

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 512.572

DOI 10.17223/20710410/54/1

ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛУГРУПП С ПЛАНАРНЫМИ ГРАФАМИ КЭЛИ: РЕЗУЛЬТАТЫ И ПРОБЛЕМЫ

Д. В. Соломатин

*Омский государственный педагогический университет, г. Омск, Россия***E-mail:** solomatin_dv@omgpu.ru

Классические графы Кэли для групп давно и основательно зарекомендовали себя в решении прикладных задач, найдя применение в различных научных сферах, от криптографии до кампанологии. В последнее время всё большее внимание привлекает изучение прикладных аспектов графов Кэли полугрупп. В настоящей работе дан обзор результатов, полученных при исследованиях полугрупп с планарными графами Кэли, и результатов по изучению ранга планарности многообразий полугрупп. Сформулирован ряд нерешённых проблем, решение которых найдёт применение в комбинаторной теории полугрупп. В заключении даётся понятие спектра рангов планарности многообразий полугрупп, с помощью которого появляется возможность хеширования полугрупповых многообразий.

Ключевые слова: *полугруппа, граф Кэли полугруппы, планарный граф, многообразие полугрупп, ранг планарности.*

RESEARCHES OF SEMIGROUPS WITH PLANAR CAYLEY GRAPHS: RESULTS AND PROBLEMS

D. V. Solomatin

Omsk State Pedagogical University, Omsk, Russia

The classical Cayley graphs for groups have long and thoroughly proven themselves in solving applied problems, finding application in various scientific fields, from cryptography to campanology. Recently, more and more attention has been paid to the researching the applied aspects of Cayley graphs of semigroups. In this paper, we survey a result obtained in investigations on semigroups with planar Cayley graphs and results on the study of planarity rank of a semigroup varieties. A number of unsolved problems are formulated, the solution of which finds application in the combinatorial theory of semigroups. Just as Cayley graphs of semigroups are used for constructing hash functions, the concluding part of the paper introduces the concept of the spectrum of planarity ranks for varieties of semigroups, with the help of which it becomes possible to hash semigroup varieties.

Keywords: *semigroup, Cayley graph of semigroup, planar graph, semigroup variety, planarity rank.*

Введение

Данная работа представляет собой критический анализ результатов в обозначенном заглавием направлении, их обобщение и решение новых задач планаризации для многообразий полугрупп в ходе зарождения спектральной теории рангов планарности полугрупповых многообразий. Постепенно подводя читателя к понятию коспектральных многообразий полугрупп, находящих применение в широком круге задач построения хэш-функций, в заключительном разделе приведён краткий список открытых проблем этой теории. Последнее обобщает существующую ныне геометрическую теорию групп [1] и вносит вклад в развитие теории полугрупп с планарными графами Кэли, определяемый критическим анализом результатов, их систематизацией и помещением в более широкий контекст, вычленением потенциальных точек для дальнейшего роста активно развивающейся геометрической теории полугрупп [2].

Понятие графа Кэли предложено Артуром Кэли в 1878 г. [3] как наглядная интерпретация абстрактных групп. С тех пор получено много интересных результатов, опирающихся на саму концепцию графов Кэли групп как таковую. Вдохновлённые обилием результатов о графах Кэли для групп, многие авторы изучали графы Кэли для полугрупп. Что касается исследований планарных графов, то их традиционно относят к вопросам топологии, которые представляют определённый интерес и с инженерной точки зрения. Рассматриваемый нами алгебраический подход значительно шире.

При этом классические графы Кэли для групп давно [4] и основательно [5] зарекомендовали себя в решении прикладных задач, они применяются в различных научных сферах, от криптографии [6] до кампанологии [7]. В последнее время активно изучаются прикладные аспекты графов Кэли полугрупп. В настоящей работе дан обзор результатов, полученных при исследованиях конечных полугрупп с планарными графами Кэли, и результатов по изучению ранга планарности многообразий полугрупп. Сформулирован ряд открытых проблем, решение которых найдёт применение в комбинаторной теории полугрупп. Подобно тому, как в [8] графам Кэли полугрупп находят приложение для построения хэш-функций, в заключении даётся понятие спектра рангов планарности многообразий полугрупп, с помощью которого появляется возможность хеширования полугрупповых многообразий.

Описание допускающих плоские графы Кэли конечных групп известно давно [9]. Но исследования групп, допускающих плоские графы Кэли, продолжаются [10–13], в том числе и зарубежными авторами [14–23], и эти работы имеют дело уже с бесконечными конечно порождёнными группами.

Первое упоминание используемого определения конструкции графов Кэли для полугрупп относительно множества образующих её элементов, как ориентированного мультиграфа с помеченными (раскрашенными) дугами, встречается в [24]. При этом исследование полугрупп методами теории графов проводилось и ранее, например в [25], а в дальнейшем широкое развитие, видоизменение и обобщение тех идей с приложением к теории графов было отражено в систематических работах, выполняемых под руководством профессора Зелинка [26, 27] и опубликованных Институтом математики Чешской академии наук. Более точно, в [25] рассматривается граф подполугрупп полугруппы, вершинами которого являются подполугруппы наперёд заданной полугруппы, а две различные вершины графа соединяются ребром тогда и только тогда, когда пересечение соответствующих подполугрупп не пусто. Работа [26] относится именно к таким графам подполугрупп, несмотря на название, закрепившееся ныне за графами Кэли полугрупп.

Известно, что можно фиксировать свойства графов, получая тем самым описание связанных с ними алгебраических структур, и наоборот, фиксируя алгебраические свойства, получать уникальные серии графов, наглядно отражающих внутреннюю природу некоторой алгебраической структуры. Это продемонстрировано, в частности, в приводимых далее результатах.

Вопрос описания конечных полугрупп с планарными графами Кэли оказался весьма трудным и по сей день остаётся открытым. Наши исследования позволяют говорить о том, что вопрос является трансцендентным. При этом поднимаемые в работах [28, 29] вопросы различной вложимости графов Кэли для полугрупп лежат на стыке теории графов, алгебры и топологии, а ведь именно на стыке наук рождаются новые идеи.

Основной целью данной работы является обзор результатов многолетних научных исследований, проводимых в следующих двух направлениях. Первое направление сопряжено с исследованиями конечных полугрупп, допускающих планарные графы Кэли. Второе направление исследования инспирировано тесно связанными между собой понятиями ранга планарности и спектра рангов планарности многообразий полугрупп. Предложенное Л. М. Мартыновым, это направление базируется на оценке наибольшего числа образующих элементов свободных полугрупп в многообразиях полугрупп, относительно которых граф Кэли этих полугрупп является планарным. Так как свободные полугруппы в многообразиях играют важную роль (хотя бы потому, что любая полугруппа многообразия является гомоморфным образом подходящей свободной в нём полугруппы), изучение этого понятия является весьма актуальной задачей. При изучении свойства планарности графов Кэли для многообразий полугрупп принципиальный характер имеет проблема описания рангов планарности многообразий полугрупп, сформулированная Л. М. Мартыновым в 2015 г. [30].

В завершающем разделе обзора приведён новый результат, полученный в процессе написания. Прежде чем дать определение ключевого для понимания этого результата понятия (ранга планарности многообразия полугрупп), перечислим некоторые определения понятий, связанных со свойством планарности графов Кэли полугрупп.

В качестве небольшого исторического экскурса всё же напомним, что изучение планарных графов Кэли уходит корнями к известной работе 1896 г. [9]. В 1955 г. [31] показана алгоритмическая нераспознаваемость почти всех нетривиальных свойств группы по её заданию конечным числом определяющих соотношений, позднее этот результат независимо был получен в [32], и с того времени по теореме Адяна — Рабина о неразрешимости марковских свойств групп свойство планарности графов Кэли «официально» получило статус трудного для изучения. Дело в том, что свойство группы, заключающееся в наличии планарного графа Кэли, — марковское, поэтому не существует алгоритма, который по заданному представлению определит планарность графа Кэли соответствующей группы, в лучшем случае можно рассчитывать лишь на «каталоги» планарных групп. Далее, в 1980 г. [33] предпринимались попытки перечисления планарных групп как групп, сохраняющих ориентацию автоморфизмов плоского комплекса. Группы с планарными графами Кэли таковыми являются, потому что группа действует автоморфизмами на своём графе Кэли.

На этом исследования не были остановлены, так, например, в 1997 г. изучались регулярные замощения плоскости как графы Кэли [10]. Из сравнительно недавних работ можно упомянуть исследования операций над группами, сохраняющих свойства связности и планарности их графов [14]. Как видим, изучение графов Кэли востребовано для групп. Более того, с 1981 г. это понятие систематически исследовалось в виде аналогичной конструкции на полугруппах [27]. Важность этого понятия для комбина-

торной теории полугрупп продемонстрирована в работах многих авторов. Например, в [34] изучаются E -унитарные инверсные моноиды и графы Кэли, а в [35, 36] — свойства полноты, двудольности, транзитивности графов Кэли групп и полугрупп. В [37] описываются полугруппы, удовлетворяющие различным комбинаторным свойствам, определённым в терминах графов Кэли, а в [38] — все периодические (и, следовательно, все конечные) полугруппы G , для которых существует непустое подмножество S , такое, что граф Кэли группы G относительно S является неориентированным графом Кэли. Кроме того, из [39] известно описание конечных инверсных полугрупп, коммутативных инверсных полугрупп с двудольными графами Кэли и инверсных эпигрупп с графами Кэли, являющимися дизъюнктными объединениями полных графов. Алгебраисты интересовались также и графами Кэли полурешёток полугрупп на предмет характеристики цветовых автоморфизмов вершинно-транзитивных графов Кэли полурешёток полугрупп [40], вершинной транзитивностью графов Кэли полугрупп Брандта [41], вершинной транзитивностью графов Кэли левых групп [42] и конечных связок (полугрупп идемпотентов) [43]. Что касается важного свойства планарности, то, как видим, ранее оно исследовалось в основном для групп, а ныне проводятся исследования полугрупп с ациклическими [44], внешнепланарными [45] графами Кэли. Изучаются и более общие вопросы, о полугруппах с планарными графами Кэли, результаты в этой области принадлежат автору, они приведены далее.

Отметим, что после пионерских работ свойство планарности для графов Кэли полугрупп стало использоваться и в работах других авторов, так как развитие тематики, помимо фундаментального значения, находит отражение в прикладных исследованиях [2, 44, 46–55].

В частности, известна классификация плоских вполне регулярных полугрупп, понятие которых близко к понятию групп, так как вполне регулярные полугруппы являются объединением групп. Расскажем обо всём этом по порядку в соответствующих разделах.

1. Основные определения и обозначения

Напомним определения основных понятий и условимся относительно некоторых обозначений. Определения других понятий теории полугрупп можно найти в [56], а теории графов — в [57].

Определение 1. Пусть S — полугруппа, X — множество порождающих её элементов. Через $\text{Cay}(S, X)$ обозначим [правый] граф Кэли полугруппы S относительно X . Граф $\text{Cay}(S, X)$ состоит из множества вершин S и множества помеченных дуг — всевозможных троек (a, x, b) , где $a, b \in S$, $x \in X$ и $ax = b$.

Заметим, что в данном случае граф Кэли является ориентированным мультиграфом с помеченными дугами. Вершины графа обычно изображаются точками на плоскости, а дуга (a, x, b) — линией, направленной от a к b и помеченной элементом x .

Существует несколько небольших разновидностей данного определения, например в некоторых контекстах вместо правого умножения используется левое. Тем самым можно разделять правые и левые графы Кэли. Очевидно, что данные понятия совпадают для случая коммутативных полугрупп, в противном случае их можно исследовать с точностью до антиизоморфизма, а принцип двойственности позволяет не воспроизводить соответствующие утверждения для одного из взаимно двойственных случаев.

Определение 2. Основой ориентированного мультиграфа с помеченными дугами называем (обыкновенный) граф, полученный из данного графа удалением петель,

меток и заменой всех дуг, соединяющих две вершины, одним ребром, соединяющим эти вершины.

Естественным будет называть полугруппу *допускающей планарный граф Кэли*, если относительно некоторого минимального множества образующих её элементов основа графа Кэли данной полугруппы является планарным графом.

Определение 3. Ориентированный помеченный мультиграф называем планарным [внешнепланарным], если его основа является планарным [внешнепланарным] графом. Будем говорить, что полугруппа S допускает планарный [внешнепланарный] граф Кэли, если для некоторого множества X её образующих основа $SCay(S, X)$ графа $Cay(S, X)$ является планарным [внешнепланарным] графом.

Напомним, что граф называется внешнепланарным, если внешняя грань его плоской укладки содержит все его вершины.

Систему полугрупповых тождеств $\{xw \approx w, wx \approx w\}$ при любом слове w , не содержащем переменную x , будем записывать в эквивалентном виде тождеством $w \approx 0$. Полугрупповые тождества вида $w \approx 0$ при $w \neq 0$, а также многообразия полугрупп с нулём, задаваемые системами тождеств такого вида, называются *0-приведёнными*. Такие многообразия обладают неприводимым базисом тождеств вида $w \approx 0$, и их множество имеет мощность континуума [58].

Определение 4. Многообразие, каждая полугруппа которого допускает планарный граф Кэли, называется планарным.

Приведём определение конечных свободных коммутативных полугрупп [моноидов, полугрупп с нулём], так как будем ссылаться на ранее выполненные исследования вопросов планарности их графов Кэли. Конечную полугруппу [моноид, полугруппу с нулём], являющуюся коммутативно-свободным произведением циклических полугрупп [моноидов, полугрупп с нулём], условимся называть *конечной свободной коммутативной полугруппой* [моноидом, полугруппой с нулём]. В частности, в классе коммутативных моноидов такой моноид имеет следующее копредставление:

$$S = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_j^{m_j} = 1, a_i^{r_i+m_i} = a_i^{r_i}, i \in I, j \in J \rangle, \\ I \cup J = \{1, \dots, n\}, I \cap J = \emptyset, J \neq \emptyset.$$

Под *множеством свободных образующих* коммутативно-свободного произведения циклических полугрупп [моноидов, полугрупп с нулём] мы понимаем множество полугрупповых образующих соответствующих циклических сомножителей.

Кроме того, в обозначениях моноидов [полугрупп с нулём] условимся различать операции присоединения единицы [нуля] и внешнего присоединения единицы [нуля] к полугруппе S . В первом случае единицу [нуль] будем добавлять только в случае, когда она [он] отсутствует в полугруппе S , и соответствующую полугруппу обозначать, как обычно, через S^1 [S^0]. Во втором случае единицу [нуль] будем присоединять всегда и полученную полугруппу обозначать через S^{+1} [S^{+0}].

Важнейший класс полугрупп формируют вполне регулярные полугруппы, по определению являющиеся объединением групп. Типичные ситуации возникновения групп в теории полугрупп перечислены в [56], где можно почерпнуть дополнительные определения, а также краткий перечень современных понятий и актуальных фактов теории полугрупп. Среди прочего из упомянутой фундаментальной монографии напомним, что полугруппа S называется *регулярной*, если для любого элемента a из S найдётся элемент $x \in S$, такой, что $axa = a$. Другими словами, полугруппа называется регулярной, если в ней для любого элемента a разрешимо уравнение $axa = a$. Два элемента a

и b полугруппы S называются *инверсными*, если $aba = a$ и $bab = b$. В результате тесно связанными с понятием регулярности оказываются инверсные полугруппы. *Инверсной полугруппой* называется полугруппа, в которой каждый элемент имеет единственный инверсный к нему элемент.

Как мы упомянули выше, полугруппа, которая является объединением групп, называется *вполне регулярной*. Напомним, что *полурешёткой* называется коммутативная полугруппа идемпотентов, а *прямоугольная связка* — это полугруппа идемпотентов, элементы которой удовлетворяют тождеству $xux \approx x$. Известно, что всякая вполне регулярная полугруппа является полурешёткой прямоугольных связок групп. Таким образом, если элементы полугруппы, принадлежащие максимальным подгруппам, называть *групповыми*, то соответственно полугруппы, все элементы которых групповые, являются вполне регулярными.

Инверсные вполне регулярные полугруппы получили название *клиффордовых*. Важно отметить, что в клиффордовых полугруппах идемпотенты перестановочны. Как видим, понятие клиффордовых полугрупп близко к понятию группы. Устоявшийся в научной литературе термин для этих полугрупп выбран в честь американского математика А. Клиффорда, одного из пионеров теории полугрупп, выявившего среди прочего основополагающие свойства обсуждаемых полугрупп [59].

Для понимания дальнейшего изложения уместно вспомнить, что клиффордова полугруппа является полурешёткой групп, более того, для неё можно указать детальное строение, описываемое в [59, теорема 4.11].

В 2012 г. [60] начато изучение предложенного Л. М. Мартыновым понятия ранга планарности многообразия полугрупп. Третий раздел настоящей работы содержит детальное изложение актуальных результатов и текущего положения дел в данной области.

Условимся буквой O обозначать многообразие одноэлементных полугрупп и называть его *тривиальным*.

Определение 5. Пусть V — нетривиальное многообразие полугрупп. Если существует такое натуральное число r , что все V -свободные полугруппы ранга $\leq r$ допускают планарные графы Кэли (относительно множеств их свободных образующих), а V -свободная полугруппа ранга $r + 1$ уже не допускает планарный граф Кэли, то рангом планарности многообразия V называется это число $r = r_\pi(V)$. Если для многообразия V такого натурального числа не существует, то говорят, что многообразие V имеет бесконечный ранг планарности, и пишут $r_\pi(V) = \infty$.

Заметим, что ранг планарности для любого нетривиального многообразия V ограничен снизу, а именно $r_\pi(V) \geq 1$, так как очевидно, что любая циклическая (моногоенная) полугруппа допускает планарный граф Кэли. С другой стороны, вырожденный случай формирует тривиальное многообразие O , для которого в целях повышения информативности понятия спектра рангов планарности удобно считать в дальнейшем, что ранг планарности $r_\pi(O) = 0$.

Определение 6. Спектром рангов планарности многообразия V называется множество $\text{Спек}_{r_\pi}(V)$ всех возможных значений рангов планарности подмногообразий X многообразия V .

Если через $L(V)$ обозначить решётку подмногообразий многообразия V , то $\text{Спек}_{r_\pi}(V) = \{r_\pi(X) : X \in L(V)\}$. Кроме того, зафиксируем обозначение $\mathbb{N}^\infty = \{0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$.

Определение 7. Спектр рангов планарности полугруппового многообразия V называется полным, если он содержит все натуральные числа и символ ∞ , то есть $\text{Спек}_{r\pi}(V) = \mathbb{N}^\infty$.

Коль скоро всякое многообразие полугрупп содержит тривиальное многообразие в качестве подмногообразия, то спектр любого многообразия содержит число 0, а $\text{Спек}_{r\pi}(O) = \{0\}$.

При получении сформулированных далее результатов для обоснования планарности обыкновенного графа использованы различные критерии. Наиболее часто применялся известный *критерий Понтрягина — Куратовского*: обыкновенный граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных полному двудольному графу $K_{3,3}$ или полному пятиэлементному графу K_5 .

Кроме того, применялся *критерий Вагнера*: обыкновенный граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к графам K_5 или $K_{3,3}$.

Для полугруппы, удовлетворяющей условиям соответствующего утверждения, строится плоская укладка её графа Кэли. Если полугруппа не удовлетворяет этим условиям, то основа её графа Кэли содержит подграф, либо гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$, либо стягиваемый к ним. Графы K_5 и $K_{3,3}$ детально исследованы в [61].

Существуют эффективные методы распознавания планарности графа. Например, в [62] предложен работающий за линейное время $O(n)$ алгоритм, использующий специальные структуры данных (PQ-деревья) для представления графа порядка n ; на его базе в [63] построен параллельный алгоритм с $O(\log^2 n)$ операциями; последний, в свою очередь, оптимизирован в [64] для параллельных вычислений на $p \leq n$ процессорах с CREW PRAM (это одна из разновидностей оперативной памяти для мультипроцессорных систем, которая допускает одновременное чтение, но запрещает одновременную запись), в результате получена более точная оценка эффективности $O(n \log^2 n / p)$.

В [65] все известные способы определения планарности графа условно разделены на следующие группы:

1. Критерии планарности графа:
 - 1.1) критерий Маклейна;
 - 1.2) критерий Уитни;
 - 1.3) критерий Понтрягина — Куратовского (вариация для схем — условия Линского) или Вагнера;
 - 1.4) критерий Харари — Татта.
2. Алгоритмические методы определения планарности графа:
 - 2.1) циклические;
 - 2.2) матричные;
 - 2.3) смешанные.

Заметим, что к критерию 1.3 можно адаптировать представленный в [66] вероятностный алгоритм поиска подграфа, гомеоморфного заданному.

С применением функционала Маклейна и структурных чисел можно предложить более алгоритмизируемый критерий, хотя и менее эффективный, чем использующий PQ-деревья, но легче реализуемый. Для поиска базиса пространства циклов в графе можно использовать структурные числа. Вообще говоря, задача поиска циклов для полугрупп заслуживает отдельного внимания [67].

В целом задача распознавания планарности графа Кэли полугруппы разбивается на следующие последовательные этапы:

- 1) подготовительный этап;

- 2) эвристический анализ;
- 3) предварительный выбор;
- 4) окончательный выбор.

На подготовительном этапе фиксируется класс исследуемых полугрупп и метод проверки планарности основы их графа Кэли, после чего эвристический анализ позволяет предопределить эффективность выбранного метода. Выбор из всех полугрупп лишь допускающих планарные графы завершает решение задачи. Очевидно, что число всех неориентированных графов порядка n без петель и кратных рёбер равно $2^{(n^2-n)/2}$, известны также оценки числа заведомо планарных и заведомо непланарных из них [68]. Естественно, далеко не каждый из них планарен и может служить основой некоторого графа Кэли полугруппы. Тем не менее решение задачи перебором сопряжено со значительными вычислительными трудностями. Например, число всех неориентированных графов порядка 6 равно 32 768, заведомо непланарных из них — 121, а заведомо планарных — 22 818, поэтому дополнительная проверка требуется ещё для 9 829 графов.

В связи с этим имеет смысл индуктивно строить цепь полугрупп, в которой граф Кэли каждой предшествующей содержался бы в следующем планарном графе. Получится, аналогично пифагоровым полям, своеобразная цепочка расширений. При её построении следует учитывать, что любую петлю можно провести без пересечений. Более того, для кратных рёбер справедливо утверждение: если одно из кратных рёбер расположено без пересечений, то и другие не пересекаются.

Таким образом, если строить цепочки планарных графов Кэли, то можно ограничиться описанием соотношений, приводящих к появлению кратных рёбер и петель в конечном случае, либо фрактальных графов в бесконечном случае. Добавление иных рёбер, в пределе, инспирирует наибольшие по включению планарные графы, так называемые триангуляции, исследованные в [61].

