ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2021 Управление, вычислительная техника и информатика № 56

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.873
DOI: 10.17223/19988605/56/5

Э.А. Головастова

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕНИ РАБОТЫ СИСТЕМЫ С НЕНАДЕЖНЫМИ РЕЗЕРВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ И ВОССТАНАВЛИВАЮЩИМ ПРИБОРОМ В УСЛОВИЯХ БЫСТРОГО РЕМОНТА ЭЛЕМЕНТА

Рассматривается модель с взаимозаменяемыми элементами с возможными отказами и одним надежным восстанавливающим прибором. Предполагается, что функция распределения времени работы элемента произвольная, а времени его восстановления – экспоненциальная. Получены соотношения, определяющие распределение времени работы всей системы, а также исследовано асимптотическое поведение этого распределения при условии быстрого ремонта элемента.

Ключевые слова: задача надежности; время безотказной работы системы; стохастические уравнения; преобразование Лапласа; асимптотическое поведение.

Одной из основных задач теории надежности является учет влияния отказов и сбоев компонент технических комплексов на эффективность работы всей системы. В частности, широкое распространение имеют функциональные системы, в которых есть как рабочие компоненты, так и компоненты, отвечающие за восстановление последних. Для такого рода моделей известны публикации, в которых рассматривается система с несколькими одинаковыми элементами, когда в каждый момент времени работает группа элементов [1] или один элемент, а другие находятся в холодном резерве или восстанавливаются [2–4]. Зачастую для определения нестационарных характеристик системы вводится марковский процесс, выписываются его уравнения Колмогорова и далее проводится их анализ [5, 6]. В подобном методе иногда можно значительно упростить нахождение искомой характеристики, установив некоторые ограничения для марковского процесса, как это выполнено, например, в работе [7]. Также характеристики системы можно определить с помощью методов имитационного моделирования [8]. Наконец, отметим: в силу того, что реальные технические комплексы должны быть устойчивыми к отказам, немаловажной задачей является вопрос предельной надежности резервированных систем, в частности, когда время работы их элементов больше времени восстановления [9, 10].

В данной работе мы рассмотрим модель системы с холодным резервом в условиях ее высокой надежности, а именно систему с n одинаковыми элементами и надежным восстанавливающим прибором при условии быстрого ремонта элемента. Установлено, что при соответствующей нормировке при увеличении скорости восстановления элемента распределение времени жизни системы сходится к экспоненциальному. Аналогичный результат был получен в работе [11], однако там распределения как времени работы, так и времени восстановления элемента полагались экспоненциальным; в настоящей работе только время восстановления элемента считается экспоненциальным, время работы элемента имеет произвольное непрерывное распределение.

1. Постановка задачи и математическая модель

В работе рассматривается система, состоящая из n одинаковых элементов, в которой в каждый момент времени работает только один элемент, называемый основным, а остальные находятся в холодном резерве. Основной элемент может выйти из стоя, и тогда его сразу же заменяет любой резервный; отказавший элемент при этом немедленно отправляется восстанавливаться на прибор, который полагается надежным. Система выходит из строя в момент, когда все n элементов становятся неработоспособными.

Также мы предполагаем, что время восстановления сломанного элемента ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром μ, а время работы элемента η имеет распределение общего вида – $G(t)$ ($G(t)$ – непрерывная функция для $t \geq 0$, у которой все моменты являются конечными). В частности, пусть $E\eta = b < \infty$. Считаем, что все случайные величины, задающие систему, взаимно независимы. Цель работы – получение соотношений для функции распределения времени безотказной работы системы, а также ее асимптотики при условии быстрого восстановления элемента.

Обозначим через τ_j – время до выхода из строя всей системы, если на момент начала ее работы имеется j неработоспособных элементов, $j = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Также пусть $m(0)$ – число неисправных элементов на момент начала работы первого основного элемента, $\zeta(\eta)$ – число восстановленных элементов за η – промежуток времени работы первого основного элемента. Так как время ремонта элементов имеет экспоненциальное распределение, то, если бы на момент начала работы системы число неисправных элементов было сколь угодно велико, число восстановленных элементов за время η равнялось бы числу требований пуассоновского потока интенсивности μ, пришедших за время η.

В соответствии с этим имеем условные вероятности:

$$P(\zeta(\eta) = k \mid m(0) = j; \eta) = e^{-\mu\eta}\frac{(\mu\eta)^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots, j-1, \quad j = 1,2,\ldots,n-1;$$

$$P(\zeta(\eta) = j \mid m(0) = j; \eta) = 1 - \sum_{k=0}^{j-1} e^{-\mu\eta}\frac{(\mu\eta)^k}{k!}. \tag{1}$$

Мы рассматриваем систему при условии быстрого восстановления отказавших элементов. Это означает, что $1/E\xi = \mu \to \infty$. Это также означает, что при $\mu \to \infty$ имеет место следующая сходимость:

$$P(\xi > \eta) = \int_0^\infty e^{-\mu t}\, dG(t) = \varepsilon(\mu) \to 0\,. \tag{2}$$

Далее покажем, что при $\mu \to \infty$ для любого $j = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ выполнено условие

$$P(\varepsilon(\mu)^{n-1}\tau_j > t) \to e^{-\frac{t}{b}}. \tag{3}$$

Для краткости мы в дальнейшем иногда будем опускать в записи $\varepsilon(\mu)$ зависимость от аргумента и писать просто ε. По определению полагаем, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$, если $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = 1$.

