ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2021 Управление, вычислительная техника и информатика № 56

УДК 519.872
DOI: 10.17223/19988605/56/4

М.А. Шкленник, А.Н. Моисеев, Л.А. Задиранова

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКА ПОВТОРНЫХ ОБРАЩЕНИЙ В ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ GI|GI|∞ С МГНОВЕННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ МЕТОДОМ МАРКОВСКОГО СУММИРОВАНИЯ

Рассматривается двухфазная система массового обслуживания с неограниченным числом приборов на каждой фазе и возможностью повторного обращения заявок ко второй фазе. На вход системы поступает рекуррентный поток заявок. Методом марковского суммирования исследуется случайный процесс, описывающий число событий в потоке повторных обращений при нестационарном режиме работы системы.
Ключевые слова: двухфазная система массового обслуживания; обратная связь; поток повторных обращений; метод марковского суммирования; метод асимптотического анализа.

Системы массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом приборов используются в качестве математических моделей при решении достаточно широкого круга прикладных задач, например при исследовании процессов в социально-экономических системах [1, 2], в телекоммуникационных системах [3, 4] и т.д.

Зачастую по различным причинам обслуживаемым объектам требуется возвращение в систему для повторного обслуживания. В таких случаях используются модели СМО с возможностью повторного обслуживания (с обратной связью). В этом классе СМО различают системы с мгновенной и отсроченной обратной связью [5]. В системах с неограниченным числом приборов, как правило, рассматриваются модели с мгновенной обратной связью.

Одним из первых исследователей, обративших свое внимание на системы с обратной связью, был Л. Такач [6, 7]. Однако в дальнейшем исследователи не проявляли особого интереса к подобного рода системам в течение достаточно длительного периода. И лишь в последние несколько десятилетий, с развитием телекоммуникационных сетей, появилась потребность построения моделей с обратной связью [8–10].

Для исследования потоков в системах с обратной связью используются различные методы. Однако, как правило, каждый из них применяется при определенных ограничениях. Так, например, метод производящей функции и метод предельной декомпозиции можно использовать лишь в системах с простейшим входящим потоком [11–15].

Особого внимания заслуживает метод асимптотического анализа [16–19], позволяющий аппроксимировать распределение вероятностей исследуемого процесса при определенных условиях в случае, когда аналитическое решение системы уравнений, характеризующих процессы в системах, не представляется возможным.

В настоящей работе предлагается применить метод марковского суммирования [20, 21] для исследования потока повторных обращений в двухфазной системе с неограниченным числом приборов на каждой фазе, мгновенной обратной связью на второй фазе, с рекуррентным входящим потоком и неэкспоненциальным обслуживанием. Как правило, исследование процессов в системах массового обслуживания проводится в предположении, что системы функционируют в стационарном режиме. Однако это не всегда соответствует целям исследования. В настоящей работе представлено исследование указанной модели в нестационарном режиме.

1. Математическая модель

Рассмотрим двухфазную систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих устройств на каждой фазе (рис. 1).

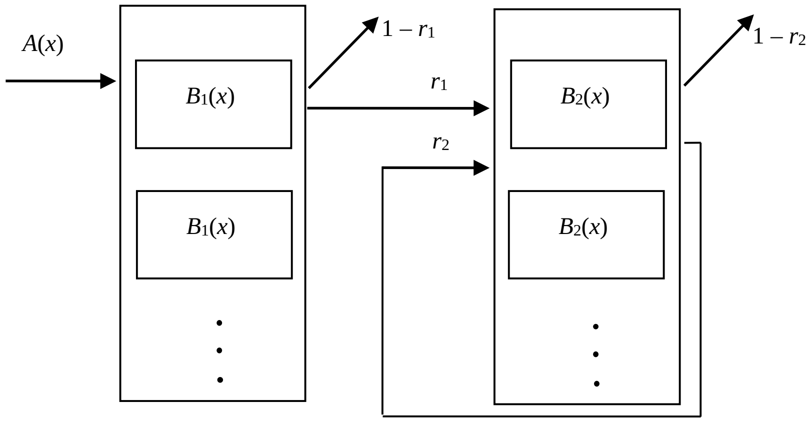

Рис. 1. Двухфазная система массового обслуживания с мгновенной обратной связью
Fig. 1. Tandem of queues with instantaneous feedback

На вход системы поступает рекуррентный поток заявок, заданный функцией распределения длин интервалов времени между последовательно наступающими событиями $A(x)$ и функционирующий в стационарном режиме. Интенсивность λ наступления событий в рекуррентном потоке определяется выражением [18]

$$\lambda = \frac{1}{\int\limits_0^\infty \left[1 - A(x)\right] dx}. \qquad (1)$$

Обслуживание заявок на первой фазе в каждом из приборов протекает независимо от других, а продолжительность такого обслуживания есть неотрицательная случайная величина с функцией распределения $B_1(x)$. По завершении обслуживания на первой фазе заявка может с вероятностью r_1 перейти на вторую фазу либо с вероятностью $(1 - r_1)$ покинуть систему. На второй фазе время обслуживания также имеет одинаковое распределение для каждого прибора с произвольной функцией распределения $B_2(x)$. По завершении обслуживания на второй фазе заявка может с вероятностью r_2 снова обратиться ко второй фазе, либо с вероятностью $(1 - r_2)$ покинуть систему. Будем называть обращение заявок на вторую фазу «повторным обращением (обслуживанием)» независимо от того, с какой фазы они поступают.

Таким образом, в рассматриваемой системе заявки, обратившиеся для обслуживания впервые и повторно, обрабатываются в течение времени, отличающегося по своим характеристикам. Поток заявок, обратившихся к системе для повторного обслуживания, т.е. поступивших на вторую фазу системы, будем называть r-потоком. Ставится задача найти распределение вероятностей числа событий в r-потоке за фиксированный интервал времени $[0; T]$ при условии, что в начальный момент времени система пуста.

