ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.246.5, 519.218.5 DOI 10.17223/20710410/54/4

ОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЦИКЛИЧЕСКОГО ОРГРАФА В СИЛЬНОСВЯЗНЫЙ

Г. Ш. Цициашвили*, М. А. Осипова*,**

**Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток, Россия*

***Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия*

E-mail: guram@iam.dvo.ru, mao1975@list.ru

Для двудольного орграфа G, в котором все дуги выходят из первой доли во вторую, решена задача нахождения минимального набора дуг, дополнение которых преобразует его в сильносвязный орграф. Доказано, что минимальное число дополнительных дуг, преобразующих двудольный орграф G в сильносвязный, равно максимуму из числа вершин первой и второй долей. Построен алгоритм определения минимального набора дополнительных дуг, преобразующих данный орграф в сильносвязный. Этот алгоритм основан на выделении минимального рёберного покрытия, как совокупности несвязанных между собой звезд в орграфе G, и на построении дуг, соединяющих эти звезды. Полученный результат использован для нахождения минимального набора дуг, преобразующих произвольный ациклический орграф в сильносвязный орграф путём выделения рёбер, соединяющих звёзды в минимальном рёберном покрытии. Данная задача возникла при анализе биотехнологических решений, повышающих стабильность функционирования белковых сетей за счёт введения в них обратных связей.

Ключевые слова: *ациклический орграф, двудольный орграф, сильная связность, гамильтонов цикл, обратная связь, минимальное рёберное покрытие.*

OPTIMAL ALGORITHM FOR CONVERTING AN ACYCLIC DIGRAPH TO A CLUSTER

G. Sh. Tsitsiashvili*, M. A. Osipova*,**

**Institute for Applied Mathematics, FEB RAS, Vladivostok, Russia*

***Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*

A bipartite digraph $\widehat{G}$ with edges from the first part V_1 to the second part V_2 is considered. The minimum edge cover in the digraph $\widehat{G}$ consists of a set of unrelated stars $G_1^1, \ldots, G_1^M$ with a root in V_1 and stars $G_2^1, \ldots, G_2^N$ with a root in V_2. Denote by m the number of leaves in the stars $G_1^1, \ldots, G_1^M$ and by n the number of leaves in the stars $G_2^1, \ldots, G_2^N$ and put $p(\widehat{G})$ the minimum number of additional edges, the introduction of which into the digraph $\widehat{G}$ transforms it into a strongly connected digraph. It is proved that: 1) $p(\widehat{G}) = \max(m+N, n+M)$; 2) $p(\widehat{G}) = \max(|V_1|, |V_2|)$; 3) $p(\mathcal{G}) = \max(|\mathcal{V}_1|, |\mathcal{V}_2|)$ for an acyclic digraph $\mathcal{G}$, where $\mathcal{V}_1$ is the set of vertices of $\mathcal{G}$, from which the arcs only leave, $\mathcal{V}_2$ — the set of vertices of $\mathcal{G}$, into which the arcs only enter. Algorithms for determining the minimum set of additional edges have been proposed. They are based on finding the minimum edge coverage in a bipartite graph and connecting unconnected stars with the minimum number of edges.

Keywords: *acyclic digraph, bipartite digraph, cluster, Hamiltonian cycle, feedback, minimal edge cover.*

Введение

В [1, 2] построен алгоритм выделения в орграфе компонент сильной связности и преобразования исходного орграфа в ациклический орграф, вершинами которого являются эти компоненты. В настоящей работе рассматривается в определённом смысле обратная задача добавления к ациклическому орграфу минимального числа дуг, превращающих его в сильносвязный орграф. Эта процедура нужна, чтобы включить все вершины ациклического орграфа, моделирующего белковую сеть, в систему обратных связей, которые стабилизируют функционирование этой сети. Такая постановка задачи предложена авторам биотехнологом, чл.-корр. РАН В. П. Булгаковым. Авторы подобрали математический эквивалент решения этой задачи в терминах теории графов, которое планируется использовать в дальнейших совместных исследованиях.

Предположим, что сложная система, например белковая сеть, представима ациклическим орграфом $\mathcal{G}$ без петель и изолированных вершин. Обозначим V_1 множество вершин, из которых дуги только выходят, а V_2 — множество вершин, в которые дуги только входят. Построим двудольный орграф G, в котором V_1 — множество вершин первой доли, а V_2 — второй, и вершина $v_1 \in V_1$ соединена дугой с вершиной $v_2 \in V_2$, если между ними в ациклическом орграфе $\mathcal{G}$ существует путь.

