

УДК 536.46
DOI 10.17223/19988621/73/9

И.Г. Русяк, В.А. Тененев

ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВНУТРЕННЕЙ БАЛЛИСТИКИ НА РАСЧЕТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ВЫСТРЕЛА ДЛЯ ЗАРЯДОВ ИЗ ЗЕРНЕНОГО ПОРОХА¹

Рассмотрена задача о влиянии размерности математической модели на расчетные внутрибаллистические характеристики выстрела для зарядов из зерненого пороха. Исследованы математические модели выстрела в пространственной (осесимметричной), одномерной и нульмерной (термодинамической) постановках. В термодинамической модели учтено распределение давления и скорости газопороховой смеси по заснарядному пространству для канала переменного сечения. Проведено сравнение результатов моделирования в широком диапазоне изменения параметров заряжания.

Ключевые слова: *внутренняя баллистика, математическая модель, размерность задачи, вычислительные алгоритмы, сравнение результатов.*

В практике баллистического проектирования зарядов в настоящее время используются два подхода: термодинамический и газодинамический. В первом случае полагается, что горение пороха происходит при среднеобъемном давлении, температура продуктов горения, а также суммарная плотность продуктов горения и несгоревших пороховых элементов (газопороховой смеси) в любой точке заснарядного объема постоянны и зависят только от времени. Во втором случае учитывается пространственное распределение всех характеристик внутрибаллистического процесса, при этом наиболее плодотворной концепцией является подход, основанный на принципах механики гетерогенных сред и взаимопроникающих континуумов, учитывающий раздельное движение и взаимодействие фаз [1–3]. Очевидно, что идея осреднения так же, как и идея взаимопроникающих континуумов, больше подходит для зарядов, состоящих из мелкодисперсных пороховых элементов.

Влияние учета многомерности при изучении процессов, протекающих при срабатывании выстрела, имеет многоаспектный характер. Так, при исследовании процессов внутренней баллистики необходимо анализировать влияние геометрической и физической многомерности. К первой относится конструкция камеры и форма снаряда, ко второй – конструкция метательного заряда, включая конструкцию воспламенительных устройств. Вопросы моделирования многомерности внутрибаллистического процесса рассмотрены в работах [4–7].

В артиллерийских системах пороховые заряды состоят из одного или нескольких пакетов порохов. Значительная часть артиллерийских зарядов состоит из комбинированных порохов двух марок. Подходы к пространственному моделированию внутрибаллистического процесса рассмотрим на примере заряда зерненого пороха.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00072.

Для оценки роли пространственного представления параметров ниже рассмотрены нульмерная термодинамическая модель, где учтены распределения давления и скорости газопороховой смеси по заснарядному пространству для канала переменного сечения, а также одномерная и двумерная газодинамические модели.

Целью данного исследования является изучение влияния учета пространственного распределения параметров на результаты моделирования пиродинамического периода выстрела для зарядов зерненого пороха.

1. Математическая модель внутренней баллистики выстрела для заряда, состоящего из зерненого пороха в пространственной осесимметричной постановке

В качестве допущений полагается, что воспламенитель сгорает мгновенно и создает начальное давление p_v . При этом теплофизические параметры продуктов горения воспламенителя совпадают с параметрами основного заряда. Массой воздуха в камере сгорания пренебрегается. Основной заряд воспламеняется сразу по всей поверхности в момент сгорания воспламенителя. Снаряд начинает двигаться после достижения в камере давления форсирования p_ϕ ($p_\phi \geq p_v$). Теплообменом с горячей поверхностью заряда пренебрегается (скорость тепловой волны близка к скорости горения). Трение и теплообмен продуктов горения с поверхностью канала ствола не учитывается. Симметрия зарядной камеры (два цилиндра, соединенных усеченным конусом) позволяет использовать цилиндрические координаты (x, r) . Рассматривается заряд, состоящий из одной марки зерненого пороха.

В рамках принятых допущений соответствующая система уравнений внутренней баллистики артиллерийского выстрела, описывающая течение гетерогенной реагирующей смеси с учетом межгранулярного взаимодействия в осесимметричной постановке, имеет вид:

- для газовой фазы

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho m}{\partial t} + \frac{\partial \rho m v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho m v_r}{\partial r} = rG, \\
 & \frac{\partial \rho m v_x}{\partial t} + \frac{\partial r(p + \rho v_x^2)m}{\partial x} + \frac{\partial \rho m v_x v_r}{\partial r} = p \frac{\partial \rho m}{\partial x} + rG w_x - r\tau_{vw_x}, \\
 & \frac{\partial \rho m v_r}{\partial t} + \frac{\partial \rho m v_x v_r}{\partial x} + \frac{\partial r(p + \rho v_r^2)m}{\partial r} = p \frac{\partial \rho m}{\partial r} + rG w_r - r\tau_{vw_r}, \\
 & \frac{\partial \rho m e_v}{\partial t} + \frac{\partial \rho m (1-m)e_w}{\partial t} + \frac{\partial \rho m (e_v + p)v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho m (e_w + p)v_r}{\partial r} + \\
 & + \frac{\partial r(1-m)(e_w + p)w_x}{\partial x} + \frac{\partial r(1-m)(e_w + p)w_r}{\partial r} = rGQ, \\
 & \varepsilon = \frac{p(1-\alpha\rho)}{(k-1)\rho}, \quad e_v = \rho\varepsilon + \rho \frac{v_x^2 + v_r^2}{2}, \quad e_w = \delta \frac{w_x^2 + w_r^2}{2};
 \end{aligned} \tag{1}$$

- для твердой фазы

$$\frac{\partial ra}{\partial t} + \frac{\partial raw_x}{\partial x} + \frac{\partial raw_r}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial r\delta(1-m)w_x}{\partial t} + \frac{\partial r(p+\delta w_x^2)(1-m)}{\partial x} + \frac{\partial r\delta(1-m)w_x w_r}{\partial r} = p \frac{\partial r(1-m)}{\partial x} - rGw_x + r\tau_{vw_x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial r\delta(1-m)w_r}{\partial t} + \frac{\partial r\delta(1-m)w_x w_r}{\partial x} + \frac{\partial r(p+\delta w_r^2)(1-m)}{\partial r} = p \frac{\partial r(1-m)}{\partial r} - rGw_r + r\tau_{vw_r}.$$

Уравнение горения зерновых пороховых элементов записывается следующим образом:

- до фазы распада пороховых элементов $z \leq 1$ или $\psi \leq \psi_p = \kappa(1+\lambda+\mu)$:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + w_x \frac{\partial z}{\partial x} + w_r \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{u_k}{e_1}, \quad \sigma(z) = 1 + 2\lambda z + 3\mu z^2,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + w_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + w_r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \kappa \sigma(z) \frac{u_k}{e_1}; \quad (3)$$