2. О группах с планарными графами Кэли

Прежде всего укажем на фундаментальную взаимосвязь между понятиями графа Кэли полугруппы и графа Кэли группы, благодаря которой в дальнейшем для изучения спектров рангов планарности многообразий полугрупп можно будет использовать групповые результаты, так как группы являются частным случаем полугрупп. Свойство планарности графов Кэли для групп оказалось существенным ещё и потому, что, как показано в [69], если бесконечный граф Кэли не является планарным, то он не может быть вложен ни в одну из поверхностей конечного рода. Говоря о бесконечных конечно порождённых группах с планарными графами Кэли, отметим важные публикации последних лет [16–19, 22]. Работы по графам Кэли групп релевантны и в теории графов Кэли полугрупп, поскольку конечно порождённая группа конечно порождена и как полугруппа. Среди работ по графам Кэли конечно порождённых групп есть весьма глубокие, вскрывающие интересные взаимосвязи между алгеброй, комбинаторикой и маломерной топологией. Поэтому дадим содержательный обзор таких работ. На языке современной топологии связный граф является планарным, если он служит разрезающим графом для некоторой склейки сферы, а началось исследование групп с графами Кэли, обладающими свойством планарности, с известной теоремы Машке (теорема 1).

Перед тем как привести данную теорему, напомним необходимые обозначения из теории групп: $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ — аддитивная группа кольца вычетов по модулю n . Заметим, что $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$ при взаимно простых m и n . В частности, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong D_2$. Здесь $D_n = \langle x, y \mid x^n = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle$ — диэдральная группа. Элементами D_n являют-

ся автоморфизмы графа, состоящего только из цикла с n вершинами, таким образом, $|D_n| = 2n$. Очевидно, что $\mathbb{Z}_2 \times D_n \cong D_{2n}$ при нечётном n . Наконец, A_n и S_n — знакопеременная группа и симметрическая группа подстановок степени n , содержащая только чётные и соответственно все возможные подстановки данной степени.

Теорема 1 [9, §5]. Конечная группа G планарна тогда и только тогда, когда $G = G_1 \times G_2$, где $G_1 = \mathbb{Z}_1$ или $\mathbb{Z}_2$, а $G_2 = \mathbb{Z}_n, D_n, S_4, A_4$ или A_5 .

2.1. О плоских графах Кэли в терминах копредставлений групп

Изучением возможностей, при которых одна и та же группа обладает неизоморфными плоскими графами Кэли, и изучением неизоморфных групп, допускающих изоморфные графы Кэли, занималась Ж. Т. Беленкова [12]. Кроме того, всестороннее исследование графов Кэли групп провели В. А. Романьков и Ж. Т. Беленкова в [11, 10]. Ими описаны всевозможные варианты выбора групп и их порождающих множеств, приводящие к регулярным замощениям как графам Кэли. Проведён полный и детальный анализ групп, допускающих в качестве графа Кэли регулярное замощение плоскости. В результате подробных рассматриваний получены 6 групп с графом Кэли, составленным из треугольников, 16 групп с графом из квадратов и 6 групп с графом из шестиугольников. С точностью до изоморфизма, полученные графы исчерпывают 14 кристаллографических групп (из 17 возможных). Кроме того, приведены некоторые общие свойства плоских графов Кэли конечных групп. В частности, охарактеризованы нециклические абелевы группы, вложимые в плоскость. Приведены примеры неабелевых групп, не вложимых в плоскость. В [12] описаны все плоские графы Кэли группы S_4 . Оказалось, что группа S_4 обладает четырьмя плоскими графами Кэли, два из которых являются графами Кэли двух групп, не изоморфных группе S_4 . Кроме того, выписаны все минимальные по включению порождающие множества группы S_4 . Их 10 штук: 3 из них состоят из двух элементов, а 7 — из трёх элементов.

В [17] доказано, что граф Кэли вкладывается в евклидову плоскость без точек аккумуляции вершин (другими словами, имеет локально конечное вложение) тогда и только тогда, когда он является 1-остовом комплекса Кэли, который может быть вложен в плоскость после удаления лишних симплексов. Там же приводится характеристика планарных графов Кэли в терминах копредставлений групп и делается вывод о том, что их можно эффективно перечислить.

Теорема 2 [17, теорема 1.1]. Планарный граф Кэли группы Γ не имеет точек аккумуляции тогда и только тогда, когда он является 1-остовом плоского комплекса Кэли группы Γ .

С другой стороны, локальная конечность не является теоретико-групповым инвариантом планарности графа Кэли в общем случае, однако становится таковым, если рассматривать лишь 3-связные графы Кэли.

Теорема 3 [17, теорема 4.1]. Если группа Γ имеет 3-связный планарный граф Кэли, являющийся локально конечным, а группа Δ имеет 3-связный планарный граф Кэли, таковым не являющийся, то Γ не изоморфна Δ .

Например, планарный граф Кэли группы $\langle a, b, c, d \mid a^4 = 1, b^4 = 1, c = ab, d = a^2 b^2 a^2 \rangle$ является 3-связным, но не локально конечным. Тот факт, что никакое вложение этого графа не является локально конечным, вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4 [17, теорема 4.3]. Пусть G — трёхсвязный граф, вложенный в плоскость. Тогда каждый автоморфизм графа G отображает границу грани в границу грани.

В [17] для групп введено копредставление специального вида (выходящее за рамки данной работы), тесным образом связанное с гранями плоского графа; в результате оказалось возможным охарактеризовать плоские графы Кэли в терминах таких копредставлений.

Теорема 5 [17, теорема 5.1]. Граф Кэли, соответствующий любому граниевому копредставлению, является плоским и допускает устойчивое локально конечное вложение.

Заметим, что адаптировать описанным способом критерий Маклейна к проверке планарности графов Кэли групп в терминах копредставления групп оказалось возможным благодаря именно групповой специфике копредставления — наличию нейтрального и симметричных элементов.

Более того, очевидно, что изучение планарных графов существенно упрощается, если известна их локальная конечность, примером тому служит теорема Томассена (теорема 6), которая справедлива только в локально конечном случае.

Теорема 6 [17, теорема 5.2]. Двусвязный граф имеет 2-базис (то есть такое порождающее множество пространства циклов, что никакое ребро не принадлежит более чем двум его элементам) тогда и только тогда, когда он плоский и имеет локально конечное вложение.

Дело в том, что планарность локально конечных графов можно охарактеризовать условием, аналогичным условию Понтрягина — Куратовского, но нам удалось преодолеть это ограничение в ходе доказательства теоремы 43, столкнувшись с фрактальными графами.

Для сравнения отметим почерпнутые из [15] необходимые условия планарности графа Кэли конечно порождённой группы с более чем одним концом в представляемом ею топологическом пространстве. Напомним, используя вспомогательные обозначения, что для всякой пятёрки (G, A, H, B, φ) , где G и H — группы с подгруппами A и B соответственно, а $\varphi : A \rightarrow B$ — изоморфизм, свободным произведением с амальгамированием называется группа $\text{FPA}(G, A, H, B, \varphi) = (G * H) / N$, где N — нормальное в $G * H$ замыкание множества $\{a^{-1}\varphi(a) : a \in A\}$. Здесь G и H называются базовыми группами, а A и B — амальгамированными подгруппами. Для всякой четвёрки (G, A, B, ψ) , где G — группа, A и B — подгруппы группы G , а $\psi : A \rightarrow B$ — изоморфизм, HNN-расширение — это группа $\text{HNN}(G, A, B, \psi) = (G * \mathbb{Z}) / N$, где N — нормальное в $G * \mathbb{Z}$ замыкание множества $\{t^{-1}a^{-1}t\psi(a) \mid a \in A\}$; t — образующий бесконечного циклического множителя $\mathbb{Z}$. Здесь также G называется базовой группой, а A и B — ассоциированными подгруппами HNN-расширения .

Теорема 7 [15, теорема 4.1]. Пусть G — группа, допускающая планарный граф Кэли с более чем одним концом. Тогда G является либо свободным произведением с амальгамированием $\text{FPA}(H, A, K, B, \varphi)$, где (H, A, K, B, φ) — планарная пятёрка, либо это HNN-расширение $\text{HNN}(H, A, B, \psi)$, где (H, A, B, ψ) — планарная четвёрка.

Достаточные условия, которые гарантируют, что свободное произведение с конечным амальгамированием или HNN-расширение с конечными ассоциированными подгруппами обладает планарным графом Кэли, приведены там же, но они носят более технический характер и не имеют принципиального значения в теоретическом плане.

2.2. О группах с планарными кубическими графами Кэли

Как и планарность, связность является одним из фундаментальных свойств в теории графов. Наличие графа Кэли со связностью меньше чем 3 имеет серьёзные по-

следствия для структуры соответствующей группы. В планарном случае задача декомпозиции (заключающаяся в таком разбиении множества вершин на подмножества, чтобы вес вершин в этих подмножествах был сбалансирован, а суммарный вес разрезанных рёбер минимизирован), трудно решаемая при низкой связности графа, может сводиться к случаю, когда граф Кэли является 3-связным, а в нём могут использоваться геометрические методы.

Напомним, что граф $G = (VG, EG)$ называется κ -связным, если $G - X$ связан для любого множества $X \subseteq VG$ при $|X| < \kappa$. Заметим, что если граф G κ -связен, то он также является $(\kappa - 1)$ -связным. Число связности $\kappa(G)$ графа G — это наибольшее целое число κ , такое, что G κ -связен.

Теоретическими предпосылками к основным результатам данного пункта являются следующие теоремы:

Теорема 8 [14, теорема 2.2]. Любая подгруппа планарной группы является планарной.

Теорема 9 [14, теорема 4.1]. Группа G имеет 1-связный планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда она является либо бесконечной циклической, либо нетривиальным свободным произведением планарных групп.

Теорема 10 [14, теорема 4.4]. Если группа G имеет планарный 2-связный граф Кэли, то G либо является конечной циклической группой или группой диэдра, либо это фундаментальная группа графа групп, все рёберные группы которых имеют порядок два или менее, а группы вершин допускают планарную связность как минимум 3. В последнем случае группы вершин имеют планарные порождающие множества, включающие нетривиальные элементы, инцидентные группе рёбер.

Теорема 11 [14, теорема 4.5]. Пусть Γ — 3-связный планарный граф, а c — простой цикл в нём. Если c является границей диска в некоторой плоской укладке графа Γ , то он будет таким в любой плоской укладке графа Γ .

В [18] классифицируются плоские 2-связные (то есть наименьшая мощность множества вершин, разделяющих граф, равна 2) кубические графы Кэли, описывая явное копредставление и вложение в плоскость для каждого из них. В сочетании с [19] это даёт полное описание всех плоских кубических графов Кэли.

Теорема 12 [18, теорема 1.1]. Пусть G — плоский кубический граф Кэли связности 2. Тогда верно одно из следующих утверждений:

- (i) $G \cong \text{Cay} \langle a, b \mid b^2 = 1, (ab)^n = 1 \rangle, n \geq 2$;
- (ii) $G \cong \text{Cay} \langle a, b \mid b^2 = 1, (aba^{-1}b^{-1})^n = 1 \rangle, n \geq 1$;
- (iii) $G \cong \text{Cay} \langle a, b \mid b^2 = 1, a^4 = 1, (a^2b)^n = 1 \rangle, n \geq 2$;
- (iv) $G \cong \text{Cay} \langle b, c, d \mid b^2 = 1, c^2 = 1, d^2 = 1, (bc)^2 = 1, (bcd)^m = 1 \rangle, m \geq 2$;
- (v) $G \cong \text{Cay} \langle b, c, d \mid b^2 = 1, c^2 = 1, d^2 = 1, (bc)^{2n} = 1, (cbcd)^m = 1 \rangle, n, m \geq 2$;
- (vi) $G \cong \text{Cay} \langle b, c, d \mid b^2 = 1, c^2 = 1, d^2 = 1, (bc)^n = 1, (bd)^m = 1 \rangle, n, m \geq 2$;
- (vii) $G \cong \text{Cay} \langle b, c, d \mid b^2 = 1, c^2 = 1, d^2 = 1, (b(cb)^nd)^m = 1 \rangle, n, m \geq 2$;
- (viii) $G \cong \text{Cay} \langle b, c, d \mid b^2 = 1, c^2 = 1, d^2 = 1, (cbcd)^m = 1 \rangle, m \geq 1$;
- (ix) $G \cong \text{Cay} \langle b, c, d \mid b^2 = 1, c^2 = 1, d^2 = 1, (bc)^n = 1, cd = 1 \rangle, n \geq 1$ (вырожденные случаи с избыточным числом образующих и конечным G).

И наоборот, каждое из данных копредставлений с параметрами, выбранными в указанных интервалах, имеет плоский двусвязный кубический граф Кэли.

Вложение графа называется устойчивым, если любые две его вершины имеют либо одинаковый спин, либо все вершины имеют разные спины. Интуитивно это значит,

что каждая вершина вкладывается «одинаково» в том смысле, что групповое действие отображает грани в грани. В свою очередь, ребро графа называется сохраняющим спин, если его концевые вершины имеют одинаковый спин, в противном случае ребро изменяет спин. Более точно, спином вершины x называется циклический порядок множества $L = \{xy^{-1} : y \in N(x)\}$, где $N(x)$ — окружение вершины x , а вершина xy_1^{-1} является концом ребра, начинающегося в вершине xy_2^{-1} , при том, что ребро xy_2 идёт сразу после ребра xy_1 в обходе по часовой стрелке вокруг вершины x .

Следующая теорема содержит характеристическое свойство плоских двусвязных графов Кэли групп, порождённых двумя элементами, один из которых имеет бесконечный порядок.

Теорема 13 [18, теорема 3.2]. Пусть $G = \text{Cay} \langle a, b \mid b^2 = 1, \dots \rangle$ — двусвязный граф Кэли, в котором a имеет бесконечный порядок. Тогда $\Gamma(G) \cong \langle a, b \mid b^2 = 1, (ab)^n = 1 \rangle$, $n \geq 2$, либо $\Gamma(G) \cong \langle a, b \mid b^2 = 1, (aba^{-1}b^{-1})^n = 1 \rangle$, $n \geq 1$. При этом G планарен и имеет устойчивое вложение, в котором ребро a сохраняет спин. И наоборот, каждое из данных копредставлений с параметрами, выбранными в указанных интервалах, имеет плоский двусвязный кубический граф Кэли, в котором a бесконечного порядка.

Следующая теорема содержит характеристическое свойство плоских двусвязных графов Кэли групп, порождённых двумя элементами, оба из которых конечного порядка.

Теорема 14 [18, теорема 3.3]. Пусть $G = \text{Cay} \langle a, b \mid b^2 = 1, a^n = 1, \dots \rangle$ — плоский двусвязный граф Кэли. Тогда $G \cong \text{Cay} \langle a, b \mid b^2 = 1, a^4 = 1, (a^2b)^n = 1 \rangle$, $n \geq 2$. При этом G имеет устойчивое вложение, в котором a меняет спин, а b сохраняет. И наоборот, для любого $n \geq 2$ данное копредставление имеет плоский двусвязный кубический граф Кэли, в котором a порядка 4.

Наконец, рассмотрим ситуацию, когда группа G определяется тремя образующими элементами b, c, d , каждый из которых удовлетворяет соотношениям $b^2 = 1, c^2 = 1, d^2 = 1$, поскольку G кубическая. Выделим два случая в зависимости от того, есть ли у графа G шарнир, то есть ребро $e = xy$, такое, что удаление пары вершин x, y приводит к потере связности графа G .

Граф с шарнирами описывается в следующей теореме.

Теорема 15 [18, теорема 4.1]. Пусть $G = \text{Cay} \langle b, c, d \mid b^2 = 1, c^2 = 1, d^2 = 1, \dots \rangle$ — двусвязный граф Кэли, имеющий шарнир. Тогда либо $G \cong \text{Cay} \langle b, c, d \mid b^2 = 1, c^2 = 1, d^2 = 1, (bc)^n = 1, (bd)^m = 1 \rangle$ для любых значений $m, n \geq 2$, либо $G \cong \text{Cay} \langle b, c, d \mid b^2 = 1, c^2 = 1, d^2 = 1, (cbcd)^n = 1 \rangle$ для $n \geq 1$, но не одновременно. В обоих случаях граф G плоский. В первом случае он имеет вложение, каждое ребро которого меняет спин, а во втором — вложение, у которого ровно одно из рёбер (являющееся шарниром) сохраняет спин. И наоборот, каждое из приведённых копредставлений с параметрами, выбранными в указанных интервалах, допускает плоский двусвязный кубический граф Кэли с шарнирами.

Следующий результат завершает характеризацию плоских двусвязных кубических графов Кэли. Единственный оставшийся случай — когда G не имеет шарнира, но в нём есть двухцветный цикл. Заметим, исходя из комбинаторных соображений, что конечные простые графы Кэли степени не менее 3 будут 3-связны, поэтому для обеспечения свойства двусвязности граф G должен иметь параллельные рёбра. Отсюда следует, что если удовлетворяющий условию двусвязности граф $G = \text{Cay}(\Gamma)$ конечен, то $\Gamma \cong \langle b, c, d \mid b^2 = 1, c^2 = 1, d^2 = 1, (bc)^n = 1, cd = 1 \rangle$, где $n \geq 1$. Будем изначально выбирать граф G бесконечным.

Граф без шарниров описывается следующей теоремой.

Теорема 16 [18, теорема 4.6]. Пусть $G = \text{Cay} \langle b, c, d \mid b^2 = 1, c^2 = 1, d^2 = 1, \dots \rangle$ — плоский двусвязный бесконечный граф Кэли с двухцветным циклом и без шарнира. Тогда имеет место изоморфизм $\Gamma \cong \langle b, c, d \mid b^2 = 1, c^2 = 1, d^2 = 1, (bc)^2 = 1, (bcd)^m = 1 \rangle$, где $m \geq 2$, в этом случае граф $G = \text{Cay}(\Gamma)$ допускает устойчивое вложение с одним фиксированным спином, либо $\Gamma \cong \langle b, c, d \mid b^2 = 1, c^2 = 1, d^2 = 1, (bc)^{2k} = 1, (cbcd)^m = 1 \rangle$, где $k, m \geq 2$ и $G = \text{Cay}(\Gamma)$ допускает устойчивое вложение, в котором только рёбра, помеченные элементом c , сохраняют спин. И наоборот, каждое из указанных копредставлений с параметрами m и k в заданных интервалах имеет плоский граф Кэли с числом связности 2 без шарниров.

Для полноты картины отметим, что в [19] опубликован список всех 37 возможных копредставлений групп из теоремы о классификации плоских кубических графов Кэли. Акцентируем внимание читателя на том факте, что среди бесконечных плоских графов Кэли особый интерес исследователей вызывают графы, соответствующие разрывному действию на плоскости. Их группы (так называемые разрывные группы) находят приложения в комплексном анализе и тесным образом связаны с поверхностными группами. Эти графы и группы хорошо изучены. С остальными ситуация сложнее, интерес к ним проявился позже, и они до сих пор полностью не классифицированы, в частности, не известно даже, можно ли их эффективно перечислить. В то же время класс плоских кубических графов Кэли оказался достаточно хорошо устроен для того, чтобы получить полное описание всех его элементов, и достаточно разнообразен для того, чтобы дать общее представление о планарных графах Кэли бесконечных групп.

Систематизация и дальнейшее обобщение изложенных результатов привели к появлению в [20] концепции *представления планарных групп*, а в [21] — *обобщённого представления планарных групп*, это тип группового представления, который гарантирует планарность соответствующего графа Кэли, и наоборот, каждый планарный конечно порождённый граф Кэли допускает такое групповое представление. Авторы работ [20, 21] показывают, что группа допускает планарный конечно порождённый граф Кэли тогда и только тогда, когда она допускает особый вид группового представления, называемого планарным. Планарные представления могут быть распознаны алгоритмически. Как следствие, получается эффективное перечисление планарных графов Кэли и, в частности, утвердительный ответ на вопрос о том, могут ли планарные группы быть эффективно перечислимы.

2.3. О планарности графов Кэли группового произведения групп

Упомянутое во введении перемещение вопросов планарности графов Кэли в более широкий контекст послужило толчком к получению новых результатов о таких, казалось бы, всесторонне изученных классических объектах, как функциональные клейновы группы, основная теория которых была заложена в фундаментальных работах Х. Пуанкаре и Ф. Клейна в XIX в. А именно: если G — конечно порождённая группа, действующая точно и правильно разрывно гомеоморфизмами на плоской поверхности $X \subseteq \mathbb{S}^2$, то в [23] инструментами теории графов доказывается, что G допускает ко-компактное преобразование при условии, что можно заменить X другой поверхностью $Y \subseteq \mathbb{S}^2$. Также в [23] доказано, что если группа H имеет конечно порождённый (мульти-)граф Кэли, эквивариантно вложимый в $\mathbb{S}^2$, то его можно задать так, чтобы граница любой грани была конечна. Доказательства этих двух фактов из далёких друг от друга областей математики тесным образом переплетены, а определяемые ими

классы групп совпадают. При сохранении ориентации эти классы с точностью до изоморфизма совпадают с классом конечно порождённых клейновых функциональных групп. Но, к сожалению, существует конечно порождённый планарный граф Кэли, группа которого не принадлежит данному классу, поэтому завершённой классификации не сформировалось, тем не менее в ходе попыток её получения обнаружилось, что компактификация Фрейдентала каждой плоской поверхности гомеоморфна сфере.

Предтечей появления основных результатов данного пункта была изложенная в [16] классификация конечно определённых групп с плоскими графами Кэли, опирающаяся на классификацию плоских покрытий компактных поверхностей.

Вслед за определением из [22] положим, что $\Gamma = (V, E)$ — конечный простой граф (неориентированный и без петель). Зададим разметку вершин графа Γ отображением φ , ставящим в соответствие каждой вершине из множества вершин V некоторую нетривиальную конечную абелеву группу. Граф Γ с описанной разметкой вершин называется умножающим. Графовое произведение групп $G(\Gamma)$ — это группа, полученная из свободного произведения абелевых групп $\varphi(v)$ путём добавления к нему коммутаторных соотношений $[g, h] = 1$ для всех $g \in \varphi(v)$, $h \in \varphi(w)$, таких, что $\{v, w\} \in E$. Эти группы были введены для $\varphi(v) \cong \mathbb{Z}$ по всем $v \in V$, а позже неоднократно обобщались на случай произвольных групп, маркирующих вершины умножающего графа. В частности, свободные [прямые] произведения конечных абелевых групп являются графовыми произведениями групп, в которых умножающий граф пустой [полный].

В [70, 71] исследовано свойство планарности графов Кэли некоторых из таких групп на более высоком уровне абстракции — на языке частично коммутативных полугрупп. Следующая теорема даёт полную характеристику графовых произведений конечных абелевых групп, графы Кэли которых относительно минимального множества образующих плоские.