Преобразуем двудольный орграф G в неориентированный удалением ориентации рёбер и найдем в нём минимальное рёберное покрытие [3–5]. Для этого алгоритмом увеличивающих чередующихся путей находим максимальное паросочетание, которое можно преобразовать в минимальное рёберное покрытие, компонентами связности которого являются графы-звёзды (все дуги выходят из одной вершины или входят в одну вершину, называемую корнем). В минимальном рёберном покрытии восстановим ориентацию рёбер и обозначим полученный двудольный орграф $\widehat{G}$.

Основным результатом работы является алгоритм построения минимального набора дополнительных дуг, превращающих $\widehat{G}$ в сильносвязный орграф. Доказано, что число дуг в этом минимальном наборе $p(\widehat{G}) = \max(|V_1|, |V_2|)$. Данное равенство распространяется на двудольный орграф G с долями V_1, V_2 и на ациклический орграф $\mathcal{G}$.

1. Основные результаты

Рассмотрим двудольный орграф $\widehat{G}$, состоящий из совокупности несвязанных между собой M звёзд $G_1^1, \ldots, G_1^M$ с корнем в первой доле и N звёзд $G_2^1, \ldots, G_2^N$ с корнем во второй доле. Обозначим m количество листьев в звёздах $G_1^1, \ldots, G_1^M$ и n — в звёздах $G_2^1, \ldots, G_2^N$. На рис. 1 приведен пример орграфа $\widehat{G}$, состоящего из звезд G_1^1, G_1^2, G_2^1, G_2^2 в случае $m = n = 6$.

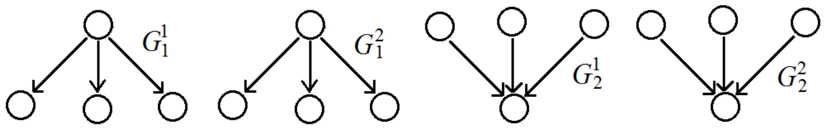

Рис. 1. Несвязанные звёзды G_1^1, G_1^2, G_2^1, G_2^2, $M = N = 2$, $m = n = 6$

Теорема 1. Справедливо равенство $p(\widehat{G}) = \max(m+N, n+M)$.

Доказательство. При преобразовании орграфа $\widehat{G}$ число дополнительных дуг, входящих в корни звёзд $G_1^1, \ldots, G_1^M$, должно быть не меньше M, а входящих в листья звёзд $G_2^1, \ldots, G_2^N$ — не меньше n. Число дополнительных дуг, выходящих из листьев звёзд $G_1^1, \ldots, G_1^M$, должно быть не меньше m, а выходящих из корней звёзд $G_2^1, \ldots, G_2^N$ — не меньше N. Поэтому число дополнительных дуг, входящих в вершины первой доли, не меньше чем $M+n$, а выходящих из вершин второй доли — не меньше чем $m+N$. Дополнительные входящие и выходящие дуги могут совпадать. Поэтому минимальное число дополнительных дуг $p(\widehat{G}) \geqslant \max(m+N, n+M)$. Докажем, что $p(\widehat{G}) = \max(m+N, n+M)$.

Рассмотрим сначала случай, когда орграф $\widehat{G}$ состоит только из звёзд $G_1^1, \ldots, G_1^M$ или только из звёзд $G_2^1, \ldots, G_2^N$. Дополним звёзды $G_1^1, \ldots, G_1^M$ дугами, последовательно соединяющими их листья. Из последнего листа звезды G_1^k проведём дополнительную дугу в корень G_1^{k+1}, $k = 1, \ldots, M-1$, а из последнего листа звезды G_1^M — в корень G_1^1. В звёздах $G_1^1, \ldots, G_1^M$ с дополнительными дугами укажем гамильтонов цикл. Он начинается в корне звезды G_1^1, проходит последовательно через все её листья и направляется в корень G_1^2 и т. д.; из последнего листа звезды G_1^M — в корень G_1^1. В результате преобразуем звёзды $G_1^1, \ldots, G_1^M$ в сильносвязный орграф с числом дополнительных дуг $m = \max(m+0, 0+M)$ (рис. 2).

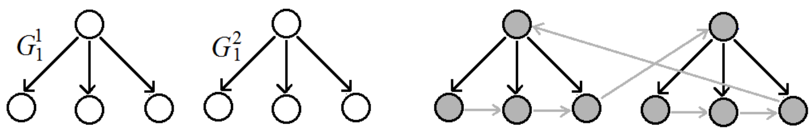

Рис. 2. Сильносвязный орграф (справа), построенный из звёзд G_1^1, G_1^2 (слева)

Аналогично орграф $\widehat{G}$, состоящий только из звёзд $G_2^1, \ldots, G_2^N$, дополним дугами, последовательно соединяющими их листья. Кроме того, из корня звезды G_2^k проведём дополнительную дугу в первый лист G_2^{k+1}, $k = 1, \ldots, N-1$, а из корня звезды G_2^N — в первый лист G_2^1. В звёздах $G_2^1, \ldots, G_2^N$ с дополнительными дугами укажем гамильтонов цикл. Он начинается в первом листе звезды G_2^1, проходит последовательно через все её листья и направляется в корень, затем идёт в первый лист звезды G_2^2, и т. д. Из корня звезды G_2^N путь продолжается в первый лист G_2^1. В результате преобразуем звёзды $G_2^1, \ldots, G_2^N$ в сильносвязный орграф с числом дополнительных дуг $n = \max(0+N, n+0)$ (рис. 3).

