

УДК 531.332.1

DOI 10.17223/19988621/73/6

С.О. Гладков, С.Б. Богданова

ОБ ИЗМЕНЕНИИ ФОРМЫ БРАХИСТОХРОНЫ ПРИ УЧЕТЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НАГРУЗКИ НА ЖЕЛОБ

Получена система динамических уравнений, описывающая движение тела по желобу при условии, что имеет место ограничение нагрузки на материал желоба. Найдено аналитическое и численное решение этих уравнений. Показано, что в этом случае форма желоба (траектории) будет сильно отличаться от классической брахистохроны. Задача решена в пренебрежении силами трения.

Ключевые слова: динамические уравнения, форма желоба, сила реакции, предел прочности.

В настоящем сообщении мы продолжим решение весьма интересного, с нашей точки зрения, класса задач, придерживаясь методики, намеченной в предыдущих авторских работах [1–6]. Однако в отличие от упомянутых работ, имеющих обычный академический интерес, здесь мы приведем решение другой не менее любопытной проблемы, суть которой определяет ее чисто практическое значение.

Предположим, что имеется брахистохрона в виде желоба, по которой движется тело массой m . Понятно, что при его движении, как и положено, появляется некоторая сила реакции желоба N , обязанная результирующему воздействию центростремительной силы и силы тяжести.

При этом возникает следующий вполне закономерный вопрос о том, как может повлиять на форму брахистохроны условие ограничения нагрузки на материал желоба? Совершенно понятно, что в областях наибольшего изгиба траектории центростремительное ускорение становится довольно большим, а это, в свою очередь, означает, что если, например, желоб не металлический, а сделан, скажем, из пробки, то, несомненно, произойдет разрушение материала.

Таким образом, если материал имеет предел прочности, характеризуемый некоторой предельной нагрузкой N_{cr} , то в этом случае во избежание его разрушения всегда должно выполняться неравенство

$$N < N_{\text{cr}}. \quad (1)$$

Система уравнений

Если ввести удобный в рамках решаемой задачи подвижный базис $\mathbf{t} - \mathbf{n}$ (рис. 1), где $\mathbf{t}$ – единичный вектор касательной к кривой $y = y(x)$, задающей форму желоба, а $\mathbf{n}$ – вектор единичной нормали к нему, то проекцию вектора силы реакции желоба $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$ на направление единичной нормали $\mathbf{n}$ можно представить в виде

$$N = m \left(\frac{v^2}{R} - g \cos \alpha \right), \quad (2)$$

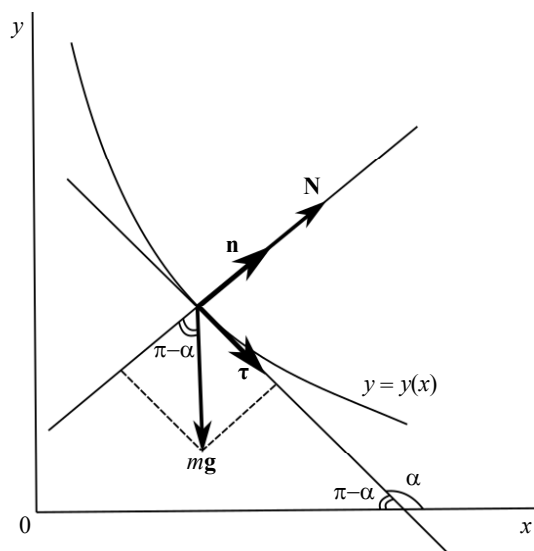


Рис. 1. Схематическое изображение геометрии задачи
Fig. 1. Schematic representation of the problem geometry

где g – ускорение силы тяжести, α – угол наклона касательной к оси (ox), который в случае вогнутой кривой является тупым ($\cos \alpha < 0$), v – скорость тела, R – радиус кривизны траектории в данной точке желоба. Здесь следует заметить, что радиус кривизны, определяемый по известной формуле дифференциальной геометрии [7]

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

может быть как величиной положительной, так и отрицательной. Для выпуклой кривой $y'' < 0$, так же как и $\alpha' < 0$, и, наоборот, для вогнутой книзу кривой $y'' > 0$ и $\alpha' > 0$. Это означает, что в любом случае модуль скорости должен определяться по формуле

$$v = R\dot{\alpha}, \quad (3)$$

где производная по времени всегда одного знака с y'' (см. рис. 1).