- после распада пороховых элементов $\psi > \psi_p = \kappa(1+\lambda+\mu)$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + w_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + w_r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \kappa \sigma(\psi) \frac{u_k}{e_1}, \quad \sigma(\psi) = \sigma(\psi_p) \sqrt{\frac{1-\psi}{1-\psi_p}},$$

$$\psi_p \leq \psi \leq 1, \quad \sigma(\psi_p) = 1 + 2\lambda + 3\mu. \quad (4)$$

Пористость газопороховой смеси определяется по формуле

$$m = 1 - a\Lambda_0(1-\psi),$$

а текущие геометрические размеры порохового элемента – по формулам

$$d = d_0 + 2ze_1, \quad D = D_0 - 2ze_1, \quad L = L_0 - 2ze_1.$$

В приведенных выше уравнениях t – время; ρ – плотность пороховых газов заряда; m – пористость заряда (объем пустот в единице объема); v_x, v_r – проекции скорости движения газа на оси цилиндрической системы координат; p – давление; $\tau_{vw}, \tau_{vw_x}, \tau_{vw_r}$ – сила сопротивления движению продуктов горения в слое зерновых пороховых элементов и ее проекции на оси цилиндрической системы координат; G – газоприход продуктов горения с поверхности порохового заряда в единице объема за секунду; Q – теплотворная способность (потенциал) пороха; $f = RT_v$ – сила пороха; R – удельная газовая постоянная продуктов горения; T_v – температура продуктов горения пороха в замкнутом объеме; $k = \theta + 1$ – показатель адиабаты для смеси газов; $\theta = R/c_v$; c_v – теплоемкость продуктов горения при постоянном объеме; $\varepsilon = c_v T$ – внутренняя энергия единицы массы пороховых газов; T – температура пороховых газов; α – коволюм пороховых газов; δ – плотность материала пороха; a – счетная концентрация зерновых пороховых элементов; w_x, w_r – проекции скорости движения твердой фазы на оси цилиндрической системы координат; S_0, Λ_0 – начальные поверхность и объем порохового элемента; $u_k = u_k(p)$ – линейная скорость горения пороха; $z = e/e_1$ – относительная тол-

щина сгоревшего свода; $2e_1$ – первоначальная толщина сгоревшего свода; ψ – относительная доля сгоревшего пороха; $\sigma(\psi)$ – отношение текущей поверхности горения к первоначальной; κ, λ, μ – коэффициенты формы порохового элемента; d_0, D_0, L_0 – начальные внутренний, внешний диаметры и длина 7-канального порохового элемента.

Функции массового и силового взаимодействия между фазами имеют вид [7]

$$G = \begin{cases} aS_0\sigma(z)\delta u_k(p), & \text{если } z \leq 1 \text{ или } \psi \leq \psi_p, \\ aS_0\sigma(\psi)\delta u_k(p), & \text{если } z > 1 \text{ или } \psi > \psi_p; \end{cases}$$

$$\tau_{vw} = \lambda_{vw} \frac{\rho(v-w)\sqrt{(v_x-w_x)^2 + (v_r-w_r)^2}}{2} a \frac{S_\sigma}{4}; \quad (5)$$

$$\tau_{vw_x} = \lambda_{vw} \frac{\rho(v_x-w_x)\sqrt{(v_x-w_x)^2 + (v_r-w_r)^2}}{2} a \frac{S_\sigma}{4};$$

$$\tau_{vw_r} = \lambda_{vw} \frac{\rho(v_r-w_r)\sqrt{(v_x-w_x)^2 + (v_r-w_r)^2}}{2} a \frac{S_\sigma}{4},$$

где λ_{vw} – коэффициент сопротивления порохового зерна в слое; S_σ – текущая ограничивающая поверхность порохового элемента, $S_\sigma = \pi D(0.5D + L)$.

Уравнения для скорости движения $v_{\text{сн}}$ и перемещения $x_{\text{сн}}$ снаряда запишем как

$$q \frac{dv_{\text{сн}}}{dt} = \left(2\pi \int_0^{\frac{d_{\text{сн}}}{2}} p(t, x_{\text{сн}}, r) r dr \right) \eta(p_{\text{сн}} - p_\phi), \quad \frac{dx_{\text{сн}}}{dt} = v_{\text{сн}}, \quad (6)$$

где q – масса снаряда; $p_{\text{сн}}$ – среднее давление на снаряд; $d_{\text{сн}}$ – диаметр ствола; $\eta(\xi)$ – функция Хэвисайда.

Систему уравнений (1) – (6) необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

В качестве начальных условий задаются условия покоя и условия, отвечающие состоянию продуктов горения в момент полного сгорания воспламенителя массой ω_b в замкнутом объеме:

- при $t = 0$, $0 \leq x \leq L_{\text{км}}$, $0 \leq r \leq R_{\text{км}}(x)$

$$v_x = 0, \quad v_r = 0, \quad p = p_b, \quad \rho = \Delta_b, \quad T = T_v, \quad a = \frac{\omega}{\Lambda_0 \delta W_{\text{км}}}, \quad m = 1 - \frac{\Delta}{\delta}, \quad (7)$$

$$w_x = 0, \quad w_r = 0, \quad z = 0, \quad \psi = 0 \quad \Delta = \frac{\omega}{W_{\text{км}}}, \quad v_{\text{сн}} = 0, \quad x_{\text{сн}} = L_{\text{км}}.$$

Здесь $p_b = \frac{\Delta_b f}{1 - \alpha \Delta_b}$ – давление, развиваемое воспламенителем; $\Delta_b = \frac{\omega_b}{W_{\text{км}} - \omega/\delta}$ – плотность заряжения воспламенителя; $R_{\text{км}}(x)$ – переменный радиус камеры; $W_{\text{км}}$ – объем камеры; ω – масса заряда.

Суть граничных условий состоит в том, что на непроницаемых границах объема задаются условия непротекания (обращения в нуль нормальных компонент скорости газовой и твердой фаз у стенки). На оси канала задаются условия симметрии для искомых функций.