2. Метод марковского суммирования

Пусть в момент времени $t_0 = 0$ система свободна и в ней нет обслуживаемых заявок. Зафиксируем некоторый момент времени T, причем $0 \le t \le T$. Каждая заявка входящего потока, поступив в систему в момент времени t, будет формировать события r-потока. Последовательность моментов наступления событий в r-потоке, сформированных одной заявкой, поступившей в систему, будем называть локальным r-потоком.

Обозначим:

– $n(t)$ – число событий r-потока, сформированных всеми заявками входящего потока, поступившими в систему на интервале $[0, t]$;

– $\xi(t)$ – число событий в r-потоке, сформированных за интервал времени $[t, T]$ одной заявкой, пришедшей в момент времени t;

– $g(i, t) = \mathrm{P}\{\xi(t) = i\}$ – вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени t, к моменту времени T сформирует в r-потоке i событий;

– $z(t)$ – остаточное время от момента t до момента наступления следующего события во входящем рекуррентном потоке;

– $P(n, z, t) = \mathrm{P}\{n(t) = n,\ z(t) < z\}$ – вероятность того, что к моменту времени t в r-потоке произошло n событий и при этом $z(t) < z$.

Тогда по формуле полной вероятности можно записать следующее равенство:

$$P(n,z,t+\Delta t) = P(n,z+\Delta t,t) - P(n,\Delta t,t) + A(z)\sum_{i=0}^{n} P(n-i,\Delta t,t)\, g(i,t) + o(\Delta t)\,.$$

При $\Delta t \to 0$ получим дифференциальное уравнение Колмогорова для распределения вероятностей $P(n, z, t)$

$$\frac{\partial P(n,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(n,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial P(n,0,t)}{\partial z} + A(z)\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial P(n-i,0,t)}{\partial z}\, g(i,t) \qquad (2)$$

с начальным условием

$$P(n,z,0) = \begin{cases} R(z),\ n=0, \\ 0,\ n>0, \end{cases} \qquad (3)$$

где $R(z)$ – распределение вероятностей значений случайного процесса $z(t)$ в стационарном режиме.

Определим характеристические функции вида

$$H(u,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(n,z,t)\,,$$

$$G(u,t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui}\, g(i,t)\,.$$

Тогда от задачи (2)–(3) можно перейти к дифференциальному уравнению для характеристической функции исследуемого процесса $n(t)$:

$$\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(u,z,t)}{\partial z} + \frac{\partial H(u,0,t)}{\partial z}\big(A(z)G(u,t) - 1\big)\,.$$

Характеристическая функция $G(u, t)$ процесса $\xi(t)$ найдена в работе [21] и имеет вид:

$$G(u,t) = 1 + r_1(e^{ju}-1)B_1(T-t) + \frac{r_1 r_2}{2\pi}(e^{ju}-1)e^{ju}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)\left(1-e^{-j\alpha(T-t)}\right)}{\left(1-r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)\right) j\alpha}\, d\alpha\,,$$

где

$$b_1^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha\tau} dB_1(\tau)\,,\ b_2^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha\tau} dB_2(\tau)\,.$$

Обозначив

$$\varphi(u,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)\left(1-e^{-j\alpha(T-t)}\right)}{\left(1-r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)\right) j\alpha}\, d\alpha\,,$$

получаем уравнение вида

$$\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(u,z,t)}{\partial z} + \frac{\partial H(u,0,t)}{\partial z}\Big[A(z) - 1 + A(z) r_1(e^{ju}-1)\Big(B_1(T-t) + r_2 e^{ju}\varphi(u,t)\Big)\Big] \qquad (4)$$

с начальным условием

$$H(u,z,0) = R(z)\,. \qquad (5)$$

Решение задачи (4)–(5) будем искать методом асимптотического анализа [16] при условии высокой интенсивности входящего потока. Для этого запишем функцию распределения длин интервалов времени между событиями входящего потока в виде $A(Nz)$, где $N > 0$ – параметр высокой интенсивности потока. Тогда, выполнив соответствующие преобразования, уравнение (3) можем переписать в виде:

$$\frac{1}{N}\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial z}+\frac{\partial H(u,0,t)}{\partial z}\Big[A(z)-1+A(z)r_1(e^{ju}-1)\Big(B_1(T-t)+r_2e^{ju}\varphi(u,t)\Big)\Big]. \qquad (6)$$

3. Асимптотический анализ первого порядка

Используя метод асимптотического анализа, выполним замены

$$\frac{1}{N}=\varepsilon, \quad u=\varepsilon w, \quad H(u,t)=F_1(w,t,\varepsilon),$$

тогда уравнение (5) можно переписать в виде:

$$\varepsilon\frac{\partial F_1(w,z,t,\varepsilon)}{\partial t}=\frac{\partial F_1(w,z,t,\varepsilon)}{\partial z}+\frac{\partial F_1(w,0,t,\varepsilon)}{\partial z}\times$$
$$\times\Big[A(z)-1+A(z)r_1(e^{jw\varepsilon}-1)\Big(B_1(T-t)+r_2e^{jw\varepsilon}\varphi(w,t,\varepsilon)\Big)\Big]. \qquad (7)$$

Теорема 1. Пусть параметр λ входящего рекуррентного потока определяется выражением (1), а функция R(z) – распределение вероятностей значений случайного процесса $z(t)$ в стационарном режиме. Тогда асимптотическое решение $F_1(w,z,t)=\lim\limits_{\varepsilon\to\infty}F_1(w,z,t,\varepsilon)$ уравнения (7) имеет вид:

$$F_1(w,z,t)=R(z)\exp\left\{jwr_1\lambda\left[\int\limits_{T-t}^{T}B_1(y)dy+\frac{r_2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{j\alpha\Big(1-r_2b_2^*(\alpha)\Big)}\left(t+\frac{e^{-j\alpha T}-e^{-j\alpha(T-t)}}{j\alpha}\right)d\alpha\right]\right\}. \qquad (8)$$

где $b_k^*(\alpha)=\int\limits_0^{\infty}e^{j\alpha t}dB_k(t)$ – преобразование Фурье–Стилтьеса функции распределения $B_k(t)$ времени обслуживания на фазах системы, $k = 1, 2$.