2. Распределение времени безотказной работы системы

Для определения времени безотказной работы системы мы используем метод, рассмотренный в работе [7]. То есть представим время работы системы как сумму промежутка времени работы первого основного элемента и оставшегося времени жизни системы. Тогда общее время безотказной работы системы определяется следующими стохастическими уравнениями (здесь $n > 2$):

$$\tau_0 = \eta + \tau_1\,,$$

$$\tau_1 = (\eta + \tau_1)\, I(\zeta(\eta) = 1) + (\eta + \tau_2)\, I(\zeta(\eta) = 0)\,,$$

$$\tau_j = (\eta + \tau_j)\, I(\zeta(\eta) = j) + \sum_{k=0}^{j-1}(\eta + \tau_{j+1-k}) I(\zeta(\eta) = k), \quad 1 < j < n-1\,,$$

$$\tau_{n-1} = (\eta + \tau_{n-1})\, I(\zeta(\eta) = n-1) + \sum_{k=1}^{n-2}(\eta + \tau_{n-k}) I(\zeta(\eta) = k) + \eta I(\zeta(\eta) = 0) =,$$

где $I(A) = 1$, $I(\bar{A}) = 0$ – индикатор события A.

Выполнив преобразование Лапласа–Стилтьеса от обеих частей равенства в предыдущих соотношениях, с учетом (1) получим следующую линейную алгебраическую систему уравнений:

$$\varphi_0(s) = g(s)\varphi_1(s),$$
$$\varphi_1(s) = (g(s) - g_0(s))\varphi_1(s) + \varphi_2(s)g_0(s),$$
$$\varphi_j(s) = \left(g(s) - \sum_{k=0}^{j-1} g_k(s) \right)\varphi_1(s) + \sum_{k=0}^{j-1} g_k(s)\varphi_{j+1-k}(s), \quad 1 < j < n-1, \tag{4}$$
$$\varphi_{n-1}(s) = \left(g(s) - \sum_{k=0}^{n-2} g_k(s) \right)\varphi_1(s) + \sum_{k=1}^{n-2} g_k(s)\varphi_{n-k}(s) + g_0(s),$$

где:

$$\varphi_j(s) = E\, e^{-s\tau_j}, \quad g(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dG(x), \quad g_0(s) = \int_0^\infty e^{-(s+\mu)x}\, dG(x),$$
$$g_j(s) = \int_0^\infty e^{-(s+\mu)x} \frac{(\mu x)^j}{j!}\, dG(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Таким образом, условие (3) эквивалентно следующему условию сходимости:

$$\varphi_j(\varepsilon(\mu)^{n-1} s) \to \frac{1}{1+bs} \tag{5}$$

при $\mu \to \infty$ и для любого $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Также, учитывая (2), при $\mu \to \infty$ получим

$$g(\varepsilon^{n-1}s) \sim 1 - \varepsilon^{n-1}bs,$$
$$g_0(\varepsilon^{n-1}s) \sim \varepsilon - \varepsilon^{n-1}s\int_0^\infty x e^{-\mu x}\, dG(x) = \varepsilon - \varepsilon^{n-1}s\,\gamma_0(\mu), \tag{6}$$
$$g_j(\varepsilon^{n-1}s) \sim g_j(0) - \varepsilon^{n-1}s\int_0^\infty x\frac{(\mu x)^j}{j!}e^{-\mu x}\, dG(x) = g_j(0) - \varepsilon^{n-1}s\,\gamma_j(\mu) \quad j = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Отметим также, что

$$g_j(0) = g_j(\mu, 0) \to 0, \ j = 1, 2, \ldots, n-2;$$
$$\gamma_j = \gamma_j(\mu) \to 0, \ j = 0, 1, 2, \ldots, n-2$$

при $\mu \to \infty$.

3. Асимптотический анализ времени безотказной работы системы в предположении ее высокой надежности

Для двух элементов в рассматриваемой системе имеем следующий аналог соотношений (4) для уравнений преобразований Лапласа–Стилтьеса распределения ее времени работы:

$$\varphi_0(s) = g(s)\varphi_1(s),$$
$$\varphi_1(s) = (g(s) - g_0(s))\varphi_1(s) + g_0(s).$$

Тогда

$$\varphi_1(s) = \frac{g_0(s)}{1 - g(s) + g_0(s)}, \quad \varphi_0(s) = g(s)\varphi_1(s).$$

Поэтому, используя (6), получаем, что при $\mu \to \infty$

$$g(\varepsilon s) \sim 1 - \varepsilon bs,$$
$$g_0(\varepsilon s) \sim \varepsilon - \varepsilon s\,\gamma_0 \sim \varepsilon.$$

Таким образом, следует, что функции $\varphi_0(\varepsilon s)$ и $\varphi_1(\varepsilon s)$ стремятся к $1/(1 + bs)$ при $\mu \to \infty$, и (5) верно для двух элементов в системе.