2. Математическая модель внутренней баллистики выстрела для заряда, состоящего из зернового пороха в одномерной постановке

Приведем общую систему одномерных газодинамических уравнений для заряда, состоящего из зернового пороха, в обозначениях работы [7]:

- для газовой фазы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho m S}{\partial t} + \frac{\partial \rho m S v}{\partial x} &= S G, \\ \frac{\partial \rho m S v}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho v^2) m S}{\partial x} &= p \frac{\partial m S}{\partial x} + S G w - S \tau_{vw}, \\ \frac{\partial m e_v S}{\partial t} + \frac{\partial (1-m) e_w S}{\partial t} + \frac{\partial m (e_v + p) S v}{\partial x} + \frac{\partial (1-m) (e_w + p) S w}{\partial x} &= S G Q, \\ \varepsilon &= \frac{p(1-\alpha\rho)}{(k-1)\rho}, \quad e_v = \rho\varepsilon + \rho \frac{v^2}{2}, \quad e_w = \delta \frac{w^2}{2}; \end{aligned} \quad (8)$$

- для твердой фазы

$$\begin{aligned} \frac{\partial a S}{\partial t} + \frac{\partial a S w}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \delta (1-m) S w}{\partial t} + \frac{\partial (p + \delta w^2) (1-m) S}{\partial x} &= p \frac{\partial (1-m) S}{\partial x} - S G w + S \tau_{vw}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \delta (1-m) S w}{\partial t} + \frac{\partial (p + \delta w^2) (1-m) S}{\partial x} = p \frac{\partial (1-m) S}{\partial x} - S G w + S \tau_{vw}. \quad (10)$$

Уравнение горения зерновых пороховых элементов записывается в виде:

- до фазы распада пороховых элементов $z \leq 1$ или $\psi \leq \psi_p = \kappa(1 + \lambda + \mu)$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + w \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u_k}{e_1}, \quad \sigma(z) = 1 + 2\lambda z + 3\mu z^2, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + w \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\kappa}{e_1} \sigma(z) u_k; \quad (11)$$

- после распада пороховых элементов $\psi > \psi_p = \kappa(1 + \lambda + \mu)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + w \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\kappa}{e_1} \sigma(\psi) u_k, \quad \sigma(\psi) = \sigma(\psi_p) \sqrt{\frac{1-\psi}{1-\psi_p}}, \quad \psi_p \leq \psi \leq 1, \quad \sigma(\psi_p) = 1 + 2\lambda + 3\mu. \quad (12)$$

Начальные и граничные условия:

- при $t = 0$, $0 \leq x \leq L_{\text{км}}$

$$v = 0, \quad w = 0, \quad p = p_B, \quad \rho = \Delta_B, \quad T = T_v, \quad a = \frac{\omega}{\Lambda_0 \delta W_{\text{км}}},$$

$$z = 0, \quad \psi = 0, \quad \Delta = \frac{\omega}{W_{\text{км}}}, \quad v_{\text{сн}} = 0, \quad x_{\text{сн}} = L_{\text{км}}; \quad (13)$$

- при $x = 0$, $t \geq 0$

$$v = w = 0; \quad (14)$$

- при $x = x_{\text{сн}}, t \geq 0$

$$q \frac{dv_{\text{сн}}}{dt} = p_{\text{сн}} S_{\text{сн}} \eta(p_{\text{сн}} - p_{\text{ф}}), \quad \frac{dx_{\text{сн}}}{dt} = v_{\text{сн}}, \quad v = v_{\text{сн}}, \quad w = v_{\text{сн}}. \quad (15)$$

3. Математическая модель внутренней баллистики выстрела для заряда, состоящего из зернового пороха в нулевой термодинамической постановке

Математическая модель основной задачи внутренней баллистики (ОЗВБ) в осредненных параметрах, где в рамках допущений термодинамического подхода учтены распределения давления и скорости газопороховой смеси по заснарядному пространству для канала переменного сечения, подробно рассмотрена в [8]. Запишем ее.

Уравнение горения:

- до фазы распада пороховых элементов $z \leq 1$ или $\psi \leq \psi_p = \kappa(1 + \lambda + \mu)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{u_k}{e_1}, \quad \sigma(z) = 1 + 2\lambda z + 3\mu z^2, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\kappa}{e_1} \sigma(z) u_k; \quad (16)$$

- после распада пороховых элементов $\psi > \psi_p = \kappa(1 + \lambda + \mu)$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{S_0}{\Lambda_0} \sigma(\psi) u_k, \quad \sigma(\psi) = \sigma(\psi_p) \sqrt{\frac{1-\psi}{1-\psi_p}}, \quad \psi_p \leq \psi \leq 1, \quad \sigma(\psi_p) = 1 + 2\lambda + 3\mu. \quad (17)$$

Уравнения движения и перемещения снаряда

$$q \frac{dv_{\text{сн}}}{dt} = p_{\text{сн}} S_{\text{сн}} \eta(p_{\text{сн}} - p_{\text{ф}}), \quad \frac{dx_{\text{сн}}}{dt} = v_{\text{сн}}. \quad (18)$$

Уравнение энергии

$$p \left[W_{\text{сн}} - \frac{\omega}{\delta} (1 - \psi) - \alpha (\omega \psi + \omega_{\text{в}}) \right] = (\omega \psi + \omega_{\text{в}}) f - \left(1 + \frac{(\omega + \omega_{\text{в}})}{q} J_1 \right) \theta q \frac{v_{\text{сн}}^2}{2}. \quad (19)$$

Уравнение состояния

$$p \left[W_{\text{сн}} - \alpha (\omega \psi + \omega_{\text{в}}) - \frac{\omega}{\delta} (1 - \psi) \right] = (\omega \psi + \omega_{\text{в}}) RT. \quad (20)$$

Дополнительные соотношения:

$$p_{\text{сн}}(t) = \frac{p(t) + (\omega + \omega_{\text{в}}) \frac{v_{\text{сн}}^2}{W_{\text{сн}}} \left(\frac{1}{2} J_1 + J_2(x_{\text{сн}}) - J_3 - \frac{1}{2} \right)}{1 + \frac{(\omega + \omega_{\text{в}})}{q} (J_2(x_{\text{сн}}) - J_3)},$$

$$p_{\text{кн}}(t) = p_{\text{сн}}(t) \left(1 + \frac{(\omega + \omega_{\text{в}})}{q} J_2(x_{\text{сн}}) \right) + (\omega + \omega_{\text{в}}) \frac{v_{\text{сн}}^2}{W_{\text{сн}}} \left(\frac{1}{2} - J_2(x_{\text{сн}}) \right),$$

$$p(x, t) = p_{\text{кн}}(t) - \left(\frac{(\omega + \omega_{\text{в}}) p_{\text{сн}}}{q} - (\omega + \omega_{\text{в}}) \frac{v_{\text{сн}}^2}{W_{\text{сн}}} \right) J_2(x) - \frac{1}{2} (\omega + \omega_{\text{в}}) \frac{S_{\text{кн}}^2 v_{\text{сн}}^2}{W_{\text{сн}}^3} \frac{W^2(x)}{S^2(x)}, \quad (21)$$

$$\tilde{v}(x, t) = \frac{W(x)}{S(x)} \frac{S_{\text{кн}} v_{\text{сн}}}{W_{\text{сн}}}, \quad W(x) = \int_0^x S(\xi) d\xi, \quad W_{\text{сн}} = W_{\text{км}} + S_{\text{сн}}(x_{\text{сн}} - L_{\text{км}}),$$

$$J_1 = \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{сн}}^3} \int_0^{x_{\text{сн}}} \frac{W^2(x)}{S(x)} dx, \quad J_2(x) = \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{сн}}^2} \int_0^x \frac{W(\xi)}{S(\xi)} d\xi, \quad J_3 = \frac{S_{\text{кн}}^2}{W_{\text{сн}}^3} \int_0^{x_{\text{сн}}} \left(\int_0^x \frac{W(\xi)}{S(\xi)} d\xi \right) S(x) dx.$$

Здесь $p_{\text{кн}}(t)$ – переменное давление на дно канала; $\tilde{v}(x, t)$ – скорость газопороховой смеси; $S(x)$ – переменная площадь сечения камеры и канала ствола; $J_1, J_2(x), J_3$ – баллистические коэффициенты.