Доказательство. Доказательство теоремы будем проводить в два этапа.

Этап 1. В уравнении (6) выполним предельный переход ε → 0, получим следующее уравнение:

$$0=\frac{\partial F_1(w,z,t)}{\partial z}+\frac{\partial F_1(w,0,t)}{\partial z}\big[A(z)-1\big],$$

решение которого будем искать в виде:

$$F_1(w,z,t)=R(z)\Phi_1(w,t), \qquad (9)$$

где $\Phi_1(w, t)$ – некоторая скалярная функция.

Этап 2. Выполним в (7) предельный переход $z \to \infty$, получим

$$\varepsilon\frac{\partial F_1(w,\infty,t,\varepsilon)}{\partial t}=\frac{\partial F_1(w,0,t,\varepsilon)}{\partial z}r_1(e^{jw\varepsilon}-1)\Big(B_1(T-t)+r_2e^{jw\varepsilon}\varphi(w,t,\varepsilon)\Big). \qquad (10)$$

Разложим $e^{jw\varepsilon}$ и функцию $\varphi(w,\varepsilon, t)$ в ряд Маклорена:

$$e^{jw\varepsilon}=1+jw\varepsilon+O(\varepsilon^2), \qquad (11)$$

$$\varphi(w,\varepsilon,t)=a_0(t)+a_1(t)\cdot jw\varepsilon+O(\varepsilon^2), \qquad (12)$$

где

$$a_0(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}b_1^*(\alpha)\frac{b_2^*(\alpha)}{1-r_2b_2^*(\alpha)}\left(\frac{1-e^{-j\alpha(T-t)}}{j\alpha}\right)d\alpha, \qquad (13)$$

$$a_1(t)=r_2\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}b_1^*(\alpha)\left(\frac{b_2^*(\alpha)}{1-r_2b_2^*(\alpha)}\right)^2\left(\frac{1-e^{-j\alpha(T-t)}}{j\alpha}\right)d\alpha. \qquad (14)$$

Подставим выражения (9), (11), (12) в уравнение (10), разделим обе части равенства на ε и произведем предельный переход ε → 0. С учетом того, что $R'(0)=\lambda$ [18], получаем дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi_1(w, t)$

$$\frac{\partial\Phi_1(w,t)}{\partial t}=r_1\lambda jw\Phi_1(w,t)\left(B_1(T-t)+r_2a_0(t)\right).$$

Обозначим

$$\psi(x)=B_1(T-x)+r_2a_0(x), \tag{15}$$

тогда решение этого уравнения при начальном условии $\Phi_1(w, 0) = 1$ имеет вид:

$$\Phi_1(w,t)=\exp\left\{jwr_1\lambda\int_0^t\psi(x)dx\right\}. \tag{16}$$

Подставив в (16) выражение (13) и выполнив несложные преобразования, получим следующее выражение для функции $\Phi_1(w,t)$:

$$\Phi_1(w,t)=\exp\left\{jwr_1\lambda\left[\int_{T-t}^{T}B_1(y)dy+\frac{r_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{j\alpha\left(1-r_2b_2^*(\alpha)\right)}\left(t+\frac{e^{-j\alpha T}-e^{-j\alpha(T-t)}}{j\alpha}\right)d\alpha\right]\right\}. \tag{17}$$

Тогда, подставляя (17) в (9), получаем асимптотическое решение $F_1(w,z,t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}F_1(w,z,t,\varepsilon)$ задачи (7) в виде (8). Теорема доказана.

4. Асимптотический анализ второго порядка

В уравнении (5) выполним следующую замену:

$$H(u,z,t)=H_2(u,z,t)\exp\left\{juNr_1\lambda\int_0^t\psi(x)dx\right\}, \tag{18}$$

получим уравнение относительно функции $H_2(u, z, t)$

$$\frac{1}{N}\frac{\partial H_2(u,z,t)}{\partial t}+ju\lambda r_1H_2(u,z,t)\psi(t)=$$

$$=\frac{\partial H_2(u,z,t)}{\partial z}+\frac{\partial H_2(u,0,t)}{\partial z}\left[A(z)-1+A(z)r_1\left(e^{ju}-1\right)\left(B_1(T-t)+r_2e^{ju}\varphi(u,t)\right)\right].$$

Выполним в этом уравнении замены

$$\frac{1}{N}=\varepsilon^2,\quad u=\varepsilon w,\quad H_2(u,z,t)=F_2(w,z,t,\varepsilon), \tag{19}$$

получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_2(w,z,t,\varepsilon)}{\partial t}+j\varepsilon w\lambda r_1F_2(w,z,t,\varepsilon)\psi(t)=$$

$$=\frac{\partial F_2(w,z,t,\varepsilon)}{\partial z}+\frac{\partial F_2(w,0,t,\varepsilon)}{\partial z}\left[A(z)-1+A(z)r_1\left(e^{j\varepsilon w}-1\right)\left(B_1(T-t)+r_2e^{j\varepsilon w}\varphi(w,t,\varepsilon)\right)\right]. \tag{20}$$