Далее, при $n > 2$ и $\mu \to \infty$ имеем

$$\frac{\varphi_0(\varepsilon^{n-1}s)}{\varphi_1(\varepsilon^{n-1}s)} = g(\varepsilon^{n-1}s), \quad \frac{\varphi_0(\varepsilon^{n-1}s)}{\varphi_1(\varepsilon^{n-1}s)} \sim 1 - \varepsilon^{n-1}sb.$$

То есть $\varphi_0(\varepsilon^{n-1} s) \sim \varphi_1(\varepsilon^{n-1} s)$. Далее в целях представления рассуждений в более компактном и понятном виде мы иногда будем опускать зависимость от аргумента $\varepsilon^{n-1}s$ в записи функций $\varphi_j(s)$.

Разделив второе уравнение в (4) на φ_1, получим

$$1 = (g - g_0) + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} g_0 .$$

При $\mu \to \infty$, используя (6), справедливо следующее асимптотическое равенство:

$$1 \sim 1 - \varepsilon^{n-1} sb - \varepsilon + \varepsilon^{n-1} s\gamma_0 + \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\left(\varepsilon - \varepsilon^{n-1} s\gamma_0\right).$$

Оставляя в последнем выражении наиболее медленно убывающие по ε слагаемые, получаем

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \sim 1 + \varepsilon^{n-2} sb .$$

То есть $\varphi_2 \sim \varphi_1$ и $\varphi_2 \sim \varphi_1(1 + \varepsilon^{n-2} sb)$.

Для $2 < j < n - 1$, повторяя ту же самую процедуру, получаем

$$\frac{\varphi_j}{\varphi_1} = \left(g - g_0 - g_1 - \ldots - g_{j-1}\right) +$$

$$+ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} g_{j-1} + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} g_{j-2} + \ldots + \frac{\varphi_j}{\varphi_1} g_1 + \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_1} g_0 .$$

Снова, переходя в последнем равенстве к асимптотической эквивалентности, используя (6), мы, оставляя наиболее медленно убывающие по ε слагаемые, получаем

$$1 + \varepsilon^{n-j} sb \sim 1 - \varepsilon + g_1(0) \times \varepsilon^{n-j} sb + \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_1} (\varepsilon - \varepsilon^{n-1} s\gamma_0) ,$$

$$\frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_1} \sim 1 + \varepsilon^{n-j-1} sb .$$

То есть $\varphi_{j+1} \sim \varphi_1$ и $\varphi_{j+1} \sim \varphi_1 \times (1 + \varepsilon^{n-j-1} sb)$. В частности, $\varphi_{n-1} \sim \varphi_1$ и $\varphi_{n-1} \sim \varphi_1 \times (1 + \varepsilon sb)$.

Таким образом, при $\mu \to \infty$ справедливы соотношения: $\varphi_k(\varepsilon^{n-1} s) \sim \varphi_0(\varepsilon^{n-1} s)$, $k = 1, 2, \ldots , n - 1$, и $\varphi_j \sim \varphi_1 \times (1 + \varepsilon^{n-j} sb)$, $j = 2, \ldots , n - 1$. В практическом отношении это означает, что при условии быстрого ремонта функция распределения времени жизни системы не зависит от числа неисправных элементов на момент начала ее работы. Однако эта функция распределения при увеличении скорости восстановления элементов сходится тем медленнее к предельному распределению, чем больше отказавших элементов на момент начала работы системы.

Разделим последнее уравнение системы (4) на φ_1. Тогда с учетом последнего результата, оставив самые медленно убывающие по ε слагаемые в асимптотическом равенстве, мы получим

$$\varphi_1 \times (1 + \varepsilon sb) \sim \varphi_1 \times (1 - \varepsilon + \varepsilon sb \times g_1(0)) + (\varepsilon - \varepsilon^{n-1} s\gamma_0) ,$$

$$\varphi_1 \times (\varepsilon + \varepsilon sb - \varepsilon sb \times g_1(0)) \sim \varepsilon \times (1 - \varepsilon^{n-2} s\gamma_0) .$$

Итак, $\varphi_1(\varepsilon^{n-1} s) \sim 1/(1 + bs)$, когда $\mu \to \infty$, и, принимая во внимание полученные ранее соотношения, утверждение (5) также верно для любого $n > 2$.

