривизны траектории в данной точке желоба. Здесь следует заметить, что радиус кривизны, определяемый по известной формуле дифференциальной геометрии [7]

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

может быть как величиной положительной, так и отрицательной. Для выпуклой кривой  $y'' < 0$ , так же как и  $\alpha' < 0$ , и, наоборот, для вогнутой книзу кривой  $y'' > 0$  и  $\alpha' > 0$ . Это означает, что в любом случае модуль скорости должен определяться по формуле

$$v = R\dot{\alpha}, \tag{3}$$

где производная по времени всегда одного знака с  $y''$  (см. рис. 1).

Поскольку для вогнутой кривой брахистохрона определяется условием  $v^2 / R = -g \cos \alpha > 0$  (см. также работы [1, 5]), то есть когда величина силы реакции  $N = 2mg |\cos \alpha|$ , то в идеальных условиях результат проектирования действующих сил на орты мгновенного базиса  $\tau - \mathbf{n}$  немедленно приводит нас к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{v} = g \sin \alpha, \\ \frac{v^2}{R} = -g \cos \alpha, \end{cases} \tag{4}$$

где  $\pi/2 < \alpha < \pi$ .

Ее элементарное решение определяет классическое уравнение брахистохроны:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{C^2}{4g} \left( \frac{2gt}{C} - \sin \frac{2gt}{C} \right), \\ y(t) = -\frac{C^2}{4g} \left( 1 - \cos \frac{2gt}{C} \right), \end{cases}$$

где роль параметра  $t$  играет время, а константа  $C$  положительная и, как видно из соображений размерности, представляет собой скорость.

В том случае, если учитывается условие (1), которое согласно (2) можно переписать в виде

$$\frac{v^2}{R} - g \cos \alpha < \frac{N_{\text{cr}}}{m}, \quad (5)$$

то вводя некоторое значение  $N = \bar{N}_{\text{cr}} < N_{\text{cr}}$ , условие (5) можно представить как равенство

$$\frac{v^2}{R} - g \cos \alpha = \frac{N_{\text{cr}}}{m}. \quad (6)$$

Как это с очевидностью следует из определения (6), сила реакции для брахистохроны в ноль никогда не обращается, поскольку для нее (см. чуть выше) должно выполняться условие  $N = 2mg |\cos \alpha|$ . Сказанное означает, что для получения правильного решения поставленной задачи нам необходимо провести небольшую ревизию уравнений (4), которые даже в случае  $\bar{N} = 0$  должны привести нас к уравнению брахистохроны. Действительно, поскольку второй закон Ньютона в отсутствии сил сопротивления инвариантен по отношению к операции инверсии знака времени, то есть по отношению к замене  $t \rightarrow -t$ , то нижнее уравнение системы (4) остается без изменения, а верхнее можно записать с обратным знаком, но при этом решение также приведет к корректному результату, в чем мы сейчас и убедимся.

В самом деле, запишем уравнения в виде

$$\begin{cases} \dot{v} = -g \sin \alpha, \\ v\dot{\alpha} - g \cos \alpha = \frac{N_{\text{cr}}}{m}. \end{cases} \quad (7)$$

которые, как видим, даже в случае  $N_{\text{cr}} = 0$ , но  $N \neq 0(!)$ , приводят нас к уравнению брахистохроны. Кроме того, следует заметить, что замена  $t \rightarrow -t$  формально означает, что движение может осуществляться справа налево, но кривая скатывания, тем не менее, останется все той же брахистохрой. Эта операция также равносильна и замене  $x \rightarrow -x$ .

Формальное решение системы (7) удобно представить, введя безразмерный параметр

$$p = \frac{\bar{N}_{\text{cr}}}{mg}, \quad (8)$$

В результате тривиальное решение уравнений (7) приводит нас к следующему простому соотношению

$$v = C |p - |\cos \alpha||, \quad (9)$$

где  $C$  – константа интегрирования.

Как отсюда видно, при  $p = 0$  мы действительно приходим к уравнению брахистохроны, о чем чуть выше и упоминалось.

### Анализ уравнений

В соответствии с определением параметра (8) рассмотрим теперь три наиболее интересных случая:

$$1. p > 1, \quad 2. p < 1 \quad \text{и} \quad 3. p = 1.$$

Начнем со случая 1.  $p > 1$ .

Тогда из (9) следует, что

$$v = C(p - |\cos \alpha|), \quad (10)$$

а потому из верхнего уравнения системы (7) находим  $\alpha = \alpha_0 + \frac{gt}{C}$ . Совершенно очевидно, что в начальный момент времени тело под влиянием одной только силы гравитации может скатываться лишь из самой верхней точки желоба. Считая эту точку максимумом функции, без ограничения общности можно положить, что в начальный момент времени  $\alpha_0 = 0$ . То есть

$$\alpha = \frac{gt}{C}. \quad (11)$$

И решение (10) следует записать в виде

$$v = C \left| p - \cos \frac{gt}{C} \right|.$$

Поэтому из уравнений движения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -v \cos \alpha, \\ \dot{y} &= v \sin \alpha \end{aligned}$$

следует

$$\begin{cases} x = x_0 - \int (p - \cos \alpha) \cos \alpha dt, \\ y = y_0 + \int (p - \cos \alpha) \sin \alpha dt, \end{cases} \quad (12)$$

где  $x_0, y_0$  – константы интегрирования.

Поскольку согласно (6) с учетом (3) сила реакции есть

$$\bar{N}_{\text{cr}} = m(v\dot{\alpha} + g \cos \alpha),$$

то благодаря найденным зависимостям (10) и (11) имеем отсюда, что

$$N = m \left( C(p - \cos \alpha) \frac{g}{C} + g \cos \alpha \right) = pmg = \bar{N}_{\text{cr}}.$$

То есть для всех  $2 \geq p \geq 0$  условие  $N = \bar{N}_{\text{cr}} < N_{\text{cr}}$  выполняется автоматически.

Выбирая начальное условие для скорости в виде  $v(0) = v_0$ , в соответствии с решениями (9) и (11) получаем тогда, что

$$C = \frac{v_0}{|p-1|}. \quad (13)$$

Накладывая также начальные условия на координаты в виде

$$x(0) = y(0) = 0, \quad (14)$$

после простого интегрирования уравнений (12) с учетом (13) и (14), можно прийти к следующим параметрическим зависимостям:

$$\begin{cases} x = \frac{v_0^2}{g(|p-1|)^2} \left[ p \sin\left(\frac{gt|p-1|}{v_0}\right) - \frac{1}{2} \left( \frac{gt|p-1|}{v_0} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2gt|p-1|}{v_0}\right) \right) \right], \\ y = \frac{v_0^2}{g(|p-1|)^2} \left[ p \cos\left(\frac{gt|p-1|}{v_0}\right) - \frac{1}{4} \left( 1 + 4p - \cos\left(\frac{2gt|p-1|}{v_0}\right) \right) \right]. \end{cases} \quad (15)$$

В безразмерном виде эти решения удобно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{(|p-1|)^2} \left[ p \sin(\tau|p-1|) - \frac{1}{2} \left( \tau|p-1| + \frac{1}{2} \sin(2\tau|p-1|) \right) \right], \\ \eta = \frac{1}{(|p-1|)^2} \left[ p \cos(\tau|p-1|) - \frac{1}{4} (1 + 4p - \cos(2\tau|p-1|)) \right], \end{cases} \quad (16)$$

где новые переменные есть

$$\xi = \frac{gx}{v_0^2}, \quad \eta = \frac{gy}{v_0^2}, \quad \tau = \frac{gt}{v_0}. \quad (17)$$

Зависимость  $\eta = \eta(\xi)$  согласно решениям (16) для разных значений параметра  $p$  иллюстрируют рис. 2 – 4.

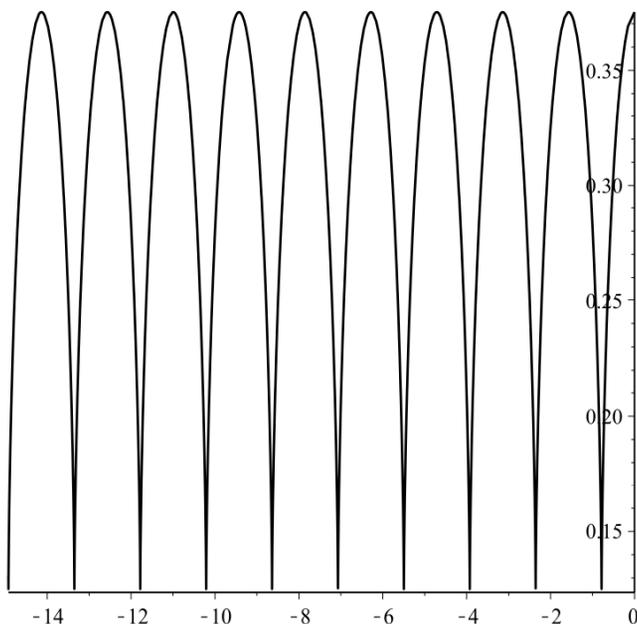


Рис. 2. Зависимость  $\eta = \eta(\xi)$  при  $p = 0$  (представляет собой классическую брахистохрону)

Fig. 2. Dependence  $\eta = \eta(\xi)$  at  $p = 0$  (represents a classical brachistochrone)

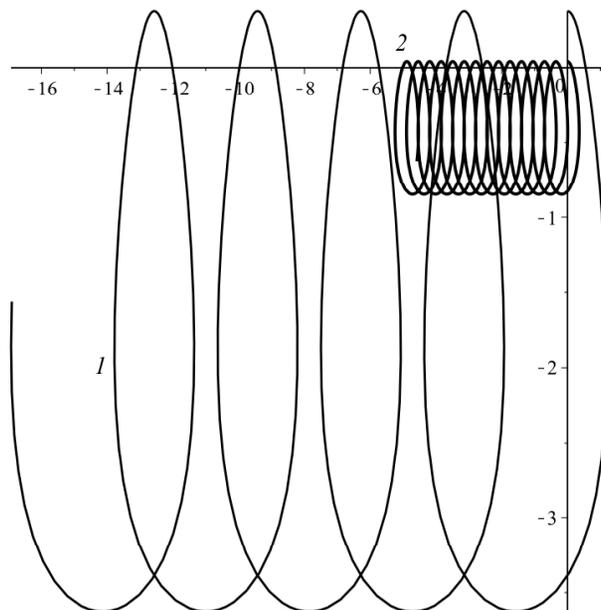


Рис. 3. Зависимость  $\eta = \eta(\xi)$  при  $p = 2$  (линия 1) и при  $p = 4$  (линия 2),  $0 \leq \tau \leq 30$

Fig. 3. Dependence  $\eta = \eta(\xi)$  at  $p = 2$  (line 1) and  $p = 4$  (line 2),  $0 \leq \tau \leq 30$

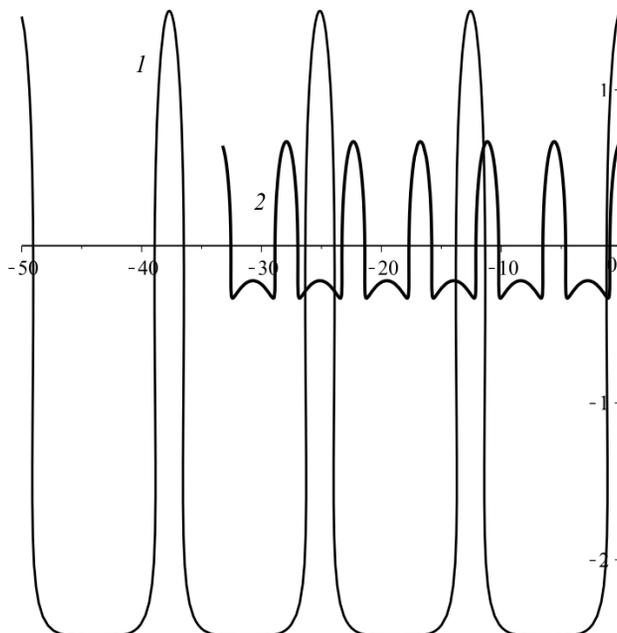


Рис. 4. Зависимость  $\eta = \eta(\xi)$  при  $p = 1/2$  (линия 1) и  $p = 1/4$  (линия 2),  $0 \leq \tau \leq 50$

Fig. 4. Dependence  $\eta = \eta(\xi)$  at  $p = 1/2$  (line 1) and  $p = 1/4$  (line 2),  $0 \leq \tau \leq 50$

Рассмотрим теперь противоположное неравенство (случай 2.  $p < 1$ ).

Этот случай примечателен тем, что согласно решению (9) существуют определенные моменты времени, которые продиктованы двумя разными условиями, а именно  $\cos \alpha < p$  и  $\cos \alpha > p$ . Совершенно понятно, что решение (11) для этих двух случаев должно быть записано тогда в виде

$$\alpha = \mp \frac{gt}{C} = \mp \frac{gt}{v_0}(1-p), \quad (18)$$

где верхний знак соответствует случаю  $\cos \alpha < p$ , а нижний – случаю  $\cos \alpha > p$ .

Это означает, что при выполнении начальных условий (14) должна соблюдаться следующая «чехарда» дискретных времен:

$$t_{2n} < t < t_{2n+1}, \text{ если } \cos \tau < p < 1, \quad (19)$$

$$\text{и} \quad t < t_{2n}, \quad t > t_{2n+1}, \text{ если } p < \cos \tau, \quad (20)$$

$$\text{где} \quad \begin{cases} t_{2n} = \frac{v_0(1-p)}{g}(\arccos p + 2\pi n), \\ t_{2n+1} = \frac{v_0(1-p)}{g}[\arccos p + \pi(2n+1)]. \end{cases} \quad (21)$$

Заметим, что в этом случае форма желоба, материал которого характеризуется малым пределом прочности, показана на рис. 4, из которого с очевидностью видно, что вначале движения траектория должна быть почти вертикальной, плавно переходящей в горизонтальный участок, который затем выгибается в форму параболы, давление на которую, как мы знаем (см. работу [1]), равно нулю.

Рассмотрим теперь последний, но также весьма важный случай, когда  $p = 1$ .

Решение (9) при этом можно представить, как

$$v = C(1 - \cos \alpha). \quad (22)$$

Из уравнений (7) тогда следует, что

$$\alpha = -\frac{gt}{C}. \quad (23)$$

В результате получаем

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{C^2}{g} \left( \sin \alpha - \frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \right), \\ y = y_0 + \frac{C^2}{g} \left( -\cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 2\alpha \right). \end{cases} \quad (24)$$

Из условий (14), когда траектория выходит из начала координат, то есть  $x(0) = y(0) = 0$ , следует, что

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{3C^2}{4g}.$$

$$\text{Поэтому} \quad \begin{cases} x = \frac{C^2}{g} \left( \sin \alpha - \frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \right), \\ y = \frac{2C^2}{g} \sin^4 \left( \frac{\alpha}{2} \right). \end{cases} \quad (25)$$

Из решения (22) следует, что в начальный момент времени скорость тела автоматически должна быть равна нулю. Это означает, что решение (25) описывает не единственную кривую, выходящую из начала координат, а бесчисленный класс кривых с произвольными  $C$ , которые качественно совершенно идентичны, что и иллюстрирует рис. 5.

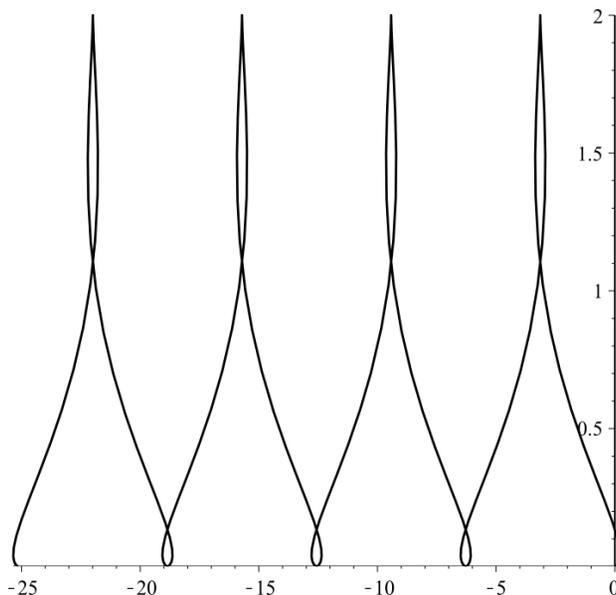


Рис. 5. Зависимость  $y(x)$  при  $p=1$  и  $C^2/2g=1$

Fig. 5. Dependence  $y(x)$  at  $p=1$  and  $C^2/2g=1$

### Заключение

Отметим основные результаты проведенного выше исследования.

1. Найдено аналитическое решение задачи, описывающее форму желоба при учете предела прочности его материала.

2. Проанализированы четыре различных случая:  $p=0$ ,  $p=1$ ,  $p>1$ ,  $p<1$  и с помощью численных методов приведены изображения четырех качественно различных форм желоба, одна из которых (при  $p=0$ ) представляет собой, как и должно быть, обычную брахистохрону.

3. Отмечено, что в случае не слишком прочных материалов форма желоба должна быть выбрана в форме, показанной на рис. 4.

4. Решение поставленной задачи найдено с помощью намеченного в [1–6] метода составления динамических уравнений движения в подвижной системе координат без привлечения традиционных методов вариационного исчисления [8–10] и управляющего параметра [9, 11, 12], как это сделано, например, в [13–20].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гладков С.О., Богданова С.Б. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 1. 161101-1-5.
2. Гладков С.О. О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 4. 164002-1-5.
3. Гладков С.О., Богданова С.Б. Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) // Ученые записки физического ф-та МГУ. 2017. № 1. 171101-1-5.
4. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения шарика по вращающейся брахистохроне с учетом сил трения // Ученые записки физического ф-та МГУ. 2017. № 2. 172101-1-6.
5. Гладков С.О., Богданова С.Б. Аналитическое и численное решение задачи о брахистохроне в некоторых общих случаях // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 145. С. 114–122.
6. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения тел с переменной массой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 83–91.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1967. 655 с.
8. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
9. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
10. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории пространственной брахистохроны // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 53–60.
11. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
12. Мансимов К.Б., Расумова Ш.М. Об оптимальности особых управлений в одной задаче оптимального управления // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 54. С. 17–33. DOI: 17223/19988621/54/2.
13. Giannoni F., Piccione P., Verderesi J.A. An approach to the relativistic brachistochrone problem by sub-Riemannian geometry // J. Math. Phys. 1997. V. 38. No. 12. P. 6367–6381.
14. Scarpello G.M., Ritelli D. Relativistic brachistochrones under electric or gravitational uniform fields // Z. Angew. Math. Mech. 2006. V. 86. No. 9. P. 736–743.
15. Иванов А.И. О брахистохроне частицы переменной массы с постоянным отношением количества присоединяемых и отделяемых частиц // Докл. АН УССР. Сер. А. 1968. С. 683–686.
16. Руссаловская А.В., Иванов Г.И., Иванов А.И. О брахистохроне точки переменной массы с трением и экспоненциальным законом истечения массы // Докл. АН УССР. Сер. А. 1973. С. 1024–1026.
17. Jeremic O., Salinic S., Obradovic A., Mitrovic Z. On the brachistochrone of a variable mass particle in general force fields // Math. And Computer Modelling. 2011. V. 54. P. 2900–2912.
18. Obradovic A., Salinic S., Jeremic O., Mitrovic Z. Brachistochronic motion of a variable mass system // Third Serbian (28<sup>th</sup> Yu) Congress on Theoretical and Applied Mechanics (Vlasina lake, Serbia, 5–8 July 2011). P. 1237–1246.
19. Salinic S., Obradovic A., Mitrovic Z., Rusov S. On the brachistochronic motion of the Chaplygin sleigh // Acta Mech. 2013. V. 224. No. 9.
20. Lipp S. Brachistochrone with Coulomb friction // SIAM J. Control Optim. 1997. V. 35. No. 2. P. 562–584.

Статья поступила 13.04.2020

Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2021) ON THE VARYING BRACHISTOCHRONE SHAPE WITH ALLOWANCE FOR CHUTE LOADING LIMITATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 73. pp. 60–70

DOI 10.17223/19988621/73/6

Keywords: dynamic equations, chute shape, reaction force, stress limit.

In this paper, the problem of the effect of stress limit on the chute shape is analyzed for the first time. Here, the dynamic equations for the motion of the material body rolling down the chute are formulated neglecting the friction forces. It is shown that if the stress limit for the chute material is taken into account, the shape of the chute varies greatly as a function of the parameter. Four possible cases are analyzed when the parameter is: equal to zero, more than unity, less than unity, and equal to unity. It is found that if the parameter is more than unity, the chute shape represents almost horizontal and vertical segments of a trajectory, which is clear from a physical point of view, since for this type of the trajectory the chute is least affected by the body moving along. If the parameter is equal to unity, the chute takes a specific loop-like shape. If the parameter is equal to zero, the system of equations describes a classical brachistochrone. The solution to the problem is applicable in practice for predicting the shape of the chute withstanding high loads when the stress limit for the material is known.

*Sergey O. GLADKOV* (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sglad51@mail.ru

*Sofiya B. BOGDANOVA* (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sonjaf@list.ru

#### REFERENCES

1. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2016) Geometricheskii fazovyy perekhod v zadache o brakhistokhrone [Geometrical phase transition in a problem on brachistochrone]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 1. Article 161101. pp. 1–5.
2. Gladkov S.O. (2016) O traektorii dvizheniya tela, vkhodyashchego v zhidkost' pod proizvol'nym uglom [On the trajectory of the body entering the fluid at an arbitrary angle]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 4. Article 164002. pp. 1–5.
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2017) Obobshchennyye dinamicheskiye uravneniya ploskogo krivoliniynogo dvizheniya material'nogo tela po zhelobu s uchetom sil treniya (ikh chislennyy analiz v nekotorykh chastnykh sluchayakh) [Generalized dynamic equations for a plane curvilinear motion of a material body in a trench with account for friction forces (their numerical analysis in some particular cases)]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 1. Article 171101. pp. 1–5.
4. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2017) K teorii dvizheniya sharika po vrashchayushcheyssa brakhistokhrone s uchetom sil treniya [On the theory of ball motion along a rotating brachistochrone with account for friction forces]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 2. Article 172101. pp. 1–6.
5. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases. *Journal of Mathematical Sciences*. 245(4). pp. 528–537. DOI: 10.1007/s10958-020-04709-0.
6. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) K teorii dvizheniya tel s peremennoy massoy [To the theory of motion of bodies with variable mass]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 83–91. DOI: 10.17223/19988621/58/1.

7. Smirnov V.I. (1967) Kurs vysshey matematiki [A course of higher mathematics]. Moscow: Nauka.
8. Elsholz L.E. (1969) *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie* [Differential equations and calculus of variations]. Moscow: Nauka.
9. Yang L. (1974) *Leksii po variatsionnomu ischisleniyu i teorii optimal'nogo upravleniya* [Lectures on variational calculus and optimal control theory]. Moscow: Mir.
10. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) K teorii prostranstvennoy brakhistokhrony [To the theory of n-dimensional brachistochrone]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 53–60. DOI: 10.17223/19988621/68/5.
11. Boltyanskiy V.G. (1969) *Matematicheskie metody optimal'nogo upravleniya* [Mathematical methods of optimal control]. Moscow: Nauka.
12. Mansimov K.B., Rasulova Sh.M. (2018) Ob optimal'nosti osobykh upravleniy v odnoy zadache optimal'nogo upravleniya [On optimality of singular controls in an optimal control problem]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 54. pp. 17–33. DOI: 10.17223/19988621/54/2.
13. Giannoni F., Piccione P., Verderesi J.A. (1997) An approach to the relativistic brachistochrone problem by sub-Riemannian geometry. *Journal of Mathematical Physics*. 38(12). pp. 6367–6381. DOI: 10.1063/1.532217.
14. Scarpello G.M., Ritelli D. (2006) Relativistic brachistochrones under electric or gravitational uniform fields. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik – ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 86(9). pp. 736–743. DOI: 10.1002/zamm.200510279.
15. Ivanov A.I. (1968) O brakhistokhrono chastitsy peremennoy massy s postoyannym otosheniem kolichestva prisoedinyaemykh i otdelyaemykh chastits [On the brachistochron of a variable-mass particle with a constant ratio of the number of attached and separated particles]. *Doklady AN USSR. Seriya A*. pp. 683–686.
16. Rusalovskaya A.V., Ivanov G.I., Ivanov A.I. (1973) O brakhistokhrono tochki peremennoy massy s treniem i eksponentsial'nym zakonom istecheniya massy [On the brachistochron of a variable-mass point with account for friction and exponential law of mass outflow]. *Doklady AN USSR. Seriya A*. pp. 1024–1026.
17. Jeremic O., Salinic S., Obradovic A., Mitrovic Z. (2011) On the brachistochrone of a variable mass particle in general force fields. *Mathematical and Computer Modelling*. 54(11–12). pp. 2900–2912. DOI: 10.1016/j.mcm.2011.07.011.
18. Obradovic A., Salinic S., Jeremic O., Mitrovic Z. (2011) Brachistochronic motion of a variable mass system. *Proceedings of the Third Serbian (28<sup>th</sup> Yu) Congress on Theoretical and Applied Mechanics*. pp. 1237–1246.
19. Salinic S., Obradovic A., Mitrovic Z., Rusov S. (2013) On the brachistochronic motion of the Chaplygin sleigh. *Acta Mechanica*. 224(9). DOI: 10.1007/s00707-013-0878-2.
20. Lipp S. (1997) Brachistochrone with Coulomb friction. *SIAM journal on Control & Optimization*. 35(2). pp. 562–584. DOI: 10.1137/S0363012995287957.

Received: April 13, 2020

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/73/7

**М.С. Павлов, А.К. Каравацкий, К.В. Костюшин,  
К.К. Исмаилов, Н.О. Костюшина, С.А. Орлов**

## **ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОРПУСА БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА<sup>1</sup>**

Цель настоящей работы – реализация оптимизационного подхода к проектированию беспилотных летательных аппаратов. Каждый этап проектирования рассматривается как задача оптимизации. Рассмотрены этапы определения технологии и состава композиционного материала корпуса и определения геометрии и назначения размеров корпуса. Применение оптимизационного подхода позволило существенно улучшить характеристики летательного аппарата относительно результатов проектирования классическими методами.

**Ключевые слова:** *беспилотный летательный аппарат, оптимизация, композиционный материал, формообразующая структура.*

Беспилотные летательные аппараты находят применение в самых разных областях. Они используются в качестве мобильных штативов при фотовидеосъемке, для доставки почтовых отправлений, а также в качестве транспорта спецоборудования для спасательных служб и в военных целях. Для корпусов всех типов летательных аппаратов предъявляются требования минимальной массы при достаточно высоких характеристиках прочности и жесткости. Данные требования, как правило, являются взаимоисключающими, поэтому при проектировании корпусов летательных аппаратов возникают задачи оптимизации. Обычно, целью оптимизации в таких задачах является максимальное снижение массы корпуса при обеспечении заданных прочности и жесткости изделия.

Так, в работе [1] описана задача проектирования и оптимизации элементов конструкции беспилотного летательного аппарата с подвижными (машущими) крыльями. Также в качестве критерия оптимизации могут быть выбраны другие параметры. Например, в [2] рассматривается учет неопределенностей, возникающих при изготовлении квадрокоптера для оптимального проектирования. Целевой функцией оптимизации выбрана электрическая энергия, необходимая для обеспечения полета устройства. Поскольку летательный аппарат является сложным техническим устройством, взаимное влияние его различных систем друг на друга может существенным образом влиять на эксплуатационные характеристики изделия. Поэтому при проектировании таких аппаратов часто необходимо производить учет такого взаимного влияния. В работе [3] рассматривается мультидисциплинарная оптимизация, объединяющая генетические алгоритмы, симуляцию отжига и топологическую оптимизацию для разработки универсальной платформы беспилотных летательных аппаратов. Другой пример использования междисциплинарной оптимизации содержится в [4], где рассматривается разработка турбин-

<sup>1</sup> Данное научное исследование (№ 8.2.31.2019) выполнено при поддержке Программы повышения конкурентоспособности ТГУ.

ной части малогабаритного турбовального двигателя. Оптимизация проводится более чем по 100 свободным параметрам.

В настоящей работе рассматривается комплексная разработка корпуса беспилотного летательного аппарата мультикоптерного типа, предназначенная для отработки алгоритмов искусственного интеллекта и машинного зрения при выполнении задач воздушного наблюдения, патрулирования, сопровождения объектов, поисково-спасательных и транспортных работ. Основным условием разработки поставлено отсутствие необходимости применения дорогостоящих материалов и сложного специализированного оборудования. Работа состоит из трех частей: выбор материалов, эскизное проектирование, оптимизация конструкции.

### **Выбор материалов и определение эффективных механических характеристик**

В аэрокосмических приложениях широко применяются так называемые сэндвич-панели. Наиболее распространенный вариант такой структуры – трехслойная панель, внешние слои которой выполнены из относительно жесткого материала, а средний слой представляет собой легкую, как правило, пористую, или ячеистую среду, основная функция которой состоит в дистанцировании жестких несущих слоев друг от друга для придания изгибной жесткости панели как целого. Внешние слои выполняются из легких металлов, либо чаще из полимерных композиционных материалов на основе стеклянных или угольных волокон. Выбор материала заполнителя определяется в том числе дополнительными конструктивными задачами, например требованиями теплоизоляции, размеростабильности, вибропоглощения и др.

Для рассматриваемого в настоящей работе случая к материалам предъявлялись следующие требования:

- высокие удельные механические характеристики;
- потребительская доступность;
- отсутствие необходимости применения дорогостоящих технологий изготовления конечного изделия.

С учетом совокупности перечисленных требований для корпуса беспилотного летательного аппарата разработан полимерный композиционный материал, состоящий из следующих компонентов:

- углеткань (плотность  $240 \text{ г/м}^2$ , плетение Twill  $2 \times 2$ , волокно: Grafill TR30S-S, нить 3К) используется в качестве несущего элемента во внешних слоях панелей корпуса;

- перфорированный полиэфирный нетканый материал Lantor Soric XF толщиной 3 мм, используемый в качестве дистанцирующего заполнителя между несущими слоями (для придания толщины панели);

- базальтовая ткань (плотность  $220 \text{ г/м}^2$ , плетение Plain), используемая как один из несущих компонентов во внешних слоях панели;

- смола Elan-Tech EC 157 с отвердителем W152/1MLR, используемая в качестве матрицы.

Разработанный материал изготовлен по технологии вакуумной инфузии. В качестве разделительного состава применялась полимерная разделительная смазка для форм Frekote 770 NC. В качестве жертвенного слоя – нейлоновая ткань плотностью  $85 \text{ г/м}^2$ . В качестве инфузионного слоя – экструдированная, полипропиленовая, проводящая сетка плотностью  $160 \text{ г/м}^2$ . В качестве вакуумного слоя – по-

лиолефиновая пленка толщиной 70 мкм. Для организации вакуумного канала использовались спиральная вакуумная трубка диаметром 8 мм. На всем промежутке работы в системе поддерживалось давление 20 Па.

Были рассмотрены три варианта состава материала. Базовый вариант – трехслойный материал со схемой армирования угольная ткань – наполнитель – угольная ткань. Помимо базового рассмотрены варианты с дополнительными компонентами: арамидной и базальтовой тканями. Эти варианты рассмотрены для определения возможности усиления базового варианта без существенного увеличения его стоимости и массы.

Определение механических характеристик рассмотренных вариантов композиционного материала проводилось экспериментальным путем. Для каждого варианта исполнения была изготовлена партия экспериментальных образцов (10 штук). Испытания проводились по схеме трехточечного изгиба на испытательной машине Instron Microtester 5948. Кроме непосредственно свойств материала при выборе рабочего варианта для изготовления корпуса летательного аппарата учитывалась также стоимость компонентов и конечного материала. Для определения наиболее подходящего варианта сформулирован критерий оптимальности свойств

$$k = \frac{\rho S}{E \sigma_b},$$

где  $\rho$  – поверхностная плотность;  $S$  – относительная стоимость;  $E$  – модуль упругости;  $\sigma_b$  – предел прочности. У оптимального варианта выбранный критерий должен быть минимален.