Теорема 2. Пусть параметр λ входящего рекуррентного потока определяется выражением (1), функция $R(z)$ – распределение вероятностей значений случайного процесса $z(t)$ в стационарном режиме и

$$\kappa=r_1\lambda^3(\sigma^2-a^2), \tag{21}$$

где а и σ^2 – конечные математическое ожидание и дисперсия случайной величины с функцией распределения $A(x)$. Тогда асимптотическое решение $F_2(w,z,t)=\lim\limits_{\varepsilon\to\infty}F_2(w,z,t,\varepsilon)$ уравнения (20) имеет вид:

$$F_2(w,z,t)=R(z)\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}r_1\left[\lambda\int_{T-t}^{T}B_1(y)dy+\lambda\frac{3r_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{j\alpha\left(1-r_2b_2^*(\alpha)\right)}\left(t-\frac{e^{-j\alpha(T-t)}-e^{-j\alpha T}}{j\alpha}\right)d\alpha+\right.\right.$$

$$+\frac{\lambda r_2^2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)}{i\alpha}\left(\frac{b_2^*(\alpha)}{1-r_2 b_2^*(\alpha)}\right)^2\left(t-\frac{e^{-j\alpha(T-t)}-e^{-j\alpha T}}{j\alpha}\right)d\alpha+$$

$$+\kappa\int_{T-t}^{T}\left(B_1(y)+\frac{r_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{\left(1-r_2 b_2^*(\alpha)\right)}\left(\frac{1-e^{-j\alpha y}}{j\alpha}\right)d\alpha\right)^2 dy\Bigg]\Bigg\}, \qquad (22)$$

где $b_k^*(\alpha)=\int_0^\infty e^{j\alpha t}dB_k(t)$ – преобразование Фурье–Стилтьеса функции распределения $B_k(t)$ времени обслуживания на фазах системы, $k = 1, 2$.

Доказательство выполним в три этапа.

Этап 1. Положим в (20) $\varepsilon \to 0$, получим

$$\frac{\partial F_2(w,z,t)}{\partial z}+\frac{\partial F_2(w,0,t)}{\partial z}\left[A(z)-1\right]=0.$$

Решение уравнения $F_2(w, z, t)$ будем искать в виде:

$$F_2(w,z,t)=R(z)\Phi_2(w,t), \qquad (23)$$

где $\Phi_2(w, t)$ – некоторая функция, не зависящая от z.

Этап 2. Решение уравнения (20) запишем в виде разложения

$$F_2(w,z,t,\varepsilon)=\Phi_2(w,t)\left[R(z)+j\varepsilon w\psi(t)f(z)\right]+O\left(\varepsilon^2\right), \qquad (24)$$

где $f(z)$ – некоторая функция. Подставим это выражение в (18). Используя разложения (11) и (12), получим

$$j\varepsilon w\lambda r_1\psi(t)\Phi_2(w,t)R(z)=\Phi_2(w,t)\left\{R'(z)+j\varepsilon wf'(z)\psi(t)+R'(0)\left[A(z)-1\right]+\right.$$

$$\left.+R'(0)j\varepsilon wr_1A(z)\psi(t)+j\varepsilon wf'(0)\psi(t)\left[A(z)-1\right]\right\}+O\left(\varepsilon^2\right).$$

В [18] показано, что

$$R'(z)=R'(0)\left[1-A(z)\right],$$

тогда, приведя подобные и сократив обе части на $j\varepsilon w$, получим

$$\lambda r_1R(z)=f'(z)+f'(0)\left[A(z)-1\right]+\lambda r_1A(z)+O(\varepsilon).$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $f(z)$:

$$f'(z)=f'(0)\left[1-A(z)\right]+\lambda r_1\left[A(z)-R(z)\right].$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения по z от 0 до ∞, получим уравнение

$$f(\infty)-f(0)=f'(0)\cdot\frac{1}{\lambda}-\lambda r_1\left(\int_0^\infty\left[1-R(z)\right]dz-\int_0^\infty\left[1-A(z)\right]dz\right),$$

решение которого дает результат [18]

$$f'(0)-\lambda f(\infty)=\frac{\kappa}{2}, \qquad (25)$$

где κ определяется выражением (21).

Этап 3. В уравнении (20) выполним предельный переход при $z \to \infty$. В силу способа построения функции $F_2(w, z, t, \varepsilon)$ она является монотонно возрастающей и ограниченной сверху функцией по z. Следовательно,

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\partial F_2(w,z,t,\varepsilon)}{dz}=0.$$

Учитывая это и применяя разложение экспоненты $e^{j\varepsilon w}=1+j\varepsilon w+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}+O\left(\varepsilon^3\right)$ и функции $\varphi(w,\varepsilon,t)=a_0(t)+a_1(t)\cdot jw\varepsilon+O(\varepsilon^2)$, получаем

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w,\infty,t,\varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon w\lambda r_1\psi(t)F_2(w,\infty,t,\varepsilon) = \frac{\partial F_2(w,0,t,\varepsilon)}{\partial z}\left[j\varepsilon w r_1\psi(t) + \right.$$
$$\left. + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} r_1\left(\psi(t) + 2r_2 a_0(t) + 2r_2 a_1(t)\right) + O\left(\varepsilon^3\right)\right].$$

Подставим сюда разложение (24), при $z \to \infty$ получим

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(w,t)}{\partial t} + j\varepsilon w\lambda r_1\psi(t)\Phi_2(w,t) + (j\varepsilon w)^2\lambda r_1\psi^2(t) f(\infty)\Phi_2(w,t) =$$
$$= \Phi_2(w,t)\left[j\varepsilon w\lambda r_1\psi(t) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\lambda r_1\left(\psi(t) + 2r_2(a_0(t)+a_1(t))\right) + (j\varepsilon w)^2 r_1\psi^2(t)\frac{df(0)}{dz}\right] + O\left(\varepsilon^3\right).$$

Приведем подобные и сократим на ε^2, тогда

$$\frac{\partial \Phi_2(w,t)}{\partial t} = \frac{(jw)^2}{2}\Phi_2(w,t)\left[\lambda r_1\left(\psi(t) + 2r_2(a_0(t)+a_1(t))\right) + 2r_1\psi^2(t)\left(\frac{df(0)}{dz} - \lambda f(\infty)\right)\right] + O(\varepsilon).$$

Учитывая (25) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\Phi_2(w,t)$

$$\frac{\partial \Phi_2(w,t)}{\partial t} = \frac{(jw)^2}{2}\Phi_2(w,t) r_1\left[\lambda\left(\psi(t) + 2r_2(a_0(t)+a_1(t))\right) + \psi^2(t)\kappa\right].$$