Теорема 17 [22, теорема А]. Пусть Γ — умножающий граф графового произведения конечных циклических групп, $\Gamma_{=2}$ — подграф графа Γ , порождённый вершинами, помеченными группами порядка 2, а $\Gamma_{>2}$ — подграф графа Γ , порождённый вершинами, помеченными группами порядка > 2 . Граф Кэли $\text{Cay}(G(\Gamma))$ плоский тогда и только тогда, когда выполнено каждое из следующих условий:

- (i) $\Gamma_{=2}$ внешнепланарен;
- (ii) $\Gamma_{>2}$ — пустой граф;
- (iii) если $v \in \Gamma_{>2}$, то порождённый смежными с v вершинами подграф графа Γ не содержит вершин, либо состоит из одной вершины, либо является дизъюнктивным объединением двух вершин;
- (iv) если $\Gamma' \subseteq \Gamma$ — порождённый цикл, то $\Gamma' \subseteq \Gamma_{=2}$.

Отметим, что на языке частично коммутативных полугрупп аналогичная теорема 43 сформулирована лаконичнее, но содержит труднее проверяемые условия в случае их переноса на группы.

3. О полугруппах с планарными графами Кэли

Пионерские работы в обозначенном направлении, инициированные в 2001 г. Л. М. Мартыновым, можно условно разделить по следующим категориям в зависимости от класса решаемой задачи:

- 1) критерий планарности графов Кэли коммутативно-свободных произведений циклических полугрупп, моноидов и полугрупп с нулём;

- 2) критерий планарности графов Кэли прямых произведений циклических полугрупп, моноидов и полугрупп с нулём;
- 3) задача о допустимости плоских триангуляций, полного пятиэлементного графа K_5 и полного двудольного графа $K_{3,3}$ с некоторой ориентацией рёбер в качестве графов Кэли полугрупп;
- 4) рассыпчатые полугруппы с планарными графами Кэли.

А именно: в [72] охарактеризованы полугруппы, являющиеся коммутативно-свободными произведениями [56, с. 69] циклических полугрупп, циклических моноидов и циклических полугрупп с нулём с планарными графами Кэли. При этом мы рассматриваем сначала случаи конечных полугрупп, а затем в качестве следствий получаем описания бесконечных полугрупп с указанным свойством.

3.1. О коммутативных полугруппах с планарными графами Кэли

Выбор тематики данного подраздела объясняется исключительной ролью коммутативных полугрупп в теории полугрупп, сравнимой по уровню развития со структурной теорией абелевых групп.

Основным результатом о конечных свободных коммутативных полугруппах с планарными графами Кэли является следующая

Теорема 18 [72, теорема 1]. Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S относительно множества свободных образующих планарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:

1. $S = \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle$, где r и m — любые натуральные числа.
2. $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^{h+t} = b^h \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t выполняется одно из следующих ограничений:
 - а) $m \leq 2, t \leq 2$;
 - б) $r = 1, h = 1, t = 2$; или $r = 1, h = 2, t = 1$;
 - в) $r = 1, h = 1, m = 2$; или $r = 2, h = 1, m = 1$;
 - г) $r = 1, m = 1$; или $h = 1, t = 1$.
3. $S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = a, b^2 = b, c^{k+l} = c^k \rangle$, где k и l — натуральные числа, $l \leq 2$.

Заметим, что в каждом условии теоремы присутствуют бесконечные серии полугрупп.

Тем не менее число образующих соответствующих полугрупп с планарными графами Кэли в данном случае ограничено числом 3. Позднее [73] были охарактеризованы конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие планарный граф Кэли.

Теорема 19 [73, теорема 1]. Граф Кэли конечного свободного коммутативного моноида S относительно множества свободных образующих планарен тогда и только тогда, когда S задан копредставлением одного из следующих видов:

1. $S = \langle a \mid a^m = 1 \rangle$, где m — любое натуральное число.
- 2.1) $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^t = 1 \rangle$, где для натуральных чисел r, m, t выполнено одно из следующих ограничений:
 - а) $t \leq 2$;
 - б) $m \leq 2, t > 2$;
- 2.2) $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^m = 1, b^t = 1 \rangle$, где m и t — натуральные числа, $t \leq 2$;
- 3.1) $S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^{h+t} = b^h, c^k = 1 \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t, k выполнено одно из следующих условий:

- а) $h = 1, t = 1, k = 1$;
- б) $m \leq 2, t \leq 2, k = 1$;
- в) $m \leq 2, h = 1, t = 1, k = 2$;
- 3.2) $S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^2 = 1, c^2 = 1 \rangle$, где r и m — натуральные числа, $m \leq 2$;
- 3.3) $S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = 1, b^2 = 1, c^2 = 1 \rangle$.
- 4. $S = \langle a, b, c, d \mid ab = ba, ac = ca, ad = da, bc = cb, bd = db, cd = dc, a^{r+m} = a^r, b^2 = b, c^2 = c, d = 1 \rangle$, где r и m — натуральные числа, $m \leq 2$.

Для полноты изложения приведём соответствующий результат из [72] о конечных свободных коммутативных полугруппах с нулём, допускающих планарный граф Кэли.

Теорема 20 [72, теорема 2]. Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S с нулём относительно множества свободных образующих планарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:

- 1) $S = \langle a \mid a^r = 0 \rangle$, где r — любое натуральное число;
- 2) $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^r = 0, b^h = 0 \rangle$, где r, h — любые натуральные числа;
- 3) $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^h = 0 \rangle$, где r, m, h — натуральные числа, причём $m \leq 2$ либо $r = 1$ и $h = 1$;
- 4) $S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = a, b^2 = b, c^k = 0 \rangle$, где k — любое натуральное число.

Коль скоро, согласно теореме Биркгофа [74], многообразия полугрупп замкнуты относительно операций взятия подполугрупп, прямых произведений и гомоморфных образов полугрупп, то вторым естественным этапом эволюции познания структуры полугрупп, допускающих планарные графы Кэли, является анализ прямых произведений оных. Полугруппы, являющиеся прямыми произведениями циклических полугрупп, моноидов и полугрупп с нулём, допускающие планарные графы Кэли, охарактеризованы в [75, 76] теоремами 21–23.

Так как граф Кэли конечной циклической полугруппы является планарным, то предполагается, что число сомножителей в прямых произведениях более одного.

Теорема 21 [75]. Конечная полугруппа S , являющаяся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

- 1. $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t выполняется одно из следующих ограничений:
 - 1.1) $r = 1, h = 1, (m, t) < 3$;
 - 1.2) $r = 1, m = 2, t < 3$;
 - 1.3) $r = 2, m = 1, h < 4, t < 3$;
 - 1.4) $r = 2, m = 1, h < 5, t = 1$;
 - 1.5) $r = 3, m = 1, h = 3, t = 1$.
- 2. $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t, k, l выполняется одно из следующих ограничений:
 - 2.1) $r = 1, m = 2, h = 1, t = 2, k = 1, l = 2$;
 - 2.2) $r = 1, m = 2, h = 2, t = 1, k = 2, l = 1$;
 - 2.3) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 2, l < 3$;
 - 2.4) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 3, l = 1$.
- 3. $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, где для натуральных чисел r и m выполняется одно из следующих ограничений:

$$3.1) \quad r = 1, m = 2;$$

$$3.2) \quad r = 2, m < 3;$$

$$3.3) \quad r = 3, m = 1.$$

Теорема 22 [76, теорема 1]. Конечный моноид S , являющийся прямым произведением неоднородных циклических моноидов, допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1. $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle^1 \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle^1$, где для натуральных r, m, h, t выполняется одно из следующих ограничений:
 - 1.1) $r = 1, m = 2$;
 - 1.2) $m \leq 2, t \leq 2$;
 - 1.3) $r = 1, m > 2, t \leq 2$.
2. $S \cong \langle a \mid a^3 = a \rangle \times \langle b \mid b^3 = b \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle^i$, где для натуральных i, k, l выполняется одно из следующих условий:
 - 2.1) $i = 1, l \leq 2$;
 - 2.2) $i = +1, k = 1, l \leq 2$.
3. $S \cong \langle a \mid a^{1+m} = a^1 \rangle^{+1} \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle^i$, где m, h, t — натуральные числа; $i \in \{1, +1\}$ и выполняется одно из следующих ограничений:
 - 3.1) $m = 1$;
 - 3.2) $i = 1, h = 1, t = 2$;
 - 3.3) $m = 2, h = 1, i = 1$;
 - 3.4) $m = 2, h = 1, t = 2, i = +1$.
4. $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle^1 \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^2 = a_i \rangle^{+1}$, где $m \leq 2, n \leq 2$; или $r = 1, m = 1, n \leq 3$.

Заметим, что условия теоремы 22 практически повторяют условия теоремы 19, с учётом неоднородности перемножаемых моноидов.

Теорема 23 [76, теорема 2]. Конечная полугруппа S с нулём, являющаяся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп с нулём, допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1. $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle^0 \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle^0$, где для натуральных чисел r, m, h, t выполняется одно из следующих ограничений:
 - 1.1) $r = 2, m = 1, h < 5, t = 1$;
 - 1.2) $r = 3, m = 1, h = 3, t = 1$;
 - 1.3) $r = 2, m = 1, h = 1, t = 2$.
2. $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+1} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, где r — натуральное число, $r \leq 3$.
- 3.1) $S \cong \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle^{+0}$;
- 3.2) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle^{+0} \times \langle b \mid b^2 = b \rangle^{+0}$, где r и m — натуральные числа, $m \leq 2$.
4. $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+1} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^2 = a_i \rangle^{+0}$, где $n \leq 2$; или $r = 1, n \leq 3$.

3.2. О полугруппах с ациклическими графами Кэли

Остановимся подробнее на полугруппах с ациклическими графами Кэли. Их изучением систематически занимался А. Л. Макарьев с 2006 г., и на этом пути получены интересные результаты.

Теорема 24 [46, теорема 1]. Основа графа Кэли нильпотентной полугруппы S степени $n \geq 2$ с минимальным порождающим множеством X является деревом то-

гда и только тогда, когда для любых элементов x, y из множества X справедливо равенство $xy = x^2$.

Опираясь на данную теорему, её следствия и ряд ценных предложений, была доказана следующая теорема, характеризующая конечное дерево, которое может быть основой графа Кэли некоторой нильпотентной полугруппы, и позволяющая указать такие полугруппы, если они имеются.

Теорема 25 [46, теорема 2]. Для того чтобы конечное дерево было основой графа Кэли некоторой нильпотентной полугруппы степени $n \geq 2$, необходимо и достаточно, чтобы среди центральных или висячих вершин этого дерева имелась хотя бы одна вершина ω , удалённая от каждой висячей вершины дерева (отличной от ω) на расстояние $(n - 1)$ или $(n - 2)$, и все простые цепи, соединяющие произвольную висячую вершину с вершиной ω , либо не имели общих вершин (кроме ω), либо имели одинаковую длину (или, в частности, совпадали). При этом все висячие вершины дерева (кроме вершины ω , если она является висячей) соответствуют порождающим элементам, а вершина ω соответствует нулю этой полугруппы.

Годом позднее были охарактеризованы рассыпчатые и прямоугольные полугруппы с ациклическими графами Кэли (в частности, деревьями), а также найдены условия, при которых ациклический неорграф (в частности, дерево) может служить основой графа Кэли некоторой прямоугольной или рассыпчатой полугруппы.

Основным результатом, касающимся рассыпчатых полугрупп, является следующая

Теорема 26 [44, теорема 1]. Ординальная сумма $S = \bigcup_{e \in P} S_e$ сингулярных полугрупп имеет ациклический граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- 1) $|P| = 1$ и $|S| \leq 2$, причём S — любая сингулярная полугруппа;
- 2) $|P| = 1$ и $|S| > 2$, причём S — полугруппа левых нулей;
- 3) $|P| = 2$, причём одна из компонент — произвольная полугруппа левых нулей, а вторая — одноэлементная полугруппа.

Следующий результат касается прямоугольных полугрупп.

Теорема 27 [44, теорема 2]. Основа графа Кэли прямоугольной полугруппы $S = L \times R$ является ациклическим графом тогда и только тогда, когда $|R| \leq 2$.

Естественным образом формулируемая, но нетривиально доказываемая, следующая теорема характеризует ациклический неорграф, который может быть основой графа Кэли некоторой прямоугольной полугруппы.

Теорема 28 [44, теорема 3]. Для того чтобы ациклический неорграф мог служить основой графа Кэли некоторой прямоугольной полугруппы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось только одно из условий:

- 1) каждая вершина графа изолирована;
- 2) все вершины графа являются висячими.

Из теоремы 28 следует, что для того чтобы неориентированное дерево могло служить основой графа Кэли некоторой прямоугольной полугруппы, необходимо и достаточно, чтобы это дерево имело не больше двух вершин.

В 2008 г. продолжилось рассмотрение полугрупп с ациклическими графами Кэли, начатое в [46, 44], а именно рассмотрен важный класс полугрупп идемпотентов — полурешётки. Характеризацию полурешёток, имеющих ациклический граф Кэли, даёт следующая

Теорема 29 [47]. Для полурешётки S следующие условия эквивалентны:

- 1) основа графа Кэли полугруппы S является ациклическим графом;
- 2) S — веерная полугруппа;
- 3) основа графа Кэли полугруппы S является нуль- или одноярусным деревом.

Заключительным результатом в данной серии явилась теорема 30, значительно усиливающая результат теоремы 26. Заметим, что ранее найдены условия, при которых ординальная сумма сингулярных полугрупп имеет ациклический граф Кэли, а в следующей теореме рассматриваются условия, при которых ациклический граф Кэли имеет ординальная сумма произвольных полугрупп.

Теорема 30 [48]. Ординальная сумма $\bar{S} = \bigcup_{e \in P} S_e$ полугрупп имеет ациклический граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1. $|P| = 1$ и $\bar{S}$ — любая полугруппа с ациклическим графом Кэли.
2. $|P| = 2$, причём выполняется одно из условий:
 - а) первая компонента — циклическая полугруппа с периодом 1 или 2, а вторая — левосингулярная полугруппа;
 - б) вторая компонента — одноэлементная полугруппа, а первая — любая нециклическая полугруппа S с минимальным порождающим множеством X , в которой выполняется следующее условие: если $xa = yb$ или $xa = y$, то $x = y$, где $x, y \in X$ и $a, b \in S$.

3.3. О вполне регулярных полугруппах с планарными графами Кэли

Напомним, что вполне регулярной называется полугруппа, являющаяся объединением групп. В свою очередь, группы представляют собой частный случай полугрупп. Исторически сложилось так, что изучение групп было начато раньше, чем полугрупп, исходя из геометрических приложений первых. Несмотря на их более сложную структуру, многие проблемы теории полугрупп ныне решаются по модулю теории групп. В частности, исследователям вопросов планарности графов Кэли для конечных групп удалось получить завершённые результаты.

Родом графа G называется наименьшее число ручек, которые нужно добавить к сфере, чтобы уложить G на этой сфере.

С опорой на приведённое в теореме Машке (теорема 1) описание плоских групп в работе [28] найдена следующая характеристика полугрупп, графы Кэли которых допускают укладку на торе, то есть являются графами минимального рода, равного 1. Центральное место в этой характеристике заняли так называемые *правые группы*, по определению представимые прямым произведением группы G на полугруппу правых нулей R_n порядка n .

Теорема 31 [28, теорема 3.6]. Пусть $G \times R_r$ — конечная правая группа, $r \geq 2$. Минимальный род графа $\text{Cay}(G \times R_r, C \times R_r)$ среди всех порождающих множеств $C \subseteq G$ группы G равен 1 тогда и только тогда, когда $G \times R_r$ изоморфна одной из следующих правых групп: $\mathbb{Z}_n \times R_r$ с $(n, r) \in \{(2, 3), (2, 4), (3, 3), (i, 2)\}$ для $i \geq 4$; $D_n \times R_2$ для всех $n \geq 2$. Обратим внимание, что этот список включает в себя $\mathbb{Z}_2 \times D_n \times R_2$ и $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n \times R_2$ для нечётного $n \geq 3$.

Данный результат позднее был дополнен перечислением всех правых групп, графы Кэли которых являются планарными, то есть минимального рода, равного нулю.

Теорема 32 [29, теорема 7.1]. Любая плоская правая группа представима в виде произведения $G \times R_k$ с $k \geq 2$, где один из множителей равен $G \in \{e, \mathbb{Z}_n, D_n, S_4, A_4, A_5\}$

при $k \leq 3$, либо в виде произведения $\{e\} \times R_4$. Здесь $\{e\}$ означает одноэлементную группу.

Приведём известную классификацию плоских клиффордовых полугрупп в простейшем частном случае, когда полугруппа является полурешёткой двух групп. Прежде чем сформулировать результат, разъясним используемые в [55] обозначения. Запись $G_\alpha \xrightarrow{f} G_\beta$ применяется для обозначения групп и соответствующего гомоморфизма $f_{\alpha,\beta}$, описанного в теореме 33.

Теорема 33 [59, теорема 4.11]. Пусть Y — полурешётка. Каждому элементу α из Y поставим в соответствие группу G_α таким образом, что G_α и G_β не пересекаются при $\alpha \neq \beta$. Каждой паре элементов α, β из Y , для которых $\alpha > \beta$, поставим в соответствие гомоморфизм $f_{\alpha,\beta}$ группы G_α в G_β таким образом, что если $\alpha > \beta > \gamma$, то $f_{\alpha,\beta} f_{\beta,\gamma} = f_{\alpha,\gamma}$. Через $f_{\alpha,\alpha}$ обозначим тождественный автоморфизм группы G_α . Пусть S — объединение всех групп G_α ($\alpha \in Y$). Определим произведение в S , полагая для двух элементов $a_\alpha, b_\beta \in S$ ($a_\alpha \in G_\alpha, b_\beta \in G_\beta$) $a_\alpha a_\beta = (a_\alpha f_{\alpha,\gamma})(b_\beta f_{\beta,\gamma})$, где γ равно произведению $\alpha\beta$ элементов α и β полурешётки Y . Тогда S — полугруппа с коммутирующими идемпотентами, являющаяся объединением групп, или (что эквивалентно) инверсная полугруппа, являющаяся объединением групп. Обратно, каждая такая полугруппа может быть построена указанным способом.

Запись $G_\alpha \xrightarrow{(f,f')} G_\beta$ содержит соответствующие ограниченные отображения $f_{\alpha,\beta}$ на каждой из компонент G_α , если G_α имеет два образующих; 0 обозначает нулевое отображение, id — тождественное. Например, в п. 2, б теоремы 34 первый множитель отображается тождественно, а второй — нулевым отображением. Инъективное и биективное отображения обозначаются «injective» и «bijective» соответственно. Наконец, заметим, что если k и m взаимно просты, то группы $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_m$ и $\mathbb{Z}_{km}$ изоморфны.

Теорема 34 [55, теорема 2.5]. Пусть $S = G_\alpha \cup G_\beta$ — конечная клиффордова полугруппа с $\alpha > \beta$. Тогда S планарна тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

1. $G_\alpha = \mathbb{Z}_m, G_\beta = \mathbb{Z}_n$ при
 - а) $\mathbb{Z}_m \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_n$, или
 - б) $m = n, \mathbb{Z}_m \xrightarrow{\text{bijective}} \mathbb{Z}_m$, или
 - в) $n = 2m, \mathbb{Z}_m \xrightarrow{\text{injective}} \mathbb{Z}_{2m}$.
2. $G_\alpha = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ при
 - а) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_n$, или
 - б) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{(\text{id}, 0)} \mathbb{Z}_2$, или
 - в) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{(\text{injective}, 0)} \mathbb{Z}_4$.
3. $G_\alpha = \mathbb{Z}_2, G_\beta = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ или D_2 .
4. $G_\beta = \mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2n}, D_n$, где $n > 2, A_4, A_5, S_4$ или $\mathbb{Z}_2 \times A_4$ и
 - а) $G_\alpha = \{0\}$ или
 - б) $G_\alpha = \mathbb{Z}_2$ с $f_{\alpha,\beta}$, являющимся нулевым отображением.

3.4. О полугруппах с внешнепланарными графами Кэли

Выбор тематики данного подраздела обусловлен следующим наблюдением, анонсированным в [77]. В [27] изучается граф правого сдвига полугруппы S относительно её элемента a , то есть граф, вершины которого являются элементами S , а ребро соединяет вершины s и t тогда и только тогда, когда $t = sa$. Если a порождает S , то такой граф является графом Кэли полугруппы S , более того, граф правого сдвига всегда плана-

рен. Но как оказалось, свойство планарности графа Кэли полугрупп не сохраняется при переходе к следующим теоретико-полугрупповым конструкциям: коммутативно-свободному произведению [73], ординальной сумме [78], прямому произведению [75] циклических полугрупп, моноидов и полугрупп с нулём. В связи с этим возникает естественная задача характеристики полугрупп с планарными графами Кэли тех или иных классов $\mathcal{K}$ полугрупп, применение к которым наиболее используемых в теории полугрупп конструкций наследует свойство планарности. В настоящем исследовании в качестве $\mathcal{K}$ выбран класс нильпотентных полугрупп, а в качестве конструкции — 0-прямое объединение. Напомним, что 0-прямым объединением дизъюнктного семейства полугрупп S_i ($i \in I$) с нулём называется полугруппа S с нулём, определённая на объединении полугрупп S_i с последующим отождествлением нулей всех S_i и операцией умножения, совпадающей с исходными операциями на каждой полугруппе S_i , и $xy = 0$, если $x \in S_i$, $y \in S_j$ и $i \neq j$.

Ключевым результатом, мотивирующим к исследованию полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли, является

Теорема 35 [77]. Свойство планарности графа Кэли полугруппы наследуется 0-прямым объединением нильпотентных полугрупп, если и только если основа графа Кэли каждой из объединяемых полугрупп в результате удаления нулевого элемента допускает такую плоскую укладку, что все её вершины принадлежат одной грани.

Основная цель данного подраздела — обзор исследований полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли. Приведены решения вопросов внешнепланарности графов Кэли для следующих классов:

- 1) конечные свободные коммутативные полугруппы;
- 2) конечные свободные коммутативные моноиды;
- 3) рассыпчатые полугруппы;
- 4) конечно порождённые полугруппы с одним определяющим соотношением и с тождеством;
- 5) свободные частично коммутативные полугруппы и n -веерные полурешётки.

Особый интерес представляет вопрос о допустимости графов, взятых с некоторой ориентацией и пометкой рёбер, в качестве графов Кэли полугрупп.

Описываются конечные свободные коммутативные полугруппы, а также конечные свободные коммутативные полугруппы с нулём, графы Кэли которых являются внешнепланарными.