В табл. 1 приведены результаты определения сравниваемых параметров материала

Схема армирования	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>2</sup>	Модуль упругости $E$ , ГПа	Предел прочности $\sigma_b$ , МПа	Относительная стоимость $S$	Критерий оптимальности $k$ , с <sup>4</sup> /кг
Углеткань Заполнитель Углеткань	2166	27.3	85.8	1	0.9247
Углеткань Арамидная ткань Заполнитель Углеткань	2693	13.7	62.2	1.24	3.9187
Углеткань Базальтовая ткань Заполнитель Базальтовая ткань Углеткань	3065	45.7	127.0	1.41	0.7411

Как видно из результатов сравнения вариантов изготовления материала, приведенных в табл. 1, лучшим из рассмотренных по выбранному критерию является вариант с усилением базовой схемы армирования базальтовой тканью. Таким образом, для изготовления корпуса летательного аппарата выбран вариант схемы армирования «Углеткань – Базальтовая ткань – Заполнитель – Базальтовая ткань – Углеткань».

### Разработка формообразующей структуры

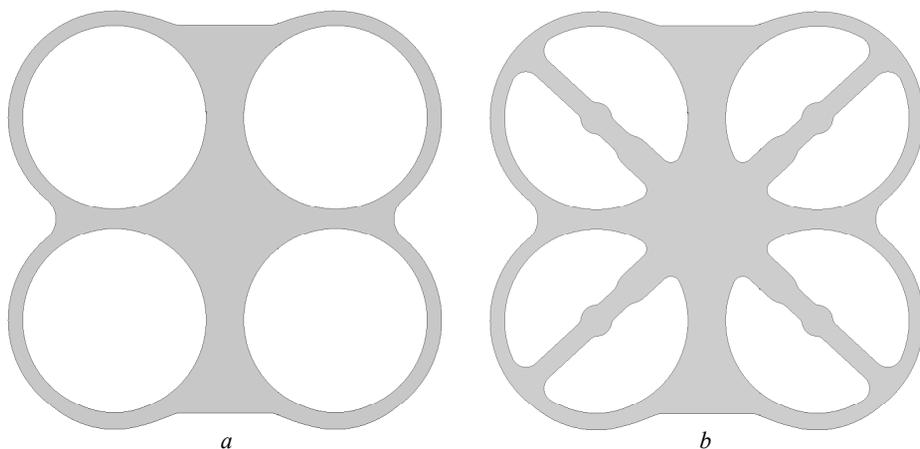
Проектирование формообразующей структуры летательного аппарата произведено в два этапа. На первом этапе определена геометрическая форма и назначены основные размеры. Назначение размеров произведено по конструктивным соображениям исходя из требований размещения элементов полезной нагрузки и функциональных систем БПЛА. Исходными данными послужили геометрические размеры таких элементов:

- бесколлекторные двигатели с диаметром корпуса 28 мм;
- трёхлопастные несущие винты диаметром 178 мм;
- регуляторы оборотов – размеры корпуса  $25 \times 12 \times 5$  мм;
- аккумуляторная батарея –  $136 \text{ мм} \times 42 \text{ мм} \times 20 \text{ мм}$ ;
- полетный контроллер –  $80 \times 48 \times 15$  мм;
- компьютер-вычислитель –  $58 \times 23 \times 5$  мм;
- приемник радиосигнала –  $46 \times 34 \times 15$  мм;
- видекамера  $20 \times 25 \times 15$  мм;
- передатчик видеосигнала –  $36 \times 36 \times 5$  мм;
- датчики расстояния –  $25 \times 15 \times 5$  мм;
- модуль радиотелеметрии –  $45 \times 35 \times 15$  мм.

Для обеспечения необходимого температурного режима регуляторы оборотов располагаются под воздушными винтами силовой установки. Масса элементов полезной нагрузки и функциональных систем БПЛА без учета формообразующих конструкций составляет 0.6 кг.

Исходя из указанных размеров оборудования, размер площадки для его размещения определен как  $400 \times 50$  мм. Для обеспечения пассивной безопасности, в конструкции летательного аппарата применялись защитные элементы лопастей силовой установки, имеющие толщину 15 мм.

Спроектированная формообразующая конструкция показана на рис. 1 и имеет следующие размеры: длина – 450 мм, ширина – 430 мм, высота – 40 мм; межосевое расстояние между двигателями – 310 мм.



**Рис. 1.** Начальная конфигурация формообразующей структуры:  
*a* – верхняя панель, *b* – нижняя панель

**Fig. 1.** Initial configuration of the frame: (*a*) top panel and (*b*) bottom panel

Второй этап проектирования формообразующей структуры – оптимизация. Показанная на рис. 1 конструкция принята в качестве начальной. Эта конструкция оптимизирована с целью снижения ее массы при сохранении жесткости. Снижение массы достигается путем удаления материала из ненагруженных областей конструкции. На рис. 2 показаны области в начальной конструкции, из которых возможно удалить материал, не нарушая требований размещения оборудования. Области удаления материала эквивалентны для верхней и нижней пластин.

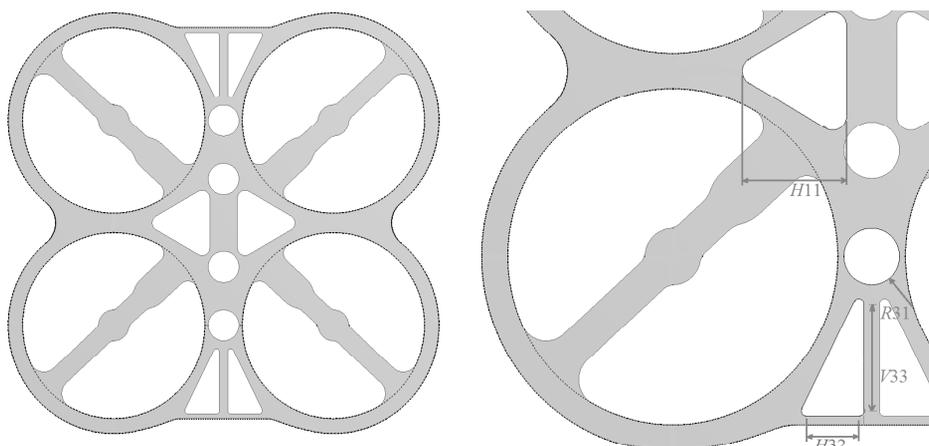


Рис. 2. Области удаления материала  
 Fig. 2. Material cutting-out areas

На рис. 3 показаны специфические для нижней пластины области удаления материала.

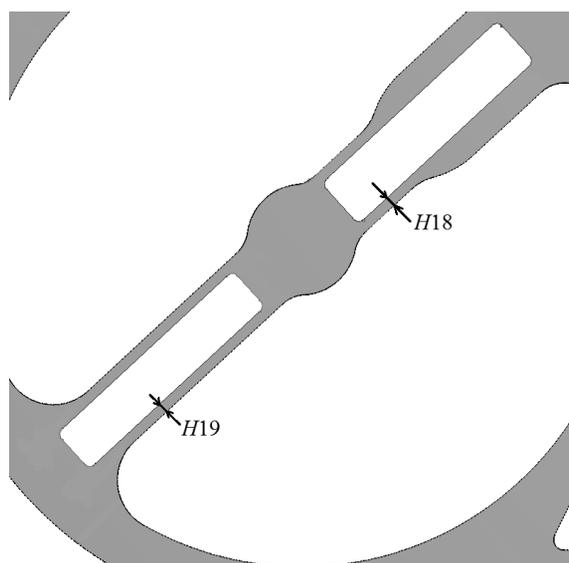


Рис. 3. Дополнительные области удаления материала из нижней пластины  
 Fig. 3. Additional areas to cut the material out of the bottom part

При постановке задачи оптимизации размеры указанных областей являются ее параметрами. В табл. 1 приведены возможные пределы их изменения.

Таблица 1

Параметр	Минимальное значение	Максимальное значение	Начальное значение
<i>H11</i>	20 мм	60 мм	20 мм
<i>R31</i>	6 мм	16 мм	6 мм
<i>H32</i>	10 мм	30 мм	10 мм
<i>V33</i>	20 мм	66 мм	20 мм
<i>H18</i>	3 мм	7 мм	3 мм
<i>H19</i>	3 мм	7 мм	3 мм

Целевой функцией оптимизации выбрана величина поворота площадок крепления двигателей под действием нагрузок от оборудования БПЛА и полезного груза. У оптимальной конструкции эта функция достигает минимума. Для определения зависимости целевой функции от параметров оптимизации разработана параметрическая конечно-элементная модель формообразующей структуры. На рис. 4 показана конечно-элементная сетка модели.

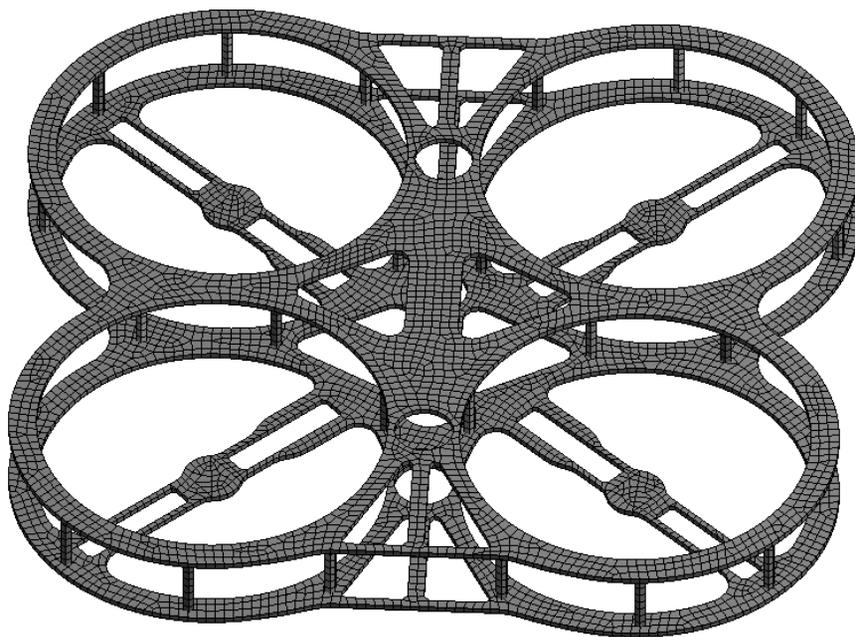
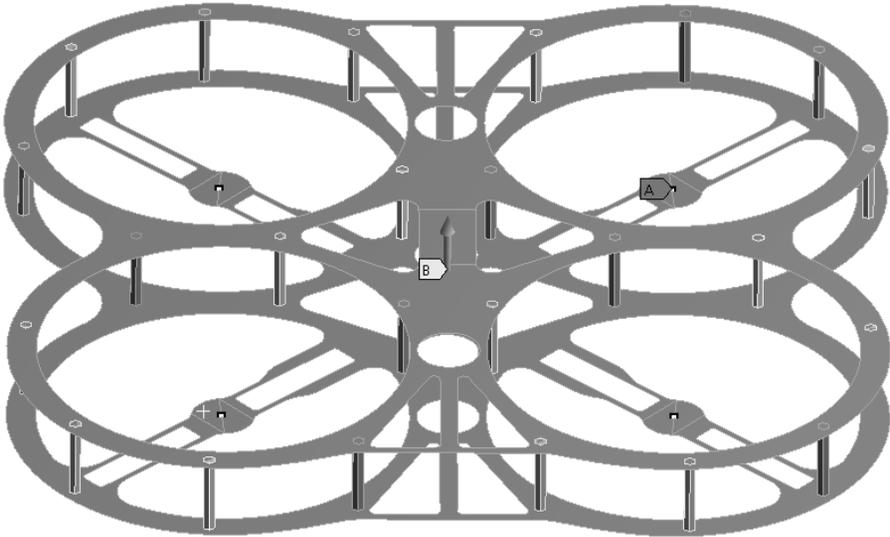


Рис. 4. Конечно-элементная сетка модели формообразующей структуры  
Fig. 4. Finite element mesh of the frame model

Модель состоит из примерно из 6000 (точное число зависит от конкретного набора параметров) оболочечных трех- и четырехузловых элементов. Нагрузки в режиме полета смоделированы следующим образом. К точкам, расположенными под осями электродвигателей, приложены условия закрепления. Для моделирования силы тяжести к модели приложено ускорение, равное ускорению свободного падения. Масса полезной нагрузки равномерно распределена по монтажной пло-

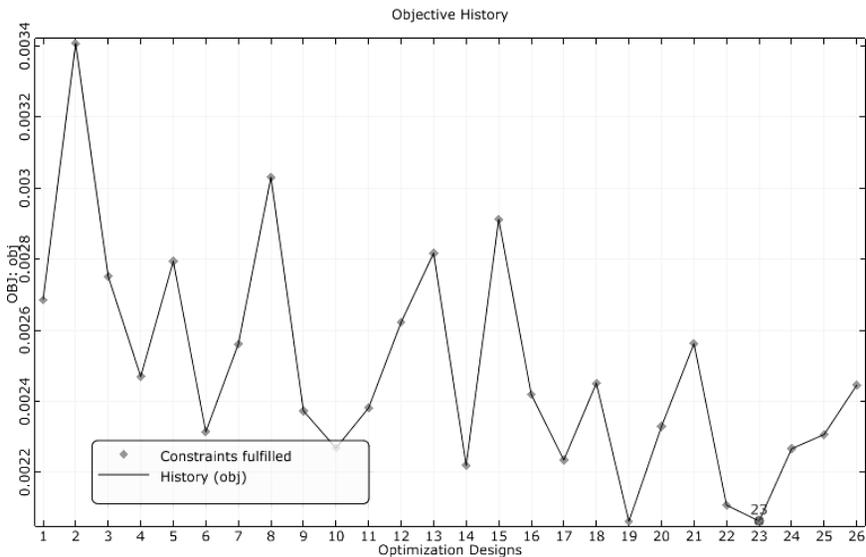
щадке. На рис. 5 показана расчетная схема формообразующей структуры, использованная при решении задачи оптимизации.



**Рис. 5.** Граничные условия: (A) – точки закрепления, (B) – направление ускорения  
**Fig. 5.** Boundary conditions: (A) fixed support and (B) direction of acceleration

В качестве метода оптимизации использован метод Нелдера – Мида [5]. Для реализации метода конечных элементов и алгоритма Нелдера – Мида использован программный комплекс инженерного анализа ANSYS.

На рис. 6 показан график процесса поиска минимума целевой функции.



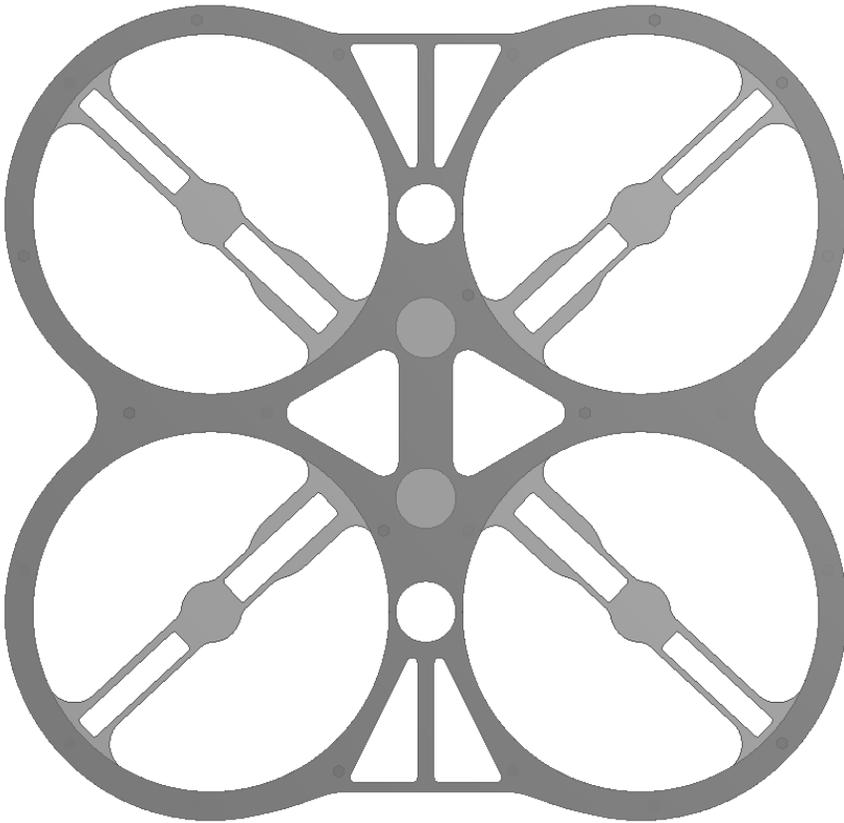
**Рис. 6.** График минимизации целевой функции  
**Fig. 6.** A line chart of the objective function minimization

В табл. 2 приведен набор значений параметров оптимизации, соответствующий минимуму целевой функции.

Таблица 2

$H11$	$R31$	$H32$	$V33$	$H18$	$H19$
28 мм	12 мм	2.5 мм	5.3 мм	3 мм	4 мм

На рис. 7 показана оптимизированная геометрия формообразующей структуры.



**Рис. 7.** Оптимизированная формообразующая структура  
**Fig. 7.** Optimized frame

### Заключение

Представлена реализация комплексного подхода к оптимальному проектированию корпусов беспилотных летательных аппаратов. Указанный подход состоит в последовательной постановке и решении задач оптимизации на каждом этапе проектирования. Сформулированы критерии оптимальности для материала корпуса и топологии формообразующей структуры. Разработан композиционный материал, оптимальным образом удовлетворяющий требованиям прочности, жесткости, удельной массы и стоимости. Разработана параметрическая конечно-элементная модель формообразующей структуры, на основе которой проведена

топологическая оптимизация методом Нелдера – Мида. Применение оптимизационного алгоритма позволило снизить массу начальной конструкции формообразующей структуры на 25.6 %.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Negrello F., Silvestri P., Lucifredi A., Guerrero J.E., Bottaro A.* Preliminary design of a mechanism for flapping flight-durability analysis and vibration modes // 11th International Conference on Condition Monitoring and Machinery Failure Prevention Technologies, CM 2014 / MFPT 2014. 2014. P. 1–11.
2. *Coulombe C., Gamache J., Mohebbi A., Chouinard U., Achiche S.* Applying robust design methodology to a quadrotor drone // Proceedings of the 21st International Conference on Engineering Design, 4. 2017. P. 395–404.
3. *Henderson L., Kuester F.* Adaptive design and optimization of a shape-changing drone // 2018 IEEE Aerospace Conference. 2018. P. 1–12. DOI: 10.1109/AERO.2018.8396446.
4. *Siller U., Kröger G., Moser T., Hediger S.* Towards a highly efficient small scale turboshaft engine: Part II – Aero-mechanical turbine design and optimization // Proceedings of the ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition. Volume 2B: Turbomachinery. 2014. V02BT45A014. DOI: 10.1115/GT2014-26320.
5. *Nelder J.A., Mead R.* A simplex method for function minimization // Computer Journal. 1965. V. 7. No. 4. P. 308–313.

Статья поступила 29.12.2020

Pavlov M.S., Karavatskiy A.K., Kostyushin K.V., Ismailov K.K., Kostyushina N.O., Orlov S.A. (2021) DESIGN OPTIMIZATION FOR AN UNMANNED DRONE FRAME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 73. pp. 71–80

DOI 10.17223/19988621/73/7

Keywords: unmanned aerial vehicle, optimization, composite material, frame.

Designing of a drone frame is presented in this paper. The main goal is to develop the optimal drone frame geometry. The optimization criterion represents mass minimization along with ensuring the required stiffness. Another intention is to use cheap materials and simple manufacturing technologies.

The design process consists of three steps. The first step is engineering of a composite material, which is a three-layer sandwich panel. A series of three-point bending experiments are carried out for material samples. The optimality criterion takes into account both physical and economic features of the material. In the final scheme the outer layers are made of carbon and basalt fabrics, which are impregnated with resin, and a specific non-woven material is used as filler. The second step is the initial design. Dimensions are specified for design purposes. The third step is the optimization process. The finite element model of the frame is developed. The drone weight and the lift forces serve as applied loads. The optimization is implemented by removing material from unloaded areas of the structure. The Nelder–Mead (simplex) method with varying geometric parameters of the structure is used. As a result of the optimization process, the mass of the initial structure is reduced by 25.6 percent.

**Financial support.** This research was supported by the Program for improving the competitiveness of Tomsk State University (grant No. 8.2.31.2019).

*Mikhail S. PAVLOV* (Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mspavlov@tpu.ru

*Aleksandr K. KARAVATSKIY* (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: raven@ftf.tsu.ru

*Kirill V. KOSTYUSHIN* (Supercomputer Center of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

*Kuat K. ISMAILOV* (Supercomputer Center of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mendikjan@gmail.com

*Natal'ya O. KOSTYUSHINA* (Supercomputer Center of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bazhenovav@outlook.com

*Sergey A. Orlov* (Supercomputer Center of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: orlov@ftf.tsu.ru

#### REFERENCES

1. Negrello F., Silvestri P., Lucifredi A., Guerrero J.E., Bottaro A. (2014) Preliminary design of a mechanism for flapping flight-durability analysis and vibration modes. *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on Condition Monitoring and Machinery Failure Prevention Technologies*. pp. 1–11.
2. Coulombe C., Gamache J., Mohebbi A., Chouinard U., Achiche S. (2017) Applying robust design methodology to a quadrotor drone. *Proceedings of the 21<sup>st</sup> International Conference on Engineering Design*. 4. pp. 395–404.
3. Henderson L., Kuester F. (2018) Adaptive design and optimization of a shape-changing drone. *2018 IEEE Aerospace Conference*. DOI: 10.1109/AERO.2018.8396446.
4. Siller U., Kröger G., Moser T., Hediger S. (2014) Towards a highly efficient small scale turboshaft engine: Part II – Aero-mechanical turbine design and optimization. *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition*. 2B. DOI: 10.1115/GT2014-26320.
5. Nelder J.A., Mead. R. (1965) A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*. 7(4). pp. 308–313. DOI: 10.1093/COMJNL/7.4.308.

Received: December 29, 2020

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/73/8

Т.Р. Рашидов, Н.Б. Джураева, А.П. Уринов

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ДВИЖЕНИЯ ПОЧВЫ В ЗОНЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ГЛУБОКОРЫХЛИТЕЛЯ**

При взаимодействии рабочего органа с грунтом почвенная среда меняет свое строение и деформируется. Влияние почвы на поведение рабочего органа можно учитывать через ее плотность и предел прочности. Для описания движения почвы вблизи лапки при конечных деформациях использована модель пластической среды, предложенная академиком Х.А. Рахматулиным, и упрощенные уравнения, полученные на основе гипотезы плоских сечений. Установлено, что в зависимости от коэффициента внутреннего трения и сцепления грунта вблизи рабочего органа рыхлителя может образовываться зона повышенной плотности почвы, где наблюдается значительный рост силы сопротивления.

**Ключевые слова:** *почвообрабатывающая машина, глубокорыхлитель, рабочий орган, деформация, моделирование, сопротивление почвы, модель сжимаемой пластической среды.*

Практика обработки сельскохозяйственных угодий показывает, что более 50 % подпахотного горизонта подвергается дополнительному уплотнению непосредственно рабочими органами почвообрабатывающих орудий, т.е. образуется «плужная подошва». В связи с этим корни растений не могут пробить уплотнённый слой почвы (плужную подошву) и проникнуть в нижние, более влажные слои.

Предотвращение уплотнения подпахотного горизонта имеет важное значение для обеспечения качественного функционирования почвы и его экологического состояния, поскольку уплотнение подпахотного горизонта является практически постоянным явлением, что снижает урожайность, а также увеличивает вымывание питательных элементов из почвы [1].

Как известно, одним из эффективных приёмов разуплотнения почвы и разрушения «плужной подошвы» является механическое рыхление на глубину до 50 см с помощью глубокорыхлителей, или чизельных плугов, которые широко применяются и в зарубежных странах, таких, как США, Германия, Канада, Румыния и Венгрия. Эти страны занимают одно из передовых мест в области создания и выпуска специальных орудий для глубокого рыхления почвы (собойлеры, киллиферы и др.).

Согласно исследованиям зарубежных ученых, установлено, что длительная ротационная обработка почвы оказывает негативное влияние на поверхностный слой почвы, причем из-за глобального изменения климата потребление воды в сельском хозяйстве становится все более проблематичным. При рыхлении плотного подпахотного слоя почвы на глубину до 60 см за счет потребления воды водопроницаемость и влагоемкость почвы значительно увеличиваются, благодаря чему боковые корни растений развиваются лучше и урожай получается более полноценным [2].

В Средней Азии в различных почвенно-климатических зонах хлопкосеяния эффективность рыхления подпахотного горизонта изучали М.В. Мухамеджанов

[3, 4], Л.П. Белякова [5], В.А. Сергиенко [6] и др. Физико-механическим и технологическим свойствам почвы, которые необходимо учитывать при создании новых и совершенствовании существующих почвообрабатывающих машин, посвящены работы В.Н. Кузнецовой [7], Г.М. Рудакова [8], А.К. Кашкарова [9], Ф.И. Решетникова [10] и др. В результате проведенных исследований было обнаружено, что глубокое рыхление почвы:

- создает условия для «всасывания», накопления значительных запасов находящейся в почве и воздухе влаги, а также ее перераспределения;
- улучшает микроклимат в почве;
- обеспечивает эффективный влаговоздушный обмен во взрыхленном слое;
- в зоне рыхления увеличивается количество активных корней;
- способствует предотвращению эрозионных процессов;
- за счет разуплотнения почвы в дальнейшем снижается сопротивление при проходе тракторов и других орудий, что ведет к экономии горюче-смазочных материалов, снижаются нагрузки на орудия;
- показывает высокую эффективность борьбы с сорняками.

В результате проникновения в грунтовую среду рабочего органа глубокорыхлителя возникает сила сопротивления почвы, величина которой зависит от физико-механических свойств почвы и конструктивных особенностей рабочего органа глубокорыхлителя. Результаты опытных данных указывают на необходимость учета типа грунта и его свойств при создании новых и совершенствовании существующих почвообрабатывающих машин.

Следует отметить, что ранее разработанные технологические схемы обработки почвы и соответствующие конструкции рабочих органов глубокорыхлителя, работающего в условиях деблокированного резания почвы [11], экспериментальные методы изучения поведения грунтов при статических и динамических воздействиях [12, 13], а также предложенные модели грунтов с использованием метода дискретных элементов [12], позволили достичь определенных успехов в решении задач динамики тел, движущихся в грунтовой среде.

Однако недостаточно изучены вопросы моделирования почвенной среды в процессе взаимодействия ее с рабочими органами глубокорыхлителя, динамические явления в почвенной среде и деталях рыхлителя в процессе нагружения их переменной силой тяги, а также отсутствует научно-обоснованная методика для оценки напряженного состояния деформируемых узлов деталей глубокорыхлителя при взаимодействии с почвенной средой. Перечисленные выше проблемы являются важными, и актуальной задачей является разработка аналитико-численного метода исследования динамики рабочего органа глубокорыхлителя при движении его в почве, моделируемой упругой и сжимаемой пластической средой, и оценки его нагруженности, необходимой для поиска дальнейшего снижения энергоемкости и повышения качественных показателей работы почвообрабатывающей машины.

Таким образом, цель статьи заключается в выборе модели почвенной среды и описании движения рабочего органа глубокорыхлителя (лапы), представленного в виде тонкого кругового конуса, в данной среде.

В представленной работе на базе ранее проведенных исследований выявлены основные факторы, влияющие на напряженно-деформированное состояние почвенной среды, по выбранной модели грунта, определены силы сопротивления почвы и установлен закон движения рабочего органа глубокорыхлителя в грунтовой среде.

### 1. Описание конструкции и технологического процесса работы основных параметров рабочего органа глубокорыхлителя

В связи с тем, что рыхление подпахотного горизонта представляет собой энергоемкий технологический процесс, для его выполнения используются специальные глубокорыхлители.

На рис. 1 и 2 представлены боковой рабочий орган и схема экспериментально-го глубокорыхлителя [12].

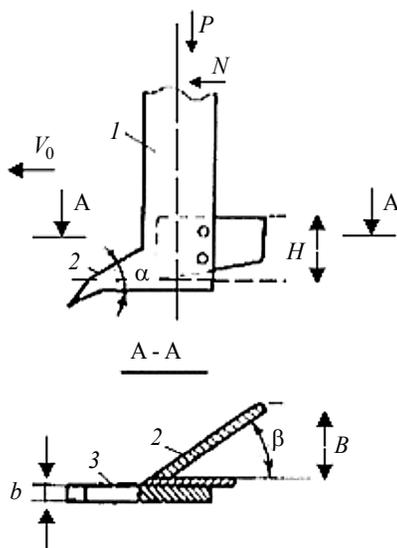


Рис. 1. Боковой рабочий орган глубокорыхлителя  
Fig. 1. Side operating element of a subsoiler

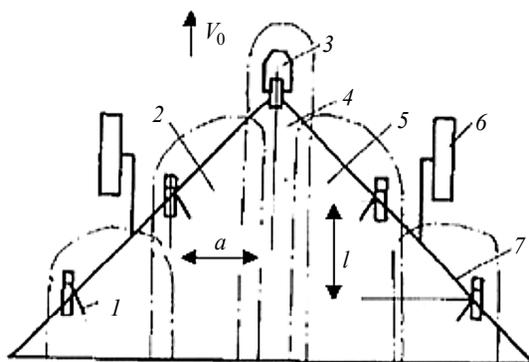


Рис. 2. Схема экспериментального глубокорыхлителя  
Fig. 2. Scheme of an experimental subsoiler

Глубокорыхлитель состоит из рамы 7 (рис. 2) и закрепленных на ней последовательно и уступом центрального 3 и боковых 1 рабочих органов, а также опорных колес 6. Центральный рабочий орган орудия выполнен в виде стойки с рых-

лительным элементом (долотом), выполненным в виде горизонтального двухгранного клина с горизонтально-поперечной режущей кромкой, а боковые рабочие органы – в виде односторонних левого и правого рыхлительных клиньев, установленных под углом  $\beta$  к направлению движения (рис. 1).

В данной работе для описания движения рабочего органа глубокорыхлителя (лапы) в грунте принимаем простейшую модель рыхлительной лапы в виде тонкого кругового конуса.

В результате движения тела (рыхлительной лапы) в почвенной среде грунт деформируется и на контактной поверхности обрабатываемых элементов и движущейся части окружающей среды возникает переменная по времени сила взаимодействия (сопротивления), величина которой в первую очередь зависит от динамической структуры почвы, которая подвергается постоянным изменениям из-за широкого спектра биотических и абиотических факторов, таких, как биodeградация [14] и механическое нарушение почвы, рассмотренные в работе [15], и конструктивных особенностей обрабатывающей машины [16]. При этом параметры силовой возможности машин, в конечном счете, определяются характером взаимодействия рабочих органов машин с обрабатываемой грунтовой средой. Поэтому в теоретическом плане особое значение приобретает выбор модели процесса взаимодействия почвенной среды с рабочими органами почвообрабатывающей машины.

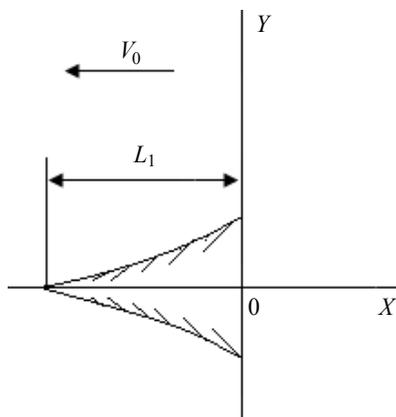
### 3. Модели процесса взаимодействия рабочих органов почвообрабатывающих машин с грунтовой средой

Авторами [17] получено точное решение для одномерной задачи Римана, которое используется для проверки достоверности результатов модифицированного метода моделирования сжимаемой среды при взаимодействии с твердым телом. Как известно, при решении прикладных задач взаимодействия твердых тел с грунтовой средой, грунт моделируется как упругая или упругопластическая (несжимаемая) среда. Такая модель может быть использована для описания движения водонасыщенных грунтов [18, 19]. Для грунтов малой или средней влажности, то есть состоящих из твердых частиц и воздушных включений, наличие больших объемных необратимых деформаций и наличие сдвиговых деформаций существенны. Такие грунты обычно рассматриваются как пластическая сжимаемая среда.

В данной статье используется модель «пластического газа» академика Х.А. Рахматулина [20]. Согласно этой модели, грунт при нагружении изменяет свою плотность по определенному закону, при разгрузке он сохраняет плотность, полученную при нагружении. В данной работе грунт моделируется как пластическая сжимаемая среда.