Решение этого уравнения с учетом начального условия $\Phi_2(w, 0) = 1$ имеет вид:

$$\Phi_2(w,t) = \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2} r_1\left[\lambda\int_0^t\left[\psi(x) + 2r_2\left(a_0(x)+a_1(x)\right)\right]dx + \kappa\int_0^t\psi^2(x)dx\right]\right\}.$$

Тогда в силу (23) имеем

$$F_2(w,z,t) = R(z)\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2} r_1\left[\lambda\int_0^t\left[\psi(x) + 2r_2\left(a_0(x)+a_1(x)\right)\right]dx + \kappa\int_0^t\psi^2(x)dx\right]\right\}.$$

Подставив сюда выражения (13), (14), (15) для функций $a_0(x)$, $a_1(x)$ и $\psi(x)$ и выполнив несложные преобразования, получаем выражение (22), что и требовалось доказать.

Вернемся к характеристической функции $H(u, z, t)$ исследуемого процесса. Выполним в (22) обратные замены и получим аппроксимацию

$$H(u,z,t) \approx R(z)\exp\left\{ juNr_1\lambda\left[\int_{T-t}^{T} B_1(y)dy + \frac{r_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{j\alpha\left(1-r_2b_2^*(\alpha)\right)}\left(t + \frac{e^{-j\alpha T} - e^{-j\alpha(T-t)}}{j\alpha}\right)d\alpha\right] + \right.$$
$$+ \frac{(ju)^2}{2}Nr_1\left[\lambda\int_{T-t}^{T} B_1(y)dy + \lambda\frac{3r_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)\left(3-r_2b_2^*(\alpha)\right)}{j\alpha\left(1-r_2b_2^*(\alpha)\right)^2}\left(t - \frac{e^{-j\alpha(T-t)} - e^{-j\alpha T}}{j\alpha}\right)d\alpha + \right.$$
$$\left.\left. + \kappa\int_{T-t}^{T}\left(B_1(y) + \frac{r_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{\left(1-r_2b_2^*(\alpha)\right)}\left(\frac{1-e^{-j\alpha y}}{j\alpha}\right)d\alpha\right)^2 dy\right]\right\},$$

которая имеет место при достаточно больших значениях N.

Функция $H(u,T) = \lim_{z\to\infty} H(u,z,T)$ есть характеристическая функция числа событий, наступивших в потоке повторных обращений за интервал времени $[0, T]$.

$$H(u,T) \approx \exp\left\{ juNr_1\lambda\left[\int_0^T B_1(y)dy + \frac{r_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{j\alpha\left(1-r_2b_2^*(\alpha)\right)}\left(T - \frac{1-e^{-j\alpha T}}{j\alpha}\right)d\alpha\right] + \right.$$

$$+\frac{(ju)^2}{2}Nr_1\left[\lambda\int_0^T B_1(y)dy+\lambda\frac{r_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)\left(3-r_2b_2^*(\alpha)\right)}{j\alpha\left(1-r_2b_2^*(\alpha)\right)^2}\left(T-\frac{1-e^{-j\alpha T}}{j\alpha}\right)d\alpha+\right.$$

$$\left.\left.+\kappa\int_0^T\left(B_1(y)+\frac{r_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{\left(1-r_2b_2^*(\alpha)\right)}\left(\frac{1-e^{-j\alpha y}}{j\alpha}\right)d\alpha\right)^2dy\right]\right\}. \quad (26)$$

Таким образом, при достаточно больших значениях N распределение числа событий в потоке повторных обращений за интервал времени $[0, T]$ аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием

$$M\{n(T)\}=Nr_1\lambda\left[\int_0^T B_1(y)dy+\frac{r_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{j\alpha\left(1-r_2b_2^*(\alpha)\right)}\left(T-\frac{1-e^{-j\alpha T}}{j\alpha}\right)d\alpha\right] \quad (27)$$

и дисперсией

$$D\{n(T)\}=Nr_1\left[\lambda\int_0^T B_1(y)dy+\lambda\frac{r_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)\left(3-r_2b_2^*(\alpha)\right)}{j\alpha\left(1-r_2b_2^*(\alpha)\right)^2}\left(T-\frac{1-e^{-j\alpha T}}{j\alpha}\right)d\alpha+\right.$$

$$\left.+\kappa\int_0^T\left(B_1(y)+\frac{r_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{\left(1-r_2b_2^*(\alpha)\right)}\left(\frac{1-e^{-j\alpha y}}{j\alpha}\right)d\alpha\right)^2dy\right]. \quad (28)$$

Численные результаты

Для демонстрации качества аппроксимации (26)–(28) приведем численный пример. Рассмотрим двухфазную систему массового обслуживания с мгновенной обратной связью, модель которой представлена в разделе 1. Выберем следующие параметры модели:

– длины интервалов во входящем рекуррентном потоке имеют гамма-распределение с параметрами формы и масштаба, соответственно равными $\alpha = 0{,}5$ и $\beta = 0{,}5N$ (в таком случае интенсивность входящего потока равна N);

– времена обслуживания на первой и второй фазах имеют гамма-распределения с параметрами формы и масштаба $\alpha_1 = 0{,}5$, $\beta_1 = 0{,}5$ для первой фазы и $\alpha_2 = 1{,}5$, $\beta_2 = 1{,}5$ для второй;

– вероятности перехода заявки с первой фазы на вторую и повторного обслуживания после второй фазы соответственно равны $r_1 = 0{,}75$ и $r_2 = 0{,}5$.

Будем находить параметры гауссовской аппроксимации (26)–(28) нестационарного распределения числа событий в потоке повторных обращений за интервал времени [0, 1] ($T = 1$) и сравнивать ее с результатами имитационного моделирования при различных N. На графиках (рис. 2) представлены полученные распределения для нескольких значений N. Как видно, полученное распределение (26)–(28) достаточно хорошо аппроксимирует искомое при различных значениях N.