4. Пример численного анализа

В этом разделе приведем результаты применения выводов проведенного теоретического исследования для конкретного примера, а именно: в условиях рассмотренной системы положим $n = 4$; в качестве распределения времени работы элемента возьмем распределение Эрланга с параметрами $k = 6$, $\theta = 1/6$, (т.е. здесь $b = 1$). Тогда, получив по формулам (4) выражения для преобразования Лапласа–Стилтьеса функций распределения времени жизни системы, построим их графики для различных значений параметра μ (рис. 1–4).

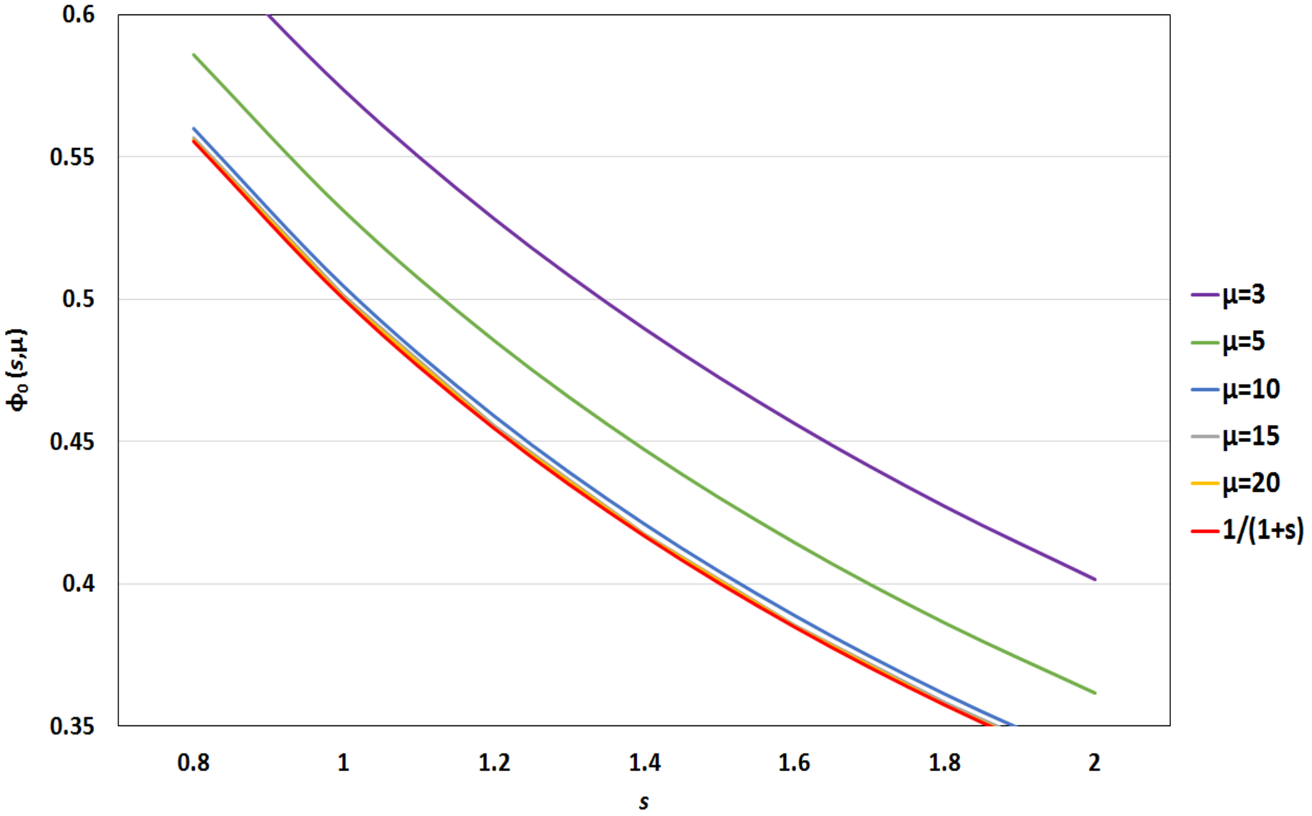

Рис. 1. Визуализация сходимости функции $\varphi_0(s)$ при значениях параметра $\mu \in \{3, 5, 10, 15, 20\}$ к $(1 + s)^{-1}$
Fig. 1. Visualization of the convergence of the function $\varphi_0(s)$ to $(1 + s)^{-1}$ when $\mu \in \{3, 5, 10, 15, 20\}$