Поскольку для вогнутой кривой брахистохрона определяется условием $v^2 / R = -g \cos \alpha > 0$ (см. также работы [1, 5]), то есть когда величина силы реакции $N = 2mg |\cos \alpha|$, то в идеальных условиях результат проектирования действующих сил на орты мгновенного базиса $\tau - n$ немедленно приводит нас к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{v} = g \sin \alpha, \\ \frac{v^2}{R} = -g \cos \alpha, \end{cases} \quad (4)$$

где $\pi/2 < \alpha < \pi$.

Ее элементарное решение определяет классическое уравнение брахистохроны:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{C^2}{4g} \left(\frac{2gt}{C} - \sin \frac{2gt}{C} \right), \\ y(t) = -\frac{C^2}{4g} \left(1 - \cos \frac{2gt}{C} \right), \end{cases}$$

где роль параметра t играет время, а константа C положительная и, как видно из соображений размерности, представляет собой скорость.

В том случае, если учитывается условие (1), которое согласно (2) можно переписать в виде

$$\frac{v^2}{R} - g \cos \alpha < \frac{N_{\text{cr}}}{m}, \quad (5)$$

то вводя некоторое значение $N = \bar{N}_{\text{cr}} < N_{\text{cr}}$, условие (5) можно представить как равенство

$$\frac{v^2}{R} - g \cos \alpha = \frac{N_{\text{cr}}}{m}. \quad (6)$$

Как это с очевидностью следует из определения (6), сила реакции для брахистохроны в ноль никогда не обращается, поскольку для нее (см. чуть выше) должно выполняться условие $N = 2mg |\cos \alpha|$. Сказанное означает, что для получения правильного решения поставленной задачи нам необходимо провести небольшую ревизию уравнений (4), которые даже в случае $N = 0$ должны привести нас к уравнению брахистохроны. Действительно, поскольку второй закон Ньютона в отсутствии сил сопротивления инвариантен по отношению к операции инверсии знака времени, то есть по отношению к замене $t \rightarrow -t$, то нижнее уравнение системы (4) остается без изменения, а верхнее можно записать с обратным знаком, но при этом решение также приведет к корректному результату, в чем мы сейчас и убедимся.

В самом деле, запишем уравнения в виде

$$\begin{cases} \dot{v} = -g \sin \alpha, \\ v\dot{\alpha} - g \cos \alpha = \frac{N_{\text{cr}}}{m}. \end{cases} \quad (7)$$

которые, как видим, даже в случае $N_{\text{cr}} = 0$, но $N \neq 0(!)$, приводят нас к уравнению брахистохроны. Кроме того, следует заметить, что замена $t \rightarrow -t$ формально означает, что движение может осуществляться справа налево, но кривая скатывания, тем не менее, останется все той же брахистохрой. Эта операция также равносильна и замене $x \rightarrow -x$.

Формальное решение системы (7) удобно представить, введя безразмерный параметр

$$p = \frac{\bar{N}_{\text{cr}}}{mg}, \quad (8)$$

В результате тривиальное решение уравнений (7) приводит нас к следующему простому соотношению

$$v = C |p - |\cos \alpha||, \quad (9)$$

где C – константа интегрирования.

Как отсюда видно, при $p = 0$ мы действительно приходим к уравнению брахистохроны, о чем чуть выше и упоминалось.

Анализ уравнений

В соответствии с определением параметра (8) рассмотрим теперь три наиболее интересных случая:

$$1. \ p > 1, \quad 2. \ p < 1 \quad \text{и} \quad 3. \ p = 1.$$

Начнем со случая 1. $p > 1$.

Тогда из (9) следует, что

$$v = C(p - |\cos \alpha|), \quad (10)$$

а потому из верхнего уравнения системы (7) находим $\alpha = \alpha_0 + \frac{gt}{C}$. Совершенно

очевидно, что в начальный момент времени тело под влиянием одной только силы гравитации может скатываться лишь из самой верхней точки желоба. Считая эту точку максимумом функции, без ограничения общности можно положить, что в начальный момент времени $\alpha_0 = 0$. То есть

$$\alpha = \frac{gt}{C}. \quad (11)$$

И решение (10) следует записать в виде

$$v = C \left| p - \cos \frac{gt}{C} \right|.$$

Поэтому из уравнений движения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -v \cos \alpha, \\ \dot{y} &= v \sin \alpha \end{aligned}$$

следует

$$\begin{cases} x = x_0 - \int (p - \cos \alpha) \cos \alpha dt, \\ y = y_0 + \int (p - \cos \alpha) \sin \alpha dt, \end{cases} \quad (12)$$

где x_0, y_0 – константы интегрирования.