Итак, перейдем к составлению уравнения движения грунта, используя «гипотезу плоских сечений», предложенную Х.А. Рахматулиным и А.А. Ильюшиным [21] для решения ряда задач аэродинамики. Согласно этой гипотезе, частицы грунта совершают радиальные движения в плоскости, перпендикулярной оси симметрии твердого тела (конуса). В этом случае задача о движении тела сводится к исследованию движения сжимаемой пластической (сыпучей) среды с цилиндрической симметрией [20]. Принимаем рабочий орган машины приведенным круговым конусом. Пусть конус с профилем  $L(t)$ , симметричным относительно оси  $Ox$ , движется с постоянной скоростью  $V_0$  в направлении, противоположном

этой оси. Рассмотрим произвольное сечение конуса в момент времени  $t_1$ , при котором  $L_1 = L(t_1)$  (рис. 3).



**Рис. 3.** Схематическое представление движения лапки глубокорыхлителя в почве  
**Fig. 3.** Schematic representation of the subsoiler foot movement in soil

Примем, что в точке касания вершины конуса рассматриваемого сечения в момент времени  $t = t_1$  в грунте возникает цилиндрическая волна сжатия [21] и в момент времени  $t > t_1$  граница области возмущенного движения грунта будет ограничена радиусами цилиндрической волны  $r = r_*(t)$  и радиусом  $r = L(t) \cdot \operatorname{tg} \beta$  ( $\beta$  – угол при вершине кругового конуса), являющимся линией пересечения поверхности конуса с рассматриваемой плоскостью.

Допустим, что плотность грунта меняется только на фронте цилиндрической волны и определяется интенсивностью этой волны. Поэтому плотность грунта в области возмущения является только функцией координаты  $r$  и не зависит от времени  $t$ . Пусть  $r$  – переменная координата Лагранжа. Тогда уравнение движения и неразрывности в цилиндрических координатах в произвольном сечении  $L = L_1$  имеет вид

$$\rho_0 r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (r+u) \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + (\sigma_r - \sigma_\theta) \frac{\partial}{\partial r} (r+u); \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (r+u)^2 = \frac{\rho_0}{\rho} r, \quad (2)$$

где  $r$  – начальное расстояние частиц от оси конуса;  $u = u(r, t)$  – смещение частицы грунта на этом расстоянии;  $t$  – время;  $\rho_0$  и  $\rho$  – начальная и текущая плотность грунта в возмущенной области  $L_1 < r < r_*(t)$ ;  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  – радиальные и тангенциальные напряжения. Поскольку грунт моделируется пластической (необратимой) средой [22], то напряжения удовлетворяют условию пластичности Кулона – Мора [23]:

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \tau_0 + \mu(\sigma_r + \sigma_\theta), \quad (3)$$

где  $\tau_0 = 2k \cdot \cos \theta$  и  $\mu = \sin \theta$ ;  $k$  – сцепление;  $\theta$  – угол внутреннего трения.

Исключив из уравнения (1)  $\sigma_0$ , приведем его к виду

$$v\sigma_r \frac{\partial(r+u)}{\partial r} + (r+u) \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} = \rho_0 r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\tau_0}{1+\mu} \frac{\partial}{\partial r}(r+u). \quad (4)$$

Здесь  $v = 2\mu/(1+\mu)$ . Умножим обе части уравнения (4) на функцию  $(r+u)^{v-1}$  и проинтегрируем по лагранжевой переменной  $r$ :

$$(r+u)^v \sigma_r(r,t) = \rho_0 \int_0^r (r+u)^{v-1} r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dr - \frac{\tau_0}{1+\mu} \frac{(r+u)^v - R^v}{v} + R^v \sigma_r(0,t), \quad (5)$$

где  $R = v_0 t \operatorname{tg} \beta$  – радиус внутренней границы возмущенной области при лагранжевой переменной  $r = 0$  в произвольный момент времени.

Обозначим через  $\sigma_r^* = \sigma_r(r_*,t)$  напряжение на фронте цилиндрической волны  $r = r_*(t)$ , где перемещение частиц равно нулю. Тогда равенство (5) на фронте  $r = r_*(t)$  записывается в виде

$$r_*^v \sigma_r^* = \rho_0 \int_0^{r_*} (r+u)^{v-1} r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dr + \frac{\tau_0}{1+\mu} \frac{r_*^v - R^v}{v} + R^v \sigma_r(0,t). \quad (6)$$

Вычитая (6) из (5), получим

$$(r+u)^v \sigma_r(r,t) - r_*^v \sigma_r^* = -\rho_0 \int_r^{r_*} (r+u)^{v-1} r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dr + \frac{\tau_0}{1+\mu} \frac{r_*^v - (r+u)^v}{v}. \quad (7)$$

Учитывая независимость плотности от времени в возмущенной области, проинтегрируем уравнение неразрывности (2):

$$(r+u)^2 = 2\psi(r) + R^2(t), \quad (8)$$

где 
$$\psi(r) = \int_0^r \frac{\rho_0}{\rho(r)} r dr.$$

Зная, что  $u = 0$  на фронте волны  $r = r_*(t)$ , из (8) имеем

$$r_*^2 = 2\psi(r_*) + R^2(t), \quad (9)$$

где 
$$\psi(r_*) = \int_0^{r_*} b(r) r dr, \quad b = \rho_0 / \rho(r)$$

При постоянной скорости движения конуса  $L = v_0 t$  ( $R = v_0 t \operatorname{tg} \beta$ ), тогда, при известном законе  $\rho = \rho(r)$ , из формулы (9) можно установить закон перемещения фронта цилиндрической волны  $r = r_*(t)$ .

Дифференцируя (8) по времени, находим скорость и ускорение частиц грунта в области возмущения  $L_1 < r < r_*(t)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{R \cdot \dot{R}}{\sqrt{2\psi(r) + R^2(t)}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\dot{R}^2 + R \cdot \ddot{R}}{\sqrt{2\psi(r) + R^2(t)}} - \frac{R^2 \cdot \dot{R}^2}{[2\psi(r) + R^2(t)]^{3/2}}, \quad (10)$$

где  $R = v_0 t \operatorname{tg} \beta$ ,  $\dot{R} = v_0 \operatorname{tg} \beta$ ,  $\ddot{R} = 0$ .

Скорость частиц грунта на фронте волны определяем из первого выражения (10), где следует полагать  $r = r_*(t)$ :

$$\dot{u}_* = \frac{R\dot{R}}{\sqrt{2\psi(r_*) + R^2(t)}} = \frac{R\dot{R}}{r_*}. \quad (11)$$

Для определения напряжения на фронте волны  $\sigma_r = \sigma_r^*$  используем закон сохранения массы и теорему о количестве движения [19]:

$$\rho_0 D = \rho(D - \dot{u}_*); \quad (12)$$

$$\rho_0 D \dot{u}_* = -\sigma_r^* - p_a, \quad (13)$$

где  $D$  – скорость переднего фронта цилиндрической волны;  $p_a$  – давление впереди волны сжатия. Из (12) и (13) находим скорость волны  $D$  и напряжение  $\sigma_r^*$ :

$$D = \frac{\dot{u}_*}{1 - b(r_*)}, \quad \sigma_r^* = -\frac{\rho_0 \dot{u}_*^2}{1 - b(r_*)} - p_a.$$

Подставляя ускорение частиц и выражение  $\sigma_r^*$  соответственно из (12) и (13) в (7), находим напряжение в возмущенной области:

$$\begin{aligned} (r+u)^\nu \sigma_r = \rho_0 (R\dot{R} + \dot{R}^2) \int_r^{r_*} \frac{r dr}{[2\psi(r) + R(t)]^{1-\nu/2}} - \rho_0 (R\dot{R})^2 \int_r^{r_*} \frac{r dr}{[2\psi(r) + R(t)]^{2-\nu/2}} + \\ + \frac{\rho_0}{1 - b(r_*)} \frac{(R\dot{R})^2}{r_*^{2-\nu}} + \frac{\tau_0}{1 + \mu} [r_*^\nu - (r+u)^\nu] + p_a r_*^\nu. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя выражение (8) в формулу (14), можно установить пространственно-временное распределение напряжения в области возмущения, где необходимо считать известной экспериментально определяемую функцию  $\psi(r)$ . Если рассматривать процесс распространения волны за малый промежуток времени, то можно полагать плотность грунта за фронтом волны постоянной и равной  $\rho = \rho_1 = \text{const}$ . Полагая  $r = 0$ ,  $u = R(t)$ , получаем явное выражение для давления  $p$ , возникающего на поверхности конуса:

$$\begin{aligned} p - p_a = \ddot{L} \frac{\rho_0 \cdot \varphi(\nu, b_1) \cdot x \operatorname{tg}^2 \beta}{b_1} + \\ + \ddot{L}^2 \frac{\rho_0 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta}{b_1 (\nu - 2)} [(\nu - 2) \cdot \varphi(\nu, b_1) + b_1 (\nu - 2) \cdot a^{\nu/2} - a^{\nu/2-1} + 1] + \\ + \varphi(\nu, b_1) \left[ \nu \cdot p_a + \frac{\tau_0}{(1 + \mu)} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

где  $b_1 = \rho_0 / \rho_1$ ;  $x = L - L_1$ ;  $\varphi(\nu, b_1) = (a^{\nu/2} - 1) / \nu$ ;  $a = 1 / (1 - b_1)$ .

По известным значениям напряжений  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  из (9) – (12) и давления  $p$  из формулы (15) на поверхности тела, интегрируя их, можно найти контактную силу взаимодействия между почвенной средой и телом.

### 3. Определение силы сопротивления почвы при движении тела с постоянной скоростью

Значение контактной силы взаимодействия (сила сопротивления), как было отмечено выше, зависит от выбранной модели почвенной среды и конфигурации тела. Найдем выражение этой силы в случае движения тела в виде кругового конуса в сжимаемой пластической среде. Тогда полная сила сопротивления, действующая на поверхность конуса, вычисляется с помощью интеграла ( $\mu_0$  – коэффициент трения между грунтом и поверхностью конуса):

$$F = 2\pi(\sin\beta + \mu_0 \cos\beta) \int_0^H (p - p_a) x \operatorname{tg}\beta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta} dx.$$

Подставим выражение давления из (15) и произведем интегрирование, тогда с учетом  $R = H \operatorname{tg}\beta$  получим

$$F = \pi(1 + \mu_0 \operatorname{ctg}\beta) (A + B\rho_0 \dot{L}^2 + \rho_0 C \cdot H \cdot \ddot{H}) \cdot H^2 \operatorname{tg}^2\beta, \quad (16)$$

где

$$A = [p_a + \frac{\tau_0}{v(1+\mu)} (a^{v/2} - 1) \cos^4\beta];$$

$$B = \frac{1}{4b_1(v-2)} \left[ \frac{v-2}{v} (a^{v/2} - 1) + b_1(v-2)a^{v/2} - (a^{v/2-1} - 1) \right] \cos^2\beta \sin^2 2\beta;$$

$$C = \frac{1}{6b_1 v} (a^{v/2} - 1) \cos^2\beta \sin^2 2\beta, \quad a = 1/(1-b_1).$$

В случае движения конуса с постоянной скоростью имеем  $H = v_0 t$ ,  $\dot{H} = v_0$ ,  $\ddot{H} = 0$ . Тогда формула (16) примет вид

$$F = \pi(1 + \mu_0 \operatorname{ctg}\beta) (A + 0.5B\rho_0 v_0^2) v_0^2 t^2 \operatorname{tg}^2\beta. \quad (17)$$

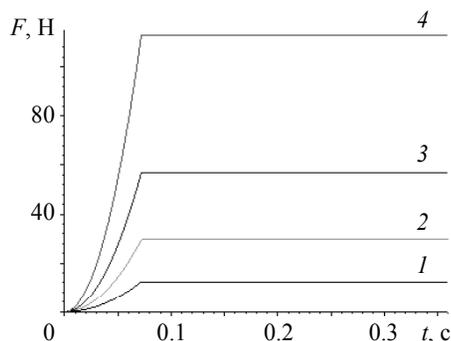
Изменение силы сопротивления от времени по закону (17) имеет место до момента  $t = t_0 = v_0 / h_{\text{кон}}$ . При  $t \geq t_0$  сила сопротивления постоянна и равна

$$F = F_0 = \pi(1 + \mu_0 \operatorname{ctg}\beta) (A + 0.5B\rho_0 v_0^2) h_{\text{кон}}^2 \operatorname{tg}^2\beta. \quad (18)$$

На рис. 4 и 5 (для кривых № 1, 2, 3, 4, 5 при значениях  $b_1 = 0,2$ ,  $b_1 = 0,4$ ,  $b_1 = 0,6$ ,  $b_1 = 0,8$  соответственно) представлены графики зависимости силы сопротивления от времени при различных значениях отношения  $b_1 = \rho_0 / \rho_1$ . В расчетах принято:  $\lambda_{\text{лап}} = 10^\circ$ ,  $\beta_{\text{лап}} = 10^\circ$ ,  $k = 50000 \text{ Н/м}^2$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $\rho_0 = 2000 \text{ кг/м}^3$ ,  $v_0 = 2.777 \text{ м/с}$  (10 км/ч),  $\mu_0 = 0.2$ ,  $h_{\text{лап}} = h_{\text{кон}} = 0.2 \text{ м}$ .

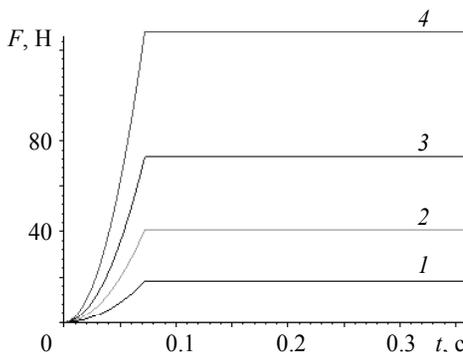
Как видно из графиков, пока площадь контакта конуса с грунтом переменная, сила сопротивления зависит от времени по параболическому закону, и далее она остается постоянной. Рост отношения  $b_1 = \rho_0 / \rho_1$ , что соответствует более уплотненному состоянию грунта за фронтом цилиндрической волны, приводит к значи-

тельному увеличению значения силы сопротивления. На рис. 5 показаны аналогичные зависимости в случае моделирования грунта при отсутствии внутреннего трения ( $\theta = 0$ ). Видно, что увеличение угла внутреннего трения  $\theta$  приводит к некоторому снижению силы сопротивления.



**Рис. 4.** График зависимости силы сопротивления грунта  $F$  от времени  $t$  при различных значениях отношения  $b_1 = \rho_0 / \rho_1$  ( $\theta = 0$ )

**Fig. 4.** Dependence of the soil resistance force  $F$  on time  $t$  for different values of the ratio  $b_1 = \rho_0 / \rho_1$  ( $\theta = 0$ )



**Рис. 5.** График зависимости силы сопротивления грунта  $F$  от времени  $t$  при различных значениях отношения  $b_1 = \rho_0 / \rho_1$  ( $\theta \neq 0$ )

**Fig. 5.** Dependence of the soil resistance force  $F$  on time  $t$  for different values of the ratio  $b_1 = \rho_0 / \rho_1$  ( $\theta \neq 0$ )

Полная сила сопротивления, действующая на поверхность конуса, вычисляется с помощью интеграла ( $\mu_0$  – коэффициент трения между грунтом и поверхностью конуса):

$$F = 2\pi(\sin \beta + \mu_0 \cos \beta) \int_0^h (p - p_a) x \operatorname{tg} \beta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} dx.$$

Подставим выражение давления из (15) и произведем интегрирование, тогда, с учетом  $R = L \operatorname{tg} \beta$ , получим

$$F = \pi(1 + \mu_0 \operatorname{ctg} \beta) (A + B \rho_0 \dot{L}^2 + \rho_0 C \cdot h \cdot \ddot{L}) h^2, \quad (18)$$

где 
$$A = \pi \operatorname{tg}^2 \beta \left[ p_a + \frac{\tau_0}{v(1 + \mu)} \right] (a^{v/2} - 1);$$

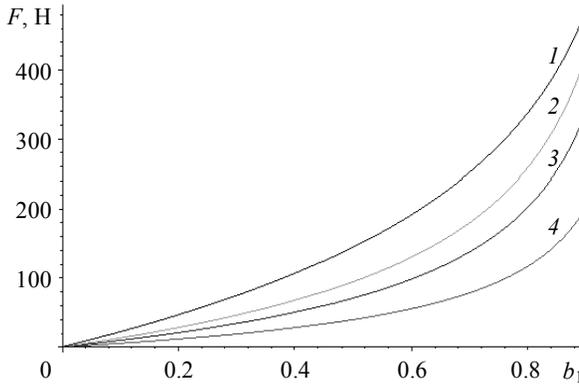
$$B = \frac{\pi \operatorname{tg}^4 \beta}{b_1(v-2)} \left[ \frac{v-2}{v} (a^{v/2} - 1) + b_1(v-2) a^{v/2} - (a^{v/2-1} - 1) \right];$$

$$C = \frac{\pi \operatorname{tg}^4 \beta}{3b_1 v} (a^{v/2} - 1), \quad a = 1/(1 - b_1).$$

В случае движения конуса с постоянной скоростью имеем  $L = v_0 t$ ,  $\dot{L} = v_0$ ,  $\ddot{L} = 0$ . Тогда формула (17) примет вид

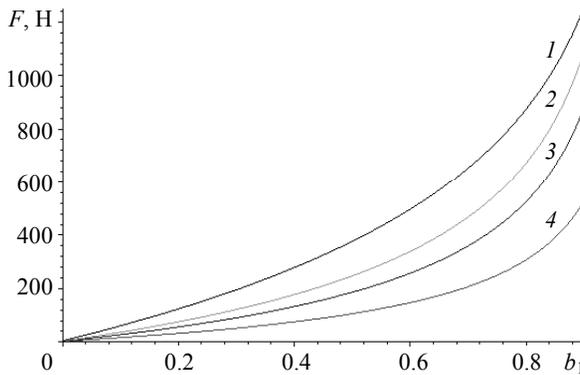
$$F = (1 + \mu_0 \operatorname{ctg} \beta) (A + B \cdot \rho_0 v_0^2) h^2. \quad (19)$$

На рис. 6 и 7 (для кривых 1, 2, 3, 4 при значениях  $\mu = 0$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $\mu = 0.7$ ,  $\mu = 0.9$ ) представлены графики изменения силы сопротивления в зависимости от  $b_1$  ( $b_1 = \rho_0 / \rho_1$ ) для двух значений угла  $\lambda$  и при различных значениях параметра грунта  $\mu = \sin \theta$ . В расчетах принято:  $\beta_{\text{лап}} = 20^\circ$ ,  $k = 50000 \text{ Н/м}^2$ ,  $\rho_0 = 2000 \text{ кг/м}^3$ ,  $v_0 = 2.777 \text{ м/с}$  (10 км/ч),  $\mu_0 = 0.2$ ,  $h_{\text{лап}} = h_{\text{кон}} = 0.2 \text{ м}$ .



**Рис. 6.** Зависимости силы сопротивления грунта  $F$  от отношения  $b_1 = \rho_0 / \rho_1$  при  $\lambda = 10^\circ$  и для различных значений параметра  $\mu = \sin \theta$

**Fig. 6.** Dependence of the soil resistance force  $F$  on the ratio  $b_1 = \rho_0 / \rho_1$  at  $\lambda = 10^\circ$  and different values of the parameter  $\mu = \sin \theta$



**Рис. 7.** Зависимости силы сопротивления грунта  $F$  от отношения  $b_1 = \rho_0 / \rho_1$  при  $\lambda = 20^\circ$  и для различных значений параметра  $\mu = \sin \theta$

**Fig. 7.** Dependence of the soil resistance force  $F$  on the ratio  $b_1 = \rho_0 / \rho_1$  at  $\lambda = 20^\circ$  and different values of the parameter  $\mu = \sin \theta$

Как видно из графиков, с ростом отношения  $b_1 = \rho_0 / \rho_1$ , который соответствует более уплотненному состоянию грунта за фронтом цилиндрической волны, значительно увеличивается сила сопротивления  $F$ . С другой стороны, увеличение угла внутреннего трения  $\theta$  приводит к некоторому снижению силы сопротивления.

#### 4. Выводы

Для описания динамики обрабатываемой почвы выбрана модель сжимаемой пластической среды с условием Кулона – Мора. При использовании данной модели определена сила сопротивления почвенной среды при движении в ней лапы глубокорыхлителя, представленной в виде тонкого кругового конуса. Установлено, что величина этой силы существенно зависит от свойства грунта, вида контактных условий между телом и грунтом, причем с ростом коэффициента внутреннего трения  $\mu$  сила сопротивления грунта  $F$  увеличивается.

Получена зависимость силы сопротивления от времени. По результатам графоаналитических исследований видно, что пока площадь контакта кругового конуса с грунтом переменная, сила сопротивления в зависимости от времени меняется по параболическому закону, и далее она остается постоянной. В случае движения тела с постоянной скоростью установлено, что в зависимости от коэффициента внутреннего трения и сцепления грунта вблизи рабочего органа рыхлителя может образовываться зона повышенной плотности почвы, где наблюдается значительный рост силы сопротивления. При увеличении угла внутреннего трения наблюдается некоторое снижение значения силы сопротивления.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Thorsøe M.H., Noe E.B., Lamandé M., Frelüh-Larsen A., Kjeldsen C., Zandersen M., Schjøning P. Sustainable soil management – Farmers’ perspectives on subsoil compaction and the opportunities and barriers for intervention // *Land Use Policy*. 2019. V. 86. P. 427–437. DOI: 10.1016/j.landusepol.2019.05.017.
2. Kuang N., Tan D., Li H., Gou Q., Li Q., Han H. Effects of subsoiling before winter wheat on water consumption characteristics and yield of summer maize on the North China Plain // *Agricultural Water Management*. 2020. V. 227. Article 105786. DOI: 10.1016/j.agwat.2019.105786.
3. Мухамеджанов М.В. Система земледелия по коренному повышению плодородия орошаемых почв и урожайности сельскохозяйственных культур. Ташкент: ФАН, 1974. С. 3–23.
4. Мухамеджанов М.В., Сулейманов С. Корневая система и урожайность хлопчатника. Ташкент: Узбекистан, 1978. 328 с.
5. Белякова Л.П., Асроров М. Эффективность почвоуглубления орошаемых почв // *Хлопководство*. 1959. № 2. С. 35–38.
6. Сергиенко В.А., Байметов Р.И., Ибрагимов Р.И., Бибутов Н. Рациональная технология глубокого рыхления почвы // *Хлопководство*. 1982. № 10. С. 49–53.
7. Кузнецова В.Н. Физическое моделирование процесса контактного взаимодействия рабочего органа землеройной машины с мерзлым грунтом // *Вестник Томского Государственного университета. Математика и механика*. 2019. № 61. С. 70–81. DOI: 10.17223/19988621/61/7.
8. Рудаков Г.М. Технологические основы механизации сева хлопчатника. Ташкент: Фан, 1974. 244 с.
9. Кашкаров А.К., Джураев А. Глубокое рыхление как средство борьбы с плужной по дошвой // 1964. № 2. С. 16–18.

10. Решетников Ф.И. Приемы увеличения мощности пахотного слоя орошаемого серозема. Ташкент: Изд-во УзАСХН, 1960. 102 с.
11. Тухтакузиев А. Механико-технологические основы эффективности работы почвообрабатывающих машин хлопководческого комплекса: автореф. дис. ... д.т.н. Янгиюль, 1998. 16 с.
12. Chengguang Hang, Yuxiang Huang, Ruixiang Zhu. Analysis of the movement behaviour of soil between subsoilers based on the discrete element method // Journal of Terramechanics. 2017. V. 74. P. 35–43. DOI: 10.1016 / j.jterra.2017.10.002.
13. Байметов П.И. Глубокорыхлитель // Механизация хлопководства. 1982. № 1. С. 3–4.
14. Гросс Е.Е., Кокорева А.А., Кулижский С.П. и др. Исследование изменения прочности агрегатов почв при различных сельскохозяйственных нагрузках // Вестник Томского государственного университета. Биология. 2013. № 368. С. 180–185.
15. Julius Diel, Hans-Jörg Vogel, Steffen Schlüter. Impact of wetting and drying cycles on soil structure dynamics // Geoderma. 2019. V. 345. P. 63–71. DOI: 10.1016/j.geoderma.2019.03.018
16. Rashidov T., Djuraeva N.B. Ripper foot movement in the ground, simulated H.A. Rahmatulin's environment // International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology. (www.ijarset.com) Of IJARSET. 2019. V. 6. Iss. 9. P. 10906–10912.
17. Feng Z.W., Kaboudian A., Rong J.L., Khoo B.C. The simulation of compressible multi-fluid multi-solid interactions using the modified ghost method // Computers & Fluids. 2017. V. 154. P. 12–26. DOI: 10.1016 / j.compfluid.2017.05.017
18. Мардонов Б. Волновые процессы в упруго пористых средах. Ташкент: Изд-во ФАН, 1989. 175 с.
19. Da Costa Mattos H.S., Teixeira L.P., Martins-Costa M.L.. Analysis of small temperature oscillation in a deformable solid matrix containing a spherical cavity filled with a compressible liquid – Analytical solution for damage initiation induced by pore pressure variation // International Journal of Engineering Science. 2018. V. 129. P. 1–20. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2018.02.014.
20. Рахматулин Х.А. Газовая и волновая динамика. М.: Изд-во МГУ, 1983. 196 с.
21. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. Вып. 6. С. 733–755.
22. Рахматулин Х.А., Сагомонян А.Я., Алексеев Н.А. Вопросы динамики грунтов. М.: Изд-во МГУ, 1964. 239 с.
23. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Физматгиз, 1960. 121 с.

Статья поступила 09.01.2020

Rashidov T.R., Djuraeva N.B., Urinov A.P. (2021) MODELING THE PROCESS OF STRAIN AND MOTION OF THE SOIL IN A SUBSOILER OPERATION AREA. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 73. pp. 81–94

DOI 10.17223/19988621/73/8

Keywords: tillage machine, subsoiler, operating element, strain, modeling, soil resistance, model of a compressible plastic medium.

Analysis of available literature shows that nowadays an advanced scheme of the technological process and new designs of operating elements of the subsoiler working in conditions of deblocked cutting has been developed. The aim is to improve the quality and to reduce the energy consumption by machines and equipment during deep tillage. However, at present, the theory of vibrations and strength loading of the units of subsoiler, when its operating elements interact with soil, is not sufficiently developed. This paper highlights the issues regarding the modeling of soil during interaction with operating elements of a subsoiler. Based on the use of the Rakhmatulin model of a compressible plastic medium and the Ilyushin «flat cross-section hypotheses», the equation of the soil motion is formulated, and the dynamic phenomena occurring in the soil and

subsoiler elements under variable traction are described. The calculation results are obtained in the Maple-8 programming environment using the methods of solid mechanics and soil mechanics.

*Tursunbay R. RASHIDOV* (Doctor of Technical Sciences, Academician of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures of the ASRU, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: tur.rashidov@list.ru

*Nargiza B. DJURAEVA* (Junior Research Scientist, Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures of the ASRU, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: nargiza.1968@mail.ru

*Aziz P. URINOV* (Junior Research Scientist, Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures of the ASRU, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: PhD.mr.Urinov@mail.ru

#### REFERENCES

1. Thorsøe M.H., Noe E.B., Lamandé M., Frelil-Larsen A., Kjeldsen C., Zandersen M., Schjøning P. (2019) Sustainable soil management – Farmers’ perspectives on subsoil compaction and the opportunities and barriers for intervention. *Land Use Policy*. 86. pp. 427–437. DOI: 10.1016/j.landusepol.2019.05.017.
2. Kuang N., Tan D., Li H., Gou Q., Li Q., Han H. (2020) Effects of subsoiling before winter wheat on water consumption characteristics and yield of summer maize on the North China Plain. *Agricultural Water Management*. 227. Article 105786. DOI: 10.1016/j.agwat.2019.105786.
3. Mukhamedzhanov M.V. (1974) *Sistema zemledeliya po korennomu povysheniyu plodorodiy oroshaemykh pochv i urozhaynosti sel'skokhozyaystvennykh kul'tur* [Agricultural system for radical improvement of the fertility of irrigated soils and crop yields]. Tashkent: FAN. pp. 3–23.
4. Mukhamedzhanov M.V., Suleymanov S. (1978) *Kornevaya sistema i urozhaynost' khlopchatnika* [Root system and yield of cotton plants]. Tashkent: Uzbekistan.
5. Belyakova L.P., Asrorov M. (1959) Effektivnost' pochvouglubleniya oroshaemykh pochv [Efficiency of irrigated soil dredging]. *Khlopkovodstvo*. 2. pp. 35–38.
6. Sergienko V.A., Baymetov R.I., Ibragimov R.I., Bibutov N. (1982) *Ratsional'naya tekhnologiya glubokogo rykhleniya pochvy* [Efficient technology of deep soil loosening]. *Khlopkovodstvo*. 10. pp. 49–53.
7. Kuznetsova V.N. (2019) Fizicheskoe modelirovanie protsessa kontaktnogo vzaimodeystviya rabocheho organa zemleroynoy mashiny s myorzlym gruntom [Physical modeling of the contact interaction between working body of digging machine and frozen soil]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 61. pp. 70–81. DOI: 10.17223/19988621/61/7.
8. Rudakov G.M. (1974) *Tekhnologicheskie osnovy mekhanizatsii seva khlopchatnika* [Technological foundations of mechanization of cotton sowing]. Tashkent: FAN.
9. Kashkarov A.K., Dzshuraev A. (1964) Glubokoe rykhlenie kak sredstvo bor'by s pluzhnoy podoshvoy [Deep loosening as means of dealing with plow sole]. *Khlopkovodstvo*. 2. pp. 16–18.
10. Reshetnikov F.I. (1960) *Priyomy uvelicheniya moshchnosti pakhotnogo sloya oroshaemogo serozyoma* [Methods for increasing the capacity of an arable layer of irrigated sierozem]. Tashkent: UzASKhN.
11. Tukhtakuziev A. (1998) *Mekhaniko-tekhnologicheskie osnovy effektivnosti raboty pochvoo-brabatyvayushchikh mashin khlopkovodcheskogo kompleksa* [Mechanical and technological principles of the efficiency of tillage machines in cotton-growing complex]. Thesis. Yangiyul'.
12. Hang C., Huang Y., Zhu R. (2017) Analysis of the movement behaviour of soil between subsoilers based on the discrete element method. *Journal of Terramechanics*. 74. pp. 35–43. DOI: 10.1016/j.jterra.2017.10.002.
13. Baymetov R.I. (1982) Glubokorykhritel' [Subsoiler]. *Mekhanizatsiya khlopkovodstva*. 1. pp. 3–4.

14. Gross E.E., Kokoreva A.A., Kulizhskiy S.P., Nikolaeva E.I., Solov'eva T.P. (2013) Issledovanie izmeneniya prochnosti agregatov pochv pri razlichnykh sel'skokhozyaystvennykh nagruzkakh [Study of the strength variation in soil aggregates under various agricultural loads]. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo universiteta. Biologiya – Tomsk State University Journal of Biology*. 368. pp. 180–185.
15. Diel J., Vogel H.-J., Schlüter S. (2019) Impact of wetting and drying cycles on soil structure dynamics. *Geoderma*. 345. pp. 63–71. DOI: 10.1016/j.geoderma.2019.03.018.
16. Rashidov T., Djuraeva N.B. (2019) Ripper foot movement in the ground, simulated H.A. Rahmatulin's environment. *International Journal of Advanced Research in Science. Engineering and Technology*. 6(9). pp. 10906–10912.
17. Feng Z.W., Kaboudian A., Rong J.L., Khoo B.C. (2017) The simulation of compressible multi-fluid multi-solid interactions using the modified ghost method. *Computers & Fluids*. 154. pp. 12–26. DOI: 10.1016/j.compfluid.2017.05.017.
18. Mardonov B. (1989) *Volnovye protsessy v uprugoy poristykh sredakh* [Wave processes in elastic porous media]. Tashkent: FAN.
19. Da Costa Mattos H.S., Teixeira L.P., Martins-Costa M.L. (2018) Analysis of small temperature oscillation in a deformable solid matrix containing a spherical cavity filled with a compressible liquid – Analytical solutions for damage initiation induced by pore pressure variation. *International Journal of Engineering Science*. 129. pp. 1–20. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2018.02.014.
20. Rakhmatulin Kh.A. (1983) *Gazovaya i volnovaya dinamika* [Gas and wave dynamics]. Moscow: Moscow State University Publishing.
21. Il'yushin A.A. (1956) Zakon ploskikh secheniy v aerodinamike bol'shikh sverkhzvukovykh skorostey [The law of flat sections in aerodynamics of high supersonic speeds]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Applied Mathematics and Mechanics*. 20(6). pp. 733–735.
22. Rakhmatulin Kh.A., Sagomonyan A.Ya., Alekseev N.A. (1964) *Voprosy dinamiki gruntov* [Issues on soil dynamics]. Moscow: Moscow State University Publishing.
23. Sokolovskiy V.V. (1960) *Statika sypuchey sredy* [Statics in a loose medium]. Moscow: Fizmatgiz.