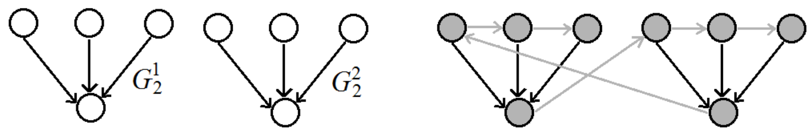

Рис. 3. Сильносвязный орграф, построенный из звёзд G_2^1, G_2^2

Рассмотрим теперь случай, когда $MN > 0$. Обозначим W_1 множество всех вершин в звёздах $G_1^1, \ldots, G_1^M$ и W_2 — в звёздах $G_2^1, \ldots, G_2^N$. Введём дополнительную дугу из корня G_2^N в какой-либо лист звезды G_2^{N-1}, дугу из корня G_2^{N-1} — в какой-либо лист звезды G_2^{N-2} и т. д., дугу из корня G_2^1 — в корень G_1^M, дугу из какого-либо листа G_1^M — в корень G_1^{M-1}, дугу из какого-либо листа G_1^{M-1} — в корень G_1^{M-2} и т. д., дугу из какого-либо листа G_1^2 — в корень G_1^1. Назовём введённые дуги и инцидентные им вершины помеченными (на рис. 4 выделены серым цветом). Очевидно, что из любой помеченной, а значит, и из любой вершины звезды набора $G_2^1, \ldots, G_2^N$ существует путь в любую вершину звезды набора $G_1^1, \ldots, G_1^M$. Будем это утверждение обозначать $W_2 \Rightarrow W_1$.

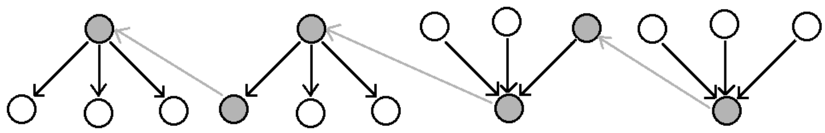

Рис. 4. Введение $M + N - 1$ дополнительных дуг

Число помеченных дуг, соединяющих вершины звёзд $G_1^1, \ldots, G_1^M$, равно $M-1$, а дуг, соединяющих вершины звёзд $G_2^1, \ldots, G_2^N$, равно $N - 1$. Тогда общее число помеченных дуг с учётом дуги из G_2^1 в G_1^M равно $M - 1 + N - 1 + 1 = M + N - 1$.

Общее число непомеченных вершин в звёздах $G_1^1, \ldots, G_1^M$ равно $(m - (M - 1))$, в звёздах $G_2^1, \ldots, G_2^N$ их $(n-(N-1))$. Из каждой непомеченной вершины множества W_1 проведём дополнительную дугу в какую-либо непомеченную вершину множества W_2 так, чтобы в каждую непомеченную вершину множества W_2 входила дуга из какой-либо вершины множества W_1 (рис. 5). Таким образом, число дополнительно введённых дуг равно $\max(m-(M-1), n-(N-1))$. Следовательно, общее число дополнительных дуг равно $\max(m - (M - 1), n - (N - 1)) + M + N - 1 = \max(m + N, n + M)$.