Поскольку согласно (6) с учетом (3) сила реакции есть

$$\bar{N}_{\text{cr}} = m(v\dot{\alpha} + g \cos \alpha),$$

то благодаря найденным зависимостям (10) и (11) имеем отсюда, что

$$N = m \left(C(p - \cos \alpha) \frac{g}{C} + g \cos \alpha \right) = pmg = \bar{N}_{\text{cr}}.$$

То есть для всех $2 \geq p \geq 0$ условие $N = \bar{N}_{\text{cr}} < N_{\text{cr}}$ выполняется автоматически.

Выбирая начальное условие для скорости в виде $v(0) = v_0$, в соответствии с решениями (9) и (11) получаем тогда, что

$$C = \frac{v_0}{|p - 1|}. \quad (13)$$

Накладывая также начальные условия на координаты в виде

$$x(0) = y(0) = 0, \quad (14)$$

после простого интегрирования уравнений (12) с учетом (13) и (14), можно прийти к следующим параметрическим зависимостям:

$$\begin{cases} x = \frac{v_0^2}{g(|p-1|)^2} \left[p \sin\left(\frac{gt|p-1|}{v_0}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{gt|p-1|}{v_0} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2gt|p-1|}{v_0}\right) \right) \right], \\ y = \frac{v_0^2}{g(|p-1|)^2} \left[p \cos\left(\frac{gt|p-1|}{v_0}\right) - \frac{1}{4} \left(1 + 4p - \cos\left(\frac{2gt|p-1|}{v_0}\right) \right) \right]. \end{cases} \quad (15)$$

В безразмерном виде эти решения удобно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{(|p-1|)^2} \left[p \sin(\tau|p-1|) - \frac{1}{2} \left(\tau|p-1| + \frac{1}{2} \sin(2\tau|p-1|) \right) \right], \\ \eta = \frac{1}{(|p-1|)^2} \left[p \cos(\tau|p-1|) - \frac{1}{4} (1 + 4p - \cos(2\tau|p-1|)) \right], \end{cases} \quad (16)$$

где новые переменные есть

$$\xi = \frac{gx}{v_0^2}, \quad \eta = \frac{gy}{v_0^2}, \quad \tau = \frac{gt}{v_0}. \quad (17)$$

Зависимость $\eta = \eta(\xi)$ согласно решениям (16) для разных значений параметра p иллюстрируют рис. 2 – 4.

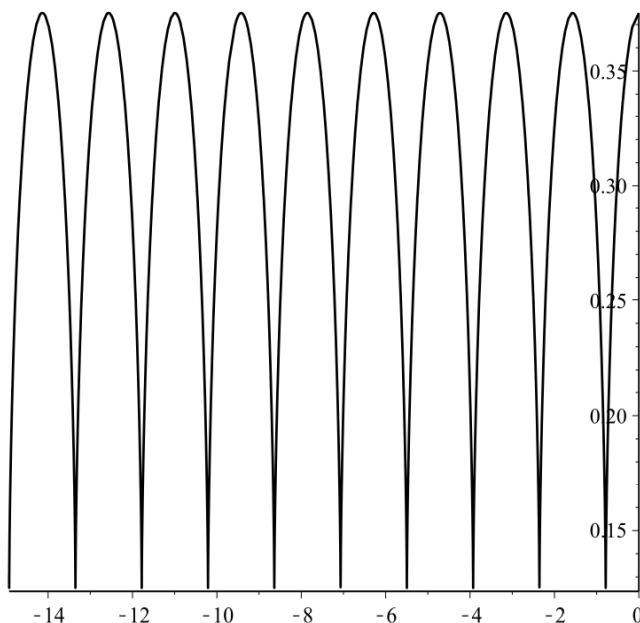


Рис. 2. Зависимость $\eta = \eta(\xi)$ при $p = 0$ (представляет собой классическую брахистохрону)