Received: January 9, 2020

УДК 536.46  
DOI 10.17223/19988621/73/9

И.Г. Русяк, В.А. Тенев

## ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВНУТРЕННЕЙ БАЛЛИСТИКИ НА РАСЧЕТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ВЫСТРЕЛА ДЛЯ ЗАРЯДОВ ИЗ ЗЕРНЕНОГО ПОРОХА<sup>1</sup>

Рассмотрена задача о влиянии размерности математической модели на расчетные внутрибаллистические характеристики выстрела для зарядов из зерненого пороха. Исследованы математические модели выстрела в пространственной (осесимметричной), одномерной и нульмерной (термодинамической) постановках. В термодинамической модели учтено распределение давления и скорости газопороховой смеси по заснарядному пространству для канала переменного сечения. Проведено сравнение результатов моделирования в широком диапазоне изменения параметров заряжания.

**Ключевые слова:** *внутренняя баллистика, математическая модель, размерность задачи, вычислительные алгоритмы, сравнение результатов.*

В практике баллистического проектирования зарядов в настоящее время используются два подхода: термодинамический и газодинамический. В первом случае полагается, что горение пороха происходит при среднеобъемном давлении, температура продуктов горения, а также суммарная плотность продуктов горения и несгоревших пороховых элементов (газопороховой смеси) в любой точке заснарядного объема постоянны и зависят только от времени. Во втором случае учитывается пространственное распределение всех характеристик внутрибаллистического процесса, при этом наиболее плодотворной концепцией является подход, основанный на принципах механики гетерогенных сред и взаимопроникающих континуумов, учитывающий раздельное движение и взаимодействие фаз [1–3]. Очевидно, что идея осреднения так же, как и идея взаимопроникающих континуумов, больше подходит для зарядов, состоящих из мелкодисперсных пороховых элементов.

Влияние учета многомерности при изучении процессов, протекающих при срабатывании выстрела, имеет многоаспектный характер. Так, при исследовании процессов внутренней баллистики необходимо анализировать влияние геометрической и физической многомерности. К первой относится конструкция камеры и форма снаряда, ко второй – конструкция метательного заряда, включая конструкцию воспламенительных устройств. Вопросы моделирования многомерности внутрибаллистического процесса рассмотрены в работах [4–7].

В артиллерийских системах пороховые заряды состоят из одного или нескольких пакетов порохов. Значительная часть артиллерийских зарядов состоит из комбинированных порохов двух марок. Подходы к пространственному моделированию внутрибаллистического процесса рассмотрим на примере заряда зерненого пороха.

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00072.

Для оценки роли пространственного представления параметров ниже рассмотрены нульмерная термодинамическая модель, где учтены распределения давления и скорости газопороховой смеси по заснарядному пространству для канала переменного сечения, а также одномерная и двумерная газодинамические модели.

Целью данного исследования является изучение влияния учета пространственного распределения параметров на результаты моделирования пиродинамического периода выстрела для зарядов зерненого пороха.

### 1. Математическая модель внутренней баллистики выстрела для заряда, состоящего из зерненого пороха в пространственной осесимметричной постановке

В качестве допущений полагается, что воспламенитель сгорает мгновенно и создает начальное давление  $p_B$ . При этом теплофизические параметры продуктов горения воспламенителя совпадают с параметрами основного заряда. Массой воздуха в камере сгорания пренебрегается. Основной заряд воспламеняется сразу по всей поверхности в момент сгорания воспламенителя. Снаряд начинает двигаться после достижения в камере давления форсирования  $p_\Phi$  ( $p_\Phi \geq p_B$ ). Теплообменом с горячей поверхностью заряда пренебрегается (скорость тепловой волны близка к скорости горения). Трение и теплообмен продуктов горения с поверхностью канала ствола не учитывается. Симметрия зарядной камеры (два цилиндра, соединенных усеченным конусом) позволяет использовать цилиндрические координаты  $(x, r)$ . Рассматривается заряд, состоящий из одной марки зерненого пороха.

В рамках принятых допущений соответствующая система уравнений внутренней баллистики артиллерийского выстрела, описывающая течение гетерогенной реагирующей смеси с учетом межгранулярного взаимодействия в осесимметричной постановке, имеет вид:

- для газовой фазы

$$\begin{aligned} \frac{\partial r \rho m}{\partial t} + \frac{\partial r \rho m v_x}{\partial x} + \frac{\partial r \rho m v_r}{\partial r} &= rG, \\ \frac{\partial r \rho m v_x}{\partial t} + \frac{\partial r (p + \rho v_x^2) m}{\partial x} + \frac{\partial r \rho m v_x v_r}{\partial r} &= p \frac{\partial r m}{\partial x} + rG w_x - r \tau_{vw_x}, \\ \frac{\partial r \rho m v_r}{\partial t} + \frac{\partial r \rho m v_x v_r}{\partial x} + \frac{\partial r (p + \rho v_r^2) m}{\partial r} &= p \frac{\partial r m}{\partial r} + rG w_r - r \tau_{vw_r}, \\ \frac{\partial r m e_v}{\partial t} + \frac{\partial r (1-m) e_w}{\partial t} + \frac{\partial r m (e_v + p) v_x}{\partial x} + \frac{\partial r m (e_w + p) v_r}{\partial r} &+ \\ + \frac{\partial r (1-m) (e_w + p) w_x}{\partial x} + \frac{\partial r (1-m) (e_w + p) w_r}{\partial r} &= rGQ, \\ \varepsilon = \frac{p(1-\alpha\rho)}{(k-1)\rho}, e_v = \rho\varepsilon + \rho \frac{v_x^2 + v_r^2}{2}, e_w = \delta \frac{w_x^2 + w_r^2}{2}; \end{aligned} \quad (1)$$

- для твердой фазы

$$\frac{\partial ra}{\partial t} + \frac{\partial raw_x}{\partial x} + \frac{\partial raw_r}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial r\delta(1-m)w_x}{\partial t} + \frac{\partial r(p + \delta w_x^2)(1-m)}{\partial x} + \frac{\partial r\delta(1-m)w_x w_r}{\partial r} = p \frac{\partial r(1-m)}{\partial x} - rGw_x + r\tau_{vw_x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial r\delta(1-m)w_r}{\partial t} + \frac{\partial r\delta(1-m)w_x w_r}{\partial x} + \frac{\partial r(p + \delta w_r^2)(1-m)}{\partial r} = p \frac{\partial r(1-m)}{\partial r} - rGw_r + r\tau_{vw_r}.$$

Уравнение горения зерновых пороховых элементов записывается следующим образом:

- до фазы распада пороховых элементов  $z \leq 1$  или  $\psi \leq \psi_p = \kappa(1 + \lambda + \mu)$ :

$$\frac{\partial z}{\partial t} + w_x \frac{\partial z}{\partial x} + w_r \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{u_k}{e_1}, \quad \sigma(z) = 1 + 2\lambda z + 3\mu z^2,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + w_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + w_r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \kappa \sigma(z) \frac{u_k}{e_1}; \quad (3)$$

- после распада пороховых элементов  $\psi > \psi_p = \kappa(1 + \lambda + \mu)$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + w_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + w_r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \kappa \sigma(\psi) \frac{u_k}{e_1}, \quad \sigma(\psi) = \sigma(\psi_p) \sqrt{\frac{1-\psi}{1-\psi_p}},$$

$$\psi_p \leq \psi \leq 1, \quad \sigma(\psi_p) = 1 + 2\lambda + 3\mu. \quad (4)$$

Пористость газопороховой смеси определяется по формуле

$$m = 1 - a\Lambda_0(1 - \psi),$$

а текущие геометрические размеры порохового элемента – по формулам

$$d = d_0 + 2ze_1, \quad D = D_0 - 2ze_1, \quad L = L_0 - 2ze_1.$$

В приведенных выше уравнениях  $t$  – время;  $\rho$  – плотность пороховых газов заряда;  $m$  – пористость заряда (объем пустот в единице объема);  $v_x, v_r$  – проекции скорости движения газа на оси цилиндрической системы координат;  $p$  – давление;  $\tau_{vw}, \tau_{vw_x}, \tau_{vw_r}$  – сила сопротивления движению продуктов горения в слое зерновых пороховых элементов и ее проекции на оси цилиндрической системы координат;  $G$  – газоприход продуктов горения с поверхности порохового заряда в единице объема за секунду;  $Q$  – теплотворная способность (потенциал) пороха;  $f = RT_v$  – сила пороха;  $R$  – удельная газовая постоянная продуктов горения;  $T_v$  – температура продуктов горения пороха в замкнутом объеме;  $k = \theta + 1$  – показатель адиабаты для смеси газов;  $\theta = R/c_v$ ;  $c_v$  – теплоемкость продуктов горения при постоянном объеме;  $\varepsilon = c_v T$  – внутренняя энергия единицы массы пороховых газов;  $T$  – температура пороховых газов;  $\alpha$  – коволюм пороховых газов;  $\delta$  – плотность материала пороха;  $a$  – счетная концентрация зерновых пороховых элементов;  $w_x, w_r$  – проекции скорости движения твердой фазы на оси цилиндрической системы координат;  $S_0, \Lambda_0$  – начальные поверхность и объем порохового элемента;  $u_k = u_k(p)$  – линейная скорость горения пороха;  $z = e/e_1$  – относительная тол-

щина сгоревшего свода;  $2e_1$  – первоначальная толщина сгоревшего свода;  $\psi$  – относительная доля сгоревшего пороха;  $\sigma(\psi)$  – отношение текущей поверхности горения к первоначальной;  $\kappa, \lambda, \mu$  – коэффициенты формы порохового элемента;  $d_0, D_0, L_0$  – начальные внутренний, внешний диаметры и длина 7-канального порохового элемента.

Функции массового и силового взаимодействия между фазами имеют вид [7]

$$G = \begin{cases} aS_0\sigma(z)\delta u_k(p), & \text{если } z \leq 1 \text{ или } \psi \leq \psi_p, \\ aS_0\sigma(\psi)\delta u_k(p), & \text{если } z > 1 \text{ или } \psi > \psi_p; \end{cases}$$

$$\tau_{vw} = \lambda_{vw} \frac{\rho(v-w)\sqrt{(v_x-w_x)^2+(v_r-w_r)^2}}{2} a \frac{S_\sigma}{4}; \quad (5)$$

$$\tau_{vw_x} = \lambda_{vw} \frac{\rho(v_x-w_x)\sqrt{(v_x-w_x)^2+(v_r-w_r)^2}}{2} a \frac{S_\sigma}{4};$$

$$\tau_{vw_r} = \lambda_{vw} \frac{\rho(v_r-w_r)\sqrt{(v_x-w_x)^2+(v_r-w_r)^2}}{2} a \frac{S_\sigma}{4},$$

где  $\lambda_{vw}$  – коэффициент сопротивления порохового зерна в слое;  $S_\sigma$  – текущая ограничивающая поверхность порохового элемента,  $S_\sigma = \pi D(0.5D + L)$ .

Уравнения для скорости движения  $v_{\text{сн}}$  и перемещения  $x_{\text{сн}}$  снаряда запишем как

$$q \frac{dv_{\text{сн}}}{dt} = \left( 2\pi \int_0^{\frac{d_{\text{сн}}}{2}} p(t, x_{\text{сн}}, r) r dr \right) \eta(p_{\text{сн}} - p_\phi), \quad \frac{dx_{\text{сн}}}{dt} = v_{\text{сн}}, \quad (6)$$

где  $q$  – масса снаряда;  $p_{\text{сн}}$  – среднее давление на снаряд;  $d_{\text{сн}}$  – диаметр ствола;  $\eta(\xi)$  – функция Хэвисайда.

Систему уравнений (1) – (6) необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

В качестве начальных условий задаются условия покоя и условия, отвечающие состоянию продуктов горения в момент полного сгорания воспламенителя массой  $\omega_b$  в замкнутом объеме:

– при  $t = 0$ ,  $0 \leq x \leq L_{\text{км}}$ ,  $0 \leq r \leq R_{\text{км}}(x)$

$$v_x = 0, \quad v_r = 0, \quad p = p_b, \quad \rho = \Delta_b, \quad T = T_v, \quad a = \frac{\omega}{\Lambda_0 \delta W_{\text{км}}}, \quad m = 1 - \frac{\Delta}{\delta}, \quad (7)$$

$$w_x = 0, \quad w_r = 0, \quad z = 0, \quad \psi = 0 \quad \Delta = \frac{\omega}{W_{\text{км}}}, \quad v_{\text{сн}} = 0, \quad x_{\text{сн}} = L_{\text{км}}.$$

Здесь  $p_b = \frac{\Delta_b f}{1 - \alpha \Delta_b}$  – давление, развиваемое воспламенителем;  $\Delta_b = \frac{\omega_b}{W_{\text{км}} - \omega / \delta}$  – плотность заряжения воспламенителя;  $R_{\text{км}}(x)$  – переменный радиус камеры;  $W_{\text{км}}$  – объем камеры;  $\omega$  – масса заряда.

Суть граничных условий состоит в том, что на непроницаемых границах объема задаются условия непротекания (обращения в нуль нормальных компонент скорости газовой и твердой фаз у стенки). На оси канала задаются условия симметрии для искомых функций.

## 2. Математическая модель внутренней баллистики выстрела для заряда, состоящего из зерненого пороха в одномерной постановке

Приведем общую систему одномерных газодинамических уравнений для заряда, состоящего из зерненого пороха, в обозначениях работы [7]:

- для газовой фазы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho m S}{\partial t} + \frac{\partial \rho m S v}{\partial x} &= S G, \\ \frac{\partial \rho m S v}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho v^2) m S}{\partial x} &= p \frac{\partial m S}{\partial x} + S G w - S \tau_{vw}, \\ \frac{\partial m e_v S}{\partial t} + \frac{\partial (1-m) e_w S}{\partial t} + \frac{\partial m (e_v + p) S v}{\partial x} + \frac{\partial (1-m) (e_w + p) S w}{\partial x} &= S G Q, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\varepsilon = \frac{p(1-\alpha\rho)}{(k-1)\rho}, \quad e_v = \rho\varepsilon + \rho \frac{v^2}{2}, \quad e_w = \delta \frac{w^2}{2};$$

- для твердой фазы

$$\begin{aligned} \frac{\partial a S}{\partial t} + \frac{\partial a S w}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \delta (1-m) S w}{\partial t} + \frac{\partial (p + \delta w^2) (1-m) S}{\partial x} &= p \frac{\partial (1-m) S}{\partial x} - S G w + S \tau_{vw}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$(10)$$

Уравнение горения зерновых пороховых элементов записывается в виде:

- до фазы распада пороховых элементов  $z \leq 1$  или  $\psi \leq \psi_p = \kappa(1 + \lambda + \mu)$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + w \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u_k}{e_1}, \quad \sigma(z) = 1 + 2\lambda z + 3\mu z^2, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + w \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\kappa}{e_1} \sigma(z) u_k; \quad (11)$$

- после распада пороховых элементов  $\psi > \psi_p = \kappa(1 + \lambda + \mu)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + w \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\kappa}{e_1} \sigma(\psi) u_k, \quad \sigma(\psi) = \sigma(\psi_p) \sqrt{\frac{1-\psi}{1-\psi_p}}, \quad \psi_p \leq \psi \leq 1, \quad \sigma(\psi_p) = 1 + 2\lambda + 3\mu. \quad (12)$$

Начальные и граничные условия:

- при  $t = 0$ ,  $0 \leq x \leq L_{KM}$

$$v = 0, \quad w = 0, \quad p = p_B, \quad \rho = \Delta_B, \quad T = T_v, \quad a = \frac{\Omega}{\Lambda_0 \delta W_{KM}},$$

$$z = 0, \quad \psi = 0, \quad \Delta = \frac{\Omega}{W_{KM}}, \quad v_{CH} = 0, \quad x_{CH} = L_{KM}; \quad (13)$$

- при  $x = 0$ ,  $t \geq 0$

$$v = w = 0; \quad (14)$$

- при  $x = x_{\text{CH}}, t \geq 0$

$$q \frac{dv_{\text{CH}}}{dt} = p_{\text{CH}} S_{\text{CH}} \eta(p_{\text{CH}} - p_{\Phi}), \quad \frac{dx_{\text{CH}}}{dt} = v_{\text{CH}}, \quad v = v_{\text{CH}}, \quad w = v_{\text{CH}}. \quad (15)$$

### 3. Математическая модель внутренней баллистики выстрела для заряда, состоящего из зернового пороха в нульмерной термодинамической постановке

Математическая модель основной задачи внутренней баллистики (ОЗВБ) в осредненных параметрах, где в рамках допущений термодинамического подхода учтены распределения давления и скорости газопороховой смеси по заснарядному пространству для канала переменного сечения, подробно рассмотрена в [8]. Запишем ее.

Уравнение горения:

- до фазы распада пороховых элементов  $z \leq 1$  или  $\psi \leq \psi_p = \kappa(1 + \lambda + \mu)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{u_k}{e_1}, \quad \sigma(z) = 1 + 2\lambda z + 3\mu z^2, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\kappa}{e_1} \sigma(z) u_k; \quad (16)$$

- после распада пороховых элементов  $\psi > \psi_p = \kappa(1 + \lambda + \mu)$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{S_0}{\Lambda_0} \sigma(\psi) u_k, \quad \sigma(\psi) = \sigma(\psi_p) \sqrt{\frac{1-\psi}{1-\psi_p}}, \quad \psi_p \leq \psi \leq 1, \quad \sigma(\psi_p) = 1 + 2\lambda + 3\mu. \quad (17)$$

Уравнения движения и перемещения снаряда

$$q \frac{dv_{\text{CH}}}{dt} = p_{\text{CH}} S_{\text{CH}} \eta(p_{\text{CH}} - p_{\Phi}), \quad \frac{dx_{\text{CH}}}{dt} = v_{\text{CH}}. \quad (18)$$

Уравнение энергии

$$p \left[ W_{\text{CH}} - \frac{\omega}{\delta} (1 - \psi) - \alpha (\omega \psi + \omega_B) \right] = (\omega \psi + \omega_B) f - \left( 1 + \frac{(\omega + \omega_B)}{q} J_1 \right) \theta q \frac{v_{\text{CH}}^2}{2}. \quad (19)$$

Уравнение состояния

$$p \left[ W_{\text{CH}} - \alpha (\omega \psi + \omega_B) - \frac{\omega}{\delta} (1 - \psi) \right] = (\omega \psi + \omega_B) RT. \quad (20)$$

Дополнительные соотношения:

$$p_{\text{CH}}(t) = \frac{p(t) + (\omega + \omega_B) \frac{v_{\text{CH}}^2}{W_{\text{CH}}} \left( \frac{1}{2} J_1 + J_2(x_{\text{CH}}) - J_3 - \frac{1}{2} \right)}{1 + \frac{(\omega + \omega_B)}{q} (J_2(x_{\text{CH}}) - J_3)},$$

$$p_{\text{KH}}(t) = p_{\text{CH}}(t) \left( 1 + \frac{(\omega + \omega_B)}{q} J_2(x_{\text{CH}}) \right) + (\omega + \omega_B) \frac{v_{\text{CH}}^2}{W_{\text{CH}}} \left( \frac{1}{2} - J_2(x_{\text{CH}}) \right),$$

$$p(x, t) = p_{\text{KH}}(t) - \left( \frac{(\omega + \omega_B) p_{\text{CH}} - (\omega + \omega_B) \frac{v_{\text{CH}}^2}{W_{\text{CH}}} \right) J_2(x) - \frac{1}{2} (\omega + \omega_B) \frac{S_{\text{KH}}^2 v_{\text{CH}}^2 W^2(x)}{W_{\text{CH}}^3 S^2(x)}, \quad (21)$$

$$\tilde{v}(x, t) = \frac{W(x)}{S(x)} \frac{S_{\text{кн}} v_{\text{сн}}}{W_{\text{сн}}}, \quad W(x) = \int_0^x S(\xi) d\xi, \quad W_{\text{сн}} = W_{\text{км}} + S_{\text{сн}}(x_{\text{сн}} - L_{\text{км}}),$$

$$J_1 = \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{сн}}^3} \int_0^{x_{\text{сн}}} \frac{W^2(x)}{S(x)} dx, \quad J_2(x) = \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{сн}}^2} \int_0^x \frac{W(\xi)}{S(\xi)} d\xi, \quad J_3 = \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{сн}}^3} \int_0^{x_{\text{сн}}} \left( \int_0^x \frac{W(\xi)}{S(\xi)} d\xi \right) S(x) dx.$$

Здесь  $p_{\text{кн}}(t)$  – переменное давление на дно канала;  $\tilde{v}(x, t)$  – скорость газопороховой смеси;  $S(x)$  – переменная площадь сечения камеры и канала ствола;  $J_1, J_2(x), J_3$  – баллистические коэффициенты.

Начальные условия:

- при  $t = 0, 0 \leq x \leq L_{\text{км}}$

$$p = p_{\text{в}}, \quad \rho = \Delta_{\text{в}}, \quad T = T_{\text{в}}, \quad z = 0, \quad \psi = 0, \quad \Delta = \frac{\Omega}{W_{\text{км}}}, \quad v_{\text{сн}} = 0, \quad x_{\text{сн}} = L_{\text{км}}. \quad (22)$$

#### 4. Вычислительные алгоритмы решения задач

Численное решение ОЗВБ в термодинамической постановке реализовано с использованием двухшаговой схемы Рунге – Кутты второго порядка точности. При решении газодинамических задач использовали метод С.К. Годунова [9–11]. Для численного решения системы газодинамических уравнений применялся метод контрольного объема. Параметры газа на границах контрольных объемов определяются с использованием автомодельного решения задачи о распаде произвольного разрыва.

Представим систему уравнений (1) в обобщенной форме:

$$\frac{\partial r\mathbf{Y}}{\partial t} + \frac{\partial r\mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial r\mathbf{Z}}{\partial r} = \mathbf{H}, \quad (23)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{\rho}v_x \\ \tilde{\rho}v_r \\ \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}v_x \\ \tilde{\rho}v_x^2 + \tilde{p} \\ \tilde{\rho}v_x v_r \\ (\tilde{\varepsilon} + \tilde{p})v_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}v_r \\ \tilde{\rho}v_x v_r \\ \tilde{\rho}v_r^2 + \tilde{p} \\ (\tilde{\varepsilon} + \tilde{p})v_r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} rG \\ \tilde{p} \frac{\partial rm}{\partial x} + rGw_x - r\tau_{vw_x} \\ \tilde{p} \frac{\partial rm}{\partial r} + rGw_r - r\tau_{vw_r} \\ rGQ \end{pmatrix},$$

где  $\tilde{\rho} = m\rho$ ;  $\tilde{p} = mp$ ;  $\tilde{\varepsilon} = me_v$ .

Уравнение состояния запишем в виде

$$\varepsilon = \frac{\tilde{p}}{(\tilde{k} - 1)\tilde{\rho}}, \quad \tilde{k} = \frac{k - \alpha\tilde{\rho}/m}{1 - \alpha\tilde{\rho}/m}.$$

Система газодинамических уравнений (1) решается с применением разностной схемы С.К. Годунова в сочетании со схемой MUSCL (monotone upwind schemes for conservation laws) [8, 12]. Составляющие вектора  $\mathbf{Y}$  на гранях контрольного объема определяются из решения задачи о распаде произвольного разрыва с локальной аппроксимацией коэффициента  $\tilde{k}$  [10].

Для решения гиперболических уравнений движения конденсированной фазы и горения пороха также используется разностная схема типа С.К. Годунова с опре-

делением потоков на гранях контрольного объема по схеме [12]. Например, для скорости твердой фазы  $w_x$  потоки импульса на гранях  $l = (1, 2, 3, 4)$  рассчитываются следующим образом:

$$Q_l = \begin{cases} \min[(Q_l)_L, (Q_l)_R] & | (w_x)_L \leq (w_x)_R, \\ \max[(Q_l)_L, (Q_l)_R] & | (w_x)_L > (w_x)_R, \end{cases}$$

где

$$(Q_l)_S = \sigma_l \delta (1 - m_S) \left[ -(w_x)_S W + \alpha_l \left( (w_x)_S^2 + \frac{\tilde{P}_S}{m\delta} \right) + \beta_l (w_x)_S (w_r)_S \right]; \quad S = L, R.$$

Здесь индексы  $L$  и  $R$  соответствуют параметрам в смежных контрольных объемах с гранью  $l$ ;  $\sigma_l$  – площадь грани;  $W$  – скорость перемещения грани;  $\alpha_l$  и  $\beta_l$  – компоненты вектора нормали к грани.

Криволинейная ортогонализированная сетка в двумерной осесимметричной задаче строилась на основе метода, изложенного в работе [8]. Разностная сетка имела фиксированное количество узлов. В процессе решения она растягивалась при движении снаряда по стволу. Шаг по времени определялся по условию Курранта – Фридрихса – Леви. Проведено исследование сеточной сходимости метода. Выбор шагов численного интегрирования, обеспечивающих в Евклидовой норме точность расчета 0.1 %, осуществлялся в соответствии с принципом Рунге [13]. Количество ячеек сетки в области интегрирования, обеспечивающих заданную точность: для одномерного приближения  $N_x = 100$ ; для двумерной осесимметричной задачи  $N = N_x \times N_r = 100 \times 16 = 1600$ .

## 5. Численные результаты

Численные исследования проводились для артиллерийской системы со следующими геометрическими характеристиками: диаметр канала ствола  $d_{\text{кн}} = 0.1$  м; длина камеры  $L_{\text{км}} = 1$  м; начало  $l_{\text{ну}} = 0.5$  м и конец  $l_{\text{ку}} = 0.8$  м уширения камеры; длина ствола  $L_d = 5$  м.

Переменная площадь сечения камеры и канала ствола задавалась следующим образом:  $S(x) = S_{\text{км}} = 0.25\pi d_{\text{км}}^2$ , если  $0 \leq x \leq l_{\text{ну}}$ ;  $S(x) = S_{\text{кн}} = 0.25\pi d_{\text{кн}}^2$ , если  $x \geq l_{\text{ку}}$ ; при  $l_{\text{ну}} < x < l_{\text{ку}}$  сначала определялся переменный диаметр в уширении камеры линейной интерполяцией между диаметром камеры  $d_{\text{км}}$  и диаметром канала ствола  $d_{\text{кн}}$ , затем в соответствующей точке  $x$  определялась площадь сечения камеры.

Теплофизические характеристики продуктов горения принимали значения:

$$f = 1 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}; \quad k = 1.25; \quad R = 300 \text{ Дж/кгК}; \quad \alpha = 0.001 \text{ м}^3/\text{кг}.$$

Геометрические характеристики зерновых 7-канальных пороховых элементов:  $d_0 = 0,0007$  м,  $D_0 = 0,0077$  м,  $L = 0,018$  м; плотность пороха  $\delta = 1600$  кг/м<sup>3</sup>; Линейная скорость горения пороха определялась зависимостями

$$u_k = u_{1/3} p^{1/3}, \text{ если } p_B = 5 \cdot 10^6 \text{ Па} \leq p \leq 30 \cdot 10^6 \text{ Па} = p_{1/3};$$

$$u_k = u_{2/3} p^{2/3}, \text{ если } p_{1/3} \leq p \leq 60 \cdot 10^6 \text{ Па} = p_{2/3}; \quad u_k = u_1 p, \text{ если } p \geq p_{2/3}.$$

Значения  $u_{1/3}$  и  $u_{2/3}$  определялись из условия совпадения скоростей горения в реперных точках:

$$u_{1/3} P_{1/3}^{1/3} = u_{2/3} P_{1/3}^{2/3} \text{ и } u_{2/3} P_{2/3}^{2/3} = u_1 P_{2/3}. \text{ Откуда } u_{2/3} = u_1 P_{2/3}^{1/3}, \text{ а } u_{1/3} = u_{2/3} P_{1/3}^{1/3}.$$

Вес заряда  $\omega$  задавался из условия, что плотность заряжания в камере при любых геометрических размерах была равна  $\Delta = 800 \text{ кг/м}^3$ .

Термодинамические и газодинамические решения сравнивались при  $q = (2.5; 5; 15; 30) \text{ кг}$  и  $d_{\text{км}} = (0.1; 0.2; 0.3) \text{ м}$ . Единичная скорость горения  $u_1$  для сравниваемых вариантов подбиралась из условия  $(p_{\text{кн}})_{\text{макс}} = 400 \cdot 10^6 \text{ Па}$  при решении ОЗВБ по термодинамической модели.

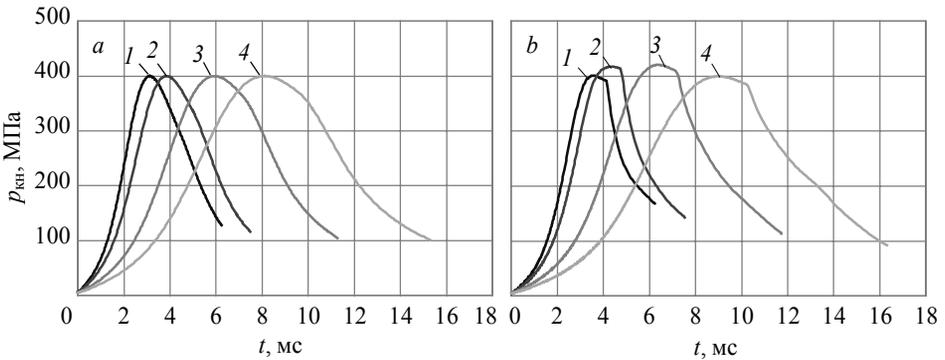
Результаты расчета внутренней баллистики по термодинамической и газодинамическим моделям представлены в таблице, где приведены значения основных параметров задачи: скорость снаряда  $(v_{\text{сн}})_{\text{д}}$ , максимальное давление на дно канала  $(p_{\text{кн}})_{\text{м}}$ , максимальное давление на дно снаряда  $(p_{\text{сн}})_{\text{м}}$  и относительное изменение дульной скорости снаряда, полученной по различным моделям  $\tilde{\delta} (v_{\text{сн}})_{\text{д}}$ . При этом за точки отсчета при сравнении принимались значения, полученные по одномерной газодинамической модели.

