

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2021

№ 74

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Рогаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaev (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бадмаев О.О. Об аддитивной модификации γ -свойства	5
Молчанова Е.А. Асимптотическое моделирование спектральной задачи	12
Старченко А.В., Седнев М.А., Панько С.В. Приближенное аналитическое решение прямой задачи электроимпедансной томографии в неоднородном круге с учетом сопротивления электродов	19
Степанова А.Ю., Тимошенко Е.А. Матричное представление эндоморфизмов примарных групп малых рангов	30
Халилов Э.Г. Исследование приближенного решения некоторых классов поверхностных интегральных уравнений первого рода	43

МЕХАНИКА

Sarode A.P. Temperature aspects of a cuboid crystal in photoacoustic interaction	55
Антонов Е.А. Динамика двухмассового микромеханического гироскопа L - L -типа в режиме вынужденных колебаний	63
Буркин В.В., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н., Касимов В.З., Рогаев К.С., Сидоров А.Д., Степанов Е.Ю. Оценка предельных возможностей выстрела с использованием высокоплотных топлив для повышения дульной скорости снаряда	71
Бурмашева Н.В., Ларина Е.А., Просвиряков Е.Ю. Течение типа Куэтта с учетом идеального скольжения на контакте с твердой поверхностью	79
Кантарбаева А., Моисеева К.М. Особенности распространения пламени в углепропано-воздушной газовой смеси	95
Кусяков А.Ш. Проектирование многостеночных композитных оболочек	103
Мамазова Д.А., Рыльцева К.Е., Шрагер Г.Р. Структура потока и кинематика течения неньютоновской жидкости в трубе с внезапным расширением	113
Родионов А.И., Кравцов С.Р. Теорема об изменении энергий парциальных движений голономных механических, электрических и электромеханических систем с несколькими степенями свободы	127
Хрусталёв А.П., Платов В.В., Кахидзе Н.И., Жуков И.А., Ворожцов А.Б. Влияние наночастиц вольфрама на структуру и механическое поведение алюминиевого сплава 1550 в условиях квазистатического нагружения	141
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	154

CONTENTS

MATHEMATICS

Badmaev O.O. On an additive modification of the γ -property	5
Molchanova E.A. Asymptotic simulation of the spectral problem	12
Starchenko A.V., Sednev M.A., Panko S.V. An approximate analytical solution to the forward inhomogeneous EIT problem on the 2D disk with allowance for the electrode contact impedance	19
Stepanova A.Y., Timoshenko E.A. Matrix representation of endomorphisms of primary groups of small ranks.....	30
Khalilov E.H. Investigation of an approximate solution of some classes of surface integral equations of the first kind.....	43

MECHANICS

Sarode A.P. Temperature aspects of a cuboid crystal in photoacoustic interaction	55
Antonov E.A. Dynamics of an L-L-type two-mass micromechanical gyroscope under forced oscillations.....	63
Burkin V.V., Diachkovskii A.S., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Rogaev K.S., Sidorov A.D., Stepanov E.Yu. Estimation of ultimate capability of a shot with use high-density propellants for an increase in projectile muzzle velocity.....	71
Burmasheva N.V., Larina E.A., Prosviryakov E.Yu. A Couette-type flow with a perfect slip condition on a solid surface.....	79
Kantarbaeva A., Moiseeva K.M. Features of flame propagation in a propane-air gas suspension	95
Kusyakov A.S. Design of multi-wall composite shells.....	103
Mamazova D.A., Ryltseva K.E., Shrager G.R. The structure and kinematics of a non-newtonian fluid flow in a pipe with a sudden expansion.....	113
Rodionov A.I., Kravtsov S.R. Principle of energies of partial motions for mechanical, electrical and electromechanical holonomic systems with multiple degrees of freedom.....	127
Khrustalyov A.P., Platov V.V., Kakhidze N.I., Zhukov I.A., Vorozhtsov A.B. Influence of tungsten nanoparticles on the structure and mechanical behavior of the 1550 aluminum alloy under quasi-static loading	141
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	154

МАТЕМАТИКА

УДК 515.1

DOI 10.17223/19988621/74/1

MSC 54D20

О.О. Бадмаев

ОБ АДДИТИВНОЙ МОДИФИКАЦИИ γ -СВОЙСТВА

Для тихоновских пространств определяется последовательность $(\gamma'_k)_{k < \omega}$ топологических свойств, каждое из которых не сильнее чем классическое свойство Герлича – Надя (γ -свойство), и γ'_{k+1} следует из γ'_k . Изучено поведение индекса k при стандартных топологических операциях. Как один из главных результатов установлено, что в отличие от γ -свойства взятие топологической суммы не выводит за пределы последовательности $(\gamma'_k)_{k < \omega}$, а лишь приводит к сложению индексов. Кроме того, обнаружена связь последовательности $(\gamma'_k)_{k < \omega}$ со свойством Линделёфа, а также некоторые другие факты.