Теорема 36 [45, теорема 2.1]. Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S относительно множества свободных образующих внешнепланарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:

1. $S = \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle$, где r и m — любые натуральные числа.
2. $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^{h+t} = b^h \rangle$, где для натуральных r, m, h, t выполняется одно из следующих условий:
 - а) $h = 1, m \leq 2, t = 1$; или $r = 1, m = 1, t \leq 2$;
 - б) $r \leq 2, h \leq 2, m \leq 2, t \leq 2$ при $r + m \leq 3, h + t \leq 3$.

Перейдём к рассмотрению полугрупп с нулём.

Теорема 37 [45, теорема 2.2]. Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S с нулём относительно множества свободных образующих внешнепланарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:

1. $S = \langle a \mid a^r = 0 \rangle$, где r — любое натуральное число.

2. $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^r = 0, b^h = 0 \rangle$, где r, h — натуральные числа, $r \leq 2, h \leq 2$.
3. $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^h = 0 \rangle$, где для натуральных r, m, h выполняется хотя бы одно из следующих условий:
 - а) $h = 1$;
 - б) $r + m = 3, h = 2$;
 - в) $r + m = 2, h > 2$.
4. $S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = a, b^2 = b, c^1 = 0 \rangle$.

Перечислим конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие внешне-планарные графы Кэли:

Теорема 38 [45, теорема 3.1]. Граф Кэли свободного коммутативного моноида S с циклическими соотношениями внешнепланарен тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

1. $S = \langle a \mid a^m = 1 \rangle$, где m — любое натуральное число.
2. $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^t = 1 \rangle$ либо полугруппа S имеет копредставление $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^m = 1, b^t = 1 \rangle$, где для натуральных r, m, t выполнено одно из следующих ограничений:
 - а) $t = 1$;
 - б) $m \leq 2, t = 2$.
3. $S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^2 = b, c = 1 \rangle$, где r и m — натуральные числа, $m \leq 2$.

Решена и задача описания рассыпчатых полугрупп, допускающих внешнепланарный граф Кэли. Любая рассыпчатая полугруппа является ординальной суммой сингулярных полугрупп [56, с. 50]. Напомним, что ординальной суммой попарно непересекающихся полугрупп S_e , где e пробегает цепь P , называется полугруппа $S = \bigcup_{e \in P} S_e$, в которой при $e < f$ для любых $a \in S_e$ и $b \in S_f$ действует правило умножения $ab = ba = a$. Полугруппа называется *сингулярной*, если она является полугруппой левых или правых нулей.

Теорема 39 [45, теорема 4.1]. Пусть S — рассыпчатая полугруппа и $S = \bigcup_{e \in P} S_e$ — соответствующая ординальная сумма сингулярных полугрупп. Тогда S допускает внешнепланарный граф Кэли, если и только если выполняется одно из следующих условий:

1. $|P| = 1$ и $|S| < 4$, если S — полугруппа правых нулей.
2. $|P| = 2$ и выполнено одно из следующих условий:
 - а) обе компоненты — полугруппы правых нулей и $|S| < 4$;
 - б) только одна из компонент S_e является полугруппой правых нулей, при этом $|S_e| \leq 2$ и другая компонента содержит менее трёх элементов;
 - в) обе компоненты — полугруппы левых нулей и одна из них одноэлементная, либо каждая содержит не более двух элементов.
3. $|P| = 3$ и выполнено одно из условий:
 - а) все компоненты — полугруппы правых нулей и $|S| < 4$;
 - б) все компоненты являются полугруппами левых нулей и $|S| < 5$.

Приведённое во введении определение графа Кэли задаёт ориентированный мультиграф с помеченными рёбрами. Но существует несколько небольших разновидностей, например в некоторых контекстах вместо правого умножения используется левое. Тем самым можно разделять правые и левые графы Кэли. Очевидно, что данные понятия

совпадают для случая коммутативных полугрупп, в противном случае их можно исследовать с точностью до антиизоморфизма, а принцип двойственности позволяет не воспроизводить соответствующие утверждения для одного из взаимно двойственных случаев. В связи с этим верна

Теорема 40 [45, теорема 5.1]. Нециклическая полугруппа с одним определяющим соотношением и с тождеством допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда она антиизоморфна одной из полугрупп $S_{2,k} = \langle a, b \mid ab = b^k \rangle$ при $k \leq 3$, $S_3 = \langle a, b \mid aba = ba \rangle$ или изоморфна полугруппе $S_{2,1} = \langle a, b \mid ab = b \rangle$.

Напомним [79, с. 1269; 80, с. 460], что если дан обыкновенный граф Γ с множеством вершин $V\Gamma = \{a_1, \dots, a_n\}$, то можно определить свободную частично коммутативную полугруппу как полугруппу $S(\Gamma)$, заданную множеством $\{a_1, \dots, a_n\}$ образующих элементов и множеством определяющих соотношений вида $a_i a_j = a_j a_i$ для тех и только тех a_i и a_j , которые соединены ребром в графе Γ .

В следующей теореме описывается влияние графа коммутативности множества образующих элементов частично коммутативной свободной полугруппы на внешнепланарность графа Кэли последней. Как оказалось, существенной является валентность вершин графа коммутативности, то есть не только число элементов множества образующих, но и количество коммутирующих пар влияет на внешнепланарность графа Кэли полугруппы.

Теорема 41 [45, теорема 6.1]. Граф Кэли частично коммутативной свободной полугруппы $S(\Gamma)$, соответствующей графу коммутативности Γ множества образующих её элементов, внешнепланарен тогда и только тогда, когда степень любой вершины в графе Γ равна нулю, то есть полугруппа $S(\Gamma)$ некоммутативная.

Перейдем теперь к n -веерным полурешёткам. Напомним, что полурешёткой называется коммутативная полугруппа идемпотентов [56, с. 31].

Будем называть n -веерной полурешётку S_k^n с нулём, $1 \leq n \leq k$, заданную копределением

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_k \mid a_i^2 = a_i, a_i a_j = a_j a_i, a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} = 0 \rangle,$$

где $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ пробегают все размещения без повторений из k элементов $1, 2, \dots, k$ по n , а i, j принимают всевозможные значения от 1 до k . Следующая теорема выделяет в классе таких полугрупп все допускающие внешнепланарные графы Кэли полугруппы на языке ограничений количества элементов фиксированной длины.

Теорема 42 [45, теорема 6.2]. n -Веерная полурешётка $S = S_k^n$ допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда $n \leq 2$.

Для сравнения приведём полученные в [70] аналогичные характеристические свойства свободных частично коммутативных полугрупп и n -веерных полурешёток с планарными графами Кэли. Приводим этот результат в разделе, посвящённом внешнепланарности, отчасти выбиваясь из общей канвы повествования, потому что, с одной стороны, он не относится ни к одной из ранее выделенных категорий полугрупп с планарными графами Кэли, но с другой — не упомянуть его нельзя, результат интересен оригинальностью доказательства, там есть свежие идеи, связанные с появлением фрактальных графов.

Теорема 43 [70, теорема 1]. Граф Кэли частично коммутативной свободной полугруппы $S(\Gamma)$, соответствующей графу коммутативности Γ множества образующих её элементов, планарен тогда и только тогда, когда степень любой вершины в графе Γ не превосходит единицы.

Теорема 44 [70, теорема 2]. n -Веерная полурешётка $S = S_k^n$ допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда $|S^{(2)}| \leq 3$, где $S^{(2)}$ — множество всех ненулевых слов полугруппы S вида $a_i a_j$, $i \neq j$.

При изучении вопросов планарности важную роль играют графы K_5 и $K_{3,3}$. В [61] доказано, что если $Cay(S, E)$ — граф Кэли конечной полугруппы S , то $Cay(S, E)$:

- 1) не изоморфен полному двудольному графу $K_{3,3}$ с любой ориентацией и раскраской (разметкой) рёбер;
- 2) изоморфен полному графу K_5 с единственной ориентацией рёбер тогда и только тогда, когда S имеет копредставление $S = \langle a, b \mid ab = ba, a = b^2 = a^3 b, a^2 = ab^2, b = a^3 = a^2 b^2 \rangle$.

Продолжая обзор исследований в данном направлении, заметим, что при изучении вопросов внешнепланарности на основании критерия Чартрэнда — Харари ключевая роль отводится графам K_4 и $K_{2,3}$. В следующей теореме показано, что не существует полугрупп, графы Кэли которых изоморфны полному графу K_4 или полному двудольному графу $K_{2,3}$ с некоторой ориентацией и раскраской рёбер.

Теорема 45 [45, теорема 7.1]. Если $Cay(S, E)$ — граф Кэли конечной полугруппы S , то $Cay(S, E)$:

- 1) не изоморфен полному графу K_4 с любой ориентацией и раскраской рёбер;
- 2) не изоморфен полному двудольному графу $K_{2,3}$ с любой ориентацией и раскраской рёбер.

Таков список основных результатов, полученных в ходе исследования полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли.

3.5. О полугруппах с обобщёнными внешнепланарными графами Кэли

Напомним, что *обобщённым внешнепланарным графом* называется планарный граф, который можно уложить на плоскости таким образом, что каждое ребро обладает хотя бы одной концевой вершиной на границе внешней грани. Обобщённые внешнепланарные графы впервые ввёл в рассмотрение И. Седлачек [81]. Данное понятие сыграло важную роль при изучении локальных свойств графов. Кроме того, Седлачек нашел характеризацию обобщённых внешнепланарных графов в терминах запрещённых подграфов.

Статья [50] открыла цикл работ, посвящённых перечислению полугрупп, допускающих обобщённые внешнепланарные графы Кэли. Первым результатом является теорема, содержащая характеристическое свойство конечных свободных коммутативных полугрупп, графы Кэли которых являются обобщённо внешнепланарными.

Теорема 46 [50, теорема 1]. Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S относительно множества свободных образующих обобщённо внешнепланарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:

1. $S = \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle$, где r и m — любые натуральные числа.
2. $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^{h+t} = b^h \rangle$, где для натуральных r, m, h, t выполняется хотя бы одно из следующих условий:
 - а) $h = 1, t = 1, m \leq 2$; или $r = 1, m = 1, t \leq 2$;
 - б) $((h \leq 2, t = 2)$ или $(h \leq 3, t = 1))$ при $r + m = 3$; или $((r \leq 2, m = 2)$ или $(r \leq 3, m = 1))$ при $h + t = 3$.
3. $S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = a, b^2 = b, c^2 = c \rangle$.

Заметим, что условие данной теоремы содержит все конечные свободные коммутативные полугруппы, допускающие внешнепланарные графы Кэли, согласно [45, теорема 2.1]. Более того, свободными коммутативными полугруппами, допускающими обобщённо внешнепланарные графы Кэли, но не допускающими внешнепланарные графы Кэли, являются полугруппы, имеющие копредставления

$$S = \langle a, b \mid ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^{h+t} = b^h \rangle,$$

где $((h = 2, t = 2)$ или $(h = 3, t = 1))$ при $r + m = 3$; либо $((r = 2, m = 2)$ или $(r = 3, m = 1))$ при $h + t = 3$; или

$$S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = a, b^2 = b, c^2 = c \rangle,$$

и только они.

Далее под циклической полугруппой с нулём понимается любой гомоморфный образ свободной однопорождённой полугруппы с нулём. Очевидно, что любая циклическая полугруппа с нулём изоморфна либо циклической ниль-полугруппе, либо получена из циклической полугруппы внешним присоединением нуля. Конечная полугруппа с нулём называется свободной коммутативной, если она является коммутативно-свободным произведением циклических полугрупп с нулём.

Следующая теорема содержит характеристическое свойство конечных свободных коммутативных полугрупп с нулём, графы Кэли которых являются обобщённо внешнепланарными.

Теорема 47 [50, теорема 2]. Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S с нулём относительно множества свободных образующих обобщённо внешнепланарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:

1. $S = \langle a \mid a^r = 0 \rangle$, где r — любое натуральное число.
2. $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^r = 0, b^h = 0 \rangle$, где r, h — натуральные числа, причём $r = 1$, или $h = 1$, или $r + h \leq 5$.
3. $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^h = 0 \rangle$, где для натуральных r, m, h выполняется хотя бы одно из следующих условий:
 - а) при $m = 1$ имеем $h = 1$, или $r = 1$, или $r + h \leq 5$;
 - б) при $m = 2$ имеем $h = 1$, или $r + h \leq 4$;
 - в) при $m = 3$ имеем $h = 1$;
 - г) при $m \geq 4$ имеем $r = 1$ и $h = 1$.
4. $S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = a, b^2 = b, c = 0 \rangle$.

Далее перечислены все конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие обобщённые внешнепланарные графы Кэли.

Теорема 48 [51, теорема 2]. Граф Кэли конечного свободного коммутативного моноида S обобщённо внешнепланарен тогда и только тогда, когда S в классе всех коммутативных моноидов имеет копредставление одного из следующих видов:

1. $S = \langle a \mid a^m = 1 \rangle$, где m — любое натуральное число.
2. $S = \langle a, b \mid a^{r+m} = a^r, b^t = 1 \rangle$, либо $S = \langle a, b \mid a^m = 1, b^t = 1 \rangle$, где для натуральных r, m, t выполнено одно из следующих ограничений:
 - а) $t = 1$;
 - б) $m \leq 2, t = 2$.
3. $S = \langle a, b, c \mid a^{r+m} = a^r, b^2 = b, c = 1 \rangle$, где r, m — натуральные числа, $m \leq 2$.

Ранее приведены условия, при которых рассыпчатые полугруппы допускают планарные и, в частности, внешнепланарные графы Кэли. Следующая теорема характеризует рассыпчатые полугруппы, допускающие обобщённые внешнепланарные графы Кэли.

Теорема 49 [52, теорема 1]. Пусть S — рассыпчатая полугруппа и $S = \bigcup_{e \in P} S_e$ — соответствующая ординальная сумма сингулярных полугрупп. Тогда S допускает обобщённый внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1. $|P| = 1$ и $|S| < 5$, если S — полугруппа правых нулей или S — полугруппа левых нулей.
2. $|P| = 2$ и выполнено одно из условий:
 - а) обе компоненты являются полугруппами правых нулей и $|S| < 5$;
 - б) только одна из компонент S_e является полугруппой правых нулей и $|S_e| \leq 3$, а другая компонента одноэлементная (при $|S_e| = 3$);
 - в) обе компоненты — полугруппы левых нулей и одна из них содержит менее трёх элементов.
3. $|P| = 3$ и выполнено одно из условий:
 - а) все компоненты — полугруппы правых нулей и $|S| < 5$;
 - б) две из компонент содержат по одному элементу, а третья компонента — полугруппа левых нулей;
 - в) все компоненты являются полугруппами левых нулей и $|S| \leq 5$.
4. $|P| = 4$ и $|S| = 4$.

3.6. О гиперграфах полугрупп

На пути исследования вопросов планарности графов Кэли полугрупп могут появляться комбинаторные проблемы, например имеет место

Гипотеза 1 [82]. Граф Кэли мультипликативной полугруппы кольца вычетов по модулю n планарен тогда и только тогда, когда $n < 9$ или n — простое число.

В то же время подобные утверждения носят частный характер, поэтому удобнее распространить известное понятие графов Кэли до гиперграфов алгебр. В частности, оказалось возможным всякой модели сопоставить гиперграф, множеством вершин которого служит основное множество модели, а гиперрёбрами — элементы (кортежи) отношений модели [83].

Так как всякая n -местная алгебраическая операция представляется $(n+1)$ -местным отношением, то данное определение применимо и для алгебр [84], более того, установлен механизм структурного описания моделей теорий по семействам гиперграфов простых моделей произвольной малой теории [85]; поэтому, направление видится весьма перспективным. Кёнигово представление гиперграфов [86, с. 93] алгебр при таком подходе является двудольным графом, следовательно, более доступно для изучения свойств ацикличности и внешнепланарности. Особый интерес вызывают гиперграфы полугрупп, обладающие перечисленными далее свойствами 1°–3°, отражающими их тесную связь с графами Кэли. Необходимый минимум понятий теории гиперграфов можно почерпнуть из работы [86].

Дадим конструктивное определение гиперграфа полугруппы S относительно множества образующих её элементов X : каждой полугруппе сопоставлен гиперграф $H\text{Cay}(S, X)$, множеством вершин которого служит основное множество элементов по-

лугруппы S , а гиперрёбрами — всевозможные тройки вида (a, x, b) , где $a, b \in S$, $x \in X$ и $ax = b$.

Некоторые свойства гиперграфа устанавливаются через одноименные свойства кёнигова представления. Напомним, что кёниговым представлением гиперграфа называется двудольный граф, отражающий отношение инцидентности элементов гиперграфа. Этот граф несёт полную информацию о гиперграфе и однозначно его определяет. Поэтому вполне естественно называть гиперграф плоским или планарным, если его кёнигово представление является планарным графом.

Таким образом, гиперграф $HCay(S, X)$ полугруппы S относительно множества образующих её элементов X представляется кёниговым двудольным графом, у которого множество вершин одной из долей является основным множеством элементов s_i полугруппы S , а множество вершин другой доли исчерпывается всевозможными тройками $e_j = (a_j, x_j, b_j)$, где $a_j, b_j \in S$, $x_j \in X$ и $a_j x_j = b_j$; при этом вершина s_i соединена дугой с вершиной $e_j = (a_j, x_j, b_j)$ тогда и только тогда, когда $s_i \in (a_j, x_j, b_j)$, то есть гипервершина s_i принадлежит гиперребру e_j в гиперграфе $HCay(S, X)$. Для удобства восприятия дуга $(s_i; e_j)$ помечается порядковым номером компоненты s_i в упорядоченной тройке e_j . Основой ориентированного помеченного мультиграфа мы называем обыкновенный граф, полученный из данного удалением меток, петель и заменой всех дуг, соединяющих две вершины, одним ребром, соединяющим эти вершины.

Некоторые свойства гиперграфов полугрупп:

- 1°) Гиперграф моногенной полугруппы планарен.
- 2°) Существуют полугруппы, допускающие планарный граф Кэли, но не допускающие планарный гиперграф.

Примером может служить мультипликативная полугруппа кольца вычетов по модулю 8, порождаемая тремя элементами $(\mathbb{Z}_8 = \langle 2, 3, 5 \rangle)$ и допускающая планарный граф Кэли, в то время как её гиперграф планарным не является, в силу теоремы о них.

- 3°) Если гиперграф полугруппы планарен, то её граф Кэли тоже планарен.

В самом деле, каждому ребру графа Кэли соответствует подграф кёнигова представления гиперграфа. Следовательно, если в кёниговом представлении гиперграфа отсутствует подграф, гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$, то он отсутствует и в графе Кэли, то есть планарность наследуется.

Таким образом, полугруппы с планарными гиперграфами образуют класс более узкий, чем полугруппы, допускающие планарные графы Кэли. Более того, имеет место следующая

Теорема 50 [82]. Гиперграф мультипликативной полугруппы $\mathbb{Z}_n$ кольца вычетов по модулю n планарен тогда и только тогда, когда $n = 1$ или $\mathbb{Z}_n = \langle a, b \mid a^l = 0, b^k = 1, ab = a \rangle$, $l, k \in \mathbb{N}$.

Заметим, что примером допускающей планарный гиперграф 2-порождённой мультипликативной полугруппы кольца вычетов по модулю n , порождающие элементы a, b которой удовлетворяют равенству $ab = a$, служит $\mathbb{Z}_4 = \langle 2, 3 \rangle$. Кроме того, условие теоремы выполнено, если n — простое число, так как $0\beta = 0$ и $\mathbb{Z}_p = \langle 0, \beta \rangle$ для любого простого p , где β — первообразный корень сравнения $\beta^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Следствие 1 [82]. Гиперграф мультипликативной полугруппы кольца вычетов по модулю n внешнепланарен тогда и только тогда, когда $n < 3$.

3.7. О других полугруппах с планарными графами Кэли

В [71] изучаются свободные частично коммутативные нильпотентные полугруппы, допускающие планарные графы Кэли. Если дан обыкновенный граф Γ с множеством вершин $V\Gamma = \{a_1, \dots, a_t\}$, то можно определить свободную частично коммутативную полугруппу как полугруппу $S(\Gamma)$, заданную множеством $\{a_1, \dots, a_t\}$ образующих элементов и множеством определяющих соотношений вида $a_i \cdot a_j = a_j \cdot a_i$ для тех и только тех a_i и a_j , которые соединены ребром в графе Γ . Для любого натурального числа n фактор-полугруппу Риса $S(\Gamma)/S^n$ назовём *свободной частично коммутативной n -нильпотентной полугруппой, определяемой графом Γ порядка t* ; условимся обозначать эту полугруппу через $S_t^n(\Gamma)$. Справедлива следующая теорема, приближающая нас к исследованию вопросов планарности графов Кэли свободных полугрупп квази-многообразий.

Теорема 51 [71, теорема 1]. Полугруппа $S_t^n(\Gamma)$ допускает планарный граф Кэли, если и только если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1) Γ — пустой граф;
- 2) связными компонентами графа Γ являются паросочетания или изолированные вершины и $n \leq 5$;
- 3) связными компонентами графа Γ являются цепи или изолированные вершины и $n \leq 4$;
- 4) связными компонентами графа Γ являются «деревья» из простых циклов (кактусы) или изолированные вершины и $n \leq 3$;
- 5) Γ — любой граф и $n \leq 2$, либо $n > 2$ и $t \leq 2$.

Для полноты картины о разнообразии результатов в данной области и в качестве иллюстрации к вариациям на тему основного определения графа Кэли полугруппы приведём следующую теорему.

Теорема 52 [87]. Нециклическая полугруппа с одним определяющим соотношением и с тождеством допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда она антиизоморфна одной из полугрупп: $S_1 = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$, $S_{2,k} = \langle a, b \mid ab = b^k \rangle$, $k = 1, 2, \dots$, $S_3 = \langle a, b \mid aba = ba \rangle$, $S_4 = \langle a, b \mid aba = b \rangle$, $S_5 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$, $S_6 = \langle a, b \mid aba^2 = ba \rangle$, или изоморфна одной из полугрупп: $S_1, S_{2,1}, S_4, S_5$.

При исследовании вопроса планарности графов важную роль играют непланарные графы K_5 или $K_{3,3}$. С другой стороны, максимальными плоскими графами (графами, которые перестают быть плоскими при добавлении любого ребра) являются плоские триангуляции (графы, каждая грань которых — треугольник). Поэтому при изучении конечных полугрупп со свойством планарности графов Кэли возникает задача перечисления всех полугрупп, графы Кэли которых являются упомянутыми с некоторой ориентацией рёбер.

В [61], в частности, решена задача о допустимости графов $K_{3,3}$, K_5 и плоских триангуляций в качестве графов Кэли конечных полугрупп.