Fig. 2. Dependence $\eta = \eta(\xi)$ at $p = 0$ (represents a classical brachistochrone)

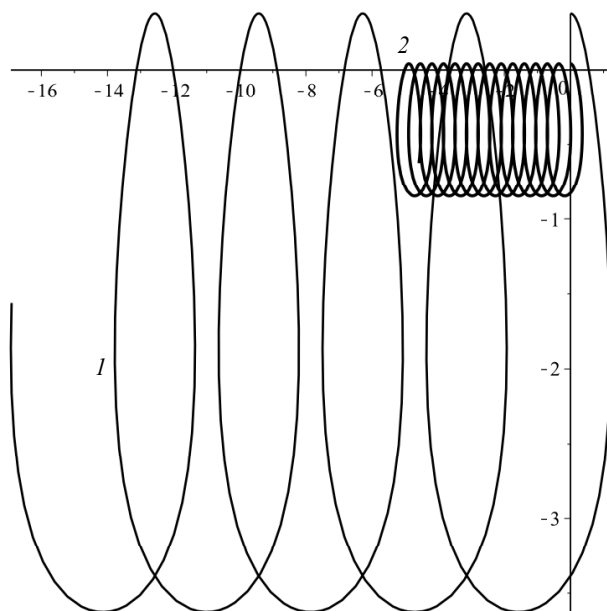


Рис. 3. Зависимость $\eta = \eta(\xi)$ при $p = 2$ (линия 1) и при $p = 4$ (линия 2), $0 \leq \tau \leq 30$

Fig. 3. Dependence $\eta = \eta(\xi)$ at $p = 2$ (line 1) and $p = 4$ (line 2), $0 \leq \tau \leq 30$

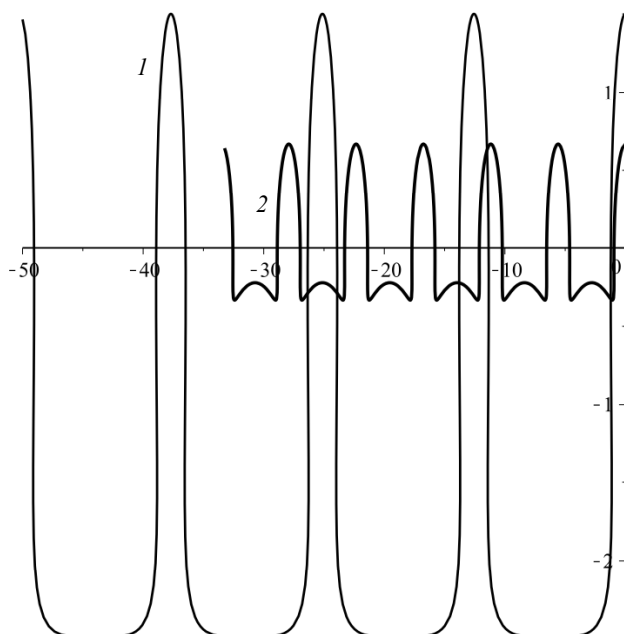


Рис. 4. Зависимость $\eta = \eta(\xi)$ при $p = 1/2$ (линия 1) и $p = 1/4$ (линия 2), $0 \leq \tau \leq 50$

Fig. 4. Dependence $\eta = \eta(\xi)$ at $p = 1/2$ (line 1) and $p = 1/4$ (line 2), $0 \leq \tau \leq 50$

Рассмотрим теперь противоположное неравенство (случай 2. $p < 1$).

Этот случай примечателен тем, что согласно решению (9) существуют определенные моменты времени, которые продиктованы двумя разными условиями, а именно $\cos \alpha < p$ и $\cos \alpha > p$. Совершенно понятно, что решение (11) для этих двух случаев должно быть записано тогда в виде

$$\alpha = \mp \frac{gt}{C} = \mp \frac{gt}{v_0}(1-p), \quad (18)$$

где верхний знак соответствует случаю $\cos \alpha < p$, а нижний – случаю $\cos \alpha > p$.