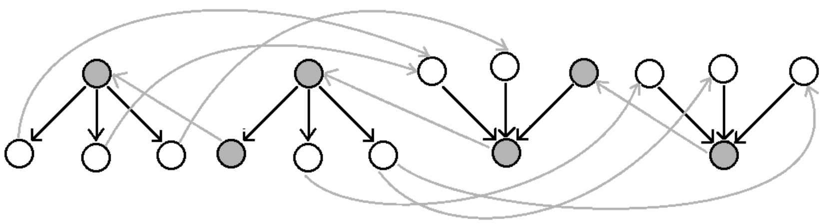

Рис. 5. Введение дополнительных дуг

Докажем, что введение дополнительных дуг в звёзды $G_1^1, \ldots, G_1^M,\ G_2^1, \ldots, G_2^N$ преобразует их в сильносвязный орграф. Возьмём произвольные непомеченные вершины $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$ и проведём путь через непомеченные вершины v_1, v_2', v_1', v_2, где $v_2' \in W_2$ — вершина, соединённая с v_1, а $v_1' \in W_1$ — вершина, соединённая с v_2. Поскольку из любой помеченной вершины множества W_1 можно провести путь в некоторую непомеченную вершину этого множества и из любой непомеченной вершины множества W_2 можно провести дугу в некоторую помеченную вершину этого множества, то можно провести путь из любой вершины множества W_1 в любую вершину множества W_2, т. е. $W_1 \Rightarrow W_2$. Тогда из соотношений $W_1 \Rightarrow W_2$, $W_2 \Rightarrow W_1$ получаем $W_1 \cup W_2 \Rightarrow W_1 \cup W_2$. Следовательно, построенный из звёзд $G_1^1, \ldots, G_1^M,\ G_2^1, \ldots, G_2^N$ орграф с введёнными $\max(m + N, n + M)$ дугами является сильносвязным. ■

Теорема 2. Для двудольного орграфа G, в котором дуги идут только из первой доли V_1 во вторую долю V_2, минимальное число дополнительных дуг, превращающих его в сильносвязный орграф, равно

$$p(G) = \max(|V_1|, |V_2|). \tag{1}$$

Доказательство. Из теоремы 1 следуют равенства $|V_1| = n + M$, $|V_2| = m + N$, $p(\widehat{G}) = \max(|V_1|, |V_2|)$. В свою очередь, из определения $p(G)$ и включения $\widehat{G} \subseteq G$

следует $p(\widehat{G}) \geqslant p(G)$. В то же время очевидно неравенство $p(G) \geqslant \max(|V_1|, |V_2|)$. Тогда выполняется (1). ■

Замечание 1. С помощью алгоритма, приведённого при доказательстве теоремы 1, можно построить минимальный набор из $p(G)$ дополнительных дуг, преобразующих двудольный орграф G в сильносвязный орграф $\widetilde{G}$. Таким образом, дано конструктивное решение задачи определения минимального набора дополняющих дуг в двудольном орграфе G.

Теорема 3. Для произвольного ациклического орграфа $\mathcal{G}$ обозначим V_1 — множество вершин, из которых дуги только выходят, V_2 — множество вершин, в которые дуги только входят. Тогда минимальное число дополнительных дуг, превращающих $\mathcal{G}$ в сильносвязный, определяется равенством

$$p(\mathcal{G}) = \max(|V_1|, |V_2|).$$

Доказательство. Преобразуем орграф $\mathcal{G}$ в двудольный ациклический орграф G с долями V_1 и V_2 и дугами (v_1, v_2), $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, такими, что в орграфе $\mathcal{G}$ существует путь из v_1 в v_2. Дугами из минимального набора $p(G)$ дополнительных дуг соединим в $\mathcal{G}$ вершины множеств V_1, V_2. Получим сильносвязный орграф, в котором число дополнительных дуг равно $p(\mathcal{G}) = \max(|V_1|, |V_2|)$. ■

Авторы благодарят В. П. Булгакова и А. С. Бурундукова за помощь в постановке задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tarjan R.* Dehpt-first search and linear graph algorithms // SIAM J. Comput. 1972. V. 1. No. 2. P. 146–160.
2. *Цициашвили Г. Ш., Осипова М. А., Лосев А. С.* Алгоритмы кластеризации графов // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. 2016. № 1. С. 145–149.
3. *Алексеев В. Е., Захарова Д. В.* Теория графов: учеб. пособие. Н. Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. 119 с.
4. `https://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs_dk.pdf` — Теория графов. 2017.
5. *Cormen T. H., Leiserson Ch. E., Rivest R. L., and Stein Cl.* Introduction to Algorithms. 3rd Ed. Cambridge: MIT Press, 2009. 499 p.

REFERENCES

1. *Tarjan R.* Dehpt-first search and linear graph algorithms. SIAM J. Comput., 1972, vol. 1, no. 2, pp. 146–160.
2. *Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. A., and Losev A. S.* Algoritmy klasterizatsii grafov [Graph clustering algorithms]. Bull. Voronezh State University. Ser. Physics, Math., 2016, no. 1, pp. 145–149. (in Russian)
3. *Alekseev V. E., Zakharova D. V.* Teoriya grafov [Graph Theory], tutorial. N. Novgorod, Nizhny Novgorod State University, 2017. 119 p. (in Russian)
4. `https://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs_dk.pdf` — Graph Theory, 2017.
5. *Cormen T. H., Leiserson Ch. E., Rivest R. L., and Stein Cl.* Introduction to Algorithms, 3rd Ed. Cambridge, MIT Press, 2009. 499 p.