**Сравнение результатов расчета ОЗВБ, полученных по термодинамической и газодинамическим моделям при различных параметрах заряжания**

№ П/П	Параметры заряжания		Расчет по термодинамической модели			Расчет по одномерной газодинамической модели			Расчет по двумерной газодинамической модели		
	$q$ , кг	$d_{\text{км}}$ , м $\omega$ , кг	$(v_{\text{сн}})_{\text{д}}$ , м/с $\tilde{\delta} (v_{\text{сн}})_{\text{д}}$ , %	$(p_{\text{кн}})_{\text{м}}$ , МПа	$(p_{\text{сн}})_{\text{м}}$ , МПа	$(v_{\text{сн}})_{\text{д}}$ , м/с $\tilde{\delta} (v_{\text{сн}})_{\text{д}}$ , %	$(p_{\text{кн}})_{\text{м}}$ , МПа	$(p_{\text{сн}})_{\text{м}}$ , МПа	$(v_{\text{сн}})_{\text{д}}$ , м/с $\tilde{\delta} (v_{\text{сн}})_{\text{д}}$ , %	$(p_{\text{кн}})_{\text{м}}$ , МПа	$(p_{\text{сн}})_{\text{м}}$ , МПа
1	2.5	0.1 6.3	1893.3 -6.4	400.0	177.0	2023.2 -	400.5	180.8	2025.3 +0.1	400.8	177.3
2		0.2 18.2	1612.9 +0.1	400.0	88.1	1611.6 -	404.0	94.1	1617.4 +0.4	398.4	95.2
3		0.3 37.7	1186.8 -18.9	400.0	48.9	1463.8 -	412.0	74.2	1466.2 +0.2	404.0	74.2
4	5	0.1 6.3	1562.3 -3.5	400.0	245.4	1619.7 -	417.5	266.6	1620.1 +0.0	417.4	266.5
5		0.2 18.2	1450.1 +1.0	400.0	145.0	1435.6 -	414.9	145.9	1425.0 -0.7	402.4	144.4
6		0.3 37.7	1107.9 -10.6	400.0	87.6	1239.5 -	395.8	105.7	1241.5 +0.2	403.6	106.0
7	15	0.1 6.3	1027.4 +4.4	400.0	330.6	984.5 -	420.1	359.4	986.6 -0.2	420.4	359.3
8		0.2 18.2	1094.5 -0.1	400.0	253.9	1095.6 -	409.5	257.9	1106.7 +1.0	415.8	263.2
9		0.3 37.7	913.8 -2.2	400.0	183.5	934.0 -	405.0	191.6	937.9 +0.4	408.3	193.0
10	30	0.1 6.3	754.2 +4.9	400.0	362.0	719.1 -	398.5	368.9	720.1 +0.1	399.7	370.8
11		0.2 18.2	852.3 -0.5	400.0	311.2	856.9 -	402.1	318.6	866.0 +1.1	410.8	326.1
12		0.3 37.7	751.7 +0.4	400.0	252.1	748.5 -	409.0	254.4	752.1 -0.5	411.7	256.4

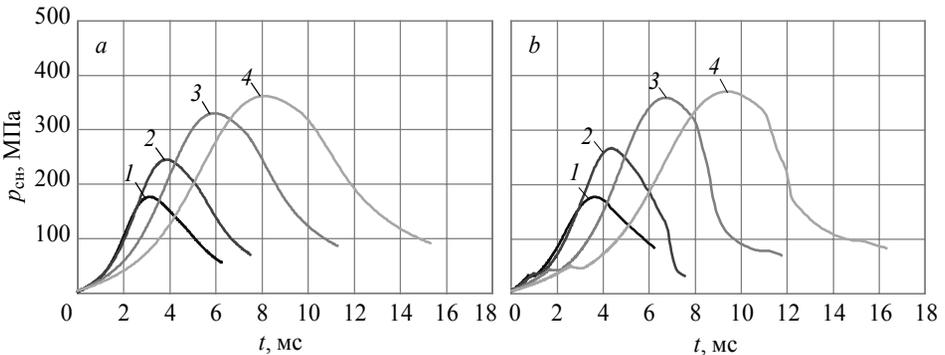
Анализ численных результатов показывает, что в исследованном диапазоне изменения параметров заряжения одномерная и двумерная газодинамические модели отличаются незначительно: по дульной скорости – не более чем на 1.0 %, по максимальному давлению на дно канала – 3.0 %, по максимальному давлению на дно снаряда – 2.4 %.

Рассмотрим сравнение результатов, полученных по термодинамической и одномерной газодинамической моделям. На рис. 1, 2 представлены сравнения результатов расчета кривых давления на границах заснарядного пространства по термодинамической и газодинамической моделям для камеры без уширения.



**Рис. 1.** Кривые давления на дно канала от времени выстрела, рассчитанные по термодинамической (а) и газодинамической (б) моделям при  $d_{\text{км}} = 0.1$  м: 1 –  $q = 2.5$  кг; 2 –  $q = 5$  кг; 3 –  $q = 15$  кг; 4 –  $q = 30$  кг

**Fig. 1.** Curves of the pressure at the bore bottom versus time of a shot, obtained using (a) thermodynamic and (b) gas-dynamic models at  $d_{\text{км}} = 0.1$  m:  $q = (1) 2.5$ , (2) 5, (3) 15, and (4) 30 kg

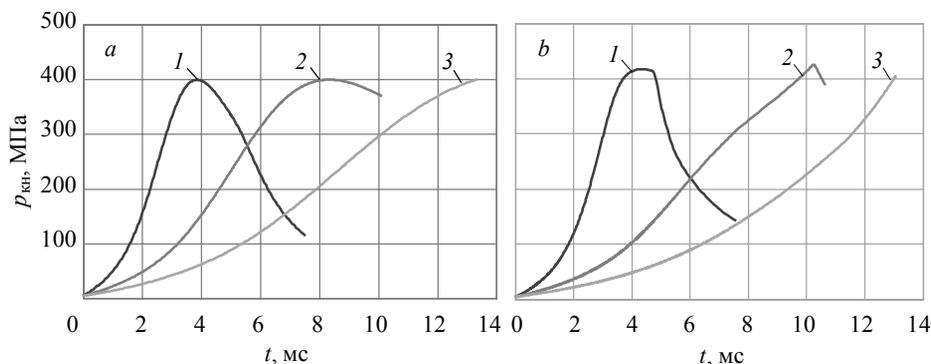


**Рис. 2.** Кривые давления на дно снаряда от времени выстрела, рассчитанные по термодинамической (а) и газодинамической (б) моделям при  $d_{\text{км}} = 0.1$  м: 1 –  $q = 2.5$  кг; 2 –  $q = 5$  кг; 3 –  $q = 15$  кг; 4 –  $q = 30$  кг

**Fig. 2.** Curves of the pressure at the projectile bottom versus time of a shot, obtained using (a) thermodynamic and (b) gas-dynamic models at  $d_{\text{км}} = 0.1$  m:  $q = (1) 2.5$ , (2) 5, (3) 15, and (4) 30 kg

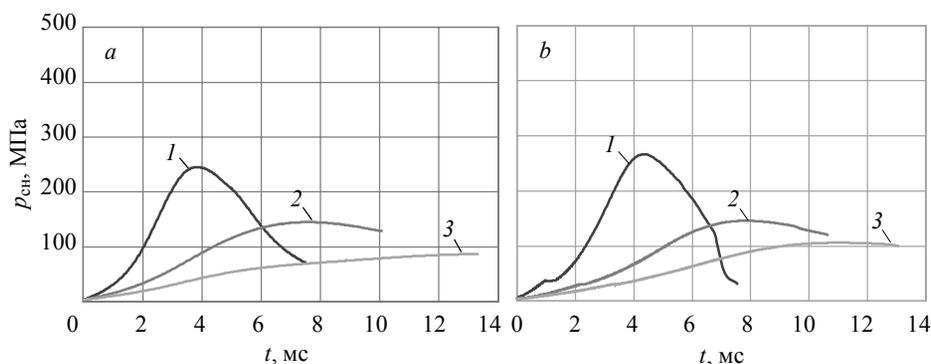
Как видно из представленных рисунков, качественно баллистические кривые, полученные по термодинамической и газодинамической моделям, достаточно хорошо коррелируют между собой. При этом наблюдается вполне удовлетворительное количественное совпадение интегральных характеристик выстрела при малых  $\omega/q$  (см. таблицу, варианты № 4, 7, 10). Для этих вариантов расхождение по дульной скорости составило менее 4.9 %, по максимальному давлению на дно канала – 5.0 %, на дно снаряда – 8.0 %.

На рис. 3, 4 приведены аналогичные кривые для  $q = 5$  кг при различных уширениях камеры. В целом, также наблюдается хорошее качественное совпадение кривых и количественное совпадение интегральных характеристик выстрела при небольших уширениях камеры (см. таблицу, варианты № 4, 5).



**Рис. 3.** Кривые давления на дно канала от времени выстрела, рассчитанные по термодинамической (а) и газодинамической (б) моделям при  $q = 5$  кг: 1 –  $d_{\text{кнб}} = 0.1$  м; 2 –  $d_{\text{кнб}} = 0.2$  м; 3 –  $d_{\text{кнб}} = 0.3$  м

**Fig. 3.** Curves of the pressure at the bore bottom versus time of a shot, obtained using (a) thermodynamic and (b) gas-dynamic models at  $q = 5$  kg:  $d_{\text{кнб}} = (1) 0.1$ , (2) 0.2, and (3) 0.3 m



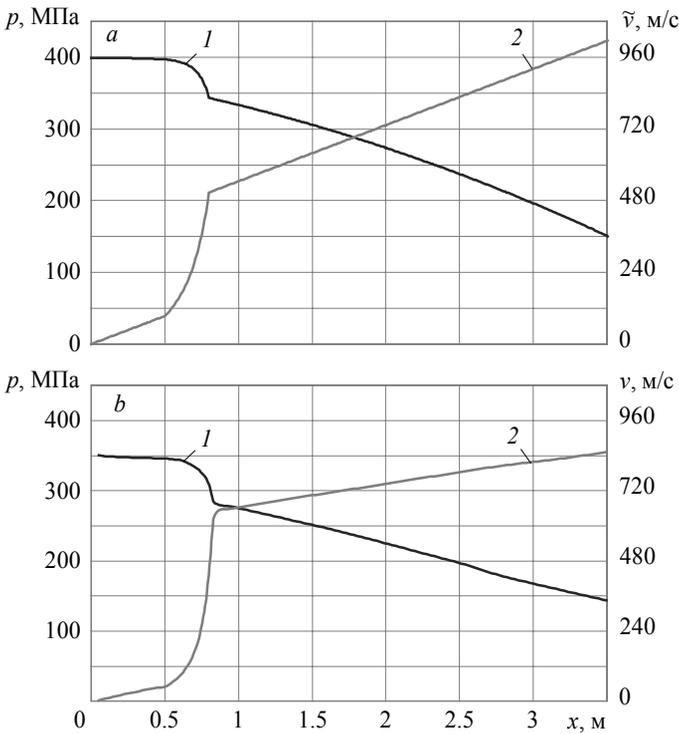
**Рис. 4.** Кривые давления на дно снаряда от времени выстрела, рассчитанные по термодинамической (а) и газодинамической (б) моделям при  $q = 5$  кг: 1 –  $d_{\text{снб}} = 0.1$  м; 2 –  $d_{\text{снб}} = 0.2$  м; 3 –  $d_{\text{снб}} = 0.3$  м

**Fig. 4.** Curves of the pressure at the projectile bottom versus time of a shot, obtained using (a) thermodynamic and (b) gas-dynamic models at  $q = 5$  kg:  $d_{\text{снб}} = (1) 0.1$ , (2) 0.2, and (3) 0.3 m

По дульной скорости расхождение составило менее 3.5 %, по максимальному давлению на дно канала – 4.2 %, на дно снаряда – 8.1 %, однако при большом уширении камеры (см. таблицу, вариант № 6) расхождение по дульной скорости достигает уже 10.6 %, по максимальному давлению на дно канала – 1.1 %, на дно снаряда – 17.1 %.

Анализ полученных результатов в целом показывает, что наилучшее совпадение двух моделей имеет место при уширениях камеры,  $d_{\text{км}} = 0.2$  м, независимо от веса снаряда (см. таблицу, варианты № 2, 5, 8, 11). В данных случаях расхождение по дульной скорости не превосходит 1 %, по максимальному давлению на дно канала – 3.7 %, на дно снаряда – 6.4 %.

На рис. 5 представлены распределения давления и скорости продуктов горения по заснарядному пространству, рассчитанные по различным моделям внутренней баллистики. Распределения параметров представлены в момент, когда снаряд проходит середину ствола.

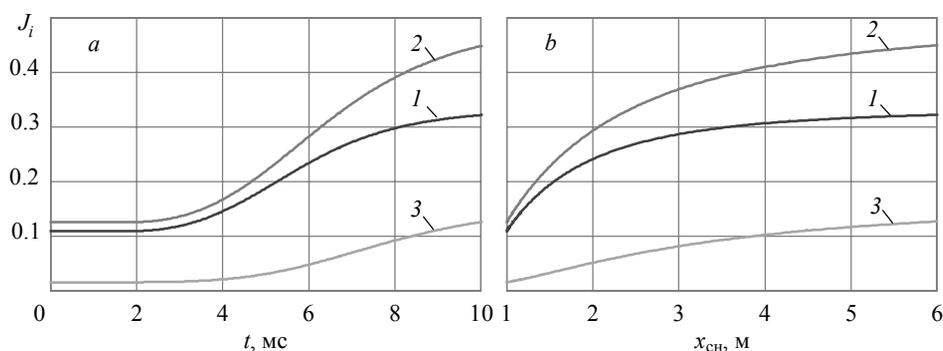


**Рис. 5.** Распределения давления и скорости газопороховой смеси в термодинамической модели (а); распределения давления и скорости газа в одномерной газодинамической модели (б) по длине камеры и ствола при  $q = 5$  кг,  $d_{\text{км}} = 0.2$  м: 1 –  $p(t, x)$ ; 2 –  $\tilde{v}(t, x)$  или  $v(t, x)$

**Fig. 5.** Distribution of the pressure and velocity of a gas-powder mixture along the barrel in the case of (a) thermodynamic model and (b) one-dimensional gas-dynamic model at  $q = 5$  kg,  $d_{\text{км}} = 0.2$  m: 1 –  $p(t, x)$ ; 2 –  $\tilde{v}(t, x)$  or  $v(t, x)$

Можно констатировать хорошее качественное совпадение моделируемых параметров. Здесь лишь отметим, что в термодинамической модели мы имеем дело с распределением скорости газопороховой смеси (газа и несгоревших пороховых элементов), а в газодинамической модели – с распределением скорости газа. Эту особенность необходимо учитывать при решении сопряженных задач с использованием термодинамического подхода.

В заключении приведем зависимости баллистических коэффициентов:  $J_1$ ,  $J_2 = J_2(x_{сн})$  и  $J_3$  от времени выстрела и пути снаряда. На рис. 6 представлены соответствующие кривые, полученные для варианта № 5 (см. таблицу). Для камеры с уширением, как показывают расчеты, полученные коэффициенты носят существенно переменный характер, монотонно возрастают по мере движения снаряда по каналу ствола.



**Рис. 6.** Изменение баллистических коэффициентов  $J_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) от времени выстрела (а); и от пути, пройденного снарядом (б), при  $q = 5$  кг,  $d_{км} = 0.2$  м: 1 –  $J_1$ ; 2 –  $J_2$ ; 3 –  $J_3$

**Fig. 6.** Variation of ballistic coefficients  $J_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) with (a) time of a shot and (b) projectile travel at  $q = 5$  kg,  $d_{км} = 0.2$  m: 1 –  $J_1$ ; 2 –  $J_2$ ; and 3 –  $J_3$

Для камеры без уширения эти коэффициенты принимают постоянные значения:  $J_1 = 1/3$ ,  $J_2 = 1/2$  и  $J_3 = 1/6$ .

### Заключение

Как следует из представленных материалов, существует область параметров заряжания, при которых термодинамический подход, где учтены распределения давления и скорости газопороховой смеси по заснарядному пространству для канала переменного сечения, дает удовлетворительное приближение к параметрам, полученным на основе газодинамического подхода, описывающего течение гетерогенной реагирующей смеси с учетом раздельного описания фаз и межгранулярного взаимодействия между ними.

Анализ численных результатов показывает, что во всем исследованном диапазоне изменения параметров заряжания одномерная и двумерная газодинамические модели отличаются между собой незначительно, поэтому в основной пиродинамический период моделирование заряда, состоящего из зернового пороха, можно проводить по одномерным газодинамическим моделям или нульмерным термодинамическим моделям с учетом пространственного распределения давления и скорости газопороховой смеси.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Cough P.S.* Modeling of two-phase flows in guns // *Interior Ballistics of Guns*. 1979. V. 66. P. 176–196.
2. *Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З.* Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 256 с.
3. *Русяк И.Г., Ушаков В.М.* Внутрикамерные гетерогенные процессы в ствольных системах: монография. Екатеринбург: УрО РАН, 2001. 259 с.
4. *Ищенко А.Н., Касимов В.З., Ушакова О.В.* Расчет функционирования модульных метательных зарядов в осесимметричной постановке // *Материалы Всероссийской научной конференции «Современная баллистика и смежные вопросы механики»*. Томск, 17 – 19 ноября 2009. Томск: Том. гос. ун-т, 2010. С. 85–86.
5. *Ищенко А.Н., Касимов В.З., Ушакова О.В.* Влияние начальной температуры топлива и метода воспламенения на баллистические характеристики выстрела в условиях модельной установки калибром 120 мм // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 70. С. 37–50. DOI: 10.17223/19988621/70/4/.
6. *Меньшов И.С., Немцев М.Ю., Семенов И.В.* Численное моделирование волновых процессов при горении неоднородно распределенного заряда // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2019. Т. 59. № 9. С. 1591–1604. DOI: 10.1134/S004446691909014X.
7. *Русяк И.Г., Липанов А.М., Ушаков В.М.* Физические основы и газовая динамика горения порохов в артиллерийских системах: монография. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016. 456 с.
8. *Русяк И.Г., Тенев В.А.* Моделирование баллистики артиллерийского выстрела с учетом пространственного распределения параметров и противодействия // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2020. Т. 12. № 5. С. 1123–1147. DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123-1147.
9. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
10. *Прокопов Г.П., Северин А.В.* Экономичная реализация метода Годунова // *Препринты ИПМ имени М.В. Келдыша*. 2009. № 29. 24 с. URL: <https://keldysh.ru/papers/2009/rrp29/rrp29.pdf>.
11. *Сафронов А.В., Фомин Ю.В.* Метод численного решения уравнений газодинамики с помощью соотношения на разрывах // *Труды МФТИ*. 2010. Т. 2. № 2. С. 137–148.
12. *Wesseling Pieter.* Principles of Computational Fluid Dynamics (Springer Series in Computational Mathematics. V. 29). Springer, 2001. 644 p. DOI: 10.1007/978-3-642-05146-3.
13. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2003. 316 с.

Статья поступила 23.07.2021

*Rusyak I.G., Tenenev V.A.* (2021) THE IMPACT OF THE DIMENSION OF A MATHEMATICAL MODEL OF INTERNAL BALLISTICS ON DESIGN PARAMETERS OF A SHOT FOR GRAIN GUNPOWDER CHARGES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 73. pp. 95–110

DOI 10.17223/19988621/73/9

Keywords: internal ballistics, mathematical model, dimension of a problem, computational algorithms, comparison of results.

The problem of the impact of the mathematical model dimension on the calculated intraballistic characteristics of a shot for the charges made of granulated powder is considered. Mathematical models of the shot are studied using the spatial (axisymmetric), one-dimensional, and zero-dimensional (thermodynamic) formulations. The thermodynamic model takes into

account the distribution of the pressure and velocity of a gas-powder mixture behind the shot for a channel of variable cross-section. Comparison of simulation results is carried out in a wide range of loading parameters. It is shown that there is a range of the loading parameters for a thermodynamic approach to give satisfactory approximation to the parameters obtained using the gas-dynamic approach, which describes the flow of a heterogeneous reacting mixture with a separate consideration of phases and intergranular interactions between them. Notably that in the entire range of the charging parameters studied in this work, the one-dimensional and two-dimensional gas-dynamic models only slightly differ from each other. Therefore, in the main pyrodynamic period, the actuation of the charge, made of granulated powder, can be simulated using a one-dimensional gas-dynamic model or a zero-dimensional thermodynamic model with allowance for spatial distribution of the pressure and velocity of the gas-powder mixture.

**Financial support.** The reported study was funded by the Russian Foundation for Basic Research, project No. 20-01-00072.

*Ivan G. Rusyak* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of the RAMAS, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: primat@istu.ru

*Valentin A. Tenenev* (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: v.tenenev@gmail.com

#### REFERENCES

1. Cough P.S. (1979) Modeling of two-phase flows in guns. *Interior Ballistics of Guns*. 66. pp. 176–196.
2. Khomenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999) *Matematicheskoe modelirovanie vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematical modeling of ballistic processes in barrel systems]. Novosibirsk: SB RAS Publishing House.
3. Rusyak I.G., Ushakov V.M. (2001) *Vnutrikamernye geterogennye protsessy v stvol'nykh sistemakh* [Intra-chamber heterogeneous processes in barrel systems]. Yekaterinburg: Ural Branch of the Russian Academy of Sciences.
4. Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Ushakova O.V. (2010) Raschet funktsionirovaniya modul'nykh metatel'nykh zaryadov v osesimmetrichnoy postanovke [Calculation of the functioning of modular propellant charges in an axisymmetric formulation]. *Materialy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii "Sovremennaya ballistika i smezhnye voprosy mekhaniki"*. pp. 85–86.
5. Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Ushakova O.V. (2021) Vliyanie nachal'noy temperatury topliva i metoda vosplamneniya na ballisticheskie kharakteristiki vystrela v usloviyakh model'noy ustanovki kalibrom 120 mm [Influence of the initial propellant temperature and ignition method on ballistic characteristics of a shot in the setting of a 120 mm caliber model ballistic installation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 70. pp. 37–50. DOI: 10.17223/19988621/70/4.
6. Menshov I.S., Nemtsev M.Y., Semenov I.V. (2019) Numerical modeling of wave processes accompanying combustion of inhomogeneously distributed composite propellant. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 59(9). pp. 1528–1541. DOI: 10.1134/S0965542519090148.
7. Rusyak I.G., Lipanov A.M., Ushakov V.M. (2016) *Fizicheskie osnovy i gazovaya dinamika goreniya porokhov v artilleriyskikh sistemakh* [Physical fundamentals and gas dynamics of gunpowder combustion in artillery systems]. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Studies.
8. Rusyak I.G., Tenenev V.A. (2020) Modelirovanie ballistiki artilleriyskogo vystrela s uchetom prostranstvennogo raspredeleniya parametrov i protivodavleniya [Modeling of ballistics of an artillery shot taking into account the spatial distribution of parameters and backpressure].

- Computer Research and Modeling*. 12(5). pp. 1123–1147. DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123-1147.
9. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Krayko A.N., Prokopov G.P. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution to multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka.
  10. Prokopov G.P., Severin A.V. (2009) Ekonomichnaya realizatsiya metoda Godunova [Efficient implementation of Godunov's method]. *Preprinty IPM imeni M.V. Keldysha – Keldysh Institute Preprints*. 29. pp. 1–24. Access mode: [https://keldysh.ru/papers/2009/prep29/prep2009\\_29.pdf](https://keldysh.ru/papers/2009/prep29/prep2009_29.pdf).
  11. Safronov A.V., Fomin Yu.V. (2010) Metod chislennogo resheniya uravneniy gazodinamiki s pomoshch'yu sootnosheniya na razryvakh [A method for the numerical solution of the equations of gas dynamics using the relation at discontinuities]. *Trudy MFTI – Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology*. 2(2). pp. 137–148.
  12. Wesseling P. (2001) *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Springer Series in Computational Mathematics. 29. DOI: 10.1007/978-3-642-05146-3.
  13. Samarskiy A.A., Gulin A.V. (2003) *Chislennyye metody matematicheskoy fiziki* [Numerical methods in mathematical physics]. Moscow: Nauchnyy mir.

Received: July 23, 2021

UDC 539.3

DOI 10.17223/19988621/73/10

**S.P. Stepanyan****ON THE NUMERICAL SOLUTION  
TO A NON-CLASSICAL PROBLEM OF BENDING AND STABILITY  
FOR AN ORTHOTROPIC BEAM OF VARIABLE THICKNESS**

The mathematical model of the problem of bending of an elastically clamped beam is constructed on the basis of the refined theory of orthotropic plates of variable thickness. To solve the problem in the case of simultaneous action of its own weight and compressive axial forces, a system of differential equations with variable coefficients is obtained. The effects of transverse shear and the effect of reducing compressive force of the support are also taken into account. Passing on to dimensionless quantities, the specific problem for a beam of linearly varying thickness is solved by the collocation method. The stability of the beam is discussed. The critical values of forces are obtained by varying the axial compressive force. Results are presented in both tabular and graphical styles. Based on the results obtained, appropriate conclusions are drawn.

**Keywords:** *elastically clamped support, bending, transverse shear, stability.*

**Introduction**

It is known that the structural elements used in various building structures have the form of beams, plates or shells. To clarify the carrying capacity of such thin-walled elements, sometimes it is necessary to solve the problem of bending and stability under the action of axial compressive forces, taking into account its own weight.

In the scientific literature one can find numerous works in which questions of the stress-strain state and stability of such elements are considered in the framework of the classical theory of mechanics (see, e.g., [1]). In view of the present stage in the development of materials science, one can say that, basically, these elements are anisotropic. This led to the need for the mentioned research on refined theories, which take into account those factors that are neglected in the classical theory. The present paper is devoted to the study of this issue.

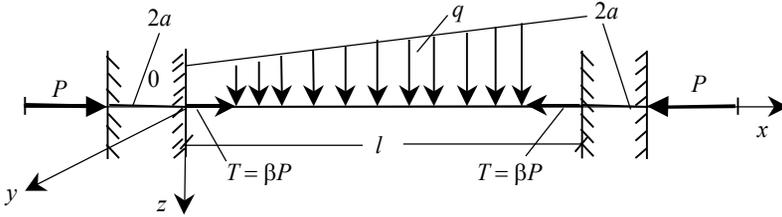
**Problem Formulation**

Consider an orthotropic beam of length  $l$ , constant width  $b$ , and variable thickness  $h$  in the right-hand Cartesian coordinate system  $x, y, z$ .

The main directions of the anisotropy of the material are parallel to the coordinate axes. The beam is elastically clamped at the two ends and besides of its own weight is also under the action of axial compressive forces  $T$  (Fig. 1).

It is taken into account that the elastically clamped support due to friction with an elastic array reduces the external compressive force  $P$ . As a result of this, the following force acts on the beam

$$T = \beta P, \quad \beta < 1. \quad (1)$$



**Fig. 1.** A beam and compressive forces  
**Рис. 1.** Балка и сжимающая сила

The value of the coefficient  $\beta$  can be easily determined experimentally. It is known [2] that the conditions of the considered elastically clamped support with transverse bending of the beam have the form

$$\frac{dw}{dx} = D(aN_x - M_x), \quad w = a \frac{dw}{dx} + BN_x. \tag{2}$$

Here,  $w$  is the bend;  $N_x$  and  $M_x$  are the shear force and bending moment of the beam, respectively;  $D$  and  $B$  are the parameters of the elastically clamped support, which are related by the following relation:

$$D = \frac{3B}{a^2}. \tag{3}$$

The parameters  $D$  and  $B$  are inverses of the stiffness of the support for rotation and the vertical displacement, respectively. In the system  $SI$  they have the following dimensions:  $D \sim N^{-1}m^{-1}$ ,  $B \sim mN^{-1}$ .

Note that in the derivation of conditions (2) it was accepted, due to the relative smallness of the length  $2a$ , the part of the beam inserted into the elastic array, without deformation, moves progressively and rotates as one part. By virtue of this, the value of the deflection derivative  $\frac{dw}{dx}$  do not change within the inserted parts and are equal to the values at  $x = 0$  and  $x = l$ .

### Development of a mathematical model of the problem

Using the refined theory of orthotropic plates of variable thickness (see [3], p.18), we obtain the following differential equations for the bending problem of the beam under consideration:

$$\begin{cases} \left( Ebh^2 \frac{d^2h}{dx^2} + 12\beta P \right) \frac{d^2w}{dx^2} - bh \left( 8 + \chi h \frac{d^2h}{dx^2} \right) \frac{d\varphi_1}{dx} - 16b \frac{dh}{dx} \varphi_1 = 12\rho gbh, \\ Eh^2 \frac{d^3w}{dx^3} + 2Eh \frac{dh}{dx} \frac{d^2w}{dx^2} - \chi h^2 \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} - 2\chi h \frac{dh}{dx} \frac{d\varphi_1}{dx} + 8\varphi_1 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Due to the absence of stress  $\sigma_y$  and the neglect of stress  $\sigma_z$ , the material parameter  $B_{11}$  is replaced by the Young modulus  $E$  of the axial direction;  $\chi$  takes into account the effect of transverse shear deformation  $e_{xz}$ ;  $\varphi_1$  is the function that characterizes the distribution of tangential stress  $\tau_{xz}$  in the mid-plane of the beam  $z = 0$ .

An axial compressive force acts on the beam, which decreases on the side of the elastic array. Therefore, in the expression of the load term  $Z_2$  [4], to the intensity of the vertical load, arising from its own weight, the intensity of the fictitious load is added, which appears as a result of the compression of a curved beam by forces  $\beta P$ . In system (4),  $\rho$  is the density of the beam material and  $g$  is the gravity acceleration.

Thus, the problem under consideration is reduced to solving the system of differential equations (4) with boundary conditions (2) written for both edges of the beam:  $x = 0$  and  $x = l$ .

The obtained boundary-value problem (4) – (2) is a mathematical model of the problem of beam bending.

Taking into account [3] the shear force of the beam  $N_x$  and the bending moment  $M_x$ , which differ from the corresponding plate expressions by multiplication by the beam width  $b$ , we have

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{bh}{12} \left[ 8\varphi_1 - h \frac{dh}{dx} \left( E \frac{d^2 w}{dx^2} - \chi \frac{d\varphi_1}{dx} \right) \right], \\ M_x &= -\frac{bh^3 E}{12} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{dx} \right). \end{aligned} \tag{5}$$

### Solution Technique

For simplicity, we assume that both edges of the beam have the same elastically clamped support.

Let us apply the following dimensionless notations:

$$\begin{aligned} x = l\bar{x}, \quad h = m_1 l H, \quad b = m_2 l, \quad a = m_1 l, \quad \varphi_1 = E\bar{\varphi}, \\ P = E m_1^2 l^2 \bar{P}, \quad \rho = \frac{E m_1^3 \bar{\rho}}{m_2 g l}, \quad D = \frac{3\bar{B}}{E m_1^2 l^3}, \quad w = a\bar{w}, \quad BEI = \bar{B}. \end{aligned} \tag{6}$$

Consider the case when the thickness of the beam varies linearly:

$$h = m_1 l + h_1 x = m_1 l H \Rightarrow H = 1 + \gamma\bar{x}, \tag{7}$$

where

$$\gamma = \frac{h_1}{m_1}, \quad h > 0 \Rightarrow h_1 > -m_1. \tag{8}$$

Taking into account notation (6), equation (4) takes the form

$$\begin{cases} 12m_1^2 \beta \bar{P} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - 8m_2 H \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} - 16m_2 \frac{dH}{d\bar{x}} \bar{\varphi} = 12m_1^3 \bar{\rho} H, \\ m_1^3 H^2 \frac{d^3 \bar{w}}{d\bar{x}^3} + 2m_1^3 H \frac{dH}{d\bar{x}} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi m_1^2 H^2 \frac{d^2 \bar{\varphi}}{d\bar{x}^2} - 2\chi m_1^2 H \frac{dH}{d\bar{x}} \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} + 8\bar{\varphi} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Boundary conditions (2), which must be satisfied at both edges of the beam, in view of (6) and (7), at  $\bar{x} = 0$  and  $\bar{x} = 1$ , will be

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} &= \frac{\bar{B}m_2H}{4m_1} \left[ 8\bar{\varphi} + m_1H \left( H - m_1 \frac{dH}{d\bar{x}} \right) \left( m_1 \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right) \right], \\ \bar{w} &= m_1 \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \frac{\bar{B}m_2H}{12} \left[ 8\bar{\varphi} - m_1^2H \frac{dH}{d\bar{x}} \left( m_1 \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Taking into account (7), equations (9) take the following form:

$$\begin{cases} 3\beta m_1^2 \bar{P} \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - 2m_2(1+\gamma\bar{x}) \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} - 4m_2\gamma\bar{\varphi} = 3m_1^3\bar{\rho}(1+\gamma\bar{x}), \\ m_1^3(1+\gamma\bar{x})^2 \frac{d^3\bar{w}}{d\bar{x}^3} + 2m_1^3\gamma(1+\gamma\bar{x}) \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi m_1^2(1+\gamma\bar{x})^2 \frac{d^2\bar{\varphi}}{d\bar{x}^2} - 2\chi m_1^2\gamma(1+\gamma\bar{x}) \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} + 8\bar{\varphi} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

And boundary conditions (10) at  $\bar{x} = 0$  and  $\bar{x} = 1$ , are

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} &= \frac{\bar{B}m_2(1+\gamma\bar{x})}{4m_1} \left[ 8\bar{\varphi} + m_1(1+\gamma\bar{x})(1+\gamma\bar{x} - m_1\gamma) \left( m_1 \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right) \right], \\ \bar{w} &= m_1 \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \frac{\bar{B}m_2(1+\gamma\bar{x})}{12} \left[ 8\bar{\varphi} - m_1^2\gamma(1+\gamma\bar{x}) \left( m_1 \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

### Computational Part

Let us perform calculations for the following values of parameters:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.1; \quad m_2 = 0.3; \quad \gamma = 1; \quad \chi = 0, 5, \text{ and } 10; \\ \rho &= 0.006; \quad \beta = 0.5; \quad \bar{B} = 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Let us present the unknown functions  $\bar{w}$  and  $\bar{\varphi}$  as polynomials:

$$\bar{w} = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i \bar{x}^i, \quad \bar{\varphi} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \bar{x}^i. \quad (14)$$

The problem is to be solved by the collocation method.