Теорема 53 [61]. Если $Cay(S, X)$ — граф Кэли конечной полугруппы S , то $Cay(S, X)$:

- 1) не изоморфен полному двудольному графу $K_{3,3}$ с любой ориентацией и пометкой рёбер;
- 2) изоморфен плоской триангуляции с единственной ориентацией рёбер тогда и только тогда, когда S имеет копредставление

$$S = \langle a \mid a^4 = a \rangle;$$

- 3) изоморфен полному графу K_5 с единственной ориентацией рёбер тогда и только тогда, когда S имеет копредставление

$$S = \langle a, b \mid ab = ba, a = b^2 = a^3b, a^2 = ab^2, b = a^3 = a^2b^2 \rangle.$$

Заметим, что, в продолжение начатого в [61] исследования вопроса о допустимости некоторых графов в качестве графов Кэли полугрупп, в [88] показано, что графом Кэли полугруппы S является плоская триангуляция, изоморфная графу октаэдра, с некоторой (не единственной) ориентацией и пометкой рёбер тогда и только тогда, когда полугруппа S является циклической полугруппой $S \cong \langle a \mid a^7 = a \rangle$ относительно множества образующих элементов $\{a, a^2\}$ или $\{a, a^4\}$, либо полугруппой $S \cong \langle a, b \mid a^4 = a, b^4 = b, a^2 = ba, b^2 = ab \rangle$.

Кроме того, полугруппа S , указанная в условии 3 теоремы 53, является циклической группой порядка 5 (при выборе одного образующего она имеет копредставление $S = \langle a \mid a^6 = a \rangle$) и поэтому допускает планарный граф Кэли. Данное замечание иллюстрирует известный факт, что свойство планарности графа Кэли полугруппы существенно зависит от выбора множества образующих. В связи с этим естественно рассматривать графы относительно минимального по включению множества образующих.

Изучению свойства планарности графов Кэли в классе полугрупп, совпадающих с любым своим минимальным множеством образующих, посвящена работа [78]. Нетрудно показать, что этот класс совпадает с классом всех рассыпчатых полугрупп, то есть таких полугрупп S , в которых для любых элементов a, b из S выполняется $ab = a$ или $ab = b$.

Результатом из данной серии является

Теорема 54 [78, теорема 1]. Пусть S — рассыпчатая полугруппа и $S = \bigcup_{e \in P} S_e$ — соответствующая ординальная сумма сингулярных полугрупп. Тогда S допускает планарный граф Кэли, если и только если выполняется одно из следующих условий:

1. $|P| = 1$ и $|S| < 5$, если S — полугруппа правых нулей.
2. $|P| = 2$ и выполнено одно из условий:
 - а) обе компоненты — полугруппы правых нулей и $|S| < 5$;
 - б) только одна из компонент S_e является полугруппой правых нулей и $|S_e| \leq 3$, а другая компонента содержит менее трёх элементов (при $|S_e| = 3$);
 - в) обе компоненты — полугруппы левых нулей, и одна из них содержит менее трёх элементов.
3. $|P| = 3$ и выполнено одно из условий:
 - а) все компоненты — полугруппы правых нулей и $|S| < 5$;
 - б) две из компонент содержат по одному элементу, а третья компонента — полугруппа левых нулей;
 - в) все компоненты являются полугруппами левых нулей и $|S| \leq 5$ или $|S_e| = 2$ для любого $e \in P$.
4. $|P| = 4$ и $|S| \leq 5$.

Прямоугольной полугруппой называется полугруппа, изоморфная прямому произведению $L \times R$, где L — левосингулярная, а R — правосингулярная полугруппа.

Теорема 55 [88]. Пусть S — ординальная сумма прямоугольных полугрупп. Тогда S допускает планарный граф Кэли, если и только если выполняется одно из следующих условий:

1. $|P| = 1$ и $S = (L_i \times R_j)$, где $1 \leq j < 5$, $i \geq 1$.
2. $|P| = 2$ и выполнено хотя бы одно из условий:
 - а) одна из компонент — R_1 , а другая — $(L_i \times R_j)$, где $1 \leq j \leq 3$, $i \geq 1$;
 - б) одна из компонент — R_2 , а другая — $(L_i \times R_j)$, где $1 \leq j \leq 2$, $i \geq 1$, причём если R_2 — бóльшая, то возможно $j = 3$, $i \geq 2$;
 - в) одна из компонент — L_2 либо $(L_2 \times R_2)$ — является меньшей, а другая — $(L_i \times R_j)$, где $1 \leq j \leq 2$, $i \geq 1$ либо $j = 3$, $i = 1$, причём если L_2 — бóльшая, то возможно $j = 3$, $i \geq 2$;
 - г) меньшая из компонент является произведением $(L_i \times R_j)$, где $1 \leq j \leq 4$, $i \geq 2$, бóльшая — R_1 , R_2 либо L_2 .
3. $|P| = 3$ и выполнено хотя бы одно из условий:
 - а) две из компонент одноэлементные, а третья — $(L_i \times R_j)$, где $1 \leq j \leq 4$, $i \geq 2$ для меньшей компоненты, $1 \leq j \leq 3$, $i \geq 2$ — для средней, $1 \leq j \leq 2$, $i \geq 1$ — для большей;
 - б) компонентами ординальной суммы одновременно являются R_1 , R_2 (либо L_2) и L_2 , причём вместо L_2 меньшей или средней компонентой возможна $(L_2 \times R_2)$;
 - в) все компоненты — L_2 , либо меньшая из них — $(L_2 \times R_2)$.
4. $|P| = 4$ и выполнено хотя бы одно из условий:
 - а) все компоненты — полугруппы левых нулей и $|S| \leq 5$;
 - б) три из компонент одноэлементные, а $(L_2 \times R_2)$ — не наибольшая.

4. О рангах планарности многообразий полугрупп

Результаты этого раздела принадлежат исключительно автору.

За время всестороннего исследования понятия ранга планарности многообразия полугрупп сделано много открытий, среди которых можно выделить следующие теоретические результаты:

- 1) описаны ранги планарности многообразий коммутативных моноидов и приведена классификация многообразий коммутативных моноидов по рангам планарности [60];
- 2) найдены все планарные многообразия полугрупп, в частности вычислены ранги планарности многообразий из решётки, порождённой негрупповыми атомами [89];
- 3) описаны ранги планарности коммутативных полугрупп и вычислены ранги планарности некоторых серий многообразий коммутативных полугрупп [90, 91];
- 4) найдены ранги планарности многообразия всех полугрупп идемпотентов и многообразий полугрупп, заданных перестановочным тождеством [92];
- 5) в классе многообразий ниль-полугрупп указана континуальная серия многообразий бесконечного ранга планарности и континуальная серия многообразий конечного ранга планарности [93];
- 6) описаны ранги планарности многообразий полугрупп [94].

Определённый интерес представляет также вопрос о том, какие составленные из натуральных чисел и символа ∞ наборы значений могут быть наборами значений рангов планарности нетривиальных подмногообразий X произвольного многообразия V полугрупп. Л. М. Мартынов предложил называть этот вопрос «Проблема спектров рангов планарности многообразий полугрупп».

Например, в силу теоремы 60, спектр рангов планарности многообразия всех полугрупп является полным. Последнее открывает обширные горизонты для дальнейших

исследований. В частности, в процессе написания обзора были найдены ранги планарности каждого из многообразий бесконечной счётной решётки всех многообразий связок.

4.1. Ранги планарности многообразий коммутативных моноидов и полугрупп

При доказательстве результатов данного подраздела использованы методы структурной теории полугрупп, теории многообразий и теории графов.

В частности, широко применяется критерий Понтрягина — Куратовского. Первый эффективный алгоритм (линейной временной сложности) для проверки графа на планарность принадлежит Д. Хопкрофту и Р. Тарьяну [95], и как рисовать планарные графы за линейное время, известно давно [96].

Автором получен результат, касающийся моноидов. Для его формулировки приведём некоторые обозначения из [60]:

- $\mathbf{M}$ — многообразие всех коммутативных моноидов;
- $\mathbf{A}_m = \text{var}\{x^m \approx 1\}$ — многообразие всех абелевых групп экспоненты m , являющееся подмногообразием многообразия $\mathbf{M}$;
- $\mathbf{S}_{i,m}^1 = \text{var}\{x^{i+m} \approx x^i\}$ — многообразие коммутативных моноидов типа (i, m) , являющееся подмногообразием многообразия $\mathbf{M}$.

С использованием развитого в [73] инструментария в [60] доказана следующая

Теорема 56 [60]. Пусть $\mathbf{V}$ — нетривиальное многообразие коммутативных моноидов, $r_\pi(\mathbf{V})$ — его ранг планарности. Тогда $r_\pi(\mathbf{V}) \leq 3$. Более того:

- 1) $r_\pi(\mathbf{V}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{V} = \mathbf{A}_m$ или $\mathbf{V} = \mathbf{S}_{i,m}^1$, где $m > 2$, $i \geq 1$, $n > 2$;
- 2) $r_\pi(\mathbf{V}) = 2$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{V} = \mathbf{M}$, или $\mathbf{V} = \mathbf{S}_{i_1,1}^1$, или $\mathbf{V} = \mathbf{S}_{i_2,2}^1$, где $i_1 \geq 2$, $i_2 \geq 1$;
- 3) $r_\pi(\mathbf{V}) = 3$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{V} = \mathbf{A}_2$ или $\mathbf{V} = \mathbf{S}_{1,1}^1$.

Таким образом, из теоремы 56 вытекает, что $\text{Spec}_{r_\pi}(\mathbf{M}) = \{0, 1, 2, 3\}$. Эта теорема не только решает проблему рангов планарности для многообразий коммутативных моноидов [97], но и приводит классификацию многообразий коммутативных моноидов по рангам планарности.

Следующая теорема посвящена указанию рангов планарности некоторых многообразий коммутативных полугрупп. Для формулировки результата приведём следующие обозначения:

- $\mathbf{C} = \text{var}\{xy \approx yx\}$ — многообразие всех коммутативных полугрупп;
- $\mathbf{A}_n = \text{var}\{x^n y \approx y, xy \approx yx\}$ — многообразие всех абелевых групп экспоненты $n > 1$;
- $\mathbf{CB}_{r,m} = \text{var}\{x^{r+m} \approx x^r, xy \approx yx\}$ — многообразие всех коммутативных полугрупп бернсайдовского типа, где $r > 0$, $m > 0$;
- $\mathbf{CN}_s = \text{var}\{x_1 x_2 \dots x_s y \approx x_1 x_2 \dots x_s, xy \approx yx\}$ — многообразие коммутативных нильпотентных полугрупп степени $s > 1$;
- $\mathbf{CNil}_r = \text{var}\{x^r y \approx x^r, xy \approx yx\}$ — многообразие всех коммутативных ниль-полугрупп индекса $r > 1$.

Справедлива следующая

Теорема 57 [90, 91, теорема 1]. Нетривиальное многообразие коммутативных полугрупп либо имеет бесконечный ранг планарности и при этом совпадает с многообразием полугрупп с нулевым умножением, либо имеет ранг планарности 1, 2 или 3:

- 1) $r_\pi(\mathbf{C}) = 2$;

- 2) $r_\pi(\mathbf{A}_2) = 3$ и $r_\pi(\mathbf{A}_n) = 1$ при $n > 2$;
- 3) $r_\pi(\mathbf{CB}_{1,1}) = 3$, $r_\pi(\mathbf{CB}_{r,m}) = 1$ при $r > 0$, $m > 2$, и $r_\pi(\mathbf{CB}_{r,m}) = \infty$ в остальных случаях;
- 4) $r_\pi(\mathbf{CN}_2) = \infty$, $r_\pi(\mathbf{CN}_3) = 3$, $r_\pi(\mathbf{CN}_s) = 2$ при $s > 3$;
- 5) $r_\pi(\mathbf{CNil}_r) = 2$ при любом $r > 1$.

Приведём несколько конфигураций, возникающих в процессе доказательства теоремы 57. Условимся обозначать свободную n -порождённую полугруппу многообразия $\mathbf{V}$ над n -элементным множеством образующих $X \subseteq \{x, y, z, t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, являющимся подмножеством бесконечного счётного алфавита, как $F_{\mathbf{V}}\langle X \rangle$. Граф Кэли свободной полугруппы многообразия $\text{var}\{xy \approx yx, x^{1+m} \approx x^1\}$ с тремя образующими содержит изображённый на рис. 1 подграф, основа которого гомеоморфна графу $K_{3,3}$. Следовательно, этот граф не является планарным, а ранг планарности такого многообразия не превышает 2 и тем более 3.

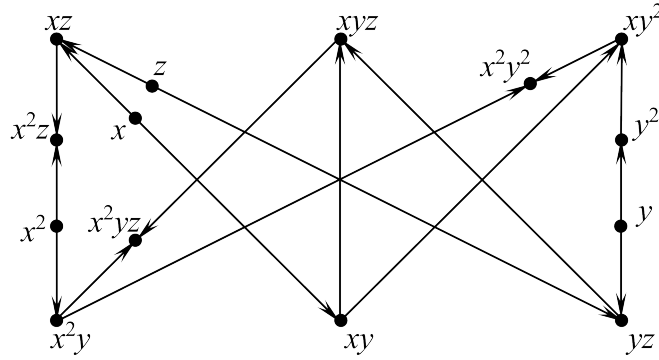


Рис. 1. Подграф графа Кэли свободной 3-порождённой полугруппы $F_{\mathbf{V}}\langle\{x, y, z\}\rangle$ коммутативного многообразия $\mathbf{V} = \text{var}\{xy \approx yx, x^{1+m} \approx x^1\}$ при $m > 1$

Выполнение хотя бы одного из соотношений $x^2z = z$, $x^2y = y$ или $x = xy^2$ приводит к тому, что выполнено тождество $x^2y = y$, из которого следует $x^2z = z$, что приводит к $x^2 = xxy^2 = x^2yu = y^2$ — многообразию полугрупп, задаваемых системой тождеств $\text{var}\{xy \approx yx, x^{1+m} \approx x, x^2 \approx y^2\}$, ранг планарности которого ограничен 3, согласно рис. 2, на котором изображён подграф, основа которого гомеоморфна графу K_5 .

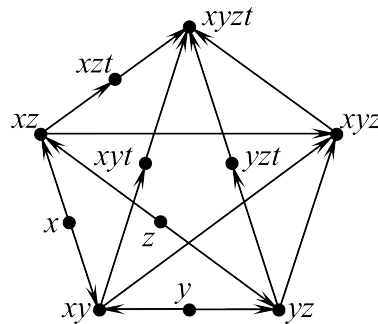


Рис. 2. Подграф графа Кэли свободной 4-порождённой полугруппы $F_{\mathbf{V}}\langle\{x, y, z, t\}\rangle$ коммутативного многообразия $\mathbf{V} = \text{var}\{xy \approx yx, x^{1+m} \approx x^1\}$ при $m \geq 1$

При доказательстве теоремы 57 существенным образом использованы результаты из работы [60].

Следующая теорема посвящена нахождению рангов планарности многообразий полугрупп идемпотентов, ниль-полугрупп и полугрупп с перестановочным тождеством.

Теорема 58 [92]. Ранг планарности многообразия всех полугрупп идемпотентов равен 3; ранг планарности многообразия ниль-полугрупп, заданного тождеством $w \approx 0$, равен бесконечности; ранг планарности любого перестановочного многообразия полугрупп равен 1 или 2.

Позже был получен более общий результат о ниль-многообразиях, приведём его в подразделе 4.2.

В случае многообразий всех нильпотентных полугрупп $\mathbf{N}_l$ данной степени нильпотентности l легко видеть, что $\text{Spec}_{r\pi}(\mathbf{N}_2) = \{0, \infty\}$, так как многообразие $\mathbf{N}_2$ является планарным и является атомом решётки многообразий полугрупп (аналогично $\text{Spec}_{r\pi}(\mathbf{L}_0) = \{0, \infty\}$, $\text{Spec}_{r\pi}(\mathbf{R}_0) = \{0, 4\}$, $\text{Spec}_{r\pi}(\mathbf{A}_2) = \{0, 3\}$, $\text{Spec}_{r\pi}(\mathbf{A}_{p>2}) = \{0, 1\}$).

Кроме того, $\text{Spec}_{r\pi}(\mathbf{N}_3) = \{0, 3, \infty\}$, так как не 0-приведённые подмногообразия многообразия $\mathbf{N}_3$ исчерпываются многообразиями: $\mathbf{CN}_3 = \text{var}\{xyz \approx 0; xy \approx yx\}$ всех коммутативных нильпотентных полугрупп степени 3, для которого ранг планарности $r_\pi(\mathbf{CN}_3) = 3$, и $\text{var}\{xyz \approx 0; x^2 \approx 0; xy \approx yx\}$, ранг планарности которого также равен 3; каждое из оставшихся 0-приведённых подмногообразий многообразия $\mathbf{N}_3$ имеет бесконечный ранг планарности.

Разнообразие ситуации с рангами демонстрирует теорема 57: $\text{Spec}_{r\pi}(\mathbf{C}) = \{0, 1, 2, 3, \infty\}$.

4.2. О рангах планарности ниль-многообразий

В следующей теореме приведены бесконечные серии многообразий ниль-полугрупп бесконечного и конечного рангов планарности.

Теорема 59 [93]. Ранг планарности 0-приведённого многообразия ниль-полугрупп бесконечен. Кроме того, если система тождеств, определяющая многообразие ниль-полугрупп, среди не эквивалентных системе 0-приведённых тождеств имеет только одно тождество минимальной длины вида $u_1 x u_2 y u_3 \approx v_1 y v_2 x v_3$, где слова u_i, v_j — не обязательно различные, возможно, пустые для некоторых многообразий, а $u_1 v_1$ не содержит символы x и y , то ранг планарности такого многообразия конечен.

Доказательство теоремы 59 опирается на следующие утверждения:

Лемма 1 [93, лемма 1]. Фактор-полугруппа Риса свободной полугруппы по любому идеалу допускает планарный граф Кэли.

Следствие 2 [93, следствие 1]. Ранг планарности любого 0-приведённого многообразия равен бесконечности.

Множество 0-приведённых многообразий имеет мощность континуума, поэтому справедливо

Следствие 3 [93, следствие 2]. Множество полугрупповых многообразий бесконечного ранга планарности имеет континуальную мощность.

Кроме того, из теоремы 59 вытекает и обслуживаемое одной конфигурацией следующее

Следствие 4 [93, следствие 3]. Множество полугрупповых ниль-многообразий конечного ранга планарности имеет континуальную мощность.

Заметим, что бывают и не 0-приведённые многообразия ниль-полугрупп бесконечного ранга, например $r_\pi(\text{var}\{xyu \approx xux, x^m \approx 0\}) = \infty$, где $m > 2$. Однако до настоящего времени не было известно ни одного многообразия полугрупп с конечным рангом

планарности более чем 4. Тем неожиданнее оказалась справедливость результата [94], из которого вытекает существование полугрупповых многообразий любого наперёд заданного конечного ранга планарности, что вместе с предыдущими результатами автора решает проблему описания рангов планарности подмногообразий многообразия всех полугрупп, сформулированную Л. М. Мартыновым в [30].

Теорема 60 [94]. Ранг планарности любого многообразия полугрупп либо бесконечен, либо может быть любым натуральным числом.

Из теоремы 60, в частности, вытекает, что спектр рангов планарности многообразий всех полугрупп является полным, то есть $\text{Спек}_{r\pi}(\mathbf{S}) = \mathbb{N}^\infty$, где $\mathbf{S}$ — это многообразие всех полугрупп.

Многообразие всех ниль-полугрупп данного конечного ниль-индекса k с одним перестановочным тождеством длины n , переставляющим элементы в позициях i, j , обозначим через $\mathbf{Nil}_k \mathbf{P}_n^{(i;j)}$. Тогда из того, что при доказательстве теоремы 59 обнаруживаются конфигурации, содержащие вхождения элементов в степени не выше 4, вытекает

Следствие 5 [94, следствие 1]. При $k > 4$ существуют подмногообразия многообразия всех ниль-полугрупп $\mathbf{Nil}_k$ ранга планарности 1 и 2, примеры которых составляют многообразия $\mathbf{Nil}_k \mathbf{P}_3^{(1;2)}$ и $\mathbf{Nil}_k \mathbf{P}_3^{(2;3)}$ с соответствующим перестановочным тождеством.

В качестве комментария к теореме 60 напомним, что многообразия бесконечного ранга планарности присутствуют в теоремах 59 и 60. Многообразия полугрупп конечных рангов планарности 1, 2, 3 содержат предыдущие результаты автора. Наконец, многообразия полугрупп

$$\mathbf{Nil}_2 \mathbf{P}_n^{(1;2)} = \text{var}\{x^2 \approx 0, xux \approx 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_n \approx x_2 x_1 x_3 x_4 \dots x_n\}$$

при каждом $n > 3$ имеют ранг планарности $n - 1$.

Плоская укладка основы графа Кэли свободной $(n - 1)$ -порождённой полугруппы этого многообразия получается следующим образом: отправной точкой берётся лес, как для всякого 0-приведённого многообразия; в силу внешнепланарности леса можно добавить к нему изолированную вершину 0 и все остальные вершины леса соединить ребром с 0 так, чтобы планарность сохранилась [45]. Теперь рассмотрим свободную n -порождённую полугруппу многообразия $\mathbf{Nil}_2 \mathbf{P}_n^{(1;2)}$. При достаточном количестве образующих начинает работать тождество вида $x_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_n \approx x_2 x_1 x_3 x_4 \dots x_n$, которое в случае $(n - 1)$ -порождённой полугруппы вырождается, поскольку в любой $(n - 1)$ -порождённой полугруппе многообразия $\mathbf{Nil}_2 \mathbf{P}_n^{(1;2)}$ любое слово длины n равно 0. В результате образуется достаточно склеек слов длины n в свободной n -порождённой полугруппе $F_n(\mathbf{Nil}_2 \mathbf{P}_n^{(1;2)})$ многообразия $\mathbf{Nil}_2 \mathbf{P}_n^{(1;2)}$, при $n > 3$ приводящих к появлению в основе графа Кэли этой полугруппы относительно множества образующих $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ подграфа, гомеоморфного полному двудольному графу $K_{3,3}$.

Непосредственно из доказательства теоремы 60 вытекает

Следствие 6 [94, следствие 2]. Натуральное число $n \geq 3$ и значение ∞ могут быть рангами планарности подмногообразий многообразия $\mathbf{Nil}_k = \text{var}\{x^k \approx 0\}$ всех ниль-полугрупп данного конечного ниль-индекса k при любом $k \geq 2$.

Ввиду следствия 6 и того факта, что примеры, обеспечивающие ранги планарности 1 и 2, описаны в следствии 5 из теоремы 58, спектр рангов планарности многообразий всех ниль-полугрупп $\mathbf{Nil}_k$ данного конечного ниль-индекса $k > 4$ является полным, то есть $\text{Спек}_{r\pi}(\mathbf{Nil}_k) = \mathbb{N}^\infty$.