Начальные условия:

- при $t = 0$, $0 \leq x \leq L_{\text{км}}$

$$p = p_{\text{в}}, \quad \rho = \Delta_{\text{в}}, \quad T = T_{\text{в}}, \quad z = 0, \quad \psi = 0, \quad \Delta = \frac{\Omega}{W_{\text{км}}}, \quad v_{\text{сн}} = 0, \quad x_{\text{сн}} = L_{\text{км}}. \quad (22)$$

4. Вычислительные алгоритмы решения задач

Численное решение ОЗВБ в термодинамической постановке реализовано с использованием двухшаговой схемы Рунге – Кутты второго порядка точности. При решении газодинамических задач использовали метод С.К. Годунова [9–11]. Для численного решения системы газодинамических уравнений применялся метод контрольного объема. Параметры газа на границах контрольных объемов определяются с использованием автомодельного решения задачи о распаде произвольного разрыва.

Представим систему уравнений (1) в обобщенной форме:

$$\frac{\partial r\mathbf{Y}}{\partial t} + \frac{\partial r\mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial r\mathbf{Z}}{\partial r} = \mathbf{H}, \quad (23)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{\rho}v_x \\ \tilde{\rho}v_r \\ \tilde{e} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}v_x \\ \tilde{\rho}v_x^2 + \tilde{p} \\ \tilde{\rho}v_x v_r \\ (\tilde{e} + \tilde{p})v_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}v_r \\ \tilde{\rho}v_x v_r \\ \tilde{\rho}v_r^2 + \tilde{p} \\ (\tilde{e} + \tilde{p})v_r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} rG \\ \frac{\tilde{p}}{m} \frac{\partial rm}{\partial x} + rGw_x - r\tau_{vw_x} \\ \frac{\tilde{p}}{m} \frac{\partial rm}{\partial r} + rGw_r - r\tau_{vw_r} \\ rGQ \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\rho} = m\rho$; $\tilde{p} = mp$; $\tilde{e} = me_v$.

Уравнение состояния запишем в виде

$$\varepsilon = \frac{\tilde{p}}{(\tilde{k} - 1)\tilde{\rho}}, \quad \tilde{k} = \frac{k - \alpha\tilde{\rho}/m}{1 - \alpha\tilde{\rho}/m}.$$

Система газодинамических уравнений (1) решается с применением разностной схемы С.К. Годунова в сочетании со схемой MUSCL (monotone upwind schemes for conservation laws) [8, 12]. Составляющие вектора $\mathbf{Y}$ на гранях контрольного объема определяются из решения задачи о распаде произвольного разрыва с локальной аппроксимацией коэффициента $\tilde{k}$ [10].

Для решения гиперболических уравнений движения конденсированной фазы и горения пороха также используется разностная схема типа С.К. Годунова с опре-

делением потоков на гранях контрольного объема по схеме [12]. Например, для скорости твердой фазы w_x потоки импульса на гранях $l = (1, 2, 3, 4)$ рассчитываются следующим образом:

$$Q_l = \begin{cases} \min[(Q_l)_L, (Q_l)_R] & |(w_x)_L \leq (w_x)_R, \\ \max[(Q_l)_L, (Q_l)_R] & |(w_x)_L > (w_x)_R, \end{cases}$$

где

$$(Q_l)_S = \sigma_l \delta (1 - m_S) \left[-(w_x)_S W + \alpha_l \left((w_x)_S^2 + \frac{\tilde{p}_S}{m\delta} \right) + \beta_l (w_x)_S (w_r)_S \right]; \quad S = L, R.$$

Здесь индексы L и R соответствуют параметрам в смежных контрольных объемах с гранью l ; σ_l – площадь грани; W – скорость перемещения грани; α_l и β_l – компоненты вектора нормали к грани.

Криволинейная ортогонализированная сетка в двумерной осесимметричной задаче строилась на основе метода, изложенного в работе [8]. Разностная сетка имела фиксированное количество узлов. В процессе решения она растягивалась при движении снаряда по стволу. Шаг по времени определялся по условию Куранта – Фридрихса – Леви. Проведено исследование сеточной сходимости метода. Выбор шагов численного интегрирования, обеспечивающих в Евклидовой норме точность расчета 0.1 %, осуществлялся в соответствии с принципом Рунге [13]. Количество ячеек сетки в области интегрирования, обеспечивающих заданную точность: для одномерного приближения $N_x = 100$; для двумерной осесимметричной задачи $N = N_x \times N_r = 100 \times 16 = 1600$.

5. Численные результаты

Численные исследования проводились для артиллерийской системы со следующими геометрическими характеристиками: диаметр канала ствола $d_{\text{кн}} = 0.1$ м; длина камеры $L_{\text{км}} = 1$ м; начало $l_{\text{ну}} = 0.5$ м и конец $l_{\text{ку}} = 0.8$ м уширения камеры; длина ствола $L_d = 5$ м.

Переменная площадь сечения камеры и канала ствола задавалась следующим образом: $S(x) = S_{\text{км}} = 0.25\pi d_{\text{км}}^2$, если $0 \leq x \leq l_{\text{ну}}$; $S(x) = S_{\text{кн}} = 0.25\pi d_{\text{кн}}^2$, если $x \geq l_{\text{ку}}$; при $l_{\text{ну}} < x < l_{\text{ку}}$ сначала определялся переменный диаметр в уширении камеры линейной интерполяцией между диаметром камеры $d_{\text{км}}$ и диаметром канала ствола $d_{\text{кн}}$, затем в соответствующей точке x определялась площадь сечения камеры.