To determine the above coefficients  $a_0, a_i$  and  $b_0, b_i$ , we divide the interval  $0 \leq \bar{x} \leq 1$  into  $k$  equal parts. To satisfy equations (9) at the dividing points and boundary conditions (10), we obtain a system of  $2(k+1)$  linear equations with respect to these coefficients.

After solving the system, we find the values of the mentioned coefficients, with the help of which we calculate the values of functions  $\bar{w}$  and  $\bar{\varphi}$  using formulas (14).

The dimensionless values of the transverse force  $\bar{N}_x$  and the bending moment  $\bar{M}_x$  at the end-points and the dividing points of the interval  $0 \leq \bar{x} \leq 1$ , are calculated according the following formulas:

$$\begin{aligned} \bar{N}_x &= \frac{m_1m_2(1+\gamma\bar{x})}{12} \left[ 8\bar{\varphi} - m_1^2(1+\gamma\bar{x})\gamma \left( m_1 \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right) \right], \\ \bar{M}_x &= -\frac{m_2m_1^3(1+\gamma\bar{x})^3}{12} \left( m_1 \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

In this paper, the smallest dimensionless value of the critical force  $\bar{P}_{cr}$  is determined by varying the compressive force magnitude until  $\bar{w}$  does not change its sign.

The results of the calculations given in Table 1 show that the allowance for the influence of the deformations of transverse shears (case  $\chi > 0$ ) leads to a decrease in the critical force.

Table 1

Critical force values

	variable thickness ( $\gamma = 1$ )      Density of the material $\bar{\rho} = 0.006$		
	$\chi > 0$ (transverse shear is taken into account)		
	0	5	10
$\bar{P}_{cr}$ – critical force	0.45	0.38	0.28

Table 2

Deflection maximum ( $\bar{w}_{max} \cdot 10^3$ ) depending on  $\bar{P}/\bar{P}_{cr}$  at  $\gamma = 1$  and different values of  $\chi$  (deflection point is at  $\bar{x}_{max} = 0.4$ )

	$\bar{P}/\bar{P}_{cr}$										
$\bar{x}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\chi = 0$	0.585	0.634	0.692	0.763	0.853	0.969	1.127	1.353	1.702	2.318	3.689
$\chi = 5$	0.578	0.636	0.707	0.798	0.918	1.081	1.322	1.708	2.440	4.382	26.42
$\chi = 10$	0.563	0.620	0.689	0.778	0.894	1.052	1.283	1.652	2.341	4.098	18.45

Table 3

Bending values along the beam for  $\gamma = 1; \rho = 0.006; \bar{P} = 0.1$

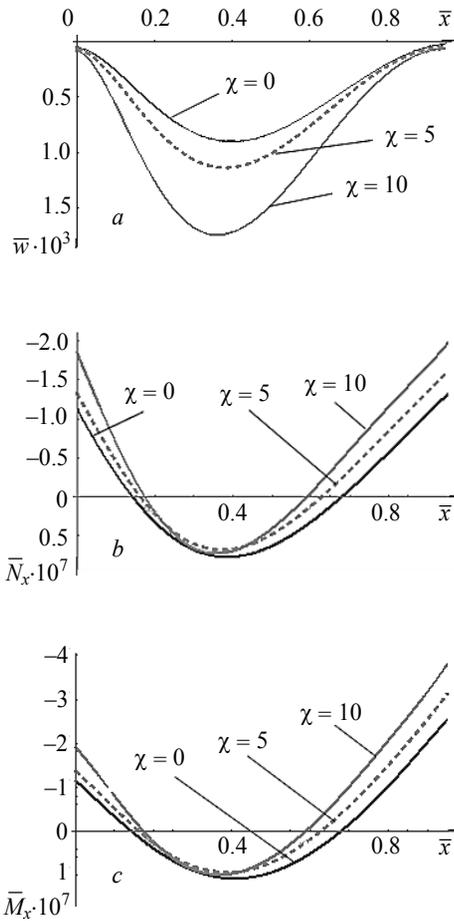
			$\bar{x}$										
			0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\chi$	0	$\bar{w} \cdot 10^3$	0.04971	0.2146	0.4601	0.6418	0.7066	0.6551	0.5179	0.3392	0.1674	0.0504	0.0325
	5	$\bar{w} \cdot 10^3$	0.0550	0.2388	0.5074	0.7002	0.7621	0.6984	0.5455	0.3528	0.1727	0.0558	0.0475
	10	$\bar{w} \cdot 10^3$	0.0598	0.2691	0.5705	0.7799	0.8398	0.7614	0.5884	0.3764	0.1829	0.0610	0.0577

Figure 2 shows the changes of the basic quantities depending on the value of the parameter  $\chi$  at  $\bar{P} = 0.2$ .

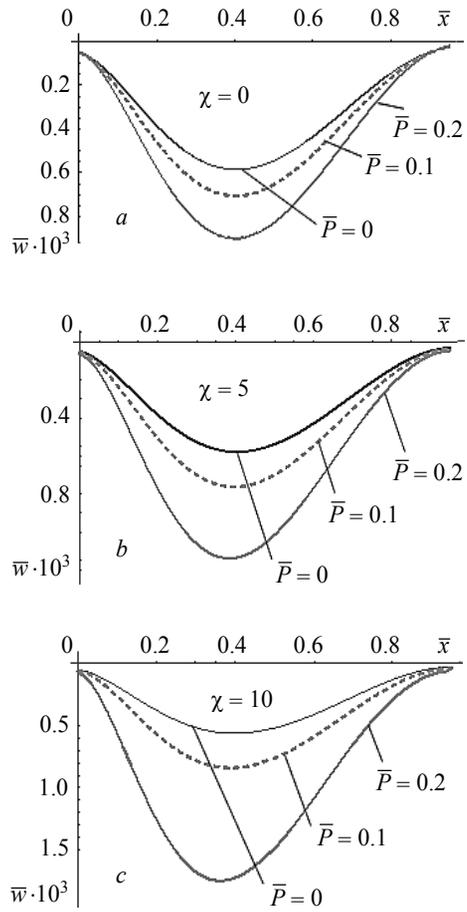
Figure 3 shows the changes of the deflection on the values of the parameters  $\bar{P}$  and  $\chi$ .

Figure 4 shows the changes of the transverse force on the value of the parameters  $\bar{P}$  and  $\chi$ .

Figure 5 shows the changes of the bending moment on the value of the parameters  $\bar{P}$  and  $\chi$ .



**Fig. 2.** Distribution of the (a) deflection, (b) transverse force, and (c) bending moment  
**Рис. 2.** Распределение прогиба (a), поперечной силы (b), изгибающего момента (c)

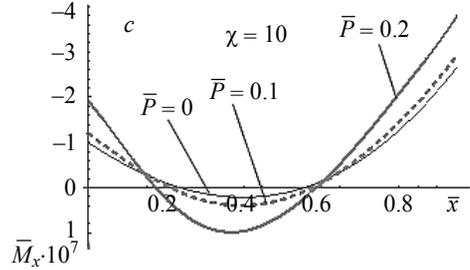
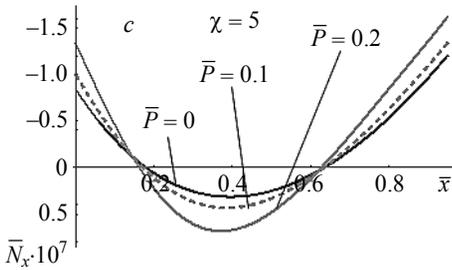
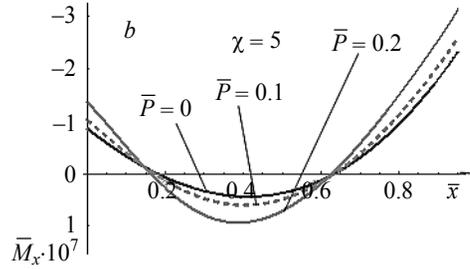
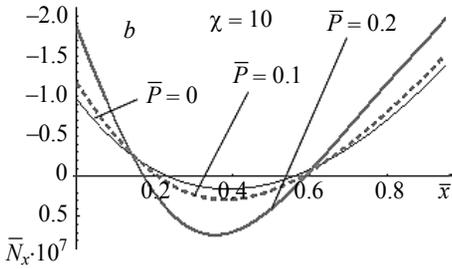
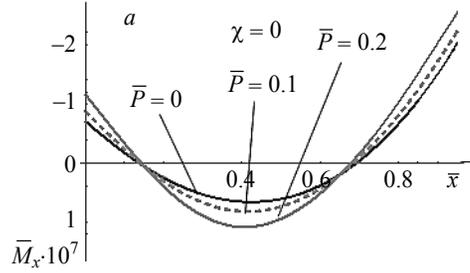
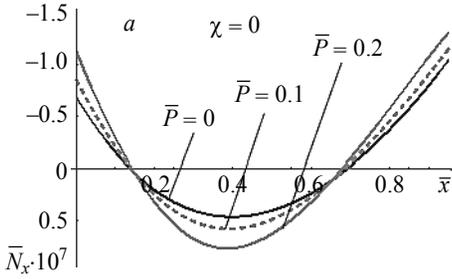


**Fig. 3.** Distribution of the deflection:  $\chi =$  (a) 0, (b) 5, and (c) 10  
**Рис. 3.** Распределение прогиба: a -  $\chi = 0$ ; b -  $\chi = 5$ ; c -  $\chi = 10$

Consideration of the effect of transverse shear deformations does not significantly affect the nature of the change in the value of the transverse force and the bending moment (Figs. 2, b, c and Figs. 4, 5).

Taking into account the effect of transverse shear deformations (case  $\chi > 0$ ), as was expected, with the same values of the other quantities, leads to an increase in deflections (Figs. 3, a, b, and c).

It should be noted that in the scientific literature there are many works devoted to the description and application of the collocation method, as well as the study of the bending and stability of thin-walled elements with different boundary conditions, including the condition of an elastically clamped support [5–28].



**Fig. 4.** Distribution of the transverse force:  $\chi = (a) 0, (b) 5, \text{ and } (c) 10$

**Fig. 5.** Distribution of the bending moment:  $\chi = (a) 0, (b) 5, \text{ and } (c) 10$

**Рис. 4.** Распределение поперечной силы:  $a - \chi = 0; b - \chi = 5; c - \chi = 10$

**Рис. 5.** Распределение изгибающего момента:  $a - \chi = 0; b - \chi = 5; c - \chi = 10$

**Conclusions**

A mathematical model has been developed to solve the problem of bending and stability of an elastically clamped beam. The solution to the resulting system of differential equations is based on the collocation method. Unknown functions are approximated by polynomials. In numerical calculations, the stability of solutions is studied depending on the degree of polynomials.

It is found that the maximum point of bending of the beam is located on its thin side. An increase in compressive force leads to an increase in bending. Consideration of transverse shear does not significantly affect the varying behavior of the transverse force and bending moment.

The results are expected to be useful for engineers and builders.

## REFERENCES

1. Volmir. A.S. (1967) *Ustoychivost' deformiruemykh sistem* [Stability of deformable systems]. Moscow: Nauka.
2. Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. (2014) Neklassicheskaya zadacha izgiba ortotropnoy balki peremennoy tolshchiny s uprugozashchemlennoy oporoy [Non-classical problem of bending an orthotropic beam of variable thickness with an elastically clamped support]. *Natsional'naya Akademiya Nauk Armenii. Doklady – National Academy of Sciences of Armenia. Reports.* 114(3). pp. 205–212.
3. Kirakosyan R.M. (2000) *Prikladnaya teoriya ortotropnykh plastin peremennoy tolshchiny, uchityvayushchaya vliyaniye deformatsiy poperechnykh sdvigov* [Applied theory of orthotropic plates of variable thickness with allowance for the influence of transverse shear strains]. Yerevan: Nauka.
4. Ambartsumyan S.A. (1987) *Teoriya anizotropnykh plastin* [Theory of anisotropic plates]. Moscow: Nauka.
5. Gomez H., de Lorenzis L. (2016) The variational collocation method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 309. pp. 152–181. DOI: 10.1016/j.cma.2016.06.003.
6. Kirakosyan R.M. (2015) *Ob odnoy neklassicheskoy zadache izgiba uprugozashchemlennoy krugloy plastinki* [On one non-classical problem of a bend of an elastically clamped round plate]. *Natsional'naya Akademiya Nauk Armenii. Doklady – National Academy of Sciences of Armenia. Reports.* 115(4). pp. 284–289.
7. Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. (2016) *Neklassicheskaya kraevaya zadacha uprugozashchemlionnoy krugloy ortotropnoy plastinki* [Non-classical boundary value problem of an elastically clamped partially loaded round orthotropic plate]. *Izvestiya Natsional'noy Akademii Nauk Armenii. Mekhanika – Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics.* 69(3). pp. 59–70. DOI: 10.33018/69.3.12.
8. Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. (2017) *Ustoychivost' sterzhnya pri uchiote umen'sheniya szhimayushchey sily uprugozashchemlionnoy oporoy* [Stability of the rod with allowance for the reduction of the compressive force of an elastically clamped support]. *Izvestiya Natsional'noy Akademii Nauk Armenii. Mekhanika – Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics.* 70(3). pp. 57–66. DOI: 10.33018/70.3.5.
9. Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. (2017) Non-classical problem of bend of an orthotropic annular plate of variable thickness with an elastically clamped support. *Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences.* 51(2). pp. 168–176. DOI: 10.46991/PYSU:A/2017.51.2.168.
10. Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. (2018) The non-classical problem of an elastically clamped orthotropic beam of compressive forces and transverse load. *Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences.* 52(2). pp. 101–108. DOI: 10.46991/PYSU:A/2018.52.2.101.
11. Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. (2019) The non-classical problem of an orthotropic beam of variable thickness with the simultaneous action of its own weight and compressive axial forces. *Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences.* 53(3). pp. 183–190. DOI: 10.46991/PYSU:A/2019.53.3.183.
12. Batista M. (2019) Stability of clamped-elastically supported elastic beam subject to axial compression. *International Journal of Mechanical Sciences.* 155. pp. 1–8. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2019.02.030.
13. Wagner H.N.R., Sosa E.M., Ludwig T., Croll J.G.A, Hühne C. (2019) Robust design of imperfection sensitive thin-walled shells under axial compression, bending or external pressure. *International Journal of Mechanical Sciences.* 156. pp. 205–220. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2019.02.047.
14. Dang X., He K., Zhang F., Zuo Q., Du R. (2019) Multi-stage incremental bending to form doubly curved metal plates based on bending limit diagram. *International Journal of Mechanical Sciences.* 155. pp. 19–30. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2019.02.001.

15. Song Z., Cao Q., Dai Q. (2019) Free vibration of truncated conical shells with elastic boundary constraints and added mass. *International Journal of Mechanical Sciences*. 155. pp. 286–294. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2019.02.039.
16. Liu Z., Yang C., Gao W., Wu D., Li G. (2019) Nonlinear behaviour and stability of functionally graded porous arches with graphene platelets reinforcements. *International Journal of Engineering Science*. 137. pp. 37–56. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2018.12.003.
17. Berchio E., Buoso D., Gazzolla F., Zucco D. (2018) A minimax problem for improving the torsional stability of rectangular plates. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 177(1). pp. 64–92. DOI: 10.1007/s.10957-018-1261-1.
18. Stephan E.P., Teltscher M.T. (2018) Collocation with trigonometric polynomials for integral equations to the mixed boundary value problem. *Numerische Mathematik*. 140(1). pp. 153–190. DOI: 10.1007/s00211-018-0960-8.
19. Dorogov Yu.I. (2016) Ustoychivost' gorizontaln'nogo uprugogo sterzhnya [Stability of a horizontal elastic bar]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42). pp. 70–83. DOI: 10.17223/19988621/42/7.
20. Ishaquddin Md., Gopalakrishnan S. (2019) A novel weak form quadrature element for gradient elastic beam theories applied. *Mathematical Modelling*. 77(1). pp. 1–16. DOI: 10.1016/j.apm.2019.07.014.
21. Song H., Yang Z., Brunner H. (2019) Analysis of collocation methods for nonlinear Volterra integral equations of the third kind. *Calcolo*. 56(1). pp. 1–29. DOI: 10.1007/s10092-019-0304-9.
22. Papargyri-Beskou S., Tsepoura K.G., Polyzos D., Beskos D.E. (2003) Bending and stability analysis of gradient elastic beams. *International Journal of Solids and Structures*. 40(2). pp. 385–400. DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00522-X.
23. Shcherbakov I.V., Lyukshin B.A. (2019) Modelirovanie povedeniya otklika ortotropnoy plastiny pri vozdeystvii dinamicheskoy nagruzki [Simulation of the behavior of an orthotropic plate response under dynamic load]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 61. pp. 111–118. DOI: 10.17223/19988621/61/10.
24. Grygorowicz M., Magnucka-Blandzi E. (2016) Mathematical modeling for dynamic stability of sandwich beam with variable mechanical properties of core. *Applied Mathematics and Mechanics*. 37(10). pp. 1361–1374. DOI: 10.1007/s10483-016-2137-9.
25. Chen Y., Yao W. (2016) Mechanical model of round window membrane under reverse excitation. *Applied Mathematics and Mechanics*. 37(10). pp. 1341–1348. DOI: 10.1007/s10483-016-2136-9.
26. Musa A.E.S. (2017) Galerkin method for bending analysis of beams on non-homogeneous foundation. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. 16(3). pp. 61–72. DOI: 10.17512/jamcm.2017.3.06.
27. Sowa L., Pawel K. (2017) Mathematical modeling of mechanical phenomena in the gantry crane beam. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. 16(3). pp. 97–104. DOI: 10.17512/jamcm.2017.3.09.
28. Lazarev N.P., Rudoy E.M. (2017) Optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic plate on the outer edge. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 97(9). pp. 1120–1127. DOI: 10.1002/zamm.201600291.

Received: October 9, 2020

Степанян С.П. (2021) О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА И УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНОЙ БАЛКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 73. с. 111–120

DOI 10.17223/19988621/73/10

Ключевые слова: упруго-зашемленная опора, изгиб, поперечный сдвиг, устойчивость.

На основе уточненной теории ортотропных пластин переменной толщины, построена математическая модель задачи изгиба и устойчивости упруго зашеченной балки. Для решения задачи в случае одновременного действия собственного веса и сжимающих осевых сил получена система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Учитываются также влияния поперечного сдвига и уменьшения сжимающей силы опоры. Переходя к безразмерным величинам, методом коллокаций решается конкретная задача для балки линейно изменяющейся толщины. Неизвестные функции аппроксимируются полиномами. В численных расчетах исследуется устойчивость решений в зависимости от степени полиномов. Обсуждается устойчивость балки, величина критической силы определяется изменением значения осевой сжимающей силы до тех пор, пока величина прогиба не изменит знак. Результаты представлены как в табличной, так и в графической формах. По полученным результатам сделаны соответствующие выводы. В частности выяснилось, что: а) максимальная точка изгиба балки находится на ее тонкой стороне. Увеличение сжимающей силы приводит к увеличению прогиба; б) учет поперечного сдвига не оказывает значительного влияния на изменение поведения поперечной силы и изгибающего момента. Полученные результаты будут полезны инженерам и строителям.

*Seyran Pa. STEPANYAN* (Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Yerevan State University). E-mail: [seyran.stepanyan@ysu.am](mailto:seyran.stepanyan@ysu.am)

Статья поступила 09.10.2020

УДК 669.1.004.86

DOI 10.17223/19988621/73/11

**И.В. Чуманов, И.М. Ячиков, М.И. Ячиков, М.А. Матвеева, Д.В. Сергеев****ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ РАСХОДУЕМОГО ЭЛЕКТРОДА  
ПРИ ЭЛЕКТРОШЛАКОВОМ ПЕРЕПЛАВЕ  
НА ГИДРОДИНАМИКУ ШЛАКОВОЙ ВАННЫ<sup>1</sup>**

Предложена математическая модель для оценки влияния вращения расходуемого электрода на гидродинамику шлаковой ванны в процессе электрошлакового переплава. Определена критическая скорость вращения электрода в зависимости от его диаметра для перехода ламинарного в турбулентное течение для флюса марки АНФ-6. Представлена зависимость скорости флюса в шлаковой ванне от скорости вращения электрода. Предложено выражение для оценки времени обновления шлаковой ванны. Получена оценка соотношения центробежной и электромагнитной сил, определяющая характер течения жидкого шлака и условия, при которых гидродинамика шлаковой ванны будет определяться центробежными силами.

**Ключевые слова:** *электрошлаковый переплав, вращающийся переплавной электрод, гидродинамика шлаковой ванны, характер течения, центробежная сила, электромагнитная сила.*

Процесс электрошлакового переплава (ЭШП) – типичный пирометаллургический процесс. Metallургические и теплофизические его особенности изучены довольно хорошо, чтобы иметь представление о природе и закономерностях гидродинамических и тепловых процессов, происходящих в шлаковой и металлической ванне. Значительно меньше разработаны вопросы, касающиеся гидродинамики и теплофизики электрошлакового процесса с применением технологии вращения расходуемого электрода [1–5].

Вращение электрода при ЭШП приводит к положительному изменению ряда технологических параметров – росту производительности процесса при снижении энергетических затрат, росту рафинирующей способности, повышению качества формируемой заготовки [6, 7] и требует более глубокого изучения данного технологического процесса.

Шлаковый расплав является токонесущей средой, в которой имеют место интенсивные течения под действием гравитационных и электромагнитных сил. Вращение электрода приводит к изменению гидродинамических процессов в шлаковой и металлической ванне установки электрошлакового переплава, что связано, прежде всего, с появлением центробежной силы. Характер образующегося в шлаковой ванне течения за счет ее действия будет отличен от течения шлака без вращения электрода. Так, при реализации классической технологии ЭШП без вращения электрода, шлаковый расплав в вертикальной плоскости движется нисходящим потоком – вниз, вдоль оси электрода, далее – вдоль горизонтальной поверхности металлической ванны к стенке кристаллизатора и затем возвращается в

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-38-90081.

подэлектродную зону. В случае вращения электрода характер течения жидкого флюса – восходящий от стенки кристаллизатора по горизонтальной поверхности металлической ванны вверх, вдоль оси электрода [8].

Чтобы установить характер течения жидкой токонесущей ванны важно оценить влияние центробежной и электромагнитной сил, целесообразно оценить их соотношение, прибегнув к математическому моделированию.

Целью работы является определение влияния вращения электрода при электрошлаковом переплаве на гидродинамику шлаковой ванны и оценка соотношения центробежной и электромагнитной сил, определяющего характер образующихся течений жидкости.

### Гидродинамика жидкого флюса под действием центробежной силы, возникающей при вращении расходуемого электрода

Реализация вращения расходуемого электрода в установке ЭШП приводит к изменению гидродинамики течения расплавленного флюса. Характер течения жидкого шлака определяется соотношением центробежной и электромагнитной сил. Рассмотрим ситуацию, когда решающее значение имеют центробежные силы. В этом случае характер движения флюса в области, близкой к электроду, определяется числом Рейнольдса. С некоторого значения  $Re_{кр}$ , течение шлакового расплава перестанет быть ламинарным и при числах, больших  $Re_{кр}$ , становится турбулентным [9, 10]:

$$Re = \frac{V \cdot R}{\nu} = \frac{\omega_0 \cdot R^2}{\nu} = \frac{\pi \omega \cdot R^2}{30 \cdot \nu} > Re_{кр} = 3 \cdot 10^5, \quad (1)$$

где  $V = \omega_0 R$  – окружная линейная скорость электрода, м/с;  $R = D/2$  – радиус электрода, м;  $\nu$  – кинематическая вязкость шлака, м<sup>2</sup>/с;  $\omega_0, \omega$  – скорость вращения электрода в рад/с и об/мин соответственно.

Из (1) можно получить выражение для критической скорости вращения электрода, перехода ламинарного к турбулентному течению:

$$\omega_{кр} = \frac{120 \cdot Re_{кр} \nu}{\pi \cdot D^2}. \quad (2)$$

На рис. 1 показана зависимость критической угловой скорости вращения электрода в шлаковой ванне от его диаметра. В качестве шлака взят флюс АНФ-6. Зависимость его плотности и динамической вязкости от температуры взята из работ [11, 12]:

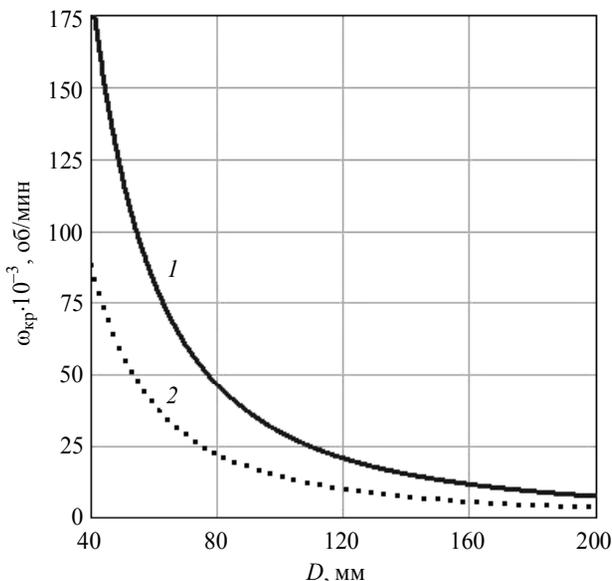
$$\rho(t) = 2680 - 0.6(t - 1450), \text{ кг/м}^3;$$

$$\lg(\eta) = -7,91 + 13 \cdot (t + 273)^{-1} \cdot 10^3 - 0,722 \cdot (t + 273)^{-2} \cdot 10^6, \text{ Па}\cdot\text{с},$$

кинематическая вязкость определялась как  $\nu(t) = \eta(t) / \rho(t)$ . Из рисунка видно, что при диаметрах электрода менее 200 мм и при используемых на практике скоростях вращения электрода  $\omega \leq 200$  об/мин движение в шлаковой ванне имеет ламинарный характер.

Вследствие трения слой жидкости, непосредственно прилегающий к торцу электрода, увлекается последним под действием центробежной силы и отбрасывается наружу от центра электрода (диска). Взамен отброшенной жидкости к электроду притекает в осевом направлении новая жидкость, которая также увле-

кается диском и опять отбрасывается наружу. Создается трехмерное течение. Скорость имеет три составляющие: в радиальном направлении –  $u$ , в азимутальном –  $v$  и осевом –  $w$ .



**Рис. 1.** Зависимость критической скорости вращения электрода от его диаметра при разной температуре шлака АНФ-6: 1 –  $t = 1600$  °С, 2 –  $t = 1700$  °С

**Fig. 1.** Critical speed of rotation of an electrode as a function of its diameter at different temperatures of the slag ANF-6:  $t = (1) 1600$  and  $(2) 1700$  °С

В работе [13] рассмотрена задача ламинарного течения жидкости вблизи вращающегося диска. При этом полагалось, что жидкость вдали от диска неподвижна. Рассмотрено решение уравнений Навье – Стокса и неразрывности в цилиндрических координатах  $Orz$  с учетом осевой симметрии:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \cdot \nabla^2 u, \\ u \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u \cdot v}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \cdot \nabla^2 v, \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \nabla^2 w, \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

В качестве граничных условий выбрано прилипание жидкости к вращающейся плоскости и нулевые скорости вдали от нее:

$$\text{при } z = 0, u = 0; v = r\omega_0; w = 0;$$

$$\text{при } z = \infty, u = 0; v = 0, w = 0.$$

Для решения задачи пограничного слоя вводилось безразмерное расстояние  $\zeta = z\sqrt{\omega_0/\nu}$ , проекции скоростей и давление определялись как

$$u = r \cdot \omega_0 F(\zeta), \quad v = r \cdot \omega_0 G(\zeta), \quad w = \sqrt{\nu \cdot \omega_0} H(\zeta), \quad p = \rho \cdot \nu \cdot \omega_0 P(\zeta).$$

После подстановки этих выражений в уравнения (3) имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения четырех неизвестных функций  $F(\zeta)$ ,  $G(\zeta)$ ,  $H(\zeta)$  и  $P(\zeta)$

$$\begin{cases} 2F + H' = 0, \\ F^2 + F'H - G^2 - F'' = 0, \\ 2FG + HG' - G'' = 0, \\ P' + HH' - H'' = 0, \end{cases} \quad (4)$$

со следующими граничными условиями:

$$\text{при } \zeta = 0: F = 0, G = 1, H = 0, P = 0;$$

$$\text{при } \zeta = \infty: F = 0, G = 0, H' = 0. \quad (5)$$

Впервые численные решения системы (4), (5) было получено В. Кохрэнном посредством представления каждой функции в виде степенных рядов для значения  $\zeta = 0$  и их асимптотического разложения для больших значений  $\zeta$ , после чего оба ряда смыкались при некотором среднем значении  $\zeta$ .

Проведем преобразование дифференциальных уравнений второго порядка (4) к системе уравнений первого порядка в каноническом виде. Для этого введем следующие обозначения:  $y_1 = F$ ,  $y_2 = F'$ ,  $y_3 = G$ ,  $y_4 = G'$ ,  $y_5 = H$ ,  $y_6 = H'$ ,  $y_7 = P$ . Из первого уравнения можно записать  $H' = -2F$  и  $H'' = -2F'$ , в результате получим

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\zeta} = y_2, & \frac{dy_2}{d\zeta} = y_1^2 + y_2 \cdot y_5 - y_3^2, & \frac{dy_3}{d\zeta} = y_4, \\ \frac{dy_4}{d\zeta} = 2y_1 \cdot y_3 + y_5 \cdot y_4, & \frac{dy_5}{d\zeta} = y_6, & \frac{dy_6}{d\zeta} = -2y_2, \\ \frac{dy_7}{d\zeta} = -2y_2 - y_5 \cdot y_6. \end{cases} \quad (6)$$

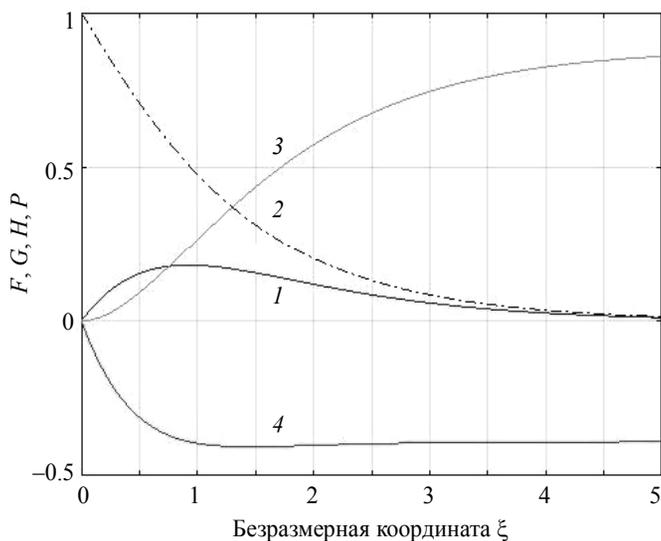
Граничные условия

$$\text{при } \zeta = 0: y_1 = 0, y_3 = 1, y_5 = 0, y_7 = 0;$$

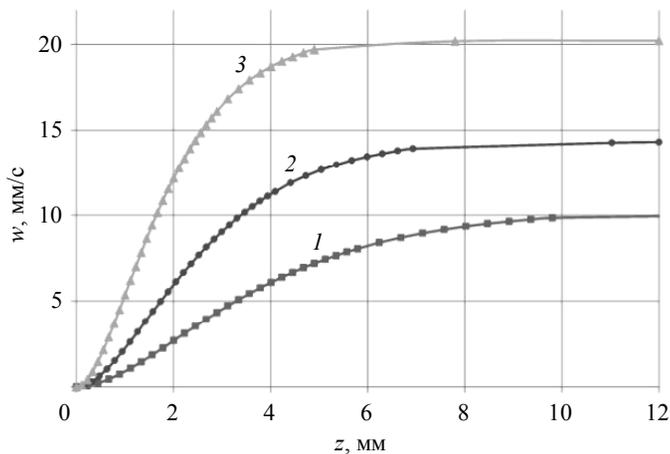
$$\text{при } \zeta = \infty: y_1 = 0, y_3 = 0, y_6 = 0. \quad (7)$$

В среде разработки *Matlab* создана компьютерная программа с использованием решателя *bvp4c*. В качестве граничного условия принимали  $\zeta = 10$ . Полученное решение с относительной точностью порядка  $10^{-3}$  совпадало с табличными данными, приведенными в работе [13]. Результаты расчетов безразмерных скоростей и давления вблизи вращающегося диска в жидкости приведены на рис. 2.