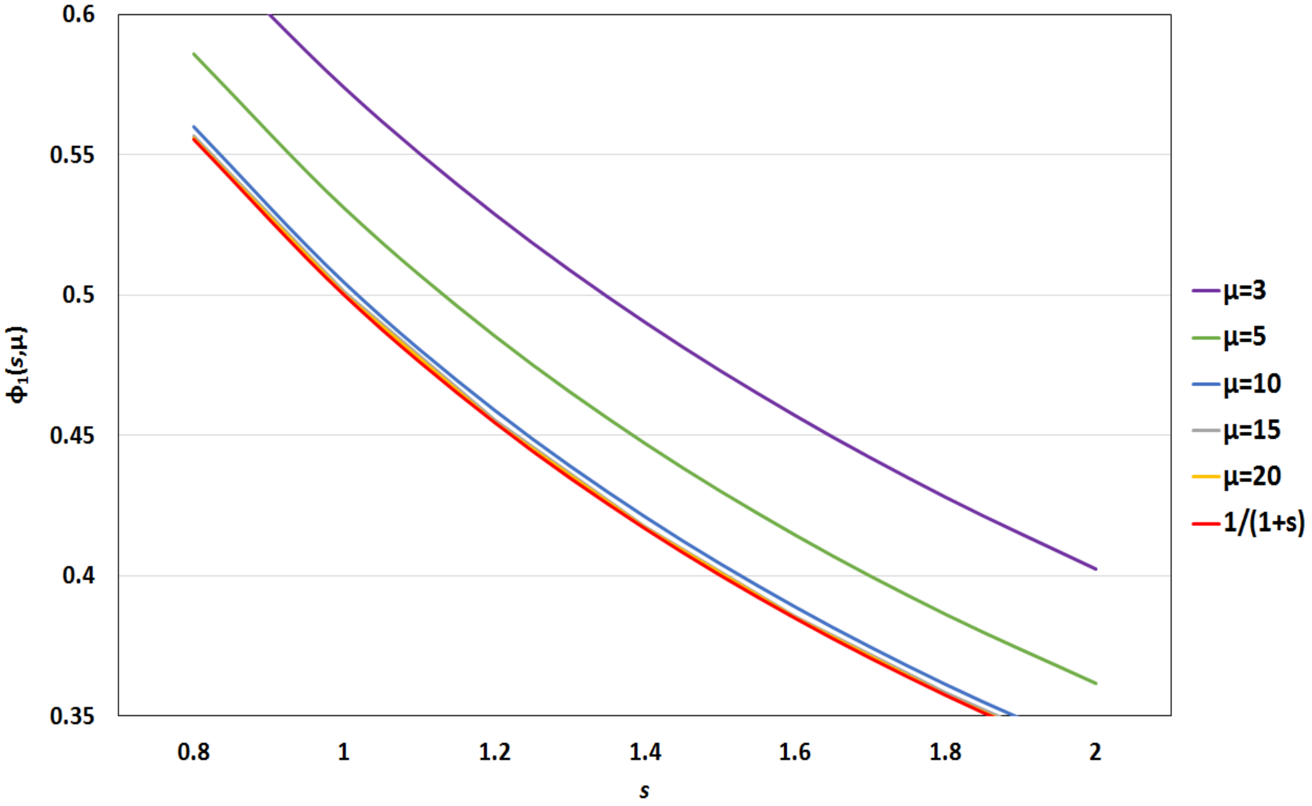

Рис. 2. Визуализация сходимости функции $\varphi_1(s)$ при значениях параметра $\mu = 3, 5, 10, 15, 20$ к $(1 + s)^{-1}$
Fig. 2. Visualization of the convergence of the function $\varphi_1(s)$ to $(1 + s)^{-1}$ when $\mu \in \{3, 5, 10, 15, 20\}$