Теплофизические характеристики продуктов горения принимали значения:

$$f = 1 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}; \quad k = 1.25; \quad R = 300 \text{ Дж/кгК}; \quad \alpha = 0.001 \text{ м}^3/\text{кг}.$$

Геометрические характеристики зерновых 7-канальных пороховых элементов: $d_0 = 0,0007$ м, $D_0 = 0,0077$ м, $L = 0,018$ м; плотность пороха $\delta = 1600 \text{ кг/м}^3$; Линейная скорость горения пороха определялась зависимостями

$$u_k = u_{1/3} p^{1/3}, \text{ если } p_{\text{в}} = 5 \cdot 10^6 \text{ Па} \leq p \leq 30 \cdot 10^6 \text{ Па} = p_{1/3};$$

$$u_k = u_{2/3} p^{2/3}, \text{ если } p_{1/3} \leq p \leq 60 \cdot 10^6 \text{ Па} = p_{2/3}; \quad u_k = u_1 p, \text{ если } p \geq p_{2/3}.$$

Значения $u_{1/3}$ и $u_{2/3}$ определялись из условия совпадения скоростей горения в реперных точках:

$$u_{1/3} p_{1/3}^{1/3} = u_{2/3} p_{1/3}^{2/3} \text{ и } u_{2/3} p_{2/3}^{2/3} = u_1 p_{2/3}. \text{ Откуда } u_{2/3} = u_1 p_{2/3}^{1/3}, \text{ а } u_{1/3} = u_{2/3} p_{1/3}^{1/3}.$$

Вес заряда ω задавался из условия, что плотность заряжания в камере при любых геометрических размерах была равна $\Delta = 800 \text{ кг/м}^3$.

Термодинамические и газодинамические решения сравнивались при $q = (2.5; 5; 15; 30) \text{ кг}$ и $d_{\text{км}} = (0.1; 0.2; 0.3) \text{ м}$. Единичная скорость горения u_1 для сравниваемых вариантов подбиралась из условия $(p_{\text{кн}})_{\text{max}} = 400 \cdot 10^6 \text{ Па}$ при решении ОЗВБ по термодинамической модели.

Результаты расчета внутренней баллистики по термодинамической и газодинамическим моделям представлены в таблице, где приведены значения основных параметров задачи: скорость снаряда $(v_{\text{сн}})_d$, максимальное давление на дно канала $(p_{\text{кн}})_m$, максимальное давление на дно снаряда $(p_{\text{сн}})_m$ и относительное изменение дульной скорости снаряда, полученной по различным моделям $\tilde{\delta} (v_{\text{сн}})_d$. При этом за точки отсчета при сравнении принимались значения, полученные по одномерной газодинамической модели.

Сравнение результатов расчета ОЗВБ, полученных по термодинамической и газодинамическим моделям при различных параметрах заряжания

№ п/п	Параметры заряжания		Расчет по термодинамической модели			Расчет по одномерной газодинамической модели			Расчет по двумерной газодинамической модели		
	q , кг	$d_{\text{км}}$, м ω , кг	$(v_{\text{сн}})_d$, м/с $\tilde{\delta} (v_{\text{сн}})_d$, %	$(p_{\text{кн}})_m$, МПа	$(p_{\text{сн}})_m$, МПа	$(v_{\text{сн}})_d$, м/с $\tilde{\delta} (v_{\text{сн}})_d$, %	$(p_{\text{кн}})_m$, МПа	$(p_{\text{сн}})_m$, МПа	$(v_{\text{сн}})_d$, м/с $\tilde{\delta} (v_{\text{сн}})_d$, %	$(p_{\text{кн}})_m$, МПа	$(p_{\text{сн}})_m$, МПа
1	2.5	0.1 6.3	1893.3 -6.4	400.0	177.0	2023.2 -	400.5	180.8	2025.3 +0.1	400.8	177.3
2		0.2 18.2	1612.9 +0.1	400.0	88.1	1611.6 -	404.0	94.1	1617.4 +0.4	398.4	95.2
3		0.3 37.7	1186.8 -18.9	400.0	48.9	1463.8 -	412.0	74.2	1466.2 +0.2	404.0	74.2
4	5	0.1 6.3	1562.3 -3.5	400.0	245.4	1619.7 -	417.5	266.6	1620.1 +0.0	417.4	266.5
5		0.2 18.2	1450.1 +1.0	400.0	145.0	1435.6 -	414.9	145.9	1425.0 -0.7	402.4	144.4
6		0.3 37.7	1107.9 -10.6	400.0	87.6	1239.5 -	395.8	105.7	1241.5 +0.2	403.6	106.0
7	15	0.1 6.3	1027.4 +4.4	400.0	330.6	984.5 -	420.1	359.4	986.6 -0.2	420.4	359.3
8		0.2 18.2	1094.5 -0.1	400.0	253.9	1095.6 -	409.5	257.9	1106.7 +1.0	415.8	263.2
9		0.3 37.7	913.8 -2.2	400.0	183.5	934.0 -	405.0	191.6	937.9 +0.4	408.3	193.0
10	30	0.1 6.3	754.2 +4.9	400.0	362.0	719.1 -	398.5	368.9	720.1 +0.1	399.7	370.8
11		0.2 18.2	852.3 -0.5	400.0	311.2	856.9 -	402.1	318.6	866.0 +1.1	410.8	326.1
12		0.3 37.7	751.7 +0.4	400.0	252.1	748.5 -	409.0	254.4	752.1 -0.5	411.7	256.4

Анализ численных результатов показывает, что в исследованном диапазоне изменения параметров заряжения одномерная и двумерная газодинамические модели отличаются незначительно: по дульной скорости – не более чем на 1.0 %, по максимальному давлению на дно канала – 3.0 %, по максимальному давлению на дно снаряда – 2.4 %.

Рассмотрим сравнение результатов, полученных по термодинамической и одномерной газодинамической моделям. На рис. 1, 2 представлены сравнения результатов расчета кривых давления на границах заснарядного пространства по термодинамической и газодинамической моделям для камеры без уширения.

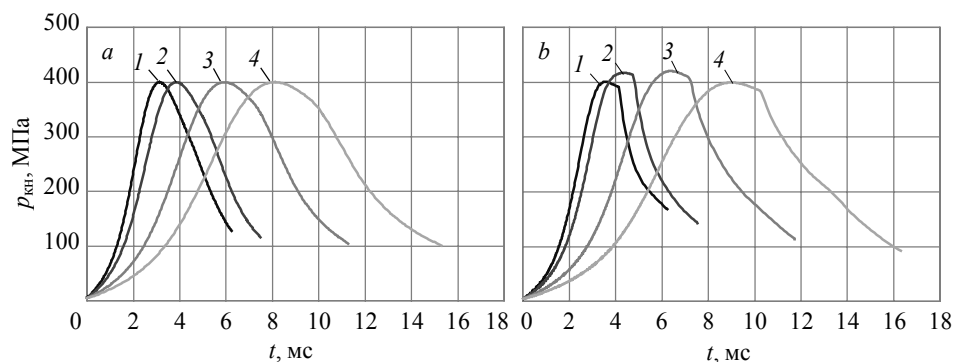


Рис. 1. Кривые давления на дно канала от времени выстрела, рассчитанные по термодинамической (а) и газодинамической (б) моделям при $d_{\text{км}} = 0.1$ м: 1 – $q = 2.5$ кг; 2 – $q = 5$ кг; 3 – $q = 15$ кг; 4 – $q = 30$ кг