Отметим, что многообразия $\mathbf{Nil}_2\mathbf{P}_n^{(1;2)}$ при $n > 3$ не единственны в своём роде. Примеры иных серий полугрупповых многообразий конечного наперёд заданного ранга планарности получаются по аналогии добавлением к тождествам $x^2 \approx 0$, $xyx \approx 0$ других перестановочных тождеств фиксированного порядка $n > 3$ и их наборов, а именно: справедливо

Предложение 1 [94]. Для любого натурального числа $n > 3$ справедливы следующие утверждения:

- 1) ранг планарности многообразия $\mathbf{Nil}_2\mathbf{P}_n^{(n-1;n)}$ полугрупп, заданного системой тождеств $\{x^2 \approx 0, xyx \approx 0, x_1 \dots x_{n-2}x_{n-1}x_n \approx x_1 \dots x_{n-2}x_nx_{n-1}\}$, равен n ;
- 2) ранг планарности многообразия $\mathbf{Nil}_2\mathbf{P}_n^{(i;j)}$ полугрупп, заданного системой тождеств

$$\{x^2 \approx 0, xyx \approx 0, x_1 \dots x_{i-1}x_ix_{i+1} \dots x_{j-1}x_j \dots x_n \approx x_1 \dots x_{i-1}x_jx_{i+1} \dots x_{j-1}x_i \dots x_n\} \quad (1)$$

при $i + 1 \neq n$, равен $n - 1$;

- 3) ранг планарности многообразия $\mathbf{Nil}_2\mathbf{P}_n^{(i;j)}$ полугрупп, заданного системой тождеств (1) при $j \neq n$, равен $n - 1$;
- 4) ранг планарности многообразия $\mathbf{Nil}_2\mathbf{P}_n^{S_{n-1}}$ полугрупп, заданного системой тождеств $\{x^2 \approx 0, xyx \approx 0, x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n \approx x_{\pi(1)}x_{\pi(2)} \dots x_{\pi(n-1)}x_n : \pi \in S_{n-1}\}$, где S_{n-1} — симметрическая группа подстановок на $(n - 1)$ -элементном множестве, равен $n - 1$;
- 5) ранг планарности многообразия $\mathbf{Nil}_2\mathbf{P}_n^{S_n}$ полугрупп, заданного системой тождеств $\{x^2 \approx 0, xyx \approx 0, x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n \approx x_{\pi(1)}x_{\pi(2)} \dots x_{\pi(n-1)}x_{\pi(n)} : \pi \in S_n\}$, равен $n - 1$.

В связи с результатами предложения 1 ещё более актуальной становится проблема классификации многообразий полугрупп по рангам планарности, в частности задача описания многообразий полугрупп бесконечного ранга планарности.

4.3. О рангах планарности других многообразий полугрупп

Принципиальная новизна серии многообразий, описанных в данном подразделе, заключается в том, что впервые поднимается вопрос о рангах планарности для многообразий вполне регулярных полугрупп, то есть являющихся объединением групп, причём соответствующие группы не обязательно являются абелевыми. Из теоремы 56 для абелевых групп известно и независимо доказано позднее для произвольных групп в [98], что ранг планарности многообразия $\text{var}\{x^n \approx 1\}$ при любом $n \geq 3$ равен 1. Но в более общем случае при нахождении рангов планарности многообразий полугрупп, заданных тождеством $x^n \approx x$, в полугрупповой сигнатуре, на этом пути возникает проблема Туэ равенства слов. Удалось обойти эту проблему при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 61 [98]. Ранг планарности многообразия $\text{var}\{x^n \approx x\}$ при любом $n \geq 3$ равен 1, а при $n = 2$ равен 3.

Позднее всех стали известны планарные многообразия полугрупп [89].

Теорема 62 [89, теорема 1]. Нетривиальные планарные многообразия полугрупп исчерпываются:

- многообразием полугрупп левых нулей $\mathbf{L}_0 = \text{var}\{xy \approx x\}$;
- многообразием полугрупп с нулевым умножением $\mathbf{N}_2 = \text{var}\{xy \approx xt\}$;
- и их покрывающим многообразием $\mathbf{L}_0 \vee \mathbf{N}_2 = \text{var}\{xy \approx xz\}$.

Как следствие, из данной теоремы легко вытекает перечисление всех планарных многообразий коммутативных полугрупп:

Следствие 7 [90, теорема 1]. Единственным нетривиальным планарным многообразием коммутативных полугрупп является многообразие полугрупп с нулевым умножением.

При доказательстве теоремы 62 найдены многообразия полугрупп бесконечного ранга планарности и рангов 2, 3, 4 (приведены в [89] на примере известной решётки из [99], порождённой негрупповыми атомами).

В завершение приведём новый результат, полученный в процессе написания обзора.

Теорема 63. $\text{Spec}_{r\pi}(\text{var}\{x^2 = x\}) = \{0, 2, 3, 4, \infty\}$.

Несмотря на столь краткую формулировку, доказательство теоремы 63 показательно тем, что опирается на обширные результаты прежних исследований и в процессе доказательства были существенно задействованы машинные вычисления, согласно описанной в [100] общей методологии.

Доказательство. В [101] приведено такое множество $\mathcal{G}$, которое содержит все тождества многообразий связок с точностью до эквивалентности, при этом каждое тождество из $\mathcal{G}$ неприводимо (то есть любое тождество из $\mathcal{G}$ не эквивалентно некоторому тождеству от меньшего числа переменных) и каждое многообразие связок задается системой тождеств, образованной тождеством $x^2 = x$ и одним из тождеств множества $\mathcal{G}$. Данное множество $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^4 (a_i \cup \bar{a}_i \cup b_i \cup \bar{b}_i) \cup c \cup d$ является дизъюнктивным объединением следующих подмножеств, состоящих из тождеств, в словах которых d — это переменная, отличная от переменных $a, x, y, x_i, i = 1, \dots, \infty$:

$$\begin{aligned} a_1 &= \{R_n = Q_n : n = 3, 5, \dots\}, & a_2 &= \{R_n = S_n : n = 3, 5, \dots\}, \\ a_3 &= \{R_n = Q_n : n = 4, 6, \dots\}, & a_4 &= \{R_n = S_n : n = 4, 6, \dots\}, \\ b_1 &= \{R_n dx_n R_{n-1} = Q_n dx_n S_{n-1} : n = 5, 7, \dots\}, \\ b_2 &= \{R_n d\bar{R}_n = S_n d\bar{Q}_n : n = 3, 5, \dots\}, \\ b_3 &= \{\bar{R}_n dx_n \bar{R}_{n-1} = \bar{Q}_n dx_n \bar{S}_{n-1} : n = 4, 6, \dots\}, \\ b_4 &= \{\bar{R}_n dR_n = \bar{S}_n dQ_n : n = 4, 6, \dots\}, \\ c &= \{Ad\bar{A} = Bd\bar{B} : A = B \in a_1 \cup a_2 \cup \bar{a}_3 \cup \bar{a}_4\} \cup \{R_3 dR_2 = Q_3 dS_2, \bar{R}_2 d\bar{R}_3 = \bar{S}_2 d\bar{Q}_3\}, \\ d &= \{x = y, ax = a, xa = a, axya = ayxa, R_2 = Q_2, \bar{R}_2 = \bar{Q}_2, ax = axa, axya = axaya, xa = axa, a = a, R_2 = S_2, \bar{R}_2 = \bar{S}_2, xy = yx, a = axa\}, \end{aligned}$$

где

$$R_n = \begin{cases} x_3 x_2 x_1 & \text{при } n = 2, \\ x_1 x_2 x_3 & \text{при } n = 3, \\ R_{n-1} x_n & \text{при } n = 4, 6, \dots, \\ x_n R_{n-1} & \text{при } n = 5, 7, \dots; \end{cases} \quad Q_n = \begin{cases} x_2 x_3 x_1 & \text{при } n = 2, \\ x_1 x_2 x_3 x_1 x_3 & \text{при } n = 3, \\ Q_{n-1} x_n R_n & \text{при } n = 4, 6, \dots, \\ R_n x_n Q_{n-1} & \text{при } n = 5, 7, \dots; \end{cases}$$

$$S_n = \begin{cases} x_3 x_1 x_2 x_1 & \text{при } n = 2, \\ x_1 x_2 x_3 x_1 x_3 x_2 x_3 & \text{при } n = 3, \\ S_{n-1} x_n R_n & \text{при } n = 4, 6, \dots, \\ R_n x_n S_{n-1} & \text{при } n = 5, 7, \dots, \end{cases}$$

а слово $\bar{A}$ обозначает зеркальное отражение слова $A \in \{R_n, Q_n, S_n : n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$ и для каждого множества тождеств $f \in \bigcup_{i=1}^4 \{a_i, b_i\}$ однозначно определено соответствующее множество зеркальных тождеств $\bar{f} = \{\bar{P} = \bar{Q} : P = Q \in f\}$.

Заметим, что длина отождествляемых слов в свободной полугруппе указанных многообразий не превосходит восьми. Остаётся показать, что ранги планарности оставшихся из ранее не исследованных на предмет значения рангов планарности многообразий связок (в свободной полугруппе которых длина отождествляемых слов более восьми) принимают значения из множества $\{2, 3, 4, \infty\}$, а именно равны 3. В самом деле, плоская укладка графа Кэли 3-порождённой свободной полугруппы каждого

из этих многообразий совпадает с приведённой в [92] плоской укладкой графа Кэли 3-порождённой свободной полугруппы многообразия $\text{var}\{a \approx a\}$ в классе многообразий связок, поскольку каждый из 159 элементов этой полугруппы является словом длины не более 8.

При выборе четырёх и более образующих свободная полугруппа каждого из анализируемых многообразий не допускает плоской укладки по теореме Понтрягина — Куратовского, так как в основе её графа Кэли содержится подграф, гомеоморфный графу $K_{3,3}$, содержащий в одной из долей вершины $xуzixуz$, $xуziу$, $xуzixуz$, а в другой — вершины $xуzi$, $xуziуи$, $xуziуz$, соединённые следующими непересекающимися маршрутами: $xуzixуz-xуzi$, $xуzixуz-xуzixу-xуzixуи-xуziуи-xуziуи-xуziуи$, $xуzixуz-xуzixуz-xуziуzxi-xуziуz-xуziуz$, $xуziу-xуzi$, $xуziу-xуziуи$, $xуziу-xуziуz$, $xуzixуz-xуzi$, $xуzixуz-xуziуи-xуziуи$, $xуzixуz-xуzixуи-xуziуz-xуziуz$. Принципиальное значение имеет тот факт, что каждая из вершин данного графа является словом, длина которого не превосходит восьми.

Типовой подзадачей, возникающей в поисках минимальной конфигурации $K_{3,3}$, является доказательство либо опровержение равенства слов. Доказательство равенства $xуzixуи-xуziуи-xуzixуи$ в свободной полугруппе многообразия, заданного тождеством $x^2 \approx x$, используемого для обоснования существования ребра $xуzixуи-xуziуи-xуzixуи$, помеченного элементом z в графе Кэли свободной полугруппы данного многообразия, можно осуществить разными способами. С одной стороны, равенство верно, так как если взять в качестве отправной точки $(((((xу)z)u)x)y)u)xz = ((((((xу)z)u)y)u)x)z) — доказываемое тождество, выполняемое для всех допустимых значений пропозициональных переменных x, y, z, u ; $x^2 = x$ — исходное тождество идемпотентности; $(xу)z = x(yz)$ — исходное тождество ассоциативности, и предположить, что $(((((c_1c_2)c_3)c_4)c_1)c_2)c_4)c_1)c_3 \neq ((((((c_1c_2)c_3)c_4)c_2)c_4)c_1)c_3) — противное к доказываемому, что существуют такие константы c_1, c_2, c_3, c_4 , для которых тождество неверно, то в результате серии из 320 тождественных преобразований будет получено противоречие. Следовательно, предположение неверно. С другой стороны, достаточно вспомнить некоторые классические факты о равенстве слов в свободной связке B_X над алфавитом X , установленные в [102], примеры использования которых можно найти в [103, с. 121]. Один из этих фактов состоит в следующем. Обозначим через $c(w)$ содержание слова w , т. е. множество букв из X , участвующих в записи w . Тогда если $c(w_1) = c(w_3) \supseteq c(w_2)$, то $w_1w_2w_3 = w_1w_3$ в B_X . Если положить $w_1 = xуzi$, $w_2 = x$, $w_3 = yиxz$, то становится очевидным, что тождество $xуzi \cdot x \cdot yиxz = xуzi \cdot yиxz$ является специальным случаем указанного общего факта и не нуждается в отдельном доказательстве. Аналогично, из решения проблемы равенства слов в свободной связке сразу следует неравенство $xуziуи \neq xуzixуи$ в B_X .$$

Тем не менее при доказательстве неравенств, необходимых для обоснования того, что все вершины найденной конфигурации различны в исследуемом многообразии, можно построить конкретные модели эквациональной логики первого порядка. В качестве типового нетривиального примера покажем, что $xуziуи \neq xуzixуи$ в свободной полугруппе многообразия, заданного тождеством $x^2 \approx x$, для обоснования существования двух различных вершин $xуziуи$, $xуzixуи$ в графе Кэли свободной полугруппы данного многообразия.

В самом деле, равенство $xуziуи = xуzixуи$ не выполняется в свободной полугруппе исследуемого многообразия связок, возможно, удовлетворяющей тождеству, не эквивалентному тождеству идемпотентности, но отождествляющее слово из более

чем восьми символов с любым другим словом, так как оно обращается в ложное, при интерпретации умножения по следующей таблице Кэли:

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	2	0	4	5
1	1	1	2	1	4	5
2	4	5	2	2	4	5
3	0	1	2	3	4	5
4	4	4	2	4	4	5
5	5	5	2	5	4	5

Для такого умножения выполнены тождества идемпотентности и ассоциативности, последнее эффективно проверяется тестом ассоциативности по Лайту, впервые опубликованным в [104] на английском и независимо в первой в мировой литературе монографии по теории полугрупп на русском языке [105], но, взяв $x = 0, y = 1, z = 2, u = 3$, получим противоречие: $xyziyux = 0123130 = 023130 = 23130 = 2130 = 530 = 50 = 5$, $xyziyxux = 01230130 = 0230130 = 230130 = 20130 = 4130 = 430 = 40 = 4$. Что и требовалось доказать. ■

Заключение

Подводя итоги обзора результатов исследований по изучению свойства планарности графов Кэли для полугрупп, напомним, что было выделено два основных направления: первое (классическое) посвящено описанию полугрупп с планарными графами Кэли; второе (новое) — инспирировано тесно связанными между собой понятиями ранга планарности и спектра рангов планарности многообразий полугрупп, предложенными Л. М. Мартыновым.

В планах развития первого направления адресуем проблему описания конечных полугрупп с планарными графами Кэли для тех или иных классов полугрупп, в которых, на наш взгляд, решение этой проблемы имеет шансы на успех. Например, в [29] перед описанием планарных правых групп отмечается, что можно зафиксировать полугруппу левых нулей $L_k = \{l_1, \dots, l_k\}$ на k элементах, таких, что $l_i l_j = l_i$ при всех $i, j \in \{1, \dots, k\}$, и рассмотреть левую группу $L_k \times G$, система образующих которой всегда имеет вид $L_k \times C$, где C — система образующих элементов группы G . Правый граф Кэли $\text{Cay}(L_k \times G, L_k \times C)$ левой группы состоит из k копий $\text{Cay}(G, C)$. Следовательно, левая группа $L_k \times G$ плоская тогда и только тогда, когда группа G плоская для произвольного $k \in \mathbb{N}$. После этого естественным образом возникает задача описания планарных правых групп и её решение. В дальнейшем данная задача может быть перенесена на случай прямоугольных групп (прямое произведение группы и прямоугольной полугруппы) в противовес более сложным образом устроенным клиффордовым полугруппам. Описание клиффордовых полугрупп с планарными графами Кэли сдерживается значительными вычислительными трудностями, но является лишь одним из многих путей первого направления.

Помимо этого, с одной стороны, можно налагать дополнительные ограничения на планарные графы Кэли полугрупп, а именно: известна идея описания полугрупп, допускающих ациклические графы Кэли (в основе которых запрещены подграфы, гомеоморфные полному графу третьего порядка K_3 , соответствующее исследование полугрупп, основа графа Кэли которых является деревом, начато в [46]), внешнепланарные графы Кэли (запрещены K_4 и $K_{2,3}$, большая часть основных классов таких полугрупп рассмотрена в монографии [106]), обобщённые внешнепланарные графы

Кэли (без подграфов, гомеоморфных графам Седлачека, изучение которых начато в [50]), последовательно-параллельные графы Кэли (без K_4) и незацепленные вложения (без K_6 и других графов Петерсенова семейства в качестве миноров). Каждый из упомянутых классов графов, согласно общей теории миноров, хорошо описывается на языке запрещённых конфигураций, аналогично планарным (без K_5 и $K_{3,3}$), а поиск характеристики полугрупп, допускающих графы Кэли без подграфов, выбираемых с точностью до гомеоморфизма из непустого наперёд заданного множества не обязательно конечных графов, ещё ждёт своего исследователя.

С другой стороны, можно варьировать класс полугрупп, например весьма актуальной представляется задача исчерпывающего описания нильпотентных полугрупп с планарными графами Кэли. Известно лишь описание плоских свободных нильпотентных полугрупп, плоских нильпотентных частично коммутативных полугрупп, но результаты не распространены на бесконечный случай частично коммутативных полугрупп. В настоящее время предпринимаются попытки классифицировать изучаемые объекты на языке количества элементов в квадрате соответствующей полугруппы (по количеству ненулевых двухэлементных произведений из множества образующих). Попутно могут быть описаны графы Кэли полугрупп круглых порядков (n — круглое, если существует натуральная степень основания некоторой системы счисления, равная n). По мере продвижения предстоит исследовать возникающие алгоритмические проблемы. Так, например, проблема равенства слов в классе полугрупп с планарными графами Кэли ещё не решена. С одной стороны, мы располагаем примерами полугрупп с разрешимой проблемой равенства слов, но не планарными графами Кэли; с другой стороны — на сегодняшний день неизвестен ответ на вопрос: «Существует ли полугруппа с планарным графом Кэли и с неразрешимой проблемой равенства слов», — при том что в [107] доказана неразрешимость узкой проблемы равенства слов для рассмотренных классов конечных, периодических, ниль- и нильпотентных полугрупп.

Кроме того, интересен вопрос о допустимости графа в качестве графа Кэли полугруппы (когда по графу требуется сказать, может ли он быть графом Кэли полугруппы; при этом эффективные алгоритмы в случае групп известны). Преодоление этих трудностей видится в применении параметрических алгоритмов и построении цепочек полугрупп, в которых граф Кэли каждой предшествующей содержался бы в следующем планарном графе, с использованием рекуррентных соотношений. Тогда будут исследованы возможности получения новых полугрупп, ведь остаётся открытым вопрос о влиянии различных произведений графов на свойство результирующего графа быть графом Кэли некоторой полугруппы. В частности, могут исследоваться произведения графов Кэли матричных полугрупп Риса или полугрупп Брандта, либо графов Кэли как графов пяти платоновых тел с некоторой ориентацией и пометкой рёбер.

Известные попытки классификации полугрупп не вписываются в рамки исследования полугрупп с планарными графами Кэли (в отличие от групп), поэтому имеет смысл построение новой классификации полугрупп, отталкиваясь от свойства планарности. Необходимо систематизировать «хорошие» и «плохие» полугруппы в смысле планарности их графов Кэли, с учётом различных характеристик непланарных графов, что, возможно, повлечёт появление нового подхода к понятию чистоты полугрупп и продемонстрирует высокую степень продуктивности использования графов Кэли полугрупп в решении задач, основанных на планарности. Так, например, описание допустимых перестановок компонентов может быть использовано для разработки сетей параллельных вычислений и проектирования интегральных схем. Предполагается, что результаты могут позволить выйти на качественно новый уровень технических

решений в схемотехнике. С другой стороны, результаты косвенно повлияют на получение решения открытой проблемы поиска гамильтонова цикла в графе, поскольку известно, что многие задачи на графах класса NP имеют полиномиальное решение в планарном случае. Более того, упомянутые в обзоре результаты, продолжающие исследования в этом направлении, обосновали, в частности, практическую значимость графов Кэли валентности 3 (так называемых кубических графов) для решения трудоёмких комбинаторных задач проектирования без использования групповых структур.

Основным направлением дальнейшего использования получаемых результатов является их применение для классификации полугрупп с планарными графами Кэли. Предвидя трудность решения проблемы классификации, желательного получить ответы на ряд конкретных вопросов: найти условия, при которых свободное коммутативное произведение двух конечных полугрупп с планарными графами Кэли обладает тем же свойством; прямое произведение двух полугрупп с планарными графами Кэли обладает тем же свойством; раздувание (inflation) полугруппы с планарным графом Кэли обладает тем же свойством; описать планарные графы Кэли полугруппы, полученной раздуванием полугруппы правых нулей; описать конечные коммутативные клиффордовы полугруппы (в частности, полурешётки), допускающие планарный граф Кэли (с точностью до групп); найти абстрактную характеристику графов Кэли полугрупп; описать полугруппы, полученные добавлением соотношения (не являющегося следствием исходных соотношений), допускающие планарный граф; описать полугруппы Фибоначчи, допускающие планарный граф Кэли.

Для второго направления приведём более конкретные открытые проблемы, постановка которых возникла при обсуждении результатов с Л. М. Мартыновым, и укажем на перспективы развития данной проблематики. Актуальной становится, по-видимому, весьма трудная следующая проблема.

Проблема 1. Описать многообразия полугрупп, имеющие бесконечный ранг планарности.

На подступах к решению этой проблемы интересно получить ответы на следующие два вопроса:

В о п р о с 1. Какие из тождеств определяют многообразия полугрупп, имеющие бесконечный ранг планарности?

В о п р о с 2. Какие системы из двух тождеств определяют многообразия полугрупп, имеющие бесконечный ранг планарности?

Дело в том, что некоторые ключевые многообразия полугрупп задаются именно двумя тождествами в полугрупповой сигнатуре, соответствующие примеры можно найти среди многообразий групп и 0-приведённых многообразий.

Первую задачу можно свести к не менее трудной проблеме задания матрицы смежности основы графа Кэли соответствующей свободной полугруппы. Опираясь на доказанное в [108], можно получить эквивалентность $r_\pi(\mathbf{V}) = \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(SCay(F_n(\mathbf{V}))) \leq 3$, где μ — инвариант Колен де Вердьера. Напомним: если $G = (V, E)$ — неориентированный граф (положим $V = \{1, \dots, n\}$), то $\mu(G)$ является наибольшим корангом (дефектом) такой матрицы $M = (M_{i,j}) \in R^{(n)}$, для которой выполнены следующие три условия: 1) для всех i, j при $i \neq j$ имеет место неравенство $M_{i,j} < 0$, если i и j являются смежными, и равенство $M_{i,j} = 0$ в противном случае; 2) M имеет ровно одно отрицательное собственное значение кратности 1; 3) не существует ненулевой матрицы $X = (X_{i,j}) \in R^{(n)}$, такой, что $MX = 0$, в которой $X_{i,j} = 0$,

когда $i = j$ или $M_{i,j} \neq 0$ (то есть вершины i и j являются смежными). Данную эквивалентность можно раскрыть, используя методы работ [109, 110].