С использованием полученных распределений безразмерных скоростей для шлака АНФ-6 (при  $t = 1600$  °С) было получено поле скоростей вблизи вращающегося электрода. На рис. 3 показано изменение вертикальной проекции скорости  $w(z)$  по оси ванны вблизи электрода, вращающегося с разными угловыми скоростями. Расстояние  $z$ , где наблюдается существенное изменение скорости, составляет около 10 мм, при этом максимальная вертикальная скорость флюса составляет порядка 10 мм/с.

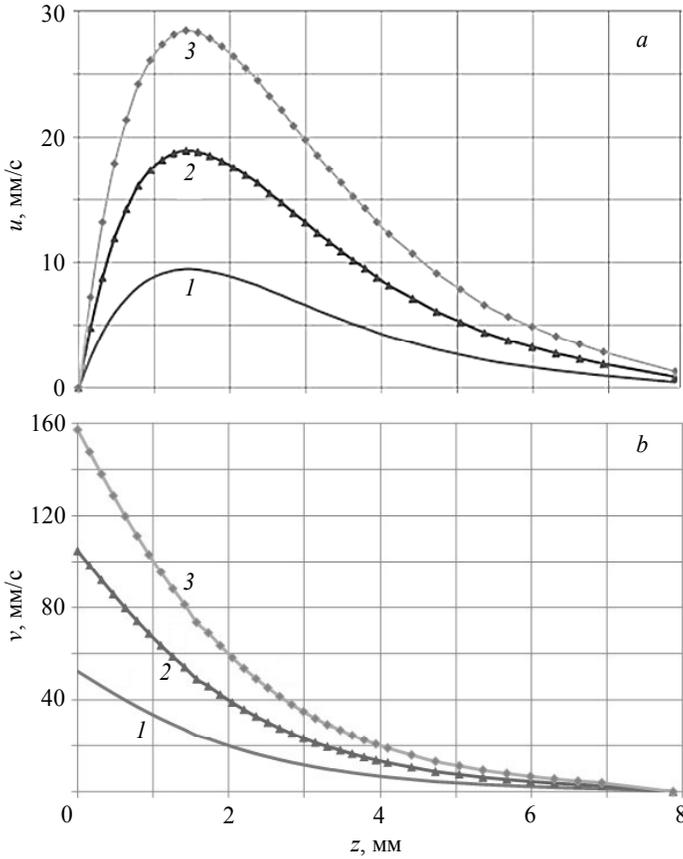


**Рис. 2.** Распределение безразмерных скоростей и давления  
вблизи вращающегося диска в жидкости: 1 –  $F$ ; 2 –  $G$ ; 3 –  $H$ ; 4 –  $P$   
**Fig. 2.** Distribution of the dimensionless velocities and pressure  
near the disk rotating in a liquid: 1 –  $F$ ; 2 –  $G$ ; 3 –  $H$ ; and 4 –  $P$



**Рис. 3.** Вертикальная составляющая скорости расплава флюса  
вдоль оси ванны ( $r = 0$ ) при разной скорости вращения электрода:  
1 –  $\omega = 50$  об/мин; 2 –  $\omega = 100$  об/мин; 3 –  $\omega = 200$  об/мин  
**Fig. 3.** A vertical velocity component of the flux melt flow along the  
bath center ( $r = 0$ ) at different rotation speeds of the electrode:  $\omega =$  (1)  
50, (2) 100, and (3) 200 rpm

На рис. 4 приведены зависимости радиальной и азимутальной составляющих скорости флюса от расстояния до электрода при разных расстояниях  $r$  от оси вращения. При увеличении расстояния от электрода  $z$  скорости быстро затухают и их значение пропорционально расстоянию от оси вращения  $r$ .



**Рис. 4.** Радиальная (а) и азимутальная (b) составляющие скорости расплава флюса в зависимости от расстояния до электрода для скорости его вращения  $\omega = 100$  об/мин при: 1 –  $r = 5$  мм; 2 –  $r = 10$  мм; 3 –  $r = 15$  мм

**Fig. 4.** (a) Radial and (b) azimuthal velocity components of the flux melt flow as functions of the distance to the electrode for its rotation speed  $\omega = 100$  rpm at:  $r = (1) 5, (2) 10, \text{ and } (3) 15$  mm

Составляющие скорости в горизонтальной плоскости  $u$  и  $v$  имеют заметные значения в пограничном слое толщиной  $\delta = \sqrt{\nu/\omega_0}$ . Так при  $\omega = 50$  об/мин  $\delta \approx 2$  мм, при  $\omega = 100$  об/мин –  $\delta \approx 1.6$  мм.

#### Момент сопротивления цилиндрического вращающегося электрода и оценка времени обновления шлаковой ванны

Момент сопротивления цилиндрического вращающегося электрода, погруженного в шлак на глубину  $h$ , складывается из момента сопротивления диска радиуса  $R$  и момента сопротивления тонкого кольца шириной  $h$  и радиуса  $R$ . Момент сопротивления диска можно записать как  $M_{\text{д}} = C_{\text{м}} \frac{\rho}{2} \omega_0^2 R^5$ , Н·м, где коэффи-

коэффициент момента сопротивления диска, смоченного с обеих сторон,  $C_m = 3,87/\sqrt{\text{Re}}$ , соответственно для торца электрода имеем  $C_m = C_m / 2$ .

Момент сопротивления тонкого кольца  $M_k = 2\pi R^2 h \cdot \tau_{z\varphi}$ , где касательное напряжение на его стенке  $\tau_{z\varphi} = \nu \rho \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}$  с использованием точного решения [13]

$$\tau_{z\varphi} = 0,616 \cdot \rho R \cdot v^{1/2} \omega_0^{3/2}, \text{ получим } M_k = C_m \frac{\rho}{2} \omega_0^2 R^4 h, \text{ Н}\cdot\text{м, где } C_m = 2 \cdot C_m.$$

Таким образом, результирующий момент сопротивления вращающегося электрода, погруженного в шлак

$$M = C_m \frac{\rho}{2} \omega_0^2 R^4 \left( \frac{R}{2} + 2h \right), \text{ Н}\cdot\text{м.} \quad (8)$$

Для изучения перемешивания объема жидкого флюса при вращении электрода определим секундный его объем, выбрасываемый наружу вследствие центробежного

эффекта  $Q = 2\pi R \int_{z=0}^{\infty} u dz$ . Это значение было посчитано с использованием созданной компьютерной программы и численно совпало со значением, полученным по формуле [13]

$$Q = 0,886 \frac{\pi R^3 \omega}{\sqrt{\text{Re}}}, \text{ м}^3/\text{с.} \quad (9)$$

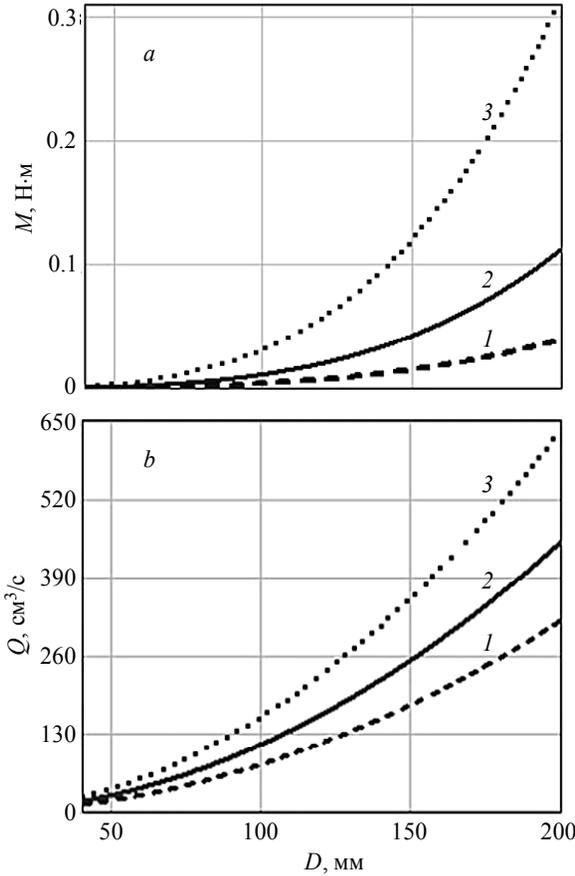
Зная  $Q$ , можно определить время обновления всей шлаковой ванны

$$\tau_{об} = \frac{V_{шл}}{Q}, \text{ с,} \quad (10)$$

где  $V_{шл} = h_{шл} \pi \cdot D_{шл}^2 / 4$  – объем шлаковой ванны;  $h_{шл}$ ,  $D_{шл}$  – ее высота и диаметр соответственно.

Для анализа поведения этих параметров проведено компьютерное моделирование с использованием среды *Mathcad 14*. Для расчетов выбран шлак АНФ-6 (при  $t = 1600$  °С). Зависимость момента сопротивления электрода  $M$  от его диаметра и скорости вращения показана на рис. 5, а. Из рисунка и формулы (8) видно, что величина момента сопротивления существенно растет при увеличении диаметра, глубины погружения и скорости вращения электрода.

Получена зависимость объемного расхода жидкого флюса от диаметра электрода при разной скорости его вращения (рис. 5, б), причем такой же объемный расход притекает к электроду в осевом направлении. С использованием формул (9), (10) можно оценить время обновления всей шлаковой ванны. Например, при диаметре и глубине шлаковой ванны  $D_{шл} = 90$  мм,  $h_{шл} = 25$  мм, для диаметра переплавляемого электрода  $D = 40$  мм и скорости его вращения  $\omega = 100$  об/мин имеем  $Q = 18$  см<sup>3</sup>/с,  $V_{шл} = 159$  см<sup>3</sup>,  $\tau_{об} = 8.8$  с. Данная оценка времени обновления шлаковой ванны говорит о том, что для неглубокой шлаковой ванны, из-за интенсивного ее перемешивания под действием центробежных сил, температуру и химические свойства шлака по объему ванны в процессе ЭШП можно считать постоянными  $t_{шл} = \text{const}$ .



**Рис. 5.** Зависимость момента сопротивления вращающегося электрода (а) и объемного расхода жидкого флюса (б) от диаметра электрода при скорости его вращения: 1 –  $\omega = 50$  об/мин; 2 –  $\omega = 100$  об/мин; 3 –  $\omega = 200$  об/мин; глубина погружения электрода в шлак АНФ-6 при  $t = 1600$  °С составляет  $h = 40$  мм

**Fig. 5.** Dependence of the (a) moment of rotating electrode resistance and (b) volumetric flow rate of the liquid flux on the electrode diameter at rotation speeds:  $\omega = (1) 50$ , (2) 100, and (3) 200 rpm; the depth of the electrode immersion into the ANF-6 slag at  $t = 1600$  °С is  $h = 40$  mm

### Методология определения характера течения в шлаковой ванне на основе анализа соотношения центробежной и электромагнитной сил

На частицу жидкости, находящуюся в движении вблизи вращающегося электрода, вследствие вязкостного трения в слое на расстоянии  $r$  от оси, действует центробежная сила, которая на единицу объема равна  $f_{ц} = \rho \cdot r \cdot \omega_0^2$ . Максимальное значение этой силы будет наблюдаться на краю электрода

$$f_{ц} = \rho \cdot R \omega_0^2, \text{ Н/м}^3.$$

При вращении расходуемого электрода за счет вязкости на жидкий флюс начинают активно действовать центробежные силы, которые с определенных значений могут изменить характер течения в сравнении с процессом без вращения расходуемого электрода. Как уже отмечалось выше, действие электромагнитной и центробежной сил на характер течения шлака взаимно противоположное.

Определим, при каких условиях будет доминировать характер того или иного течения. При прохождении тока от электрода к поддону и боковой стенке через жидкий шлак и металл под действием электромагнитной силы возникают электро-вихревые течения. Объемную электромагнитную силу  $\vec{f}$ , действующую на единицу токонесущего объема жидкого шлака, в произвольной точке можно определить как [14]  $\vec{f} = \mu_0 \cdot \vec{J} \times \vec{H}$ , где  $\vec{J}$  – плотность тока в этой точке;  $\vec{H}$  – значение напряженности магнитного поля, создаваемого как внешними, так и токами, протекающими через объем, на который эта сила действует;  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

Поскольку сила  $\vec{f}$  определяется векторным произведением, то можно найти ее проекции в цилиндрической системе координат [15]:

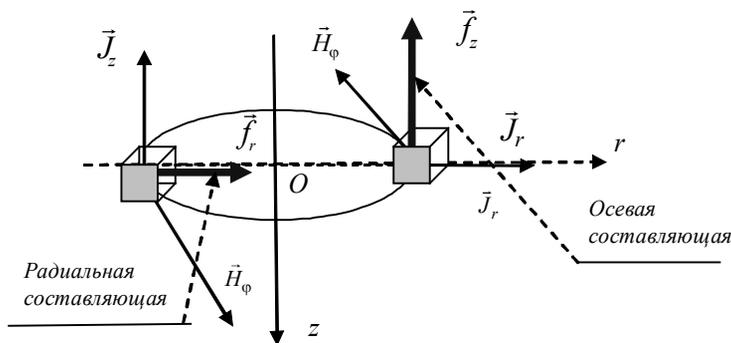
$$\vec{f} = \mu_0 (J_\phi H_z - J_z H_\phi) \vec{e}_r + \mu_0 (J_z H_r - J_r H_z) \vec{e}_\phi + \mu_0 (J_r H_\phi - J_\phi H_r) \vec{e}_z.$$

Известно, что при осесимметричном растекании тока по ванне имеются одна азимутальная составляющая магнитного поля  $H_\phi$  и две составляющие электрического поля  $E_r$ ,  $E_z$ , а значит, и две составляющие плотности тока  $J_r$ ,  $J_z$ . Поэтому предыдущее равенство принимает более простой вид

$$\vec{f} = \vec{f}_r + \vec{f}_z = -\mu_0 J_z H_\phi \vec{e}_r + \mu_0 J_r H_\phi \vec{e}_z.$$

Из этого выражения видно, что сила Лоренца  $\vec{f}$  имеет две проекции – радиальную  $f_r = -\mu_0 J_z H_\phi$  и вертикальную  $f_z = \mu_0 J_r H_\phi$ , причем сила  $f_r$  имеет направление, противоположное оси  $r$ , что подтверждает природу пинч-эффекта (рис. 6).

Напряженность магнитного поля в шлаковой ванне увеличивается при приближении к краю электрода и достигает максимального значения на его краю (при  $r = R$ )  $H_\phi = I / (2\pi R)$ , где  $I$  – ток через электрод.



**Рис. 6.** Составляющие силы Лоренца, действующие на единицу объема жидкого флюса как токонесущей среды  
**Fig. 6.** Components of the Lorentz force per unit volume of the liquid flux, representing a current-carrying medium

Можно отметить, что центробежная сила растет линейно при удалении от оси электрода, при растекании тока на поверхности электрода также растет и плотность тока вдоль его радиуса. Имеет место концентрация обеих проекций плотности тока на краях электрода. Для цилиндрического электрода проекция плотности тока  $J_z$  на краю электрода может быть в 1.5–2 раза выше средней плотности тока, протекающего через электрод, и ее можно оценить как  $J_z = \frac{\zeta \cdot I}{\pi R^2}$ . Таким образом, максимальную электромагнитную силу, действующую на расплав, можно по порядку величины определить как

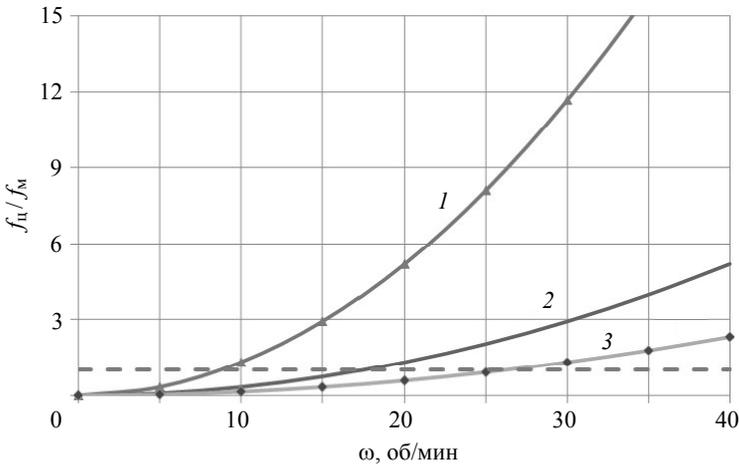
$$|\vec{f}_m| \sim \mu_0 J_z H_\phi \sim \mu_0 \frac{\zeta \cdot I^2}{\pi^2 R^3}, \text{ Н/м}^3.$$

Характер течения в шлаковой ванне ЭШП можно оценить по порядку величины отношения центробежной и электромагнитной сил

$$\beta = \frac{f_{ц}}{f_m} = \frac{\pi^2 \rho R^4 \omega_0^2}{\mu_0 I^2}. \quad (11)$$

При одинаковых геометрических условиях и используемом шлаке это отношение пропорционально квадрату отношения скорости вращения к току.

Используя выражение (11), построим зависимость соотношения центробежной и электромагнитной сил от скорости вращения электрода диаметром  $D = 40$  мм при разных токах через него (рис. 7).



**Рис. 7.** Зависимость отношения центробежной и электромагнитной сил от скорости вращения электрода диаметром  $D = 40$  мм при разных токах через него: 1 – 0.5 кА; 2 – 1 кА; 3 – 1.5 кА (пунктиром показано значение  $\beta = 1$ )

**Fig. 7.** Dependence of the ratio of centrifugal and electromagnetic forces on the rotation speed of an electrode with a diameter of  $D = 40$  mm at different current passages: (1) 0.5, (2) 1, and (3) 1.5 kA (the dotted line indicates the value  $\beta = 1$ )

При  $\beta < 1$  характер течения и гидродинамику в жидкой ванне определяет электромагнитная сила, а при  $\beta > 1$  существенной оказывается центробежная сила. Например, из рисунка видно, что для тока 1.5 кА при скорости вращения более 30 об/мин решающую роль оказывает центробежная сила. При частоте вращения этого электрода менее 25 об/мин более значимыми будут электромагнитные силы, которые и будут определять характер течения в шлаковой ванне.

### Заключение

1. Течение жидкости около вращающегося электрода ЭШП при доминировании центробежных сил над электромагнитными и используемых на практике скоростях вращения электродов для флюса АНФ-6 можно считать ламинарным.

2. Получена система дифференциальных уравнений первого порядка в каноническом виде и граничные условия для приближенного расчета трехмерного ламинарного течения жидкости вблизи вращающегося диска.

3. Вследствие вязкости слой флюса, непосредственно прилегающий к электроду, увлекается последним и под действием центробежной силы отбрасывается наружу от его оси вращения. Взамен отброшенной жидкости к электроду притекает в осевом направлении новая порция жидкости, что и создает трехмерное течение в объеме расплава. Для флюса АНФ-6 при 1600 °С получено, что вертикальная составляющая скорости по оси в зависимости от скорости вращения электрода существенно изменяется на расстоянии порядка 10 мм от электрода, при этом максимальная скорость составляет по порядку величины 10 мм/с. Азимутальная и радиальная составляющие скорости при увеличении расстояния от электрода быстро затухают и их значение пропорционально расстоянию от оси вращения. Составляющие скорости в горизонтальной плоскости имеют заметные значения в пограничном слое, толщина которого зависит от скорости вращения электрода и вязкости шлака.

4. Приведена аналитическая зависимость момента сопротивления вращающегося электрода в зависимости от его диаметра и глубины погружения в шлак. С ее помощью при экспериментальном измерении момента сопротивления свободного электрода и погруженного в шлак можно определить вязкость используемого флюса.

5. Предложено выражение для оценки времени обновления шлаковой ванны с вращающимся электродом. При небольшой глубине жидкой ванны за счет ее интенсивного перемешивания под действием центробежных сил температуру и химические свойства флюса по объему ванны в процессе ЭШП можно считать постоянными.

6. Получена оценка, определяющая влияние на гидродинамику жидкой ванны центробежной и электромагнитной сил. Чем меньше диаметр, частота вращения электрода и больше через него ток, тем более значимым на характер течения оказывают электромагнитные силы. При одинаковых геометрических условиях и используемом шлаке отношение центробежной и электромагнитной сил пропорционально квадрату отношения скорости вращения электрода к силе тока.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Медовар Б.И. Тепловые процессы при электрошлаковом переплаве. Киев: Наукова думка, 1978. 304 с.
2. Paton B.E., Medovar L.B. Improving the electroslagremelting of steel and alloys // Steel in Translation. 2008. V. 38(12). P. 1028–1032. DOI: 10.3103/S0967091208120218.
3. Wang Q., Li G., He Z., Li B. Numerical study on the effect of electrode polarity on desulfurization in direct current electroslag remelting process // Metallurgical and Materials Transactions B. 2017. V. 48. P. 2649–2663. DOI: 10.1007/s11663-017-1040-7.
4. Paar A., Schneider R., Zeller P., Reiter G., Paul S., Würzinger P. Effect of electrical parameters on type and content of non-metallic inclusions after electro-slag-remelting // Steel Research Int. 2014. V. 85(4). P. 570–578.
5. Чуманов В.И., Белозёров Б.П., Чуманов И.В. Математическая модель переплава вращающегося электрода // Известия вузов. Черная металлургия. 1991. № 12. С. 74 – 75.
6. Чуманов И.В., Пятыгин Д.А. Особенности электрошлакового переплава на постоянном токе с вращением расходуемого электрода // Известия вузов. Черная металлургия. 2006. № 3. С. 22 – 25.
7. Chumanov I.V., Chumanov V.I. Increasing the efficiency of the electroslag process and improving the metal quality by rotating of consumable electrode: Part I // Russian Metallurgy (Metally). 2010. 68. P. 499–504. DOI: 10.1134/S003602951006008X.
8. Chumanov V., Chumanov I. Speed control of remelting in the electroslag process by changing the rotation speed consumable electrode // 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing. 2016. P. 1–4. DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7911021.
9. Коптев А.А. Движение жидкости в центробежных полях. Ч. I. Течение жидкости вблизи вращающегося диска. М.: Машиностроение, 2005. 240 с.
10. Хмелева М.Г., Даммер В.Х., Тохметова А.Б., Миньков Л.Л. Численное исследование вихреобразования в жидком металле под действием дискового завихрителя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 46. С. 76–85.
11. Воробьев А.А., Пожидаев Ю.В. Электрошлаковый переплав. Новокузнецк: СибГИУ, 2002. 116 с.
12. Лопав Б.Е., Кагарманов И.И. Расчет вязкости флюсов для электрошлакового переплава на основе способа равных сумм // Омский научный вестник. 2016. № 1(145). С. 18–21.
13. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
14. Гельфгат Ю.М., Лиелаусис О.А., Щербинин Э.В. Жидкий металл под действием электромагнитных сил. Рига: Зинатне, 1975. 248 с.
15. Ячиков И.М., Карандаева О.И., Ларина Т.П. Моделирование электровихревых течений в ванне дуговой печи постоянного тока. Магнитогорск: ГОУВПО «МГТУ», 2008. 234 с.

Статья поступила 11.11.2020

Chumanov I.V., Yachikov I.M., Yachikov M.I., Matveeva M.A., Sergeev D.V. (2021) INFLUENCE OF THE CONSUMABLE ELECTRODE ROTATION DURING ELECTROSLAG REMELTING ON HYDRODYNAMICS OF A SLAG BATH. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 73. pp. 121–134

DOI 10.17223/19988621/73/11

Keywords: electroslag remelting, rotatable remelting electrode, hydrodynamics of a slag bath, flow pattern, centrifugal force, electromagnetic force.

Slag melt is a current-carrying medium with intense currents induced by gravitational and electromagnetic forces. The remelted electrode rotation leads to a change in hydrodynamic processes proceeding in a slag bath of the ESR installation and associated primarily with the

occurrence of a centrifugal force. The flow pattern, which is developed in the slag bath under this force action, is different from that developed at a stationary consumable electrode. A mathematical model is proposed to assess the impact of consumable electrode rotation on hydrodynamics in a slag bath during electroslag melting. A computer program is created to determine the projections of the flow velocities for a liquid flux near a rotating electrode, the moment of its hydraulic resistance, and the renewal time for the slag bath while being stirred.

The critical speed of the rotation of the electrode is determined as a function of its diameter at a transitional flow regime for ANF-6 flux. The dependence of the flux flow velocity on the electrode rotation speed is presented. The moment of the rotating electrode resistance in a slag bath is determined at various electrode diameters and various depths of the electrode immersion into the slag. An expression is proposed for estimating the time of the slag bath renewal. It is also shown that at a small depth in the bath due to its intensive mixing under the action of centrifugal forces, the temperature and chemical composition over the slag bath volume during the ESR process can be considered as constant.

The ratio of centrifugal and electromagnetic forces is estimated. The results determine a flow pattern of the liquid slag and the conditions under which the hydrodynamics in the slag bath is governed by centrifugal forces.

**Financial support.** The reported study was funded by RFBR, project number 19-38-90081.

*Il'ya V. CHUMANOV* (Doctor of Technical Sciences, Professor, South Ural State University, Zlatoust, Russian Federation). E-mail: chumanoviv@susu.ru

*Igor' M. YACHIKOV* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation). E-mail: jachikov@mail.ru

*Matvey I. YACHIKOV* (Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation). E-mail: jachikov@mail.ru

*Mariya A. MATVEEVA* (South Ural State University, Zlatoust, Russian Federation). E-mail: matveevama@susu.ru

*Dmitriy V. SERGEEV* (South Ural State University, Zlatoust, Russian Federation). E-mail: sergeevdv@susu.ru

## REFERENCES

1. Medovar B.I. (1978) *Teplovye protsessy pri elektroshlakovom pereplave* [Thermal processes in electroslag remelting]. Kiev: Naukova dumka.
2. Paton B.E., Medovar L.B. (2008) Improving the electroslag remelting of steel and alloys. *Steel in Translation*. 38(12). pp. 1028–1032. DOI: 10.3103/S0967091208120218.
3. Wang Q., Li G., He Z., Li B. (2017) Numerical study on the effect of electrode polarity on desulfurization in direct current electroslag remelting process. *Metallurgical and Materials Transactions B*. 48. pp. 2649–2663. DOI: 10.1007/s11663-017-1040-7.
4. Paar A., Schneider R., Zeller P., Reiter G., Paul S., Würzinger P. (2014) Effect of electrical parameters on type and content of non-metallic inclusions after electro-slag-remelting. *Steel Research International*. 85(4). pp. 570–578. DOI: 10.1002/srin.201300317.
5. Chumanov V.I., Belozyorov B.P., Chumanov I.V. (1991) Matematicheskaya model' pereplava vrashchayushchegosya elektroda [A mathematical model of the remelting of a rotating electrode]. *Izvestiya vuzov. Chernaya metallurgiya – Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 12. pp. 74–75.
6. Chumanov I.V., Pyatygin D.A. (2006) Osobennosti elektroshlakovogo pereplava na postoyannom toke s vrashcheniem raskhoduемого elektroda [Features of the electroslag remelting at direct current with rotating consumable electrode]. *Izvestiya vuzov. Chernaya metallurgiya – Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 3. pp. 22–25.
7. Chumanov I.V., Chumanov V.I. (2010) Increasing the efficiency of the electroslag process and improving the metal quality by rotating a consumable electrode: Part I. *Metally – Russian metallurgy*. 68. pp. 499–504. DOI: 10.1134/S003602951006008X.

8. Chumanov V., Chumanov I. (2016) Speed control of remelting in the electroslag process by changing the rotation speed consumable electrode. *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*. pp. 1–4. DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7911021.
9. Koptev A.A. (2005) *Dvizhenie zhidkosti v tsentrobezhnykh polyakh. Chast' I. Techenie zhidkosti vblizi vrashchayushchegosya diska* [Liquid motion in centrifugal fields. Part I. Fluid flow near a rotating disk.]. Moscow: Mashinostroenie.
10. Khmeleva M.G., Dammer V.K., Tokhmetova A.B., Min'kov L.L. (2017) Chislennoe issledovanie vikhreobrazovaniya v zhidkom metalle pod deystviem diskovogo zavikhritelya [Numerical investigation of the vortex formation in a liquid metal under the action of disk agitator]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 76–85. DOI: 10.17223/19988621/46/10.
11. Vorob'ev A.A., Pozhidaev Yu.V. (2002) *Elektroshlakovyy pereplav* [Electroslag remelting]. Novokuznetsk: SibGIU.
12. Lopaev B.E., Kagarmanov I.I. (2016) Raschet vyazkosti flyusov dlya elektroshlakovogo pereplava na osnove sposoba ravnykh summ [Calculation of the viscosity of fluxes for electroslag remelting based on the method of equal sums]. *Omskiy nauchnyy vestnik – Omsk Scientific Bulletin*. 1(145). pp. 18–21.
13. Shlikhting G. (1974) *Teoriya pogrannichnogo sloya* [Boundary layer theory]. Moscow: Nauka.
14. Gel'fgat Yu.M., Lielausis O.A., Shcherbinin E.V. (1975) *Zhidkiy metall pod deystviem elektromagnitnykh sil* [Liquid metal under the action of electromagnetic forces]. Riga: Zinatne.
15. Yachikov I.M., Karandaeva O.I., Larina T.P. (2008) *Modelirovanie elektrovikhrevykh techeniy v vanne dugovoy pechi postoyannogo toka* [Modeling of electric vortex flows in a bath of the DC arc furnace]. Magnitogorsk: MGTU.

Received: November 11, 2020

## МЕМОУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

УДК 51(091)

DOI 10.17223/19988621/73/12

**В.Н. Берцун, Е.С. Косова**

### **СТРАНИЦЫ ЖИЗНИ ВЫПУСКНИКА ТРЕХ УНИВЕРСИТЕТОВ (К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ АКАДЕМИКА Н.Н. ЯНЕНКО)**

Представлены основные этапы научной деятельности выпускника физико-математического факультета Томского университета, Героя Социалистического Труда, лауреата трех Государственных премий СССР, выдающегося советского математика и механика, академика Николая Николаевича Яненко.

**Ключевые слова:** *выпускники Томского университета, математическое моделирование задач механики сплошной среды, метод дробных шагов, параллельные вычислительные технологии.*

Николай Николаевич Яненко родился 22 мая 1921 г. в г. Куйбышеве (г. Каинск) Новосибирской области. Мать, Яненко (Аникина) Наталья Борисовна, была домохозяйкой. Первый супруг Натальи Борисовны – Иван Черненко, погиб во время Первой мировой войны, оставив ее с тремя детьми. Вторым ее супругом стал Николай Павлович Яненко, который был бухгалтером [1, с. 19].

В 1923 г. Николай с родителями, двумя старшими братьями (Александром и Петром) и двумя сестрами (Зинаидой и Раисой) переехали в г. Новосибирск. Благополучие и размеренная жизнь большой семьи были нарушены, когда в 1927 г. отец покинул семью, уехав на работу в Семипалатинскую область, где позднее умер от тифа. Наталье Борисовне предстояло одной растить пятерых детей. Жили они на заработок старшего сына Александра, который в тот момент учился на бухгалтера и работал, и матери, работавшей поденной прачкой.

Осенью 1929 г. Николай пошел в первый класс неполной средней школы № 25 г. Новосибирска. Но в школу ему пришлось ходить босиком – обуви не было. Так продолжалось несколько недель, пока учительский комитет школы не нашел денег на покупку ему обуви. У Натальи Борисовны два брата и сестра жили в селе Старочерново Кожевниковского района Томской области (на реке Бакса, 130 км от Томска), к ним на лето выезжала вся семья Николая. В тот период в деревне



**Фото 1.** Н.Н. Яненко, 1981  
**Fig. 1.** N.N. Yanenko, 1981

проживало более 200 человек. Здесь было интересно, сытно и привольно, дети проводили время с удовольствием, а когда возвращались в город, везли с собой вкусные деревенские продукты.

Школу № 25 Николай окончил в 1936 г. с отличием и похвальной грамотой, за успешную учебу был премирован поездкой в Москву в составе группы школьников Новосибирска. Столица произвела неизгладимое впечатление на Николая и укрепила его стремление к учебе, к познанию окружающего мира. С восьмого класса он учился в железнодорожной школе № 1 г. Новосибирска, которую тоже окончил с отличием в 1939 г. Уже в юные годы он отличался от своих сверстников феноменальной памятью.

После окончания школы Николай решил поступать на ММФ МГУ, но 15.07.1939 г. получил отказ из приемной комиссии МГУ, связанный с отсутствием мест в общежитии. Получив это сообщение, он 24.07.1939 г. подает заявление о поступлении на ФМФ ТГУ, куда был как отличник зачислен без экзаменов на специальность «Математика» (приказ 151/С, 20.06.1939). Студентам ФМФ ТГУ в 1939 г. давали места в общежитии на ул. Советской, д. 106. Стипендия первокурсника составляла 130 рублей.