Fig. 1. Curves of the pressure at the bore bottom versus time of a shot, obtained using (a) thermodynamic and (b) gas-dynamic models at $d_{\text{км}} = 0.1$ m: $q = (1) 2.5$, (2) 5, (3) 15, and (4) 30 kg

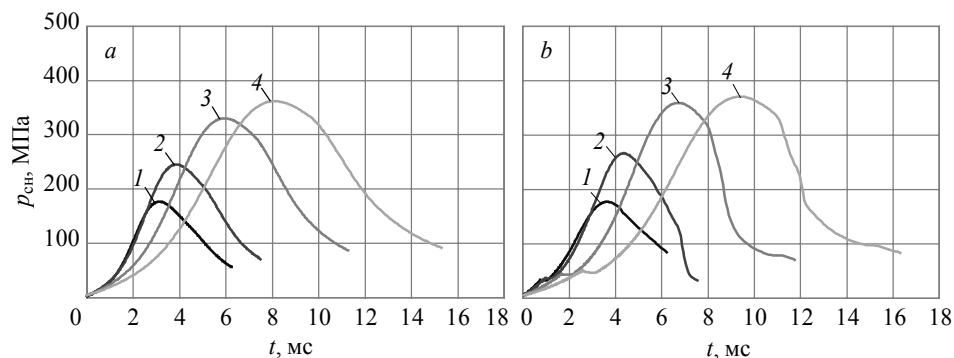


Рис. 2. Кривые давления на дно снаряда от времени выстрела, рассчитанные по термодинамической (а) и газодинамической (б) моделям при $d_{\text{км}} = 0.1$ м: 1 – $q = 2.5$ кг; 2 – $q = 5$ кг; 3 – $q = 15$ кг; 4 – $q = 30$ кг

Fig. 2. Curves of the pressure at the projectile bottom versus time of a shot, obtained using (a) thermodynamic and (b) gas-dynamic models at $d_{\text{км}} = 0.1$ m: $q = (1) 2.5$, (2) 5, (3) 15, and (4) 30 kg

Как видно из представленных рисунков, качественно баллистические кривые, полученные по термодинамической и газодинамической моделям, достаточно хорошо коррелируют между собой. При этом наблюдается вполне удовлетворительное количественное совпадение интегральных характеристик выстрела при малых ω/q (см. таблицу, варианты № 4, 7, 10). Для этих вариантов расхождение по дульной скорости составило менее 4.9 %, по максимальному давлению на дно канала – 5.0 %, на дно снаряда – 8.0 %.

На рис. 3, 4 приведены аналогичные кривые для $q = 5$ кг при различных уширениях камеры. В целом, также наблюдается хорошее качественное совпадение кривых и количественное совпадение интегральных характеристик выстрела при небольших уширениях камеры (см. таблицу, варианты № 4, 5).

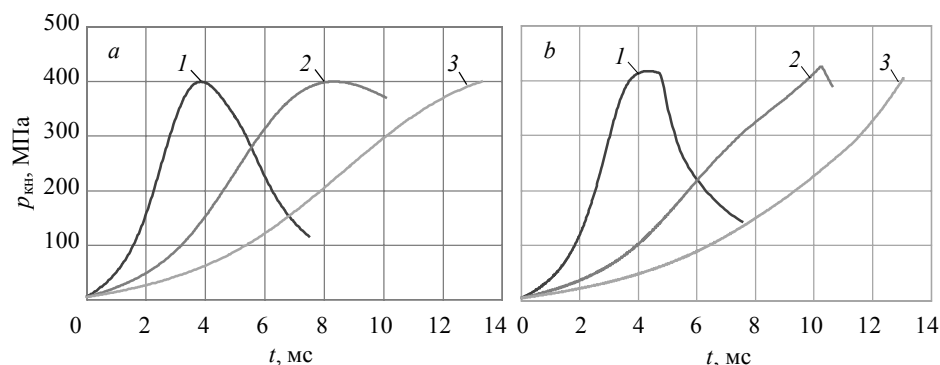


Рис. 3. Кривые давления на дно канала от времени выстрела, рассчитанные по термодинамической (а) и газодинамической (б) моделям при $q = 5$ кг: 1 – $d_{кн} = 0.1$ м; 2 – $d_{кн} = 0.2$ м; 3 – $d_{кн} = 0.3$ м

Fig. 3. Curves of the pressure at the bore bottom versus time of a shot, obtained using (a) thermodynamic and (b) gas-dynamic models at $q = 5$ kg: $d_{кн} = (1) 0.1$, (2) 0.2, and (3) 0.3 m

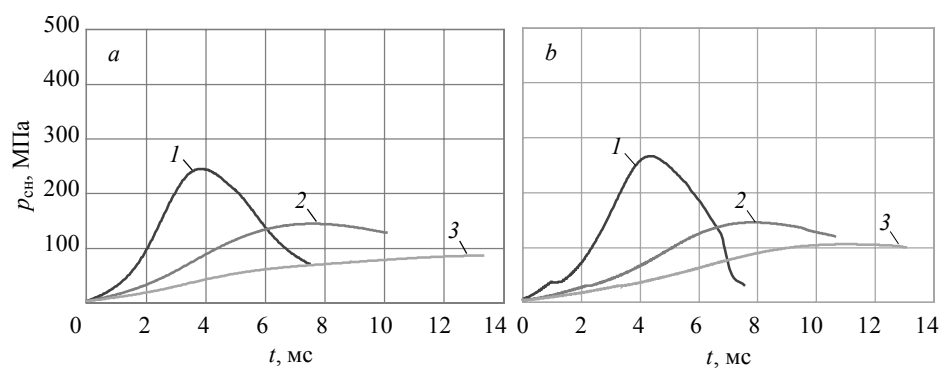


Рис. 4. Кривые давления на дно снаряда от времени выстрела, рассчитанные по термодинамической (а) и газодинамической (б) моделям при $q = 5$ кг: 1 – $d_{кн} = 0.1$ м; 2 – $d_{кн} = 0.2$ м; 3 – $d_{кн} = 0.3$ м

Fig. 4. Curves of the pressure at the projectile bottom versus time of a shot, obtained using (a) thermodynamic and (b) gas-dynamic models at $q = 5$ kg: $d_{кн} = (1) 0.1$, (2) 0.2, and (3) 0.3 m

По дульной скорости расхождение составило менее 3.5 %, по максимальному давлению на дно канала – 4.2 %, на дно снаряда – 8.1 %, однако при большом уширении камеры (см. таблицу, вариант № 6) расхождение по дульной скорости достигает уже 10.6 %, по максимальному давлению на дно канала – 1.1 %, на дно снаряда – 17.1 %.

Анализ полученных результатов в целом показывает, что наилучшее совпадение двух моделей имеет место при уширениях камеры, $d_{\text{км}} = 0.2$ м, независимо от веса снаряда (см. таблицу, варианты № 2, 5, 8, 11). В данных случаях расхождение по дульной скорости не превосходит 1 %, по максимальному давлению на дно канала – 3.7 %, на дно снаряда – 6.4 %.