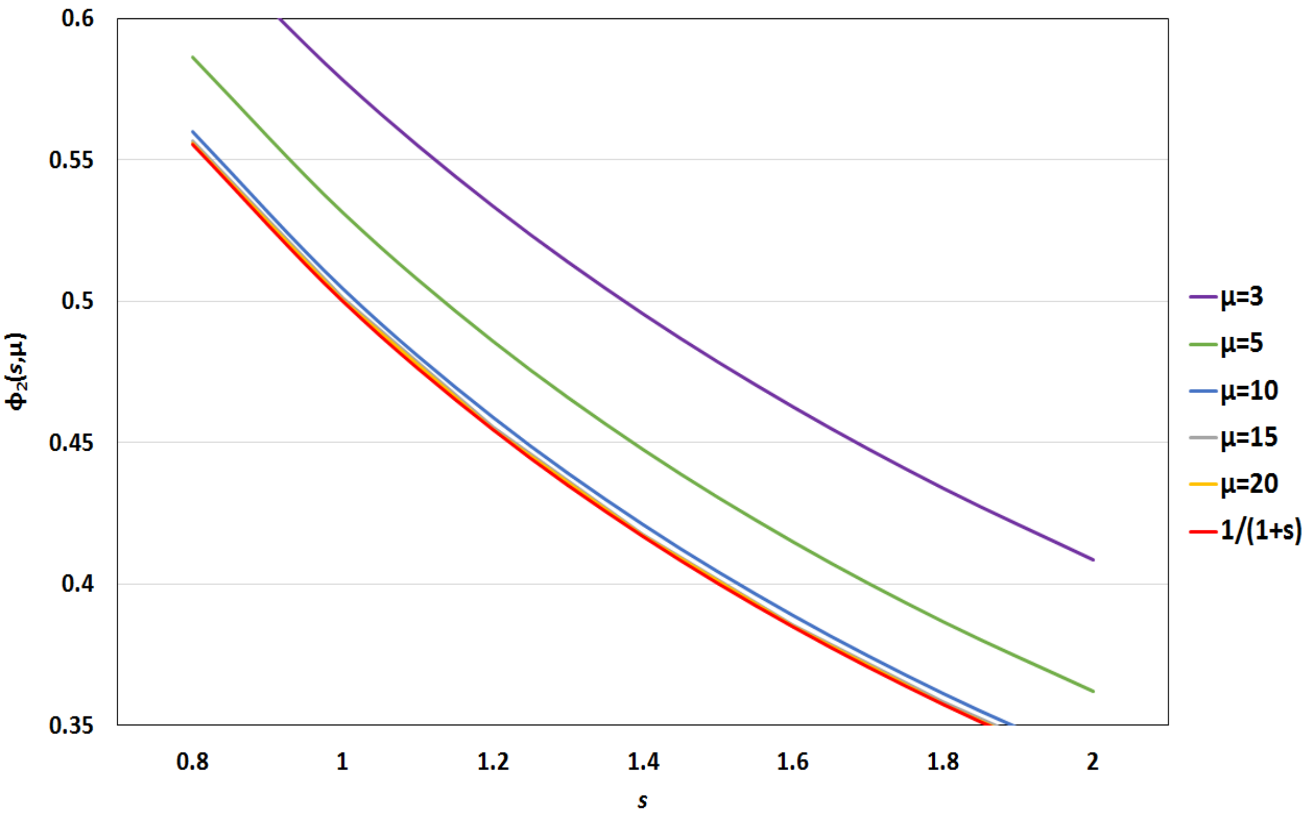

Рис. 3. Визуализация сходимости функции $\varphi_2(s)$ при значениях параметра $\mu = 3, 5, 10, 15, 20$ к $(1 + s)^{-1}$
Fig. 3. Visualization of the convergence of the function $\varphi_2(s)$ to $(1 + s)^{-1}$ when $\mu \in \{3, 5, 10, 15, 20\}$