Это означает, что при выполнении начальных условий (14) должна соблюдаться следующая «чехарда» дискретных времен:

$$t_{2n} < t < t_{2n+1}, \text{ если } \cos \tau < p < 1, \quad (19)$$

$$\text{и} \quad t < t_{2n}, \quad t > t_{2n+1}, \text{ если } p < \cos \tau, \quad (20)$$

$$\text{где} \quad \begin{cases} t_{2n} = \frac{v_0(1-p)}{g}(\arccos p + 2\pi n), \\ t_{2n+1} = \frac{v_0(1-p)}{g}[\arccos p + \pi(2n+1)]. \end{cases} \quad (21)$$

Заметим, что в этом случае форма желоба, материал которого характеризуется малым пределом прочности, показана на рис. 4, из которого с очевидностью видно, что вначале движения траектория должна быть почти вертикальной, плавно переходящей в горизонтальный участок, который затем выгибается в форму параболы, давление на которую, как мы знаем (см. работу [1]), равно нулю.

Рассмотрим теперь последний, но также весьма важный случай, когда $p = 1$.

Решение (9) при этом можно представить, как

$$v = C(1 - \cos \alpha). \quad (22)$$

Из уравнений (7) тогда следует, что

$$\alpha = -\frac{gt}{C}. \quad (23)$$

В результате получаем

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{C^2}{g} \left(\sin \alpha - \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \right), \\ y = y_0 + \frac{C^2}{g} \left(-\cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 2\alpha \right). \end{cases} \quad (24)$$

Из условий (14), когда траектория выходит из начала координат, то есть $x(0) = y(0) = 0$, следует, что

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{3C^2}{4g}.$$

Поэтому

$$\begin{cases} x = \frac{C^2}{g} \left(\sin \alpha - \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \right), \\ y = \frac{2C^2}{g} \sin^4 \left(\frac{\alpha}{2} \right). \end{cases} \quad (25)$$

Из решения (22) следует, что в начальный момент времени скорость тела автоматически должна быть равна нулю. Это означает, что решение (25) описывает не единственную кривую, выходящую из начала координат, а бесчисленный класс кривых с произвольными C , которые качественно совершенно идентичны, что и иллюстрирует рис. 5.

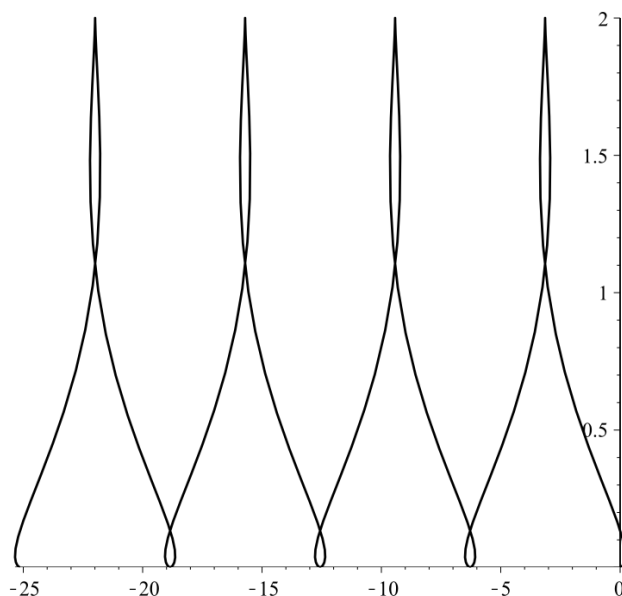


Рис. 5. Зависимость $y(x)$ при $p=1$ и $C^2/2g=1$

Fig. 5. Dependence $y(x)$ at $p=1$ and $C^2/2g=1$

Заключение

Отметим основные результаты проведенного выше исследования.

1. Найдено аналитическое решение задачи, описывающее форму желоба при учете предела прочности его материала.

2. Проанализированы четыре различных случая: $p=0$, $p=1$, $p>1$, $p<1$ и с помощью численных методов приведены изображения четырех качественно различных форм желоба, одна из которых (при $p=0$) представляет собой, как и должно быть, обычную брахистохрону.

3. Отмечено, что в случае не слишком прочных материалов форма желоба должна быть выбрана в форме, показанной на рис. 4.