На рис. 5 представлены распределения давления и скорости продуктов горения по заснарядному пространству, рассчитанные по различным моделям внутренней баллистики. Распределения параметров представлены в момент, когда снаряд проходит середину ствола.

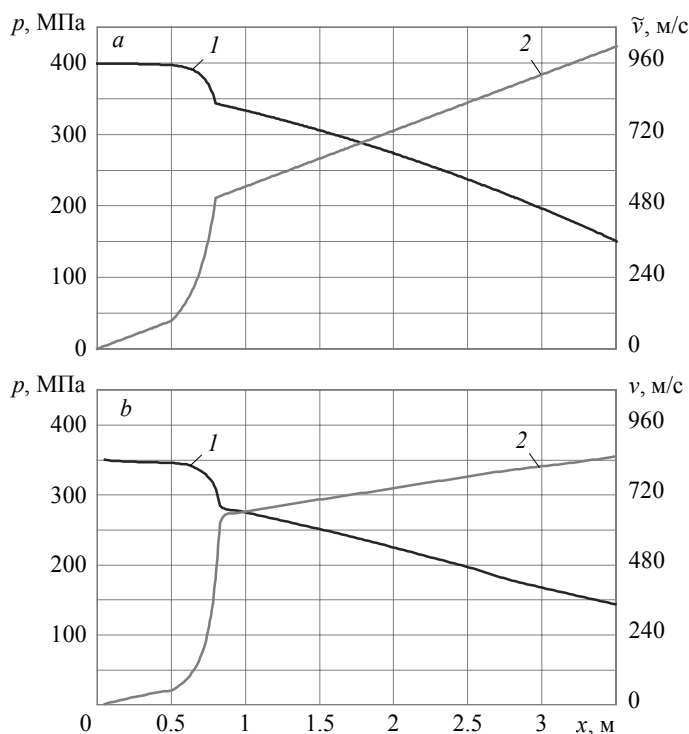


Рис. 5. Распределения давления и скорости газопороховой смеси в термодинамической модели (а); распределения давления и скорости газа в одномерной газодинамической модели (б) по длине камеры и ствола при $q = 5$ кг, $d_{\text{км}} = 0.2$ м: 1 – $p(t, x)$; 2 – $\tilde{v}(t, x)$ или $v(t, x)$

Fig. 5. Distribution of the pressure and velocity of a gas-powder mixture along the barrel in the case of (a) thermodynamic model and (b) one-dimensional gas-dynamic model at $q = 5$ kg, $d_{\text{км}} = 0.2$ m: 1 – $p(t, x)$; 2 – $\tilde{v}(t, x)$ or $v(t, x)$

Можно констатировать хорошее качественное совпадение моделируемых параметров. Здесь лишь отметим, что в термодинамической модели мы имеем дело с распределением скорости газопороховой смеси (газа и несгоревших пороховых элементов), а в газодинамической модели – с распределением скорости газа. Эту особенность необходимо учитывать при решении сопряженных задач с использованием термодинамического подхода.

В заключении приведем зависимости баллистических коэффициентов: J_1 , $J_2 = J_2(x_{\text{сн}})$ и J_3 от времени выстрела и пути снаряда. На рис. 6 представлены соответствующие кривые, полученные для варианта № 5 (см. таблицу). Для камеры с уширением, как показывают расчеты, полученные коэффициенты носят существенно переменный характер, монотонно возрастают по мере движения снаряда по каналу ствола.

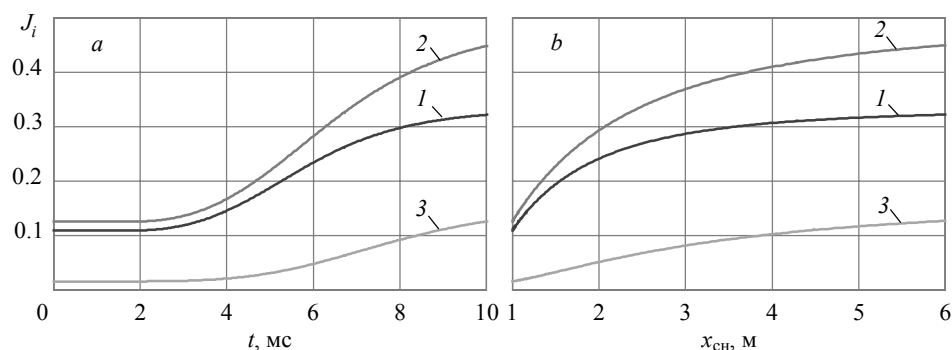


Рис. 6. Изменение баллистических коэффициентов J_i ($i = 1, 2, 3$) от времени выстрела (a); и от пути, пройденного снарядом (b), при $q = 5$ кг, $d_{\text{км}} = 0.2$ м: 1 – J_1 ; 2 – J_2 ; 3 – J_3

Fig. 6. Variation of ballistic coefficients J_i ($i = 1, 2, 3$) with (a) time of a shot and (b) projectile travel at $q = 5$ kg, $d_{\text{км}} = 0.2$ m: 1 – J_1 ; 2 – J_2 ; and 3 – J_3

Для камеры без уширения эти коэффициенты принимают постоянные значения: $J_1 = 1/3$, $J_2 = 1/2$ и $J_3 = 1/6$.

Заключение

Как следует из представленных материалов, существует область параметров заряжания, при которых термодинамический подход, где учтены распределения давления и скорости газопороховой смеси по заснарядному пространству для канала переменного сечения, дает удовлетворительное приближение к параметрам, полученным на основе газодинамического подхода, описывающего течение гетерогенной реагирующей смеси с учетом раздельного описания фаз и межгранулярного взаимодействия между ними.