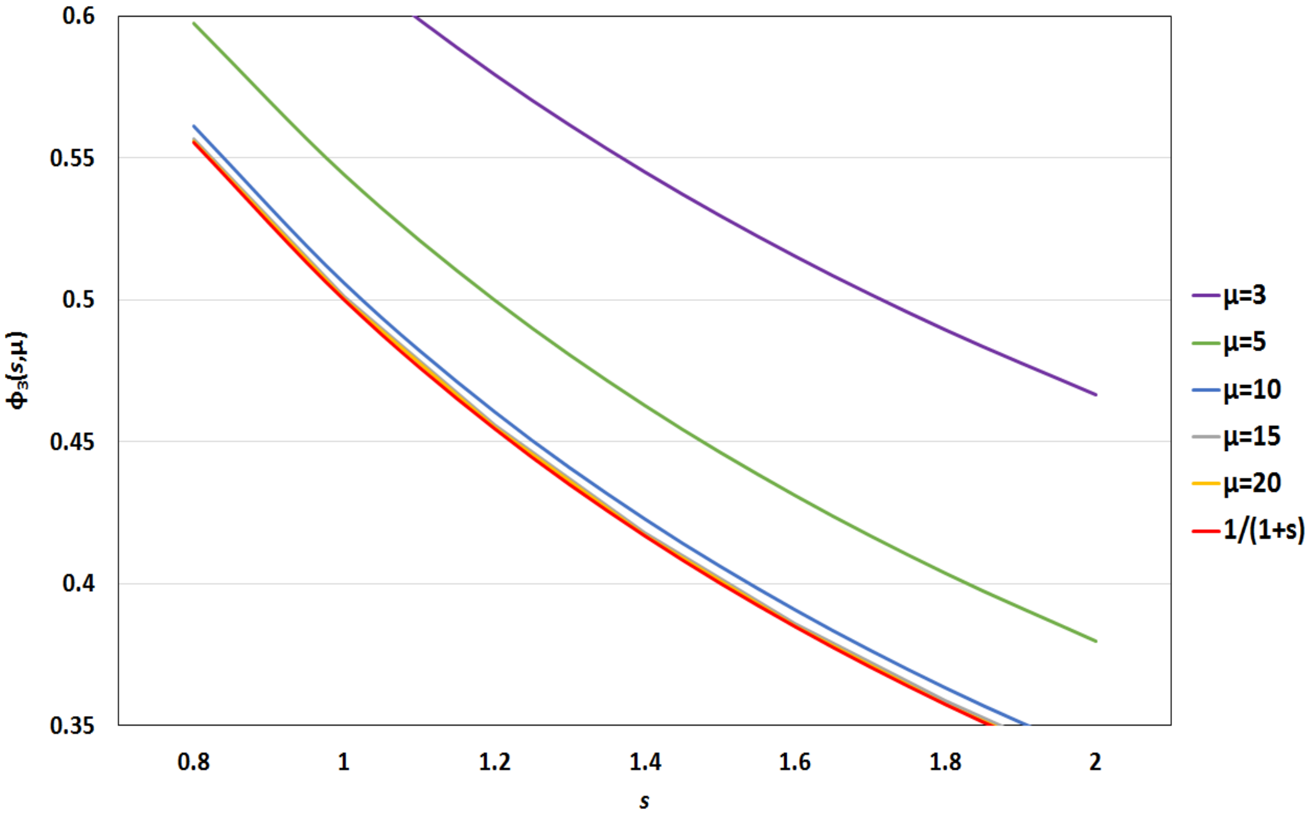

Рис. 4. Визуализация сходимости функции $\varphi_3(s)$ при значениях параметра $\mu = 3, 5, 10, 15, 20$ к $(1 + s)^{-1}$
Fig. 4. Visualization of the convergence of the function $\varphi_3(s)$ to $(1 + s)^{-1}$ when $\mu \in \{3, 5, 10, 15, 20\}$

Таким образом, рис. 1–4 наглядно подтверждают теоретические выводы о сходимости к экспоненциальному закону и о скорости этой сходимости.

Заключение

В работе показано, что соотношения для преобразований Лапласа–Стилтьеса от функции распределения времени безотказной работы рассматриваемой системы имеют вид системы линейных алгебраических уравнений (4). При небольшом числе рабочих элементов можно выписать явные выражения для искомых неизвестных. В случае, когда число рабочих элементов достаточно велико, можно использовать программное обеспечение, реализующее алгоритмы решения систем уравнений подобного вида. Также доказано утверждение о сходимости распределения нормированной случайной величины, задающей время безотказной работы системы, к экспоненциальному закону при условии быстрого ремонта элементов (3), (5).

Благодарность. Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук Л.Г. Афанасьевой, профессору кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, за помощь в подготовке материала и ценные замечания в процессе оформления данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Потапов В.И., Потапов И.В. Об оптимизации среднего времени «жизни» однородных нейронных сетей нейрокомпьютеров с замещением отказавших нейронов резервными // Омский научный вестник. 2004. № 1 (26). С. 95–99.
2. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьёв А.Д. Математические методы в теории надежности. М. : Наука, 1965. 524 с.
3. Соловьев А.Д. О резервировании без восстановления // Энергия. Кибернетика – на службу коммунизму. 1964. Т. 2. С. 83–121.
4. Козлов Б.А. Резервирование с восстановлением. М. : Сов. радио, 1969. 150 с.
5. Ahmed W., Hasan O., Pervez U., Qadir J. Reliability Modeling and Analysis of Communication Networks // Journal of Network and Computer Applications. 2017. V. 78. P. 191–215. DOI: 10.1016/j.jnca.2016.11.008
6. Taranenko A.G., Gabrousenko Ye.I., Holubnychyi A.G., Lavrynenko O.Yu. Operational reliability management of the reserved electronic system // Електроніка та системи управління. 2020. Т. 1, № 63. С. 86–91.
7. Головастова Э.А. Время работы системы со взаимозаменяемыми элементами, выходящими из строя, и ненадежным восстанавливающим прибором // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. № 52. С. 59–65. DOI: 10.17223/19988605/52/7
8. Уанкпо Г.Ж.К., Козырев Д.В. Программный комплекс имитационного моделирования и расчета стационарных вероятностей и оценки надежности резервированной системы с произвольными распределениями времени безотказной работы и ремонта ее элементов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. № 15 (3). С. 553–562.
9. Шебе Х., Шубинский И.Б. Предельная надежность структурного резервирования // Надежность. 2016. № 16 (1). С. 3–13. DOI: 10.21683/1729-2646-2016-16-1-3-13
10. Фокин Ю.А. Вероятностные методы в расчётах надёжности электрических систем. М. : МЭИ, 1983. 216 с.
11. Афанасьева Л.Г., Головастова Э.А. Асимптотический анализ надежности системы с резервными элементами и восстанавливающим прибором // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 1. С. 16–22.

Поступила в редакцию 12 февраля 2021 г.

Golovastova E.A. (2021) ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE OPERATING TIME OF A SYSTEM WITH UNRELIABLE INTERCHANGEABLE ELEMENTS AND RECOVERY DEVICE UNDER CONDITIONS OF ELEMENT'S FAST REPAIR. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 56. pp. 41–48

DOI: 10.17223/19988605/56/5

This paper deals with following reliability problem. We have a system with n elements, which can be broken and one reliable recovery device, in following prepositions: the distributions of the element repairing period is exponential with parameter μ. The distribution of the element working period is arbitrary with the continuous distribution function $G(t)$ and finite expected value b. All the described random variables are assumed to be mutually independent. The purpose is to find the system working time distribution τ_j and the asymptotic distribution of the system lifetime under condition of the element's fast repair.