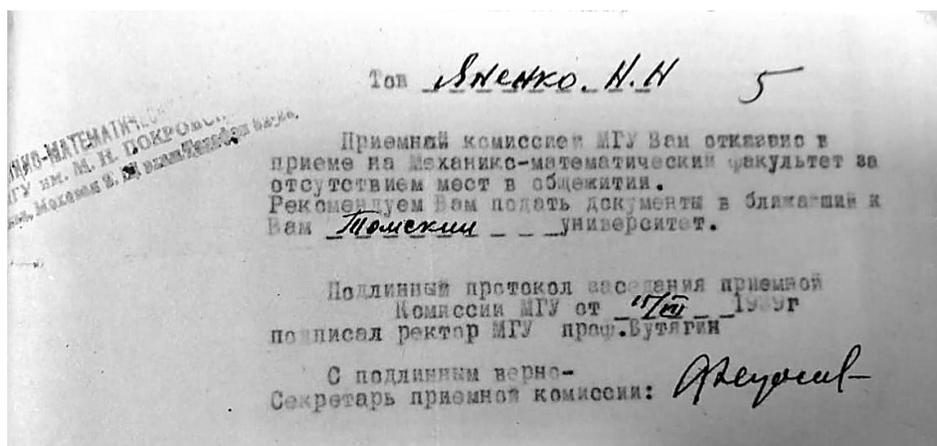


Фото 2. ГАТО. Ответ приемной комиссии МГУ, 1939

Fig. 2. SATR (State Archive of Tomsk Region).

Moscow State University Admissions Committee response, 1939.

Из воспоминаний профессора Клементьева Захара Ивановича, преподававшего математический анализ: «Николай Яненко был идеальный студент – это я могу сказать как преподаватель совершенно ответственно. Именно идеальный. О таких учителя могут только мечтать. Всегда все знал. Всегда отвечал очень толково, глубоко излагал материал, на любой дополнительный вопрос мог ответить» [1, с. 29].

У Николая в кармане всегда были карточки по немецкому и французскому языкам, которые он доставал в свободное время и осваивал языковые фразы. С началом войны размеренная жизнь студенческого Томска резко изменилась. Общежития университета занимались госпиталями, а в главном корпусе разместили оптико-механический завод, эвакуированный из Загорска. Студентов переселяли на частные квартиры по ордерам, которые получали у комендантов [2]. Николай стал жить на квартире по адресу ул. Красноармейская, д. 47.

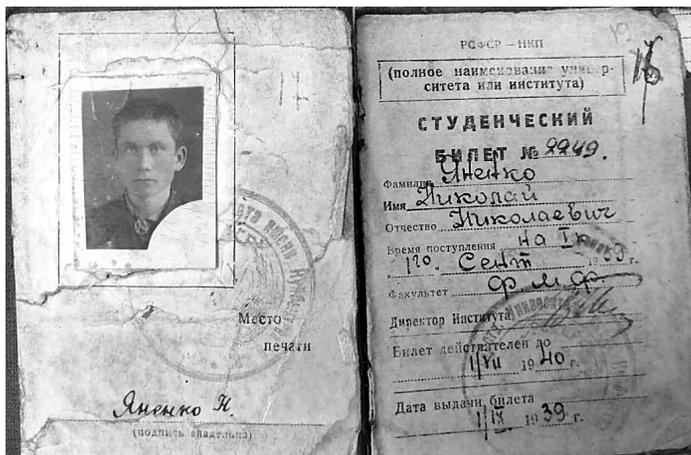


Фото 3-4. Студенческий билет и зачетная книжка студента ФМФ ТГУ Николая Яненко  
 Fig. 3-4. Nikolay Yanenko's student card and record book,  
 Department of Physics and Mathematics, Tomsk State University



Фото 5. Группа первокурсников, в которой учился Н. Яненко  
Fig. 5. A group of freshmen, where N. Yanenko studied

С сентября 1941 г. в городе была введена карточная система, по которой студент мог получить 400 г хлеба в сутки. Зимой 1941–1942 гг. от недоедания и переутомления у Николая началась куриная слепота – с наступлением сумерек и до полного света он плохо видел и занимался только в те часы, когда был хороший дневной свет. В это время из армии на неделю в отпуск приезжал старший брат Шура и помогал Николаю восстановить зрение с помощью питания, которое приносил для брата из столовой.

Осенью 1941 г. в Томск был эвакуирован профессор ММФ МГУ, геометр Рашевский Петр Константинович, который был принят на должность заведующего кафедрой математики в Томском педагогическом институте (1941–1943 г.). В феврале 1942 г. (приказ № 23с от 6.02.1942 г.) П.К. Рашевский становится профессором-совместителем на кафедре общей математики ФМФ ТГУ и читает курс «Высшая геометрия» в группе Яненко, который Николай сдает с отличием 29.04.1942 г. Именно в этот период и познакомился с Рашевским студент Николай Яненко, которого заинтересовала геометрия. Эта встреча позднее сыграла определяющую роль в научной судьбе Николая Николаевича.

6-й семестр 193... учебного года						ТРЕТИЙ	
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КУРС							
№№ п/п	Наименование дисциплины	Кол-во часов	Фамилия профессора в/з «русские»	Экзамнацион. отметки	Дата сдачи экзамена	Подпись экзаменатора	
1	Аналитическая геометрия	48	Рашевский	отлично	9/11/42	Рашевский	
2	Математический анализ	1	Рашевский	отлично	9/11/42	Рашевский	
3	Высшая математика	54	Рашевский	отлично	27/11/42	Рашевский	
4	Высшая геометрия	54	Рашевский	отлично	29.11.42	Рашевский	
5	Высшая геометрия	40	Саволев	отлично	5.1.42	Саволев	
6	Высшая геометрия	40	Саволев	отлично	5.1.42	Саволев	
7							
8							
9							
10							
11							
12							

Студент \_\_\_\_\_ переведен на 4-й курс

Фото 6. Фрагмент зачетной книжки Н. Яненко  
Fig. 6. A fragment of N. Yanenko's record book

В конце 1942 г. на математическом отделении ФМФ числилось 7 кафедр с общей численностью 13 сотрудников. С декабря 1942 г. П.К. Рашевский стал заведующим кафедрой геометрии ФМФ ТГУ, читал спецкурсы и с 1943 г. вел семинар по функциональному анализу на ФМФ.

С 1944 г. началась реэвакуация и П.К. Рашевский возвратился в Москву. Следует отметить, что отец Рашевского – Константин Николаевич окончил Томскую мужскую губернскую гимназию (здание на пр. Фрунзе, д. 9) с серебряной медалью (1892 г.) и физико-математический факультет Московского университета с дипломом 1-й степени (1899 г.). Он был известным в стране педагогом-математиком. Выпускником этой гимназии (1901 г.) был и математик, академик (1929 г.) Николай Николаевич Лузин – основатель московской математической школы.

Николай Яненко окончил университет досрочно, с отличием в 1942 г. Во время обучения он слушал лекции известных ученых ТГУ: З.И. Клементьева, Н.Г. Туганова, П.П. Куфарева, Е.Д. Томилова, М.А. Большаниной, Н.Н. Горячева, Н.П. Романова и других преподавателей университета.

№ 233 от 2.12.1942. Утверждаю штатное расписание преподавательского персонала... по ФМФ

Кафедра	ФИО	Должность	Звание, степень
Математического анализа	Куфарев П.П.	Зав. кафедрой	Доцент, кн
	Соболев В.И.	Доцент	Доцент, кн
	Сперанский М.А.	Ассистент	
Алгебры и теории чисел	Романов Н.П.	Зав. кафедрой	Профессор, дн
Общей математики	Аравийская Е.Н.	Зав. кафедрой	Доцент, кн
	Соколова В.А.	Доцент	Доцент, кн
	Бюлер Г.А.	Доцент	Доцент, кн
	Клементьев З.И.	Доцент	Доцент, кн
	Ходор М.Д.	Ассистент	
Теоретической механики	Томилов Е.Д.	Зав. кафедрой	Доцент, кн
	Чеботарев Т.А.	Доцент	Доцент, кн
Астрономии	Баев К.А.	Зав. кафедрой	Профессор, кн
Геометрии	Рашевский П.К.	Зав. кафедрой	Профессор, дн

Фото 7. Штатное расписание ФМФ, 1942

Fig. 7. Department of Physics and Mathematics, manning table, 1942

После окончания Томского университета он выбрал распределение в школу села Северное Новосибирской области, хотел работать учителем математики, спокойно заниматься наукой и перевезти в с. Северное свою маму. Но через два дня, находясь в Северном, он получил повестку из военкомата и был призван в армию. В это время медицинские призывные нормы были пересмотрены и его близорукость уже не была препятствием для призыва в армию.

В октябре 1942 г. в составе вновь сформированных частей 2-й ударной армии, он выехал из Новосибирска под Ленинград. До места назначения ехали в «теплушках» почти месяц. Этой армии отводилась роль главной ударной силы в предстоящей операции по прорыву блокады Ленинграда. С декабря 1942 г. Н. Яненко как хорошо знающий немецкий, английский и французский языки был назначен рупористом и переводчиком разведроты 1248 стрелкового полка. Первую свою награду – медаль «За отвагу» мл. лейтенант Н.Н. Яненко получил 22 мая 1944 г., за мужество, проявленное в бою за деревню Погорелки [3].

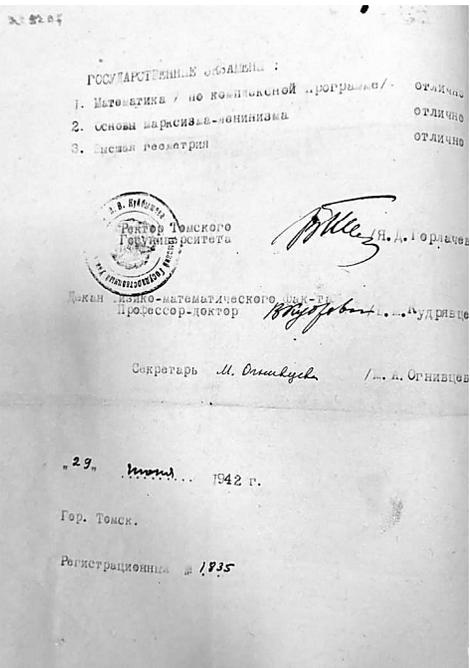
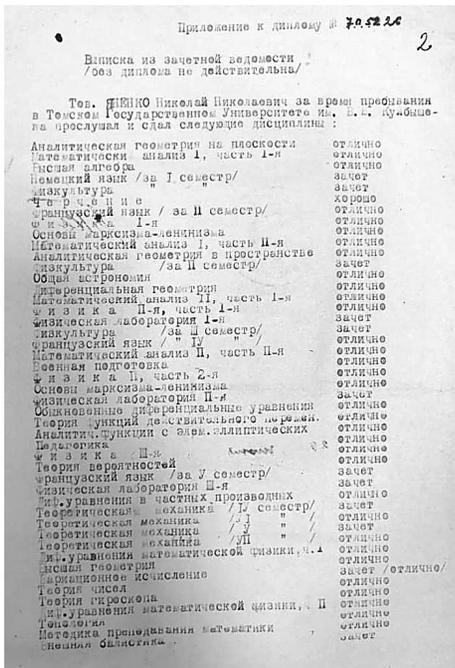
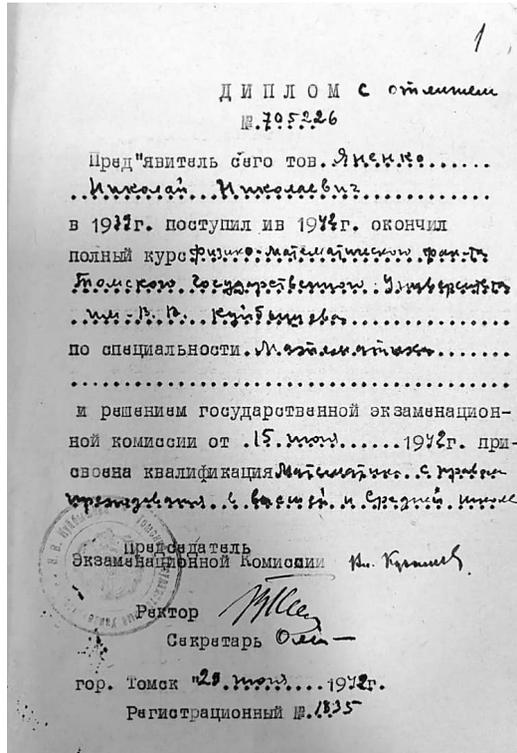


Фото 8-10. Диплом Н. Яненко с приложением  
Fig. 8-10. N. Yanenko's Diploma with Supplement

В вещмешке он всегда хранил книги по математике, которые читал в периоды затишья на передовой. Находясь на фронте, Николай Николаевич переписывался с П. К. Рашевским, иногда просил его пояснить некоторые математические понятия. В декабре 1945 г., находясь в Кенигсберге, он был демобилизован в звании лейтенанта и сразу уехал в Москву. Здесь П.К. Рашевский помог ему устроиться с жильем на время подготовки к поступлению в аспирантуру. В 1946 г. Николай Николаевич поступает в аспирантуру ММФ МГУ к профессору Петру Константиновичу Рашевскому и получает место в аспирантском общежитии МГУ. Через три года он успешно защитил кандидатскую, а в 1954 г. – докторскую диссертации по дифференциальной топологии.

В 1948 г. произошло важное событие в научной биографии Н. Н. Яненко: он начал работать в группе академика Андрея Николаевича Тихонова, которому была поручена организация вычислительной лаборатории № 8 для проведения расчетов процесса взрыва атомной (а потом и водородной) бомбы [4].

Когда Николай Николаевич был принят в лабораторию А.Н. Тихонова, ему пришлось практически заново изучить ряд разделов математики и механики. За активное участие в проектах, по представлению А.Н. Тихонова, Н.Н. Яненко был награжден денежной премией (1949 г.), а позднее (1953 г.) был удостоен Сталинской премии третьей степени.

В 1955 г. на Урале был открыт новый ядерный центр (ВНИИТФ, г. Снежинск), где Н. Н. Яненко в 34 года был назначен начальником математического отделения. О себе он говорил так: «Я не имел достаточных знаний численных методов. Тем не менее я согласился, потому что знал: необходимо решать важные задачи, создав новый коллектив высококлассных специалистов» [5].

Н. Н. Яненко, предвидя стремительное развитие вычислительной техники и вычислительной математики, активизировал создание методик для расчета многомерных задач. Для работы в отделении он набрал лучших выпускников из МГУ и ЛГУ, организовал им стажировку по численным методам в Москве. С этого времени Николай Николаевич начал вести активные исследования в области экономических разностных схем для решения задач механики сплошной среды. Новое подразделение было ориентировано на использование появляющихся отечественных ЭВМ. Здесь появились и первые ученики школы Яненко. Он считал, что эффективность использования вычислительной техники можно увеличить, разрабатывая и применяя неявные алгоритмы повышенной точности.

В 1957 г. в Новосибирске было создано СО АН СССР. По приглашению директора ВЦ СО РАН Гурия Ивановича Марчука в октябре 1963 г. Н.Н. Яненко вместе с семьей переехал в Новосибирск на работу в Вычислительном центре СО АН СССР. Он назначается заведующим отделом численных методов механики сплошной среды этого центра, становится профессором НГУ, в котором им была организована кафедра вычислительных методов механики сплошной среды.

Одним из главных достижений Н.Н. Яненко в вычислительной математике является создание (1957–1963 гг.) «метода дробных шагов», позволяющего свести решение многомерной задачи к последовательному решению соответствующей цепочки одномерных задач. Результаты этой работы были сконцентрированы в монографии Н.Н. Яненко «Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики», которая вышла в 1967 г. и была переведена на немецкий, французский и английский языки. Сразу же после выхода в свет этой монографии она была привезена в Томск выпускником кафедры прикладной и вычислительной математики В.А. Сапожниковым (аспирантом Н.Н. Яненко) и изуча-

лась на семинаре кафедры под руководством доцента Р. М. Малаховской. Это сыграло важную роль в развитии нового научного направления по численным методам решения многомерных краевых задач в ТГУ [6].

В 1966 г. Николай Николаевич избран в члены-корреспонденты АН СССР, а в 1970 г. становится академиком АН СССР по отделению механики и процессов управления. С 1976 г. в течение 8 лет он был директором Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР. Он способствовал созданию системы подготовки кадров для ВЦ СО АН СССР и ММФ ТГУ, в соответствии с которой первые три курса студенты механико-математического факультета учились в ТГУ, а затем проходили специализацию и заканчивали образование в НГУ. Благодаря его поддержке в лабораториях НИИ ПММ при ТГУ использовались новые постановки задач и передовые математические технологии.



**Фото 11.** Н.Н. Яненко и директор НИИ ПММ А. Д. Колмаков. Томск, 1975  
**Fig. 11.** N.N. Yanenko and A.D. Kolmakov, Director of the Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics. Tomsk, 1975

Многие годы для сотрудников ММФ и НИИ ПММ через отдел Н.Н. Яненко заказывалось машинное время на наиболее современных для того времени электронно-вычислительных машинах М-220 и БЭСМ-6. Благодаря такому комплексному взаимодействию, в НИИ ПММ и на ММФ стало развиваться направление, связанное с математическим моделированием сопряженных задач механики реагирующих сред в областях сложной формы. В частности, выделение больших объемов дефицитного времени на БЭСМ-6 на ВЦ СО АН СССР позволило провести вычислительные эксперименты, которые подтвердили возможность появления термокинетических колебаний в реагирующих средах [7].

Николай Николаевич обладал обостренным чувством новизны в науке. В нем удачно сочетались талант ученого и педагога. Он создал стройную систему («кольцо») научных семинаров разного уровня, одним из которых был семинар по механике реагирующих сред на ММФ ТГУ (1973 г.). Он считал, что университетская наука позволяет организовать поиск талантливых, увлеченных наукой студентов и способствует сохранению принципа неразрывности науки и образования.

Николай Николаевич много раз приезжал в ТГУ для чтения лекций. Он способствовал созданию на ММФ ТГУ кафедры физической механики (1977 г.) и отдела механики реагирующих сред в НИИ ПММ при ТГУ, проводил консультации, устраивал Всесоюзные школы-семинары по численным методам механики вязкой жидкости и механике реагирующих сред. Благодаря его поддержке сотрудниками ТГУ публиковались монографии, статьи в ДАН СССР и сборнике «Численные методы механики сплошной среды», защищались диссертации. Он поддержал проект профессора А.М. Гришина о разработке математической модели интенсивных лесных пожаров (1976 г.). Николай Николаевич был одним из инициаторов создания пакетов прикладных программ, параллельных вычислительных технологий, метода дифференциального приближения, исследований по интервальному анализу.

6 июня 1980 г. в период празднования 100-летия ТГУ, Николай Николаевич проводил в Томске VIII Всесоюзную школу-семинар по численным методам механики вязкой жидкости. В декабре того же года он принимал участие в торжественном собрании, посвященном вручению ТГУ высокой награды Родины – ордена Октябрьской Революции, 13 декабря выступал в Alma Mater с докладом «О современных проблемах вычислительной математики».



**Фото 12.** Академик Н.Н. Яненко с участниками VIII Всесоюзной школы-семинара. Томск, 1980  
**Fig. 12.** Academician N.N. Yanenko with the participants of the 8th All-Union School-Seminar. Tomsk, 1980

Из всех учителей, которые существенно повлияли на становление личности и успехи в науке, он выделял учителя математики в школе Е. В. Лазареву, профессора П. К. Рашевского и академика А. Н. Тихонова. Николай Николаевич говорил о себе так: «Тот, кто был на войне прошел гигантскую школу, своеобразный университет. В этом смысле я могу сказать, что закончил три университета – Томский, Ленинградский и Московский» [8].

Среди наград Н. Н. Яненко имеются следующие: лауреат Государственной премии СССР (1972, 1985), награжден тремя орденами Трудового Красного Знамени (1953, 1955, 1971) и Октябрьской Революции (1975), Красной Звезды (1945), медалями «За отвагу» (1944), «За оборону Ленинграда», «За победу над Германией в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.», награжден Сталинской премией (1953). В день шестидесятилетия 22 мая 1981 г. ему было присвоено звание Героя Социалистического труда.

У Николая Николаевича более 350 научных работ и 15 монографий, в которых он являлся автором либо соавтором.

Вся его жизнь, сибирский характер, талант организатора, беспредельная преданность науке и своему Отечеству, неутомимый труд и высокая принципиальность являются яркой страницей в истории мировой и отечественной математики, вычислительной механики и суперкомпьютерных технологий, в истории первого на просторах Сибири Томского государственного университета.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Николай Николаевич Яненко*: очерки, статьи, воспоминания / сост. Н.Н. Бородина. Новосибирск: Наука, 1988. 300 с. (Ученые СССР. Очерки. Воспоминания. Материалы).
2. *Молькин М.А.* Материально-бытовые условия жизни студентов Томского государственного университета в годы Великой Отечественной войны // Вестник Том. гос. ун-та. 2013. № 372. С. 126-129.
3. *Яненко Николай Николаевич* // Электронная энциклопедия НИ ТГУ. URL: [http://wiki.tsu.ru/wiki/index.php/Яненко\\_Николай\\_Николаевич](http://wiki.tsu.ru/wiki/index.php/Яненко_Николай_Николаевич) (дата обращения: 5.08.2021).
4. *Яненко Николай Николаевич* (1921 – 1984) // История РОСАТОМА. 2021. URL: [http://www.biblioatom.ru/founders/yanenکو\\_nikolay\\_nikolaevich/](http://www.biblioatom.ru/founders/yanenکو_nikolay_nikolaevich/) (дата обращения: 01.08.2021).
5. *Богуненко Н.Н.* Н.Н. Яненко и ядерное оружие // Наука в Сибири. 2011. № 21. URL: <http://www.nsc.ru/HBC/article.phtml?nid=593&id=9> (дата обращения: 6.08.2021).
6. *Механико-математическому факультету – 70 лет* / под ред. А.В. Старченко. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2018. 65 с.
7. *Гришин А.М.* Академик Николай Николаевич Яненко – ученый, педагог, человек. Томск: Том. гос. ун-т, 1997. 63 с.
8. *Бородина Н.Н.* Три университета лейтенанта Яненко // Наука в Сибири. 2015. 7 мая. URL: <https://www.sbras.info/articles/education/tri-universiteta-leitenanta-yanenکو> (дата обращения: 7.08.2021).
9. *Государственный архив Томской области (ГАТО). Ф. Р.815. Оп. 17. Д. 1721.*
10. *ГАТО. Ф. Р.815. Оп. 19. Д. 935.*

Статья поступила 10.08.2021

Bertsun V.N., Kosova E.S. (2021) LIFE HISTORY STAGES of THREE UNIVERSITIES GRADUATE (To the 100th anniversary birth of the Academician N.N. Yanenko). *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 73. pp. 135–145

DOI 10.17223/19988621/73/12

Keywords: graduates of Tomsk University, mathematical modeling of continuum mechanics problems, fractional step method, parallel computing technologies

The article presents the main stages of scientific activity of an outstanding Soviet mathematician and mechanic, Academician Nikolai Nikolaevich Yanenko, graduate of the Faculty of Mechanics and Mathematics of Tomsk University, Honored Activist of Socialist Labor, winner of three USSR State Prizes.

*Vladimir N. BERTSUN* (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics and Computer Modelling of the Mechanics and Mathematics Faculty of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: [bvn@math.tsu.ru](mailto:bvn@math.tsu.ru)

*Ekaterina S. KOSOVA* (Chief librarian of the Tomsk State University Research Library, Tomsk, Russian Federation) E-mail: [kosovaes@lib.tsu.ru](mailto:kosovaes@lib.tsu.ru)

## REFERENCES

1. *Nikolay Nikolayevich Yanenko: Essays, Articles, Memoirs* (1988), ed. by N.N. Borodina. Novosibirsk: Nauka.
2. Mol'kin M.A. (2013) Material'no-bytovyye usloviya zhizni studentov Tomskogo gosudarstvennogo universiteta v gody Velikoy Otechestvennoy voyny [Material and living conditions of students of Tomsk State University in years of the Great Patriotic War]. *Bulletin of Tomsk State University*. 372. pp. 126–129.
3. *Yanenko Nikolay Nikolaevich*. Electronic encyclopedia of NR TSU. URL: [http://wiki.tsu.ru/wiki/index.php/Yanenko,\\_Nikolai\\_Nikolaevich](http://wiki.tsu.ru/wiki/index.php/Yanenko,_Nikolai_Nikolaevich) (date of access: 5.08.2021).
4. *Yanenko Nikolay Nikolaevich (1921–1984)*. History of ROSATOM. 2021. URL: [http://www.biblioatom.ru/founders/yanenko\\_nikolay\\_nikolaevich/](http://www.biblioatom.ru/founders/yanenko_nikolay_nikolaevich/) (date of access: 01.08.2021).
5. Bogunenkov N.N. (2011) N.N. Yanenko i yadernoye oruzhiye [N.N. Yanenko and nuclear weapons]. *Nauka v Sibiri. – Science in Siberia*. 21. URL: <http://www.nsc.ru/HBC/article.phtml?nid=593&id=9> (date of access: 6.08.2021)
6. *Mechanical and Mathematical Faculty – 70 years*. Ed. by A.V. Starchenko. Tomsk: Tomsk State University.
7. Grishin A.M. (1997) *Akademik Nikolay Nikolayevich Yanenko – uchenyy, pedagog, chelovek* [Academician Nikolai Nikolayevich Yanenko: scientist, teacher, person]. Tomsk: Tomsk State University.
8. Borodina N.N. (2015) Tri universiteta leytenanta Yanenko [Three universities of Lieutenant Yanenko]. *Nauka v Sibiri – Science in Siberia*. URL: <https://www.sbras.info/articles/education/tri-universiteta-leitenanta-yanenko> (date of access: 7.08.2021).
9. SATR (State Archive of Tomsk Region). Fund P.815, series 17, folder 1721.
10. SATR (State Archive of Tomsk Region). Fund P.815, series 19, folder 935.

Received: August 10, 2021

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**БЕРЦУН Владимир Николаевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: bvn@math.tsu.ru

**БОГДАНОВА Софья Борисовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладных программных средств и математических методов Московского авиационного института, г. Москва, Россия. E-mail: sonjaf@list.ru

**БУБЕНЧИКОВ Алексей Михайлович** – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник РНОМЦ ТГУ, профессор кафедры теоретической механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: bubenchikov\_am@mail.ru

**БУБЕНЧИКОВ Михаил Алексеевич** – доктор физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: michael121@mail.ru

**БУРАКОВ Валерий Арсеньевич** – научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: lex\_okha@mail.ru

**ГЛАДКОВ Сергей Октябрьнович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладных программных средств и математических методов Московского авиационного института, г. Москва, Россия. E-mail: sglad51@mail.ru

**ДЖУРАЕВА Наргиза Батиржановна** – младший научный сотрудник института механики и сейсмостойкости сооружений Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: nargiza.1968@mail.ru

**ДЬЯЧКОВСКИЙ Алексей Сергеевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: lex\_okha@mail.ru

**ИСМАИЛОВ Куат Кайратович** – младший научный сотрудник суперкомпьютерного центра Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: mendikjan@gmail.com

**ИЩЕНКО Александр Николаевич** – доктор физико-математических наук, зам. директора по НИР Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

**КАПРУЛИН Дмитрий Сергеевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории теоретической и экспериментальной физики, доцент кафедры квантовой теории поля, инженер кафедры теории поля Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: dsc@phys.tsu.ru

**КАРАВАЦКИЙ Александр Казимирович** – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: raven@ftf.tsu.ru

**КАСИМОВ Владимир Зинатович** – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией 72 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ksm@niipmm.ru

**КОСОВА Екатерина Сергеевна** – главный библиотекарь сектора хранения периодических изданий Научной библиотеки Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: kosovaes@lib.tsu.ru

**КОСТЮШИН Кирилл Владимирович** – младший научный сотрудник суперкомпьютерного центра Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

**КОСТЮШИНА Наталья Олеговна** – младший научный сотрудник суперкомпьютерного центра Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: bazhenovav@outlook.com

**КУДРАТОВ Хамза Эргашевич** – PhD докторант Национального университета Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: qudratovh\_83@mail.ru

**ЛУН-ФУ Александр Викторович** – главный инженер ООО «Газпром трансгаз Томск», г. Томск, Россия. E-mail: a.Lun-Fu@gtt.gazprom.ru

**МАМОНТОВ Дмитрий Владимирович** – аспирант кафедры теоретической механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: oregaog@mail.ru

**МАТВЕЕВА Мария Андреевна** – ассистент кафедры теории и технологии получения материалов Южно-Уральского государственного университета (НИУ), г. Челябинск, Россия. E-mail: matveevama@susu.ru

**МИКИШАНИНА Евгения Арифжановна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры актуарной и финансовой математики факультета прикладной математики, физики и информационных технологий Чувашского государственного университета, г. Чебоксары, Россия. E-mail: evaeva\_84@mail.ru

**ОРЛОВ Сергей Александрович** – кандидат физико-математических наук, директор суперкомпьютерного центра Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: orlov@ftf.tsu.ru

**ПАВЛОВ Евгений Александрович** – профессор, декан факультета математики Крымского государственного инженерно-педагогического университета, г. Симферополь, Россия. E-mail: pavlov-oe@b.k.ru

**ПАВЛОВ Михаил Сергеевич** – старший преподаватель инженерной школы природных ресурсов Томского политехнического университета, г. Томск, Россия. E-mail: mspavlov@trp.ru

**РАШИДОВ Турсунбай** – доктор технических наук, главный научный сотрудник Института механики и сейсмостойкости сооружений Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: nargiza.1968@mail.ru

**РОГАЕВ Константин Сергеевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: rogaev@ftf.tsu.ru

**РУСЯК Иван Григорьевич** – доктор технических наук, профессор, академик Российской академии ракетных и артиллерийских наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова, г. Ижевск, Россия. E-mail: primat@istu.ru

**САМОРОКОВА Нина Михайловна** – научный сотрудник научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ksm@niipmm.ru

**СЕРГЕЕВ Дмитрий Владимирович** – аспирант кафедры литейного производства Южно-Уральского государственного университета (НИУ), г. Челябинск, Россия. E-mail: sergeevav@susu.ru

**СТЕПАНЯН Сейран Павлович** – доктор технических наук, доцент, доцент кафедры численного анализа и математического моделирования факультета информатики и прикладной математики Ереванского государственного университета. E-mail: seyran.stepanyan@ysu.am

**ТЕНЕНЕВ Валентин Алексеевич** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова, г. Ижевск, Россия. E-mail: v.tenenev@gmail.com

**УРИНОВ Азиз Пардаевич** – младший научный сотрудник Института механики и сейсмостойкости сооружений Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: phd.mr.urinov@mail.ru

**ФУРМЕНКО Александр Иванович** – кандидат физико-математических наук, ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Россия. E-mail: furmenko@mail.ru

**ХУСАНБАЕВ Якубджан Мухамаджанович** – доктор физико-математических наук Института математики имени В.И. Романовского, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: yakubjank@mail.ru

**ЧУМАНОВ Илья Валерьевич** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой техники и технологии производства материалов Южно-Уральского государственного университета (НИУ), г. Челябинск, Россия. E-mail: chumanoviv@susu.ru

**ЯЧИКОВ Игорь Михайлович** – д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры информационно-измерительной техники Южно-Уральского государственного университета (НИУ), г. Челябинск, Россия. E-mail: jachikov@mail.ru

**ЯЧИКОВ Матвей Игоревич** – магистрант направления «Прикладная математика и информатика» Института физико-математических наук БФУ им. И. Канта, г. Калининград, Россия. E-mail: jachikov@mail.ru

Оригинал-макет подготовлен  
ООО «Издательство научно-технической литературы»  
634034, г. Томск, ул. Студенческая, 4

Редактор *Т.С. Портнова*  
Верстка *Д.В. Фортеса*

---

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.  
Подписано к печати 20.10.2021. Выпуск в свет 28.10.2021.  
Формат 70 × 100<sup>1/16</sup>. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».  
Усл. п. л. 11.93. Уч.-изд. л. 13.36. Тираж 250 экз. Заказ № 19. Цена свободная.

---

Отпечатано на оборудовании  
**Издательского Дома Томского государственного университета,**  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 4813.  
<http://publish.tsu.ru> E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)