Для численного анализа точности аппроксимации будем использовать расстояние Колмогорова

$$\Delta=\max_{i\geq 0}\left|\sum_{n=0}^{i}\left[P(n)-F(n)\right]\right|$$

между соответствующими распределениями числа событий в потоке повторных обращений для гауссовской аппроксимации $P(n)$ и для распределения $F(n)$, полученного в результате имитационного моделирования. В таблице приведены значения расстояний Колмогорова для рассматриваемого численного примера. Как видим, при увеличении параметра N высокой интенсивности входящего потока расстояние Колмогорова между указанными распределениями уменьшается, т.е. точность полученной аппроксимации растет.

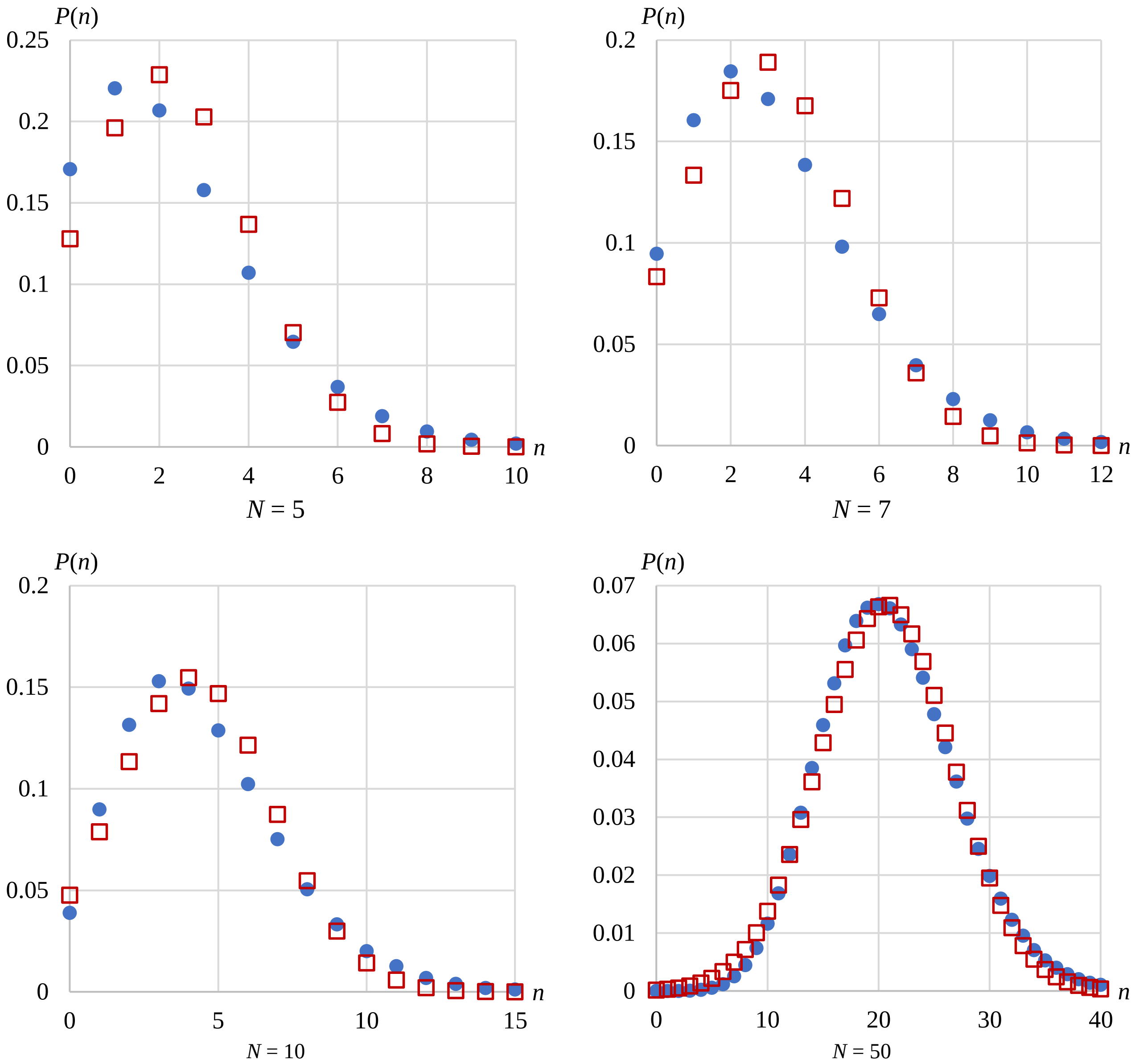

Рис. 2. Сравнение гауссовской аппроксимации (квадраты) распределения числа событий в потоке повторных обращений n и распределения, полученного в результате имитационного моделирования (закрашенные кружки), для разных значений N параметра высокой интенсивности входящего потока

Fig. 2. Comparisons of the Gaussian approximation (squares) and empiric distribution (circles) for various values of parameter N

Расстояние Колмогорова Δ между аппроксимацией и эмпирическим распределением

N	5	6	7	10	25	50	100	200
Δ	0,0671	0,0541	0,0479	0,0315	0,0227	0,0181	0,0125	0,0086

Если в качестве допустимого значения погрешности принять расстояние Колмогорова $\Delta \le 0{,}05$, то для рассматриваемого примера можно считать, что полученная аппроксимация применима при $N \ge 7$. Таким образом, полученный результат (26)–(28) применим даже для не очень больших значений интенсивности входящего потока.