The found relations for the Laplace-Stieltjes transformations of the system operating time distribution function in the current problem have the form of a system of linear algebraic equations:

$$\varphi_0(s) = g(s)\varphi_1(s),$$
$$\varphi_1(s) = (g(s) - g_0(s))\varphi_1(s) + \varphi_2(s)g_0(s),$$
$$\varphi_j(s) = \left(g(s) - \sum_{k=0}^{j-1} g_k(s) \right)\varphi_1(s) + \sum_{k=0}^{j-1} g_k(s)\varphi_{j+1-k}(s), \quad 1 < j < n-1,$$
$$\varphi_{n-1}(s) = \left(g(s) - \sum_{k=0}^{n-2} g_k(s) \right)\varphi_1(s) + \sum_{k=1}^{n-2} g_k(s)\varphi_{n-k}(s) + g_0(s),$$

where

$$\varphi_j(s) = E\, e^{-s\tau_j}, \quad g(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dG(x), \quad g_0(s) = \int_0^\infty e^{-(s+\mu)x}\, dG(x),$$
$$g_j(s) = \int_0^\infty e^{-(s+\mu)x} \frac{(\mu x)^j}{j!}\, dG(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n-2.$$

It is also proved, that the normalized distribution of the system operating time converges to an exponential law under the conditions of element’s fast repair. Namely:

$$P(\varepsilon(\mu)^{n-1}\tau_j > t) \to e^{-\frac{t}{b}}$$

as $\mu \to \infty$, and for any $j = 0,1,2,\ldots, n-1$. The normalization factor is determined as follows:

$$\int_0^\infty e^{-\mu t}\, dG(t) = \varepsilon(\mu)\ .$$

Keywords: reliability problem; system failure time; stochastic equations; Laplace transform; asymptotic behavior.

GOLOVASTOVA Eleonora Aleksandrovna (Post-graduate Student, Lomonosov Moscow State University, Russian Federation).
E-mail: golovastova.elina@yandex.ru

REFERENCES

1. Potapov, V.I. & Potapov, I.V. (2004) Ob optimizatsii srednego vremeni “zhizni” odnorodnykh neyronnykh setey neyrokomp'yuterov s zameshcheniem otkazavshikh neyronov rezervnymi [On optimization of the average life time of homogeneous neural networks of neurocomputers with replacement of failed neurons by reserve ones]. *Omskiy nauchnyy vestnik.* 1(26). pp. 95–99.
2. Gnedenko, B.V., Belyaev, Yu.K. & Soloviev, A.D. (1965) *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti* [Mathematical Methods in the Theory of Reliability]. Moscow: Nauka.
3. Soloviev, A.D. (1964) O rezervirovanii bez vosstanovleniya [On redundancy without recovering]. *Energiya. Kibernetika – na sluzhbu kommunizmu.* 2 pp. 83–121.
4. Kozlov, B.A. (1969) *Rezervirovanie s vosstanovleniem* [On redundancy with recovering]. Moscow: Sov. radio.
5. Ahmed, W., Hasan, O., Pervez, U. & Qadir, J. (2017) Reliability Modeling and Analysis of Communication Networks. *Journal of Network and Computer Applications.* 78. pp. 191–215. DOI: 10.1016/j.jnca.2016.11.008
6. Taranenko, A.G., Gabrousenko, Ye.I., Holubnychyi, A.G. & Lavrynenko, O.Yu. (2020) Operational reliability management of the reserved electronic system. *Electronics and Control Systems.* 63(1). pp. 86–91. DOI: 10.18372/1990-5548.63.14528
7. Golovastova, E.A. (2020) System operating time with unreliable interchangeable elements and precarious recovery device. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 52. pp. 59–65. DOI: 10.17223/19988605/52/7
8. Houankpo, H.G.K. & Kozyrev, D.V. (2019) Software tool for simulation and calculating stationary probabilities and reliability of a redundant system with arbitrary distributions of uptime and repair time of its elements. *Sovremennye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie – Modern Information Technologies and IT-education.* 15(3). pp. 553–562. DOI: 10.25559/SITITO.15.201903.553-562
9. Schäbe, H. & Shubinsky, I.B. (2016) Limit reliability of structural redundancy. *Dependability.* 16(1). pp. 3–13. DOI: 10.21683/1729-2646-2016-16-1-3-13
10. Fokin, Yu.A. (1983) *Veroyatnostnye metody v raschetakh nadezhnosti elektricheskikh sistem* [Probabilistic methods in calculating the reliability of electrical systems]. Moscow: MPEI.
11. Afanasieva, L.G. & Golovastova, E.A. (2021) Asymptotic analysis of reliability of a system with reserve elements and repairing device. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika.* 1. pp. 16–22.