Например, для многообразия полугрупп правых нулей $\mathbf{R}_0 = \text{var}\{xy \approx y\}$ имеет место неравенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(SCay(F_n(\mathbf{R}_0))) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n - 1) = \infty > 3$. В самом деле, $F_n(\mathbf{R}_0) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid xy \approx y \rangle$, $SCay(F_n(\mathbf{R}_0)) = K_n$, $\mu(K_n) = n - 1$. Следовательно, данное многообразие имеет конечный ранг планарности.

Для многообразия полугрупп с нулевым умножением $\mathbf{N}_2 = \text{var}\{xy \approx zt\}$ имеет место неравенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(SCay(F_n(\mathbf{N}_2))) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2) = 2 \leq 3$. В самом деле, $F_n(\mathbf{N}_2) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid xy \approx zt \rangle$, $SCay(F_n(\mathbf{N}_2)) = K_{1,n}$, $\mu(K_{1,n}) = \min\{1, n\} + 1 = 2$ при $n \geq 4$. Следовательно, данное многообразие имеет бесконечный ранг планарности.

Определённый интерес представляет ещё более трудная проблема классификации многообразий полугрупп по рангам планарности.

Проблема 2. Описать многообразия полугрупп, имеющих ранг планарности r , где r — фиксированный элемент из $\mathbb{N}^\infty$.

На сегодняшний день классифицированы по рангам планарности лишь многообразия коммутативных моноидов (теорема 56) и многообразия связок (рис. 3). Кроме того, отдельный интерес представляет также проблема спектров рангов планарности многообразий полугрупп.

Проблема 3. Описать спектры рангов планарности многообразий полугрупп.

При решении этой проблемы возникнет более трудная задача классификации многообразий полугрупп по спектрам рангов планарности и откроются приложения спектральной теории многообразий полугрупп к построению хэш-функций.

Проблема 4. Описать многообразия полугрупп, имеющих данный спектр рангов планарности S , где S — фиксированное подмножество множества $\mathbb{N}^\infty$.

Отдельный интерес представляет здесь следующий вопрос:

В о п р о с 3. Для каких многообразий полугрупп спектр рангов планарности является полным?

Конкретные примеры многообразий полного спектра рангов планарности представлены в обзоре. Ранее отмечалось (теорема 60), что спектр рангов планарности многообразия всех полугрупп полный, кроме того, обнаружена бесконечная серия многообразий ниль-полугрупп с полным спектром рангов планарности (следствие 6).

При этом из групповых многообразий в обзоре охвачены только многообразия абелевых групп. Тем интереснее адресовать к произвольным многообразиям вполне регулярных полугрупп следующую проблему.

Проблема 5. Описать ранги планарности многообразий вполне регулярных полугрупп, в частности клиффордовых.

Любая вполне регулярная полугруппа является полурешёткой прямоугольных связок групп. В таком многообразии выполняется тождество $x^n \approx x$ для некоторого натурального числа $n > 1$. Ясно, что любое многообразие связок является многообразием вполне регулярных полугрупп. Среди многообразий связок, согласно тереме 63, лишь два многообразия $\text{var}\{x^2 \approx x; xy \approx x\}$ и $\text{var}\{x^2 \approx x; xy \approx xux\}$ имеют бесконечный ранг планарности. Примеры других многообразий вполне регулярных полугрупп бесконечного ранга планарности нам неизвестны. В связи с этим интересно получить ответы на следующие два вопроса:

В о п р о с 4. Имеется ли многообразие вполне регулярных полугрупп бесконечного ранга планарности, содержащее неодноэлементную группу?

На подступах к решению этого вопроса отметим очевидную конечность ранга планарности любого локально конечного многообразия групп. Это вытекает из того, что перечисленные в теореме Машке (теорема 1) конечные группы с планарными графами Кэли порождаются не более чем тремя элементами, поэтому любая V -свободная группа с четырьмя и более образующими не принадлежит этому списку.

В о п р о с 5. Конечен ли ранг планарности любого нетривиального многообразия групп?

Ответ на последний вопрос приблизит решение вопроса 4. Обратим внимание, что здесь речь идёт о многообразии групп, рассматриваемых в полугрупповой сигнатуре, как алгебр с одной бинарной операцией умножения. В частности, любое многообразие групп является периодическим.

Итак, ещё раз подчеркнем важность изучения свойства планарности для графов Кэли полугрупп. В настоящее время в практических приложениях (в криптографии, теории кодирования и других) широко востребованы классические алгебры: группы, полугруппы. И не представляется возможным предвидеть, какие свойства тех или иных алгебраических структур понадобятся в дальнейшем. Поэтому мы солидарны с автором обзора [111] в мысли о том, что необходимо развивать структурные теории классических алгебр, используя различные подходы, методами теории графов в том числе.

Автор выражает глубокую признательность научному консультанту профессору Л. М. Мартынову за постановку задачи, постоянное внимание к работе и полезные обсуждения результатов, а также профессору М. В. Волкову за конструктивные критические замечания, высказанные после доклада автора на екатеринбургском семинаре «Алгебраические системы».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Druţu C. and Kapovich M.* Geometric Group Theory. Colloquium Publ. AMS. 2018. V. 63. 819 p.
2. *McCammond J., Rhodes J., and Steinberg B.* Geometric Semigroup Theory. arXiv:1104.2301 [math.GR]. 2011.
3. *Cayley A.* The theory of groups: graphical representation // Amer. J. Math. 1878. V. 1. P. 174–176.
4. *Cooperman G., Finkelstein L., and Sarawagi N.* Applications of Cayley graphs // LNCS. 1991. V. 508. P. 367–378.
5. *Horwitz J. A.* Applications of Cayley Graphs, Bilinearity, and Higher-Order Residues to Cryptology. Diss. for the Degree of Doctor of Philosophy. Stanford, 2004. 100 p.
6. *Zémor G.* Hash functions and Cayley graphs // Des. Codes Crypt. 1994. V. 4. P. 381–394.
7. *Tripi A.* Cayley Graphs of Groups and Their Applications. MSU Graduate Theses. 2017. V. 3133. 47 p.
8. *Sosnovski B.* Cayley Graphs of Semigroups and Applications to Hashing. Diss. for the Degree of Doctor of Philosophy. City University of New York, 2016. 111 p.
9. *Maschke H.* The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space, by Cayley's color diagrams // Amer. J. Math. 1896. V. 18. No. 2. P. 156–194.
10. *Беленкова Ж. Т., Романьков В. А.* Регулярные графы Кэли. Деп. ВИНТИ. 1997. № 802–V97. 37 с.
11. *Беленкова Ж. Т., Романьков В. А.* Плоские графы Кэли конечных групп. Препринт. Омск: ОмГУ, 1997. 8 с.

12. Беленкова Ж. Т. Все плоские графы Кэли группы S_4 . Препринт. Омск: ОмГУ, 1997. 12 с.
13. Беленкова Ж. Т. Плоские графы Кэли: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Омск: ОмГУ, 1998.
14. Droms C., Servatius B., and Servatius H. Connectivity and planarity of Cayley graphs // Beiträge zur Algebra und Geometrie. 1998. V. 39. No. 2. P. 269–282.
15. Droms C. Infinite-ended groups with planar Cayley graphs // J. Group Theory. 2006. V. 9. No. 4. P. 487–496.
16. Dunwoody M. J. Planar Graphs and Covers. <https://arxiv.org/abs/0708.0920>. 2009.
17. Georgakopoulos A. Characterising planar Cayley graphs and Cayley complexes in terms of group presentations // Europ. J. Combinatorics. 2014. V. 36. P. 282–293.
18. Georgakopoulos A. The planar cubic Cayley graphs of connectivity 2 // Europ. J. Combinatorics. 2017. V. 64. P. 152–169.
19. Georgakopoulos A. The planar cubic Cayley graphs // Mem. Amer. Math. Soc. 2017. V. 250. No. 1190. 82 p.
20. Georgakopoulos A. and Hamann M. The planar Cayley graphs are effectively enumerable I: Consistently planar graphs // Combinatorica. 2019. V. 39. No. 5. P. 993–1019.
21. Georgakopoulos A. and Hamann M. The Planar Cayley Graphs are Effectively Enumerable II. <https://arxiv.org/abs/1901.00347>. 2019.
22. Varghese O. Planarity of Cayley graphs of graph products of groups // Discrete Math. 2019. V. 342. No. 6. P. 1812–1819.
23. Georgakopoulos A. On planar Cayley graphs and Kleinian groups // Trans. Amer. Math. Soc. 2020. V. 373. No. 7. P. 4649–4684.
24. Paalman A. B. Topological representation of semigroups // General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra. Praha: Academia Publishing House AS CR, 1967. P. 276–282.
25. Bosák J. The graphs of semigroups // Proc. Symp. “Theory of Graphs and its Applications”. Praha, 1964. P. 119–125.
26. Zelinka B. The diameter of the graph of the system of proper semigroups of a commutative semigroup // Mat.-Fyz. Cas. SAV. 1965. V. 15. P. 143–144.
27. Zelinka B. Graphs of semigroups // Cas. Pest. Mat. 1981. P. 407–408.
28. Knauer K. and Knauer U. Toroidal embeddings of right groups // Thai J. Math. 2010. V. 8. No. 3. P. 483–490.
29. Knauer K. and Knauer U. On planar right groups // Semigroup Forum. 2016. V. 92. No. 1. P. 142–157.
30. <http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=12900> — Новые проблемы алгебры и логики. Юбилейное 900-е заседание семинара: Омский алгебраический семинар, 12 ноября 2015.
31. Адян С. И. Алгоритмическая неразрешимость проблем распознавания некоторых свойств групп // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103. № 4. С. 533–535.
32. Rabin M. O. Recursive unsolvability of group theoretic problems // Ann. Math. 1958. V. 67. P. 172–174.
33. Zieschang H., Vogt E., and Coldewey H. D. Surfaces and Planar Discontinuous Groups. Berlin: Springer Verlag, 1980. 336 p.
34. Margolis S. W. and Meakin J. C. E-unitary inverse monoids and the Cayley graph of a group representation // J. Pure Appl. Algebra. 1989. V. 58. P. 45–76.
35. Kelarev A. V. and Quinn S. J. On complete and bipartite Cayley graphs // Arbeitstagung Allgemeine Algebra 62, June 14–17, 2001. Abstracts. Linz: Austria, 2001. P. 25.

36. Kelarev A. V. and Praeger C. E. On transitive Cayley graphs of groups and semigroups // Europ. J. Combinatorics. 2003. V. 24. P. 59–72.
37. Kelarev A. V. and Quinn S. J. A combinatorial property and Cayley graphs of semigroups // Semigroup Forum. 2002. V. 66. No. 1. P. 89–96.
38. Kelarev A. V. On undirected Cayley graphs // Australasian J. Combinatorics. 2002. V. 25. P. 73–78.
39. Kelarev A. V. On Cayley graphs of inverse semigroups // Semigroup Forum. 2006. V. 72. P. 411–418.
40. Khosravi Be. and Khosravi Ba. On Cayley graphs of semilattices of semigroups // Semigroup Forum. 2013. V. 86. P. 114–132.
41. Khosravi Be. and Khosravi Ba. A characterization of Cayley graphs of Brandt semigroups // Bull. Malaysian Math. Sci. Soc. 2012. V. 2. No. 2. P. 12–18.
42. Khosravi B. On Cayley graphs of left groups // Houston J. Math. 2009. V. 35. No. 3. P. 745–755.
43. Fan S. and Zeng Y. On Cayley graphs of Bands // Semigroup Forum. 2007. V. 74. P. 99–105.
44. Макарьев А. Л. О полугруппах идемпотентов с ациклическими графами Кэли // Математика и информатика: Наука и образование. 2007. Т. 6. С. 26–34.
45. Соломатин Д. В. Строение полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли // Сиб. электрон. матем. изв. 2011. Т. 8. С. 191–212.
46. Макарьев А. Л. Нильпотентные полугруппы, основа графа Кэли которых является деревом // Математика и информатика: Наука и образование. 2006. Т. 5. С. 40–46.
47. Макарьев А. Л. Полурешётки с ациклическими графами Кэли // Математика и информатика: Наука и образование. 2008. Т. 7. С. 28–33.
48. Макарьев А. Л. Ординальные суммы полугрупп с ациклическими графами Кэли // Вестник Омского университета. 2008. Т. 4. С. 12–17.
49. Мартынов Л. М., Соломатин Д. В. Полугруппы вычетов с циклическими группами обратимых элементов, допускающие планарные графы Кэли // Вестник Омского университета. 2012. Т. 2. С. 57–62.
50. Мартынов П. О., Соломатин Д. В. Конечные свободные коммутативные полугруппы и полугруппы с нулём, допускающие обобщенные внешнепланарные графы Кэли // Вестник Омского университета. 2014. Т. 3. С. 22–26.
51. Мартынов П. О. Конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие обобщенно внешнепланарные графы Кэли // Вестник Омского университета. 2015. Т. 4. С. 6–9.
52. Мартынов П. О. Рассыпчатые полугруппы, допускающие обобщенные внешнепланарные графы Кэли // Вестник Омского университета. 2018. Т. 3. С. 6–9.
53. Khosravi B. Comparison of Cayley graphs of semigroups and Cayley graphs of groups // Book of Abstracts Caucasian Math. Conf. CMC II. Turkish Math. Society, 2007. P. 18–19.
54. Molchanov V. A. A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols // Semigroup Forum. 2011. V. 82. P. 1–9.
55. Zhang X. Clifford semigroups with genus zero // Proc. Intern. Conf. Semigroups, Acts and Categories with Applications to Graphs. University of Tartu, June 27–30, 2007. Tartu: EMS, 2008. P. 151–160.
56. Шеврин Л. Н. Полугруппы // Общая алгебра (ред. Л. А. Скорняков). Гл. IV. М.: Наука, 1991. Т. 2. С. 11–191.
57. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.
58. Martynova T. A. The groupoid of 0-reduced varieties of semigroups // Semigroup Forum. 1983. V. 26. P. 249–274.

59. *Preston G. and Clifford A.* The Algebraic Theory of Semigroups // Amer. Math. Soc. 1964. V. 1. No. 7. P. 169–174.
60. *Соломатин Д. В.* Ранги планарности многообразий коммутативных моноидов // Вестник Омского университета. 2012. Т. 4. С. 41–45.
61. *Соломатин Д. В.* О допустимости некоторых графов в качестве графов Кэли полугрупп // Математика и информатика: Наука и образование. 2004. Т. 4. С. 32–34.
62. *Lempel A., Even S., and Cederbaum I.* An algorithm for planarity testing of graphs // Proc. Int. Symp. Theory Graphs. New York, 1967. P. 215–232.
63. *Klein P. N. and Reif J. H.* An efficient parallel algorithm for planarity // J. Computer System Sci. 1988. V. 37. P. 190–246.
64. *Bader D. A. and Sreshta S. A.* A New Parallel Algorithm for Planarity Testing. <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.65.2914&rep=rep1&type=pdf>. 2003.
65. *Соломатин Д. В.* О критериях планарности графов Кэли полугрупп // Математика и информатика: Наука и образование. 2010. Т. 9. С. 44–46.
66. *Соломатин Д. В.* Стохастический алгоритм поиска подграфа, гомеоморфного заданному // Стохастические модели в биологии и предельные алгебры (Омск, 2–7 августа 2010). Омск: ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН, 2010. С. 98–100.
67. *Kambites M.* The loop problem for Rees matrix semigroups // Semigroup Forum. 2008. V. 76. No. 2. P. 204–216.
68. *Мелихов А. Н., Берштейн Л. С., Курейчик В. М.* Применение графов для проектирования дискретных устройств. М.: Наука, 1974. 304 с.
69. *Levinson H.* On the genera of graphs of group presentations // Ann. New York Acad. Sci. 1970. V. 175. P. 277–284.
70. *Соломатин Д. В.* Свободные частично коммутативные n -веерные полурешетки с планарными графами Кэли // Математика и информатика: Наука и образование. 2009. Т. 8. С. 36–39.
71. *Соломатин Д. В.* Свободные частично коммутативные нильпотентные полугруппы с планарными графами Кэли // Вестник Омского университета. 2014. Т. 3. С. 28–36.
72. *Соломатин Д. В.* Конечные свободные коммутативные полугруппы с планарными графами Кэли // Математика и информатика: Наука и образование. 2003. Т. 3. С. 32–38.
73. *Соломатин Д. В.* Конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие планарный граф Кэли // Вестник Омского университета. 2005. Т. 4. С. 36–38.
74. *Birkhoff G.* On the structure of abstract algebras // Proc. Camb. Phil. Soc. 1935. V. 31. P. 433–454.
75. *Соломатин Д. В.* Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие планарный граф Кэли // Сиб. электрон. матем. изв. 2006. Т. 3. С. 238–252.
76. *Соломатин Д. В.* Прямые произведения циклических моноидов и полугрупп с нулем, допускающие планарные графы Кэли // Математика и информатика: Наука и образование. 2006. Т. 5. С. 51–64.
77. *Соломатин Д. В.* Критерий планарности для графов Кэли 0-прямых объединений нильпотентных полугрупп // Мальцевские чтения (2–6 мая 2010). Новосибирск: ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН, 2010. С. 144.
78. *Соломатин Д. В.* Рассыпчатые полугруппы с планарными графами Кэли // Вестник Волгоградского государственного педагогического университета. 2005. Т. 4. С. 27–31.
79. *Полякова Л. Ю.* Резольвенты для свободных частично коммутативных моноидов // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48. С. 1295–1304.

80. Diekert V. and Métivier Y. Partial commutation and traces // Handbook of Formal Languages. Berlin: Springer Verlag, 1997. V. 3. P. 457–533.
81. Sedláček J. On a generalization of outerplanar graphs // Časopis Pěst. Mat. 1988. V. 2. No. 113. P. 213–218.
82. Соломатин Д. В. Планарные гиперграфы мультипликативных полугрупп вычетов // Математика и информатика: Наука и образование. 2011. Т. 10. С. 30–34.
83. Булатов А. А. Алгебраические методы исследования комбинаторных задач: дис. ... докт. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2008.
84. Zimbiel G. W. Encyclopedia of Types of Algebras 2010. arXiv:1101.0267v1. 2010.
85. Sudoplatov S. V. Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories // J. Math. Sci. 2010. V. 169. No. 5. P. 680–695.
86. Зыков А. А. Гиперграфы // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29. № 6(180). С. 89–154.
87. Соломатин Д. В. Конечно порожденные полугруппы с одним определяющим соотношением и тождеством, допускающие планарный граф Кэли // Математика и информатика: Наука и образование. 2007. Т. 6. С. 42–48.
88. Соломатин Д. В. Ординальные суммы прямоугольных полугрупп, допускающие планарные графы Кэли // Математика и информатика: Наука и образование. 2008. Т. 7. С. 33–41.
89. Соломатин Д. В. Планарные многообразия полугрупп // Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т. 12. С. 232–247.
90. Соломатин Д. В. Планарные многообразия коммутативных полугрупп // Вестник Омского университета. 2015. Т. 2. С. 17–22.
91. Соломатин Д. В. Ранги планарности многообразий коммутативных полугрупп // Прикладная дискретная математика. 2016. № 4(34). С. 50–64.
92. Соломатин Д. В. О рангах планарности многообразий полугрупп идемпотентов, нильполугрупп и полугрупп с перестановочным тождеством // Вестник Омского университета. 2017. Т. 4. № 86. С. 11–21.
93. Соломатин Д. В. О рангах планарности многообразий нильполугрупп // Вестник Омского университета. 2019. Т. 2. № 24. С. 17–22.
94. Соломатин Д. В. Ранги планарности многообразий полугрупп // Вестник Омского университета. 2019. Т. 4. С. 9–15.
95. Hopcroft J. and Tarjan R. Efficient planarity testing // J. ACM. 1974. V. 21. No. 4. P. 549–568.
96. Chiba N., Yamanouchi T., and Nishizeki T. Linear algorithms for convex drawings of planar graphs // J. A. Bondy, U. S. R. Murty (eds.). Progress in Graph Theory. London: Academic Press, P. 153–173.
97. Head T. J. The varieties of commutative monoids // Nieuw Archief voor Wiskunde. 1968. V. 3. No. 16. P. 203–206.
98. Соломатин Д. В. Ранги планарности многообразий полугрупп, заданных тождеством $x \approx x^n$ // Вестник Омского Университета. 2020. Т. 3. № 25. С. 13–17.
99. Evans T. The lattice of semigroup varieties // Semigroup Forum. 1971. V. 2. P. 1–43.
100. Arthan R. and Oliva P. Studying algebraic structures using Prover9 and Mace4 // G. Hanna et al. (eds.) Proof Technology in Mathematics Research and Teaching. Ch. 5. Springer, 2020.
101. Fennimore C. All varieties of bands // Semigroup Forum. 1970. V. 1. P. 172–179.
102. Green J. A. and Rees D. On semigroups in which $x^r = x$, Proc. Cambridge Philos. Soc. 1952. V. 48. P. 35–40.

103. *Howie J. M.* Fundamentals of Semigroup Theory. London Math. Society Monographs. New Series, 12. Oxford Science Publ. N.Y.: Clarendon Press, Oxford University Press, 1995. 351 p.
104. *Preston G. and Clifford A.* The algebraic theory of semigroups // Amer. Math. Soc. 1961. V. 1. No. 1. P. 12–31.
105. *Ljapin E. S.* Semigroups. Amer. Math. Soc. 4th ed. 1963. 519 p.
106. *Соломатин Д. В.* Теория представлений: учеб. пособие. Омск: ОмГПУ, 2015. 64 с.
107. *Гуревич Ю. Ш.* Проблема равенства слов для некоторых классов полугрупп // Алгебра и логика. 1966. Т. 5. № 5. С. 25–35.
108. *De Verdière Y. C.* Sur un Nouvel Invariant des Graphes et un Critère de Planarité // J. Combinat. Theory. Ser. B. 1990. No. 50. P. 11–21.
109. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. 5-е изд. М., Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
110. *Fedorov F. M.* On the theory of infinite systems of linear algebraic equations // TWMS J. Pure Appl. Math. 2015. V. 2. No. 6. P. 202–212.
111. *Мартынов Л. М.* Полнота, редуцированность, примарность и чистота для алгебр: результаты и проблемы // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 181–241.