Заключение

В работе рассмотрена математическая модель обслуживания заявок в двухфазной системе массового обслуживания GI|GI|∞→GI|∞ с возможностью повторного обращения заявки ко второй фазе системы. Методом марковского суммирования получена система уравнений для исследования случайного процесса, описывающего число событий в потоке повторных обращений к системе при нестационарном режиме работы. Методом асимптотического анализа при условии высокой интенсивности входящего потока доказано, что распределение вероятностей числа событий в потоке повторных обращений за фиксированный интервал времени [0; T] может быть аппроксимировано нормальным распределением с математическим ожиданием и дисперсией, вычисляемыми по формулам (27) и (28) соответственно. Проведенные численные эксперименты подтверждают хорошее качество данной аппроксимации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозова А.С., Моисеева С.П., Назаров А.А. Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 293. С. 49–52.
2. Жидкова Л.А., Моисеева С П. Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322, № 6. С. 5–9.
3. Van Doorn E.A., Jagers A.A. A Note on the GI/GI/∞ system with identical service and interarrival-time distributions // Queueing Systems. 2004. V. 47. P. 45–52.
4. Whitt W. Fluid models for multiserver queues with abandonments // Operations Research. 2006. V. 54. P. 37–54.
5. Королюк В.С., Меликов А.З., Пономаренко Л.А., Рустамов А.М. Методы анализа многоканальной системы обслуживания с мгновенной и отсроченной обратными связями // Кибернетика и системный анализ. 2016. Т. 52, № 1. С. 64–77.
6. Takács L. A single-server queue with feedback // Bell Syst. Tech. J. 1963. V. 42. P. 505–519.
7. Takács L. A queuing model with feedback // Oper. Res. 1977. V. 11. P. 345–354.
8. Boxma O.J., Yechiali U. An M/G/1 queue with multiple types of feedback and gated vacations // J. Appl. Probab. 1997. V. 34, is. 3. P. 773–784.
9. Choi B.D., Kim B., Choi S.H. An M/G/1 queue with multiple types of feedback, gated vacations and FCFS policy // Comput. & Oper. Res. 2003. V. 30, is. 9. P. 1289–1309.
10. Melikov A.Z., Aliyeva S.H., Sztrik J. Analysis of queuing system MMPP/M/ K/K with delayed feedback // Mathematics. 2019. V. 7, № 11. 14 p. DOI: 10.3390/math7111128
11. Shklennik M., Moiseeva S., Moiseev A. Analysis of queueing tandem with feedback by the method of limiting decomposition // Communications in Computer and Information Science. 2017. V. 800. P. 147–157.
12. Моисеева С.П., Морозова А.С., Назаров А.А. Исследование суммарного потока обращений в бесконечно линейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 290. С.173–175.
13. Назаров А.А., Моисеева С.П., Морозова А.С. Исследование СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. № 55. С. 88–92.
14. Шкленник М.А., Моисеев А.Н. Исследование потоков заявок в двухфазной системе массового обслуживания с неограниченным числом приборов и повторными обращениями // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 45. С. 48–58.
15. Моисеева С.П., Ананина И.А., Назаров А.А. Исследование потоков в системе M/GI/∞ с повторными обращениями // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 3 (8). С. 56–66.
16. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
17. Melikov A., Zadiranova L., Moiseev A. Two Asymptotic Conditions in Queue with MMPP Arrivals and Feedback // Communications in Computer and Information Science. 2016. V. 678. P. 231–240.
18. Moiseev A., Nazarov A. Investigation of high intensive general flow // Problems of Cybernetics and Informatics: proc. of the IV Int. Conf. PCI’2012 (Baku, September 12–14, 2012). Baku : IEEE, 2012. P. 161–163.
19. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Асимптотический анализ многофазной системы массового обслуживания с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком // Автометрия. 2014. Т. 50, № 2. С. 67–76.
20. Назаров А.А., Даммер Д.Д. Исследование дополнительно формируемого потока в системе с неограниченным числом приборов и рекуррентным обслуживанием методом марковского суммирования // Автоматика и телемеханика. 2019. № 12. С. 133–145.
21. Шкленник М.А., Моисеев А.Н. Метод марковского суммирования для исследования потока повторных обращений в двухфазных системах M|GI|∞ → GI|∞ // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 111–123.

Поступила в редакцию 26 мая 2021 г.

Shklennik M.A., Moiseev A.N., Zadiranova L.A. (2021) ANALYSIS OF REPEATED FLOW IN QUEUEING TANDEM GI|GI|∞ WITH FEEDBACK BY METHOD OF MARKOVIAN SUMMATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 56. pp. 29–40

DOI: 10.17223/19988605/56/4

The paper presents the study of repeated flow in the two-stage infinite-server queueing system with feedback. The arrival process is the general flow having independent and identically distributed inter-arrival periods with length distributed with cumulative distribution function (c.d.f.) $A(x)$. Service times at the first stage are independent and identically distributed (i.i.d.) with c.d.f. $B_1(x)$. After a completion of the service at the first stage, the customer go to the second stage with the probability r_1 or it may leave the system with the probability $(1 – r_1)$. Service times at the second stage are i.i.d. with c.d.f. $B_2(x)$. When the service at the second stage is completed, the customer may come back to the second stage with the probability r_2 for the repeated service or it may leave the system with the probability $(1 – r_2)$.

The problem is to determine the probability distribution of the number of repeated customers (r-flow) during fixed time period $[0; T]$.

To solve this problem, the Markov summation method is used. This method is based on the consideration of Markov processes and the solution of the Kolmogorov equations. The number of events in the r-flow is sum of number of events in the so-called local r-flow which means the number of calls generated by one incoming customer in the r-flow. The equations are solved under asymptotic condition of high intensity of arrivals.

It is shown that the probability distribution of the number of repeated customers for the time interval $[0; T]$ converges to normal distribution with parameters

$$M\{n(T)\} = Nr_1\lambda\left[\int_0^T B_1(y)dy + \frac{r_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{j\alpha\left(1-r_2b_2^*(\alpha)\right)}\left(T-\frac{1-e^{-j\alpha T}}{j\alpha}\right)d\alpha\right],$$

and

$$D\{n(T)\} = Nr_1\left[\lambda\int_0^T B_1(y)dy + \lambda\frac{r_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)\left(3-r_2b_2^*(\alpha)\right)}{j\alpha\left(1-r_2b_2^*(\alpha)\right)^2}\left(T-\frac{1-e^{-j\alpha T}}{j\alpha}\right)d\alpha + \right.$$

$$\left. +\kappa\int_0^T\left(B_1(y)+\frac{r_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{\left(1-r_2b_2^*(\alpha)\right)}\left(\frac{1-e^{-j\alpha y}}{j\alpha}\right)d\alpha\right)^2 dy\right],$$

where $b_k^*(\alpha)=\int_0^\infty e^{j\alpha t}dB_k(t)$, $k = 1, 2$.