4. Решение поставленной задачи найдено с помощью намеченного в [1–6] метода составления динамических уравнений движения в подвижной системе координат без привлечения традиционных методов вариационного исчисления [8–10] и управляющего параметра [9, 11, 12], как это сделано, например, в [13–20].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладков С.О., Богданова С.Б. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 1. 161101-1-5.
2. Гладков С.О. О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 4. 164002-1-5.
3. Гладков С.О., Богданова С.Б. Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) // Ученые записки физического ф-та МГУ. 2017. № 1. 171101-1-5.
4. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения шарика по вращающейся брахистохроне с учетом сил трения // Ученые записки физического ф-та МГУ. 2017. № 2. 172101-1-6.
5. Гладков С.О., Богданова С.Б. Аналитическое и численное решение задачи о брахистохроне в некоторых общих случаях // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 145. С. 114–122.
6. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения тел с переменной массой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 83–91.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1967. 655 с.
8. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
9. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
10. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории пространственной брахистохроны // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 53–60.
11. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
12. Мансимов К.Б., Расумова Ш.М. Об оптимальности особых управлений в одной задаче оптимального управления // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 54. С. 17–33. DOI: 17223/19988621/54/2.
13. Giannoni F., Piccione P., Verderesi J.A. An approach to the relativistic brachistochrone problem by sub-Riemannian geometry // J. Math. Phys. 1997. V. 38. No. 12. P. 6367–6381.
14. Scarpello G.M., Ritelli D. Relativistic brachistochrones under electric or gravitational uniform fields // Z. Angew. Math. Mech. 2006. V. 86. No. 9. P. 736–743.
15. Иванов А.И. О брахистохроне частицы переменной массы с постоянным отношением количества присоединяемых и отделяемых частиц // Докл. АН УССР. Сер. А. 1968. С. 683–686.
16. Руссаловская А.В., Иванов Г.И., Иванов А.И. О брахистохроне точки переменной массы с трением и экспоненциальным законом истечения массы // Докл. АН УССР. Сер. А. 1973. С. 1024–1026.
17. Jeremic O., Salinic S., Obradovic A., Mitrovic Z. On the brachistochrone of a variable mass particle in general force fields // Math. And Computer Modelling. 2011. V. 54. P. 2900–2912.
18. Obradovic A., Salinic S., Jeremic O., Mitrovic Z. Brachistochronic motion of a variable mass system // Third Serbian (28th Yu) Congress on Theoretical and Applied Mechanics (Vlasina lake, Serbia, 5–8 July 2011). P. 1237–1246.
19. Salinic S., Obradovic A., Mitrovic Z., Rusov S. On the brachistochronic motion of the Chaplygin sleigh // Acta Mech. 2013. V. 224. No. 9.
20. Lipp S. Brachistochrone with Coulomb friction // SIAM J. Control Optim. 1997. V. 35. No. 2. P. 562–584.

Статья поступила 13.04.2020

Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2021) ON THE VARYING BRACHISTOCCHRONE SHAPE WITH ALLOWANCE FOR CHUTE LOADING LIMITATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 73. pp. 60–70

DOI 10.17223/19988621/73/6

Keywords: dynamic equations, chute shape, reaction force, stress limit.

In this paper, the problem of the effect of stress limit on the chute shape is analyzed for the first time. Here, the dynamic equations for the motion of the material body rolling down the chute are formulated neglecting the friction forces. It is shown that if the stress limit for the chute material is taken into account, the shape of the chute varies greatly as a function of the parameter. Four possible cases are analyzed when the parameter is: equal to zero, more than unity, less than unity, and equal to unity. It is found that if the parameter is more than unity, the chute shape represents almost horizontal and vertical segments of a trajectory, which is clear from a physical point of view, since for this type of the trajectory the chute is least affected by the body moving along. If the parameter is equal to unity, the chute takes a specific loop-like shape. If the parameter is equal to zero, the system of equations describes a classical brachistochrone. The solution to the problem is applicable in practice for predicting the shape of the chute withstanding high loads when the stress limit for the material is known.