Анализ численных результатов показывает, что во всем исследованном диапазоне изменения параметров заряжания одномерная и двумерная газодинамические модели отличаются между собой незначительно, поэтому в основной пиродинамический период моделирование заряда, состоящего из зернового пороха, можно проводить по одномерным газодинамическим моделям или нульмерным термодинамическим моделям с учетом пространственного распределения давления и скорости газопороховой смеси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cough P.S. Modeling of two-phase flows in guns // Interior Ballistics of Guns. 1979. V. 66. P. 176–196.
2. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 256 с.
3. Русяк И.Г., Ушаков В.М. Внутрикамерные гетерогенные процессы в ствольных системах: монография. Екатеринбург: УрО РАН, 2001. 259 с.
4. Ищенко А.Н., Касимов В.З., Ушакова О.В. Расчет функционирования модульных метательных зарядов в осесимметричной постановке // Материалы Всероссийской научной конференции «Современная баллистика и смежные вопросы механики». Томск, 17 – 19 ноября 2009. Томск: Том. гос. ун-т, 2010. С. 85–86.
5. Ищенко А.Н., Касимов В.З., Ушакова О.В. Влияние начальной температуры топлива и метода воспламенения на баллистические характеристики выстрела в условиях модельной установки калибром 120 мм // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 70. С. 37–50. DOI: 10.17223/19988621/70/4/.
6. Меньшов И.С., Немцев М.Ю., Семенов И.В. Численное моделирование волновых процессов при горении неоднородно распределенного заряда // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59. № 9. С. 1591–1604. DOI: 10.1134/S004446691909014X.
7. Русяк И.Г., Липанов А.М., Ушаков В.М. Физические основы и газовая динамика горения порохов в артиллерийских системах: монография. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016. 456 с.
8. Русяк И.Г., Тенев В.А. Моделирование баллистики артиллерийского выстрела с учетом пространственного распределения параметров и противодействия // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12. № 5. С. 1123–1147. DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123–1147.
9. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
10. Прокопов Г.П., Северин А.В. Экономичная реализация метода Годунова // Препринты ИПМ имени М.В. Келдыша. 2009. № 29. 24 с. URL: https://keldysh.ru/papers/2009/prep29/prep2009_29.pdf.
11. Сафронов А.В., Фомин Ю.В. Метод численного решения уравнений газодинамики с помощью соотношения на разрывах // Труды МФТИ. 2010. Т. 2. № 2. С. 137–148.
12. Wesseling Pieter. Principles of Computational Fluid Dynamics (Springer Series in Computational Mathematics. V. 29). Springer, 2001. 644 p. DOI: 10.1007/978-3-642-05146-3.
13. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2003. 316 с.

Статья поступила 23.07.2021

Rusyak I.G., Tenenev V.A. (2021) THE IMPACT OF THE DIMENSION OF A MATHEMATICAL MODEL OF INTERNAL BALLISTICS ON DESIGN PARAMETERS OF A SHOT FOR GRAIN GUNPOWDER CHARGES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 73. pp. 95–110

DOI 10.17223/19988621/73/9

Keywords: internal ballistics, mathematical model, dimension of a problem, computational algorithms, comparison of results.

The problem of the impact of the mathematical model dimension on the calculated intraballistic characteristics of a shot for the charges made of granulated powder is considered. Mathematical models of the shot are studied using the spatial (axisymmetric), one-dimensional, and zero-dimensional (thermodynamic) formulations. The thermodynamic model takes into

account the distribution of the pressure and velocity of a gas-powder mixture behind the shot for a channel of variable cross-section. Comparison of simulation results is carried out in a wide range of loading parameters. It is shown that there is a range of the loading parameters for a thermodynamic approach to give satisfactory approximation to the parameters obtained using the gas-dynamic approach, which describes the flow of a heterogeneous reacting mixture with a separate consideration of phases and intergranular interactions between them. Notably that in the entire range of the charging parameters studied in this work, the one-dimensional and two-dimensional gas-dynamic models only slightly differ from each other. Therefore, in the main pyrodynamic period, the actuation of the charge, made of granulated powder, can be simulated using a one-dimensional gas-dynamic model or a zero-dimensional thermodynamic model with allowance for spatial distribution of the pressure and velocity of the gas-powder mixture.

Financial support. The reported study was funded by the Russian Foundation for Basic Research, project No. 20-01-00072.

Ivan G. Rusyak (Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of the RAMAS, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: primat@istu.ru

Valentin A. Tenenev (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: v.tenenev@gmail.com

REFERENCES

1. Cough P.S. (1979) Modeling of two-phase flows in guns. *Interior Ballistics of Guns*. 66. pp. 176–196.
2. Khomenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999) *Matematicheskoe modelirovanie vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematical modeling of ballistic processes in barrel systems]. Novosibirsk: SB RAS Publishing House.
3. Rusyak I.G., Ushakov V.M. (2001) *Vnutrikamernye geterogennyye protsessy v stvol'nykh sistemakh* [Intra-chamber heterogeneous processes in barrel systems]. Yekaterinburg: Ural Branch of the Russian Academy of Sciences.
4. Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Ushakova O.V. (2010) Raschet funktsionirovaniya modul'nykh metatel'nykh zaryadov v osesimmetrichnoy postanovke [Calculation of the functioning of modular propellant charges in an axisymmetric formulation]. *Materialy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii "Sovremennaya ballistika i smezhnye voprosy mekhaniki"*. pp. 85–86.
5. Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Ushakova O.V. (2021) Vliyanie nachal'noy temperatury topliva i metoda vosplamneniya na ballisticheskie kharakteristiki vystrela v usloviyakh modul'noy ustanovki kalibrom 120 mm [Influence of the initial propellant temperature and ignition method on ballistic characteristics of a shot in the setting of a 120 mm caliber model ballistic installation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 70. pp. 37–50. DOI: 10.17223/19988621/70/4.
6. Menshov I.S., Nemtsev M.Y., Semenov I.V. (2019) Numerical modeling of wave processes accompanying combustion of inhomogeneously distributed composite propellant. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 59(9). pp. 1528–1541. DOI: 10.1134/S0965542519090148.
7. Rusyak I.G., Lipanov A.M., Ushakov V.M. (2016) *Fizicheskie osnovy i gazovaya dinamika goreniya porokhov v artilleriyskikh sistemakh* [Physical fundamentals and gas dynamics of gunpowder combustion in artillery systems]. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Studies.
8. Rusyak I.G., Tenenev V.A. (2020) Modelirovanie ballistiki artilleriyskogo vystrela s uchetom prostranstvennogo raspredeleniya parametrov i protivodavleniya [Modeling of ballistics of an artillery shot taking into account the spatial distribution of parameters and backpressure].

- Computer Research and Modeling*. 12(5). pp. 1123–1147. DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123-1147.
9. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Krayko A.N., Prokopov G.P. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution to multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka.
 10. Prokopov G.P., Severin A.V. (2009) Ekonomichnaya realizatsiya metoda Godunova [Efficient implementation of Godunov's method]. *Preprinty IPM imeni M.V. Keldysha – Keldysh Institute Preprints*. 29. pp. 1–24. Access mode: https://keldysh.ru/papers/2009/prep29/prep2009_29.pdf.
 11. Safronov A.V., Fomin Yu.V. (2010) Metod chislennogo resheniya uravneniy gazodinamiki s pomoshch'yu sootnosheniya na razryvakh [A method for the numerical solution of the equations of gas dynamics using the relation at discontinuities]. *Trudy MFTI – Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology*. 2(2). pp. 137–148.
 12. Wesseling P. (2001) *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Springer Series in Computational Mathematics. 29. DOI: 10.1007/978-3-642-05146-3.
 13. Samarskiy A.A., Gulin A.V. (2003) *Chislennyye metody matematicheskoy fiziki* [Numerical methods in mathematical physics]. Moscow: Nauchnyy mir.

Received: July 23, 2021