REFERENCES

1. *Druţu C. and Kapovich M.* Geometric Group Theory. Colloquium Publ., AMS, 2018, vol. 63. 819 p.
2. *McCammond J., Rhodes J., and Steinberg B.* Geometric Semigroup Theory. arXiv:1104.2301 [math.GR], 2011.
3. *Cayley A.* The theory of groups: Graphical representation. Amer. J. Math., 1878, vol. 1, pp. 174–176.
4. *Cooperman G., Finkelstein L., and Sarawagi N.* Applications of Cayley graphs // LNCS, 1991, vol. 508, pp. 367–378.
5. *Horwitz J. A.* Applications of Cayley Graphs, Bilinearity, and Higher-Order Residues to Cryptology. Diss. for the Degree of Doctor of Philosophy. Stanford, 2004. 100 p.
6. *Zémor G.* Hash functions and Cayley graphs. Des. Codes Cryptogr., 1994, vol. 4, pp. 381–394.
7. *Tripi A.* Cayley Graphs of Groups and Their Applications. MSU Graduate Theses, 2017, vol. 3133. 47 p.
8. *Sosnovski B.* Cayley Graphs of Semigroups and Applications to Hashing. Diss. for the Degree of Doctor of Philosophy, City University of New York, 2016. 111 p.
9. *Maschke H.* The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space, by Cayley's color diagrams. Amer. J. Math., 1896, vol. 18, no. 2, pp. 156–194.
10. *Belenkova Zh. T. and Roman'kov V. A.* Regulyarnye grafy Keli. [Regular Cayley graphs]. Dep. VINITI, 1997, no. 802–V97. (in Russian)
11. *Belenkova Zh. T. and Roman'kov V. A.* Ploskie grafy Keli konechnykh grupp [Plane Cayley graphs of finite groups]. Preprint, Omsk, OmsU, 1997. 8 p. (in Russian)
12. *Belenkova Zh. T.* Vse ploskie grafy Keli gruppy S_4 [All plane Cayley graphs of the group S_4]. Preprint, Omsk, OmsU, 1997. 12 p. (in Russian)
13. *Belenkova Zh. T.* Ploskie grafy Keli [Plane Cayley graphs]. PhD Thesis, Omsk, OmsU, 1998. (in Russian)
14. *Droms C., Servatius B., and Servatius H.* Connectivity and planarity of Cayley graphs. Beiträge zur Algebra und Geometrie, 1998, vol. 39, no. 2, pp. 269–282.
15. *Droms C.* Infinite-ended groups with planar Cayley graphs. J. Group Theory, 2006, vol. 9, no. 4, pp. 487–496.

16. *Dunwoody M. J.* Planar Graphs and Covers. <https://arxiv.org/abs/0708.0920>, 2009.
17. *Georgakopoulos A.* Characterising planar Cayley graphs and Cayley complexes in terms of group presentations. *Europ. J. Combinatorics*, 2014, vol. 36, pp. 282–293.
18. *Georgakopoulos A.* The planar cubic Cayley graphs of connectivity 2. *Europ. J. Combinatorics*, 2017, vol. 64, pp. 152–169.
19. *Georgakopoulos A.* The planar cubic Cayley graphs. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 2017, vol. 250, no. 1190. 82 p.
20. *Georgakopoulos A. and Hamann M.* The planar Cayley graphs are effectively enumerable I: Consistently planar graphs. *Combinatorica*, 2019, vol. 39, no. 5, pp. 993–1019.
21. *Georgakopoulos A. and Hamann M.* The Planar Cayley Graphs are Effectively Enumerable II. <https://arxiv.org/abs/1901.00347>, 2019.
22. *Varghese O.* Planarity of Cayley graphs of graph products of groups. *Discrete Math.*, 2019, vol. 342, no. 6, pp. 1812–1819.
23. *Georgakopoulos A.* On planar Cayley graphs and Kleinian groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2020, vol. 373, no. 7, pp. 4649–4684.
24. *Paalman A. B.* Topological representation of semigroups. *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra*, Praha, Academia Publishing House AS CR, 1967, pp. 276–282.
25. *Bosák J.* The graphs of semigroups. *Proc. Symp. “Theory of Graphs and its Applications”*, Praha, 1964, pp. 119–125.
26. *Zelinka B.* The diameter of the graph of the system of proper semigroups of a commutative semigroup. *Mat.-Fyz. Cas. SAV*, 1965, vol. 15, pp. 143–144.
27. *Zelinka B.* Graphs of semigroups. *Cas. Pest. Mat.*, 1981, pp. 407–408.
28. *Knauer K. and Knauer U.* Toroidal embeddings of right groups. *Thai J. Math.*, 2010, vol. 8, no. 3, pp. 483–490.
29. *Knauer K. and Knauer U.* On planar right groups. *Semigroup Forum*, 2016, vol. 92, no. 1, pp. 142–157.
30. <http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=12900>.
31. *Adian S. I.* Algoritmicheskaya nerazreshimost’ problem raspoznavaniya nekotorykh svoystv grupp [Algorithmic unsolvability of problems of recognition of certain properties of groups]. *Dokl. USSR Academy of Sciences*, 1955, vol. 103, no. 4, pp. 533–535. (in Russian)
32. *Rabin M. O.* Recursive unsolvability of group theoretic problems. *Ann. of Math.*, 1958, vol. 67, pp. 172–174.
33. *Zieschang H., Vogt E., and Coldewey H. D.* Surfaces and Planar Discontinuous Groups. Berlin, Springer Verlag, 1980. 336 p.
34. *Margolis S. W. and Meakin J. C.* E -unitary inverse monoids and the Cayley graph of a group representation. *J. Pure Appl. Algebra*, 1989, vol. 58, pp. 45–76.
35. *Kelarev A. V. and Quinn S. J.* On complete and bipartite Cayley graphs. *Arbeitstagung Allgemeine Algebra 62*, June 14–17, 2001. Abstracts. Linz, Austria, 2001, pp. 25.
36. *Kelarev A. V. and Praeger C. E.* On transitive Cayley graphs of groups and semigroups. *Europ. J. Combinatorics*, 2003, vol. 24, pp. 59–72.
37. *Kelarev A. V. and Quinn S. J.* A combinatorial property and Cayley graphs of semigroups. *Semigroup Forum*, 2002, vol. 66, no. 1, pp. 89–96.
38. *Kelarev A. V.* On undirected Cayley graphs. *Australasian J. Combinatorics*, 2002, vol. 25, pp. 73–78.
39. *Kelarev A. V.* On Cayley graphs of inverse semigroups. *Semigroup Forum*, 2006, vol. 72, pp. 411–418.

40. *Khosravi Be. and Khosravi Ba.* On Cayley graphs of semilattices of semigroups. *Semigroup Forum*, 2013, vol. 86, pp. 114–132.
41. *Khosravi Be. and Khosravi Ba.* A characterization of Cayley graphs of Brandt semigroups. *Bull. Malaysian Math. Sci. Soc.*, 2012, vol. 2, no. 2, pp. 12–18.
42. *Khosravi B.* On Cayley graphs of left groups. *Houston J. Math.*, 2009, vol. 35, no. 3, pp. 745–755.
43. *Fan S. and Zeng Y.* On Cayley graphs of Bands, *Semigroup Forum*, 2007, vol. 74, pp. 99–105.
44. *Makarjev A. L.* O polugruppakh idempotentov s atsiklicheskimi grafami Keli [About semigroups of idempotents with Cayley acyclic graphs]. *Mathematics and Computer Science: Science and Education*, 2007, vol. 6, pp. 26–34. (in Russian)
45. *Solomatin D. V.* Stroenie polugrupp, dopuskayushchikh vneshneplanarnye grafy Keli [Semigroups with outerplanar Cayley graphs]. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2011, vol. 8, pp. 191–212. (in Russian)
46. *Makar'ev A. L.* Nil'potentnye polugruppy, osnova grafa Keli kotorykh yavlyaetsya derevom [Nilpotent semigroups whose Cayley graph base is a tree]. *Mathematics and Computer Science: Science and Education*, 2006, vol. 5, pp. 40–46. (in Russian)
47. *Makar'ev A. L.* Polureshetki s atsiklicheskimi grafami Keli [Semilattices with Cayley acyclic graphs]. *Mathematics and Computer Science: Science and Education*, 2008, vol. 7, pp. 28–33. (in Russian)
48. *Makar'ev A. L.* Ordinal'nye summy polugrupp s atsiklicheskimi grafami Keli [Ordinal sums of semigroups with Cayley acyclic graphs]. *Herald of Omsk University*, 2008, vol. 4, pp. 12–17. (in Russian)
49. *Martynov L. M. and Solomatin D. V.* Polugruppy vychetov s tsiklicheskimi gruppami obratimyykh elementov, dopuskayushchie planarnye grafy Keli [Semigroups of residues with cyclic groups of invertible elements admitting planar Cayley graphs]. *Herald of Omsk University*, 2012, vol. 2, pp. 57–62. (in Russian)
50. *Martynov P. O. and Solomatin D. V.* Konechnye svobodnye kommutativnye polugruppy i polugruppy s nulem, dopuskayushchie obobshchennye vneshneplanarnye grafy Keli [Finite free commutative semigroups and semigroups with zero how admitting generalized outerplanar Cayley graphs]. *Herald of Omsk University*, 2014, vol. 3, pp. 22–26. (in Russian)
51. *Martynov P. O.* Konechnye svobodnye kommutativnye monoidy, dopuskayushchie obobshchenno vneshneplanarnye grafy Keli [Finite free commutative monoids who admitted generalized outerplanar Cayley graphs]. *Herald of Omsk University*, 2015, vol. 4, pp. 6–9. (in Russian)
52. *Martynov P. O.* Rassypchatye polugruppy, dopuskayushchie obobshchennye vneshneplanarnye grafy Keli [Crisp semigroups admit generalized outerplanar Cayley graphs]. *Herald of Omsk University*, 2018, vol. 3, pp. 6–9. (in Russian)
53. *Khosravi B.* Comparison of Cayley graphs of semigroups and Cayley graphs of groups. *Book of Abstracts Caucasian Math. Conf. CMC II, Turkish Math. Society*, 2007, pp. 18–19.
54. *Molchanov V. A.* A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols. *Semigroup Forum*, 2011, vol. 82, pp. 1–9.
55. *Zhang X.* Clifford semigroups with genus zero. *Proc. Intern. Conf. Semigroups, Acts and Categories with Applications to Graphs. University of Tartu, June 27–30, 2007. Tartu, EMS*, 2008, pp. 151–160.
56. *Shevrin L. N.* Polugruppy [Semigroups]. *Algebra* (ed. L. A. Skorniyakov), Ch. IV, Moscow, Nauka Publ., 1991, vol. 2, pp. 11–191. (in Russian)
57. *Emelichev V. A., Melnikov O. I., Sarvanov V. I., and Tyshkevich R. I.* Lekcii po eorii grafov [Lectures on Graph Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 384 p. (in Russian)

58. *Martynova T. A.* The groupoid of 0-reduced varieties of Semigroups. *Semigroup Forum*, 1983, vol. 26, pp. 249–274.
59. *Preston G. and Clifford A.* The Algebraic Theory of Semigroups. *Amer. Math. Soc.*, 1964, vol. 1, no. 7, pp. 169–174.
60. *Solomatin D. V.* Rangi planarnosti mnogoobraziy kommutativnykh monoidov [Planarity ranks of the varieties of commutative monoids]. *Herald of Omsk University*, 2012, vol. 4, pp. 41–45. (in Russian)
61. *Solomatin D. V.* O dopustimosti nekotorykh grafov v kachestve grafov Keli polugrupp [On the admissibility of some graphs as Cayley graphs of semigroups]. *Mathematics and Computer Science: Science and Education*, 2004, vol. 4, pp. 32–34. (in Russian)
62. *Lempel A., Even S., and Cederbaum I.* An algorithm for planarity testing of graphs. *Proc. Int. Symp. Theory Graphs*, New York, 1967, pp. 215–232.
63. *Klein P. N. and Reif J. H.* An efficient parallel algorithm for planarity. *J. Computer System Sci.*, 1988, vol. 37, pp. 190–246.
64. *Bader D. A. and Sreshta S. A.* New Parallel Algorithm for Planarity Testing. <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.65.2914&rep=rep1&type=pdf>, 2003.
65. *Solomatin D. V.* O kriteriyakh planarnosti grafov Keli polugrupp [About the criteria of planarity for Cayley graphs of semigroups]. *Mathematics and Computer Science: Science and Education*, 2010, vol. 9, pp. 44–46. (in Russian)
66. *Solomatin D. V.* Stokhasticheskiy algoritm poiska podgrafa, gomeomorfnoyu zadannomu [Stochastic algorithm for search a homeomorphic subgraph]. *Conference paper: Stochastic Models in Biology and Limit Algebras (Omsk, 2–7 August 2010)*, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 2010, pp. 98–100. (in Russian)
67. *Kambites M.* The loop problem for Rees matrix semigroups. *Semigroup Forum*, 2008, vol. 76, no. 2, pp. 204–216.
68. *Melikhov A. N., Bershtein L. S., and Kureichik V. M.* *Primenenie grafov dlya proektirovaniya diskretnykh ustroystv* [Application of Graphs in the Design of Discrete Devices]. Moscow, Nauka, 1974. 304 p. (in Russian)
69. *Levinson H.* On the genera of graphs of group presentations. *Ann. New York Acad. Sci.*, 1970, vol. 175, pp. 277–284.
70. *Solomatin D. V.* Svobodnye chastichno kommutativnye n -veernye polureshetki s planarnymi grafami Keli [Free partially commutative semigroups and the n -fan semilattices with planar Cayley graphs]. *Mathematics and Computer Science: Science and Education*, 2009, vol. 8, pp. 36–39. (in Russian)
71. *Solomatin D. V.* Svobodnye chastichno kommutativnye nil’potentnye polugruppy s planarnymi grafami Keli [Free partially commutative nilpotent semigroups with planar Cayley graphs]. *Herald of Omsk University*, 2014, vol. 3, pp. 28–36. (in Russian)
72. *Solomatin D. V.* Konechnye svobodnye kommutativnye polugruppy s planarnymi grafami Keli [Finite free commutative semigroups with planar Cayley graphs]. *Mathematics and Computer Science: Science and Education*, 2003, vol. 3, pp. 32–38. (in Russian)
73. *Solomatin D. V.* Konechnye svobodnye kommutativnye monoidy, dopuskayushchie planarnyy graf Keli [Finite free commutative monoids admitting planar Cayley graph]. *Herald of Omsk University*, 2005, vol. 4, pp. 36–38. (in Russian)
74. *Birkhoff G.* On the structure of abstract algebras. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1935, vol. 31, pp. 433–454.

75. *Solomatin D. V.* Pryamye proizvedeniya tsiklicheskikh polugrupp, dopuskayushchie planarnyy graf Keli [Direct products of cyclic semigroups admitting a planar Cayley graph]. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2006, vol. 3, pp. 238–252. (in Russian)
76. *Solomatin D. V.* Pryamye proizvedeniya tsiklicheskikh monoidov i polugrupp s nulem, dopuskayushchie planarnye grafy Keli [Direct products of cyclic monoids and semigroups with zero admitting planar Cayley graphs]. *Mathematics and Computer Science: Science and Education*, 2006, vol. 5, pp. 51–64. (in Russian)
77. *Solomatin D. V.* Kriteriy planarnosti dlya grafov Keli 0-pryamykh ob"edineniy nil'potentnykh polugrupp [A planarity criterion for Cayley graphs of 0-direct unions of nilpotent semigroups]. *Conf. paper: Maltsev Meeting 2010 (Novosibirsk, May 2–6, 2010)*, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 2010, pp. 144. (in Russian)
78. *Solomatin D. V.* Rassypchatye polugruppy s planarnymi grafami Keli [Crisp semigroups with planar Cayley graphs]. *Herald of Volgograd State Pedagogical University*, 2005, vol. 4, pp. 27–31. (in Russian)
79. *Polyakova L. Yu.* Rezol'venty dlya svobodnykh chastichno kommutativnykh monoidov [Resolutions of free partially commutative monoids]. *Siberian Math. J.*, 2007, vol. 48, pp. 1295–1304. (in Russian)
80. *Diekert V. and Métivier Y.* Partial commutation and traces. *Handbook of Formal Languages*. Berlin, Springer Verlag, 1997, vol. 3, pp. 457–533.
81. *Sedláček J.* On a generalization of outerplanar graphs. *Časopis Pěst. Mat.*, 1988, vol. 2, no. 113, pp. 213–218. (in Czech)
82. *Solomatin D. V.* Planarnye gipergrafy mul'tiplikativnykh polugrupp vychetov [Planar hypergraphs of the multiplicative semigroup of residues]. *Mathematics and Computer Science: Science and Education*, 2011, vol. 10, pp. 30–34. (in Russian)
83. *Bulatov A. A.* Algebraicheskie metody issledovaniya kombinatornykh zadach [Algebraic methods in the study of combinatorial problems]. *Diss. of the Doctor Phys.-Mat. Sci.*, Ekaterinburg, 2008. (in Russian)
84. *Zinbiel G. W.* Encyclopedia of Types of Algebras. arXiv:1101.0267v1, 2010.
85. *Sudoplatov S. V.* Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories. *J. Math. Sci.*, 2010, vol. 169, no. 5, pp. 680–695.
86. *Zykov A. A.* Gipergrafy [Hypergraphs]. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1974, vol. 29, no. 6(180), pp. 89–154. (in Russian)
87. *Solomatin D. V.* Konechno porozhdennye polugruppy s odnim opredelyayushchim sootnosheniem i tozhdestvom, dopuskayushchie planarnyy graf Keli [Finitely generated semigroups with one defining relation and identity admitting planar Cayley graph]. *Mathematics and Computer Science: Science and Education*, 2007, vol. 6, pp. 42–48. (in Russian)
88. *Solomatin D. V.* Ordinal'nye summy pryamougol'nykh polugrupp, dopuskayushchie planarnye grafy Keli [Ordinal sums of rectangular semigroups admitting a planar Cayley graph]. *Mathematics and Computer Science: Science and Education*, 2008, vol. 7, pp. 33–41. (in Russian)
89. *Solomatin D. V.* Planarnye mnogoobraziya polugrupp [Planar varieties of semigroups]. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2015, vol. 12, pp. 232–247. (in Russian)
90. *Solomatin D. V.* Planarnye mnogoobraziya kommutativnykh polugrupp [Planar varieties of commutative semigroups]. *Herald of Omsk University*, 2015, vol. 2, pp. 17–22. (in Russian)
91. *Solomatin D. V.* Rangi planarnosti mnogoobraziy kommutativnykh polugrupp [The ranks of planarity for varieties of commutative semigroups]. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, 2016, no. 4(34), pp. 50–64. (in Russian)

92. *Solomatin D. V.* O rangakh planarnosti mnogoobraznykh polugrupp idempotentov, nil'-polugrupp i polugrupp s perestanochnym tozhdestvom [On ranks of the planarity of varieties of all idempotent semigroups, nilsemigroups, and semigroups with the permutation identity]. Herald of Omsk University, 2017, vol. 4, no. 86, pp. 11–21. (in Russian)
93. *Solomatin D. V.* O rangakh planarnosti mnogoobraznykh nil'-polugrupp [On ranks of planarity of nil-semigroups varieties]. Herald of Omsk University, 2019, vol. 2, no. 24, pp. 17–22. (in Russian)
94. *Solomatin D. V.* Rangi planarnosti mnogoobraznykh polugrupp [The ranks of the planarity for varieties of semigroups]. Herald of Omsk University, 2019, vol. 4, pp. 9–15. (in Russian)
95. *Hopcroft J. and Tarjan R.* Efficient Planarity Testing, J. ACM, 1974, vol. 21, no. 4, pp. 549–568.
96. *Chiba N., Yamanouchi T., and Nishizeki T.* Linear algorithms for convex drawings of planar graphs. J. A. Bondy, U. S. R. Murty (eds.). Progress in Graph Theory. London, Academic Press, 1984, pp. 153–173.
97. *Head T. J.* The varieties of commutative monoids. Nieuw Archief voor Wiskunde, 1968, vol. 3, no. 16, pp. 203–206.
98. *Solomatin D. V.* Rangi planarnosti mnogoobraznykh polugrupp, zadannykh tozhdestvom $x \approx x^n$ [Ranks of planarity for the variety of semigroups defined by the identity $x \approx x^n$]. Herald of Omsk University, 2020, vol. 25, no. 3, pp. 13–17. (in Russian)
99. *Evans T.* The lattice of semigroup varieties. Semigroup Forum, 1971, vol. 2, pp. 1–43.
100. *Arthan R. and Oliva P.* Studying algebraic structures using Prover9 and Mace4. G. Hanna et al. (eds.) Proof Technology in Mathematics Research and Teaching, Ch. 5, Springer, 2020.
101. *Fennemore C.* All varieties of bands. Semigroup Forum, 1970, vol. 1, pp. 172–179.
102. *Green J. A. and Rees D.* On semigroups in which $x^r = x$. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1952, vol. 48, pp. 35–40.
103. *Howie J. M.* Fundamentals of Semigroup Theory. London Math. Society Monographs, New Series, 12, Oxford Science Publ., N.Y., Clarendon Press, Oxford University Press, 1995. 351 p.
104. *Preston G. and Clifford A.* The Algebraic Theory of Semigroups. Amer. Math. Soc., 1961, vol. 1, no. 1, pp. 12–31.
105. *Ljapin E. S.* Semigroups. Amer. Math. Soc., 4th ed., 1963. 519 p.
106. *Solomatin D. V.* Teoriya predstavleniy [Representation Theory]. Tutorial. Omsk, OmSPU Publ., 2015. 64 p. (in Russian)
107. *Gurevich Yu. Sh.* Problema ravenstva slov dlya nekotorykh klassov polugrupp [The word problem for some classes of semigroups]. Algebra and Logic, 1966, vol. 5, no. 5, pp. 25–35. (in Russian)
108. *De Verdière Y. C.* Sur un Nouvel Invariant des Graphes et un Critère de Planarité. J. Combinat. Theory, Ser. B, 1990, no. 50, pp. 11–21.
109. *Kantorovich L. V. and Krylov V. I.* Approximate Methods of Higher Analysis. Noordhoff, Interscience Interscience, 1958. 704 p.
110. *Fedorov F. M.* On the theory of infinite systems of linear algebraic equations. TWMS J. Pure Appl. Math., 2015, vol. 2, no. 6, pp. 202–212.
111. *Martynov L. M.* Polnota, redutsirovannost', primarnost' i chistota dlya algebr: rezul'taty i problemy [Completeness, reducibility, primarity and purity for algebras: results and problems]. Sib. Elektron. Mat. Izv., 2016, vol. 13, pp. 181–241. (in Russian)