Sergey O. GLADKOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sglad51@mail.ru

Sofiya B. BOGDANOVA (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sonjaf@list.ru

REFERENCES

1. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2016) Geometricheskii fazovyy perekhod v zadache o brakhistokhrone [Geometrical phase transition in a problem on brachistochrone]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 1. Article 161101. pp. 1–5.
2. Gladkov S.O. (2016) O traektorii dvizheniya tela, vkhodyashchego v zhidkost' pod proizvol'nym uglom [On the trajectory of the body entering the fluid at an arbitrary angle]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 4. Article 164002. pp. 1–5.
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2017) Obobshchennye dinamicheskie uravneniya ploskogo krivolineynogo dvizheniya material'nogo tela po zhelobu s uchetom sil treniya (ikh chislennyy analiz v nekotorykh chastnykh sluchayakh) [Generalized dynamic equations for a plane curvilinear motion of a material body in a trench with account for friction forces (their numerical analysis in some particular cases)]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 1. Article 171101. pp. 1–5.
4. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2017) K teorii dvizheniya sharika po vrashchayushcheyssa brakhistokhrone s uchetom sil treniya [On the theory of ball motion along a rotating brachistochrone with account for friction forces]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 2. Article 172101. pp. 1–6.
5. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases. *Journal of Mathematical Sciences*. 245(4). pp. 528–537. DOI: 10.1007/s10958-020-04709-0.
6. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) K teorii dvizheniya tel s peremennoy massoy [To the theory of motion of bodies with variable mass]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 83–91. DOI: 10.17223/19988621/58/1.

7. Smirnov V.I. (1967) Kurs vysshey matematiki [A course of higher mathematics]. Moscow: Nauka.
8. Elsholz L.E. (1969) *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie* [Differential equations and calculus of variations]. Moscow: Nauka.
9. Yang L. (1974) *Leksii po variatsionnomu ischisleniyu i teorii optimal'nogo upravleniya* [Lectures on variational calculus and optimal control theory]. Moscow: Mir.
10. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) K teorii prostranstvennoy brakhistokhrony [To the theory of n-dimensional brachistochrone]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 53–60. DOI: 10.17223/19988621/68/5.
11. Boltyanskiy V.G. (1969) *Matematicheskie metody optimal'nogo upravleniya* [Mathematical methods of optimal control]. Moscow: Nauka.
12. Mansimov K.B., Rasulova Sh.M. (2018) Ob optimal'nosti osobykh upravleniy v odnoy zadache optimal'nogo upravleniya [On optimality of singular controls in an optimal control problem]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 54. pp. 17–33. DOI: 10.17223/19988621/54/2.
13. Giannoni F., Piccione P., Verderesi J.A. (1997) An approach to the relativistic brachistochrone problem by sub-Riemannian geometry. *Journal of Mathematical Physics*. 38(12). pp. 6367–6381. DOI: 10.1063/1.532217.
14. Scarpello G.M., Ritelli D. (2006) Relativistic brachistochrones under electric or gravitational uniform fields. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik – ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 86(9). pp. 736–743. DOI: 10.1002/zamm.200510279.
15. Ivanov A.I. (1968) O brakhistokhrone chastitsy peremennoy massy s postoyannym ot-nosheniem kolichstva prisoedinyaemykh i otdelyaemykh chastits [On the brachistochron of a variable-mass particle with a constant ratio of the number of attached and separated particles]. *Doklady AN USSR. Seriya A*. pp. 683–686.
16. Rusalovskaya A.V., Ivanov G.I., Ivanov A.I. (1973) O brakhistokhrone tochki peremennoy massy s treniem i eksponentsial'nym zakonom istecheniya massy [On the brachistochron of a variable-mass point with account for friction and exponential law of mass outflow]. *Doklady AN USSR. Seriya A*. pp. 1024–1026.
17. Jeremic O., Salinic S., Obradovic A., Mitrovic Z. (2011) On the brachistochrone of a variable mass particle in general force fields. *Mathematical and Computer Modelling*. 54(11–12). pp. 2900–2912. DOI: 10.1016/j.mcm.2011.07.011.
18. Obradovic A., Salinic S., Jeremic O., Mitrovic Z. (2011) Brachistochronic motion of a variable mass system. *Proceedings of the Third Serbian (28th Yu) Congress on Theoretical and Applied Mechanics*. pp. 1237–1246.
19. Salinic S., Obradovic A., Mitrovic Z., Rusov S. (2013) On the brachistochronic motion of the Chaplygin sleigh. *Acta Mechanica*. 224(9). DOI: 10.1007/s00707-013-0878-2.
20. Lipp S. (1997) Brachistochrone with Coulomb friction. *SIAM journal on Control & Optimization*. 35(2). pp. 562–584. DOI: 10.1137/S0363012995287957.

Received: April 13, 2020