Using simulation experiments, we establish accuracy and applicability area of the obtained approximation for various values of intensity parameter N and observation time T.

Keywords: infinite-server queueing tandem; feedback; repeated flow; method of Markovian summation; asymptotic analysis.

SHKLENNIK Maria Alexandrovna (Assistant Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: shklennikm@yandex.ru

MOISEEV Alexander Nikolaevich (Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Software Engineering, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: moiseev.tsu@gmail.com

ZADIRANOVA Lyubov Alexandrovna (Candidate of Physics and Mathematics, “GazInformPlast” Well Testing Center, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: zhidkovala@mail.ru

REFERENCES

1. Morozova, A.S., Moiseeva, S.P. & Nazarov, A.A. (2006) Investigation of the economic-mathematical model of discount for patrons influence on income of trading. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 293. pp. 49–52.
2. Zhidkova, L.A. & Moiseeva, S.P. (2013) Matematicheskaya model' potokov pokupateley dvukhproduktovoy torgovoy kompanii v vide sistemy massovogo obsluzhivaniya s povtornymi obrashcheniyami k blokam [A mathematical model of customer flows of a two-product trading company in the form of a queuing system with repeated calls to blocks]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*. 322(6). pp. 5–9.

3. Van Doorn, E.A. & Jagers, A.A. (2004) A Note on the GI/GI/infinity system with identical service and interarrival-time distributions. *Queueing Systems.* 47 pp. 45–52. DOI: 10.1023/B:QUES.0000032799.30173.b7
4. Whitt, W. (2006) Fluid models for multiserver queues with abandonments. *Operations Research.* 54. pp. 37–54. DOI: 10.1287/opre.1050.0227
5. Korolyuk, V.S., Melikov, A.Z., Ponomarenko, L.A. & Rustamov A.M. (2016) Methods for analysis of multi-channel queuing systems with instantaneous and delayed feedback. *Kibernetika i sistemnyy analiz – Cybernetics and Systems Analysis.* 52(1). pp. 58–70.
6. Takács, L. (1963) A single-server queue with feedback. *The Bell System Technical Journal*. 42. pp. 505–519.
7. Takács, L. (1977) A queuing model with feedback. *Operations Research.* 11. pp. 345–354.
8. Boxma, O.J. & Yechiali, U. (1997) An M/G/1 queue with multiple types of feedback and gated vacations. *Journal of Applied Probability.* 34(3). pp. 773–784.
9. Choi, B.D., Kim, B. & Choi S.H. (2003) An M/G/1 queue with multiple types of feedback, gated vacations and FCFS policy *Computers & Operations Research.* 30(9). pp. 1289–1309. DOI: 10.1016/S0305-0548(02)00071-0
10. Melikov, A.Z., Aliyeva, S.H. & Sztrik, J. (2019) Analysis of queuing system MMPP/M/ K/K with delayed feedback *Mathematics.* 7(11). DOI: 10.3390/math7111128
11. Shklennik, M., Moiseeva, S. & Moiseev, A. (2017) Analysis of queueing tandem with feedback by the method of limiting decomposition. *Communications in Computer and Information Science*. 800. pp. 147-157. DOI: 10.1007/978-3-319-68069-9_12
12. Moiseeva, S.P., Morozova, A.S. & Nazarov, A.A. (2006) Investigation of the flow of appeals in infinite lines queueing system with repeated service. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 290. pp. 173–175.
13. Nazarov, A.A., Moiseeva, S.P. & Morozova, A.S. (2008) Analysis of queueing system with unlimited number of servers and feedback by the method of limiting decomposition. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13(55). pp. 88–92.
14. Shklennik, M.A. & Moiseev A.N. (2018) Analysis of Customers Flows in the Infinite-Server Queueing Tandem with Feedback. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 45. pp. 48–58. DOI: 10.17223/19988605/45/6
15. Moiseeva, S.P., Ananina, I.A. & Nazarov, A.A. (2009) Research of streams in system M|GI|∞ with repeated references the method of limiting decomposition. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(8). pp. 56-66.
16. Nazarov, A.A. & Moiseeva, S.P. (2006) *Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Asymptotic analysis method in queueing theory]. Tomsk: NTL.
17. Melikov, A., Zadiranova, L. & Moiseev A. (2016) Two Asymptotic Conditions in Queue with MMPP Arrivals and Feedback. *Communications in Computer and Information Science*. 678. pp. 231–240. DOI: 10.1007/978-3-319-51917-3_21
18. Moiseev, A. & Nazarov, A. (2012) Investigation of high intensive general flow. *Problems of Cybernetics and Informatics.* Proc. of the Fourth International Conference PCI'2012. Baku, September 12–14, 2012. Baku: IEEE. pp. 161–163.
19. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2014) Asymptotic Analysis of a Multistage Queueing System with a High-Rate Renewal Arrival Process. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing.* 50(2). pp. 163–171.
20. Nazarov, A.A. & Dammer, D.D. (2019) A Study of Additionally Generated Flows in Systems with Unlimited Number of Devices and Recurrent Servicing with the Markov Summation Method. *Automation and Remote Control.* 80(12). pp. 2195–2205. DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117919120087
21. Shklennik, M.A. & Moiseev, A.N. (2021) Method of Markovian summation for study the repeated flow in queueing tandem M|GI|∞ → GI|∞. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*. 21(1). pp. 111–123. DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-1-111-123