Ключевые слова: ω -покрытие, γ -свойство, свойство Герлича – Надя, γ'_k -свойство, свойство Линделёфа.

Впервые определение γ -свойства топологического пространства X сформулировали Герлич и Надя в статье [1], где установили, в частности, что γ -свойство X характеризует свойство Фреше – Урысона пространства $C_p(X)$. Эта характеристика привела к естественному вопросу, будет ли топологическая сумма $X \oplus Y$ обладать γ -свойством, если оба слагаемых им обладают (см., например, [2, задача П.3.10] или [3, problem 4.4.1]). Позднее Гэлвин и Миллер в предположении Аксиомы Мартина построили пример подмножеств X и Y вещественной прямой $\mathbb{R}$, обладающих γ -свойством, но таких, что $X \oplus Y$ не обладает γ -свойством (см. [4]). Но остается нерешённым вопрос о нахождении такого примера без дополнительных аксиоматических предположений. Это стимулирует поиски аналогов γ -свойства и исследования их поведения при стандартных топологических операциях ([5–7]).

В данной статье мы вводим в рассмотрение ранжированный класс возрастающих по объёму аналогов γ -свойства и показываем, что взятие топологической суммы лишь увеличивает ранг, не выводя за пределы самого класса свойств. Также мы описываем поведение введенного класса свойств при основных топологических операциях и устанавливаем соотношение этого класса со свойством Линделёфа.

Все топологические пространства предполагаются тихоновскими. Все рассматриваемые покрытия нетривиальны, то есть не содержат все топологическое пространство как элемент.

Определение 1. Скажем, что последовательность подмножеств $\eta = \{A_n\}_{n \in \omega}$ пространства X сходится к X (пишем $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$), если произвольная точка $x \in X$ принадлежит всем членам последовательности η , начиная с некоторого (зависящего от x) номера.

Определение 2. Семейство η подмножеств пространства X называется ω -покрытием этого пространства, если для каждого конечного множества $K \subset X$ существует $U \in \eta$, такое, что $K \subset U$.

Определение 3 [1]. Пространство X называется γ -пространством, если в любом его открытом ω -покрытии η можно найти последовательность $\zeta = \{B_n\}_{n \in \omega}$, такую, что $B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$.

Определение 4. Пусть η – произвольное семейство открытых подмножеств пространства X . Скажем, что η' является n -насыщенным семейством для η , если $\eta' = \{\bigcup_{i \leq m} U_i : U_i \in \eta, m \leq n\}$. Скажем, что η' является насыщенным семейством

для η , если $\eta' = \{\bigcup_{i \leq m} U_i : U_i \in \eta, m \in \omega\}$.

Очевидно, что если η – ω -покрытие пространства X , то его n -насыщенное семейство η' также является ω -покрытием X для любого $n \in \omega$.

Определение 5. Будем говорить, что в топологическом пространстве X выполнено свойство γ'_k , если для любого открытого ω -покрытия η пространства X , в его k -насыщенном семействе η' найдется последовательность $\zeta = \{B_n\}_{n \in \omega}$, такая, что $B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$. При этом само пространство X будем называть γ'_k -пространством.

Определение 6. Будем говорить, что в топологическом пространстве X выполнено свойство γ'_ω , если для любого открытого ω -покрытия η пространства X в его насыщенном семействе η' найдется последовательность $\zeta = \{B_n\}_{n \in \omega}$, такая, что $B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$. При этом само пространство X будем называть γ'_ω -пространством.

Следующие предложения следуют напрямую из определений:

Предложение 7: (а) Свойство γ эквивалентно свойству γ'_1 ;

(б) Для любого $k \in \omega$ выполнено $\gamma'_k \Rightarrow \gamma'_{k+1}$.

(в) Для любого $k \in \omega$ выполнено $\gamma'_k \Rightarrow \gamma'_\omega$.

Предложение 8. Если X дискретно и обладает свойством γ'_k для некоторого $k \in \omega$, то $|X| \leq \omega$.

Предложение 9. Если $|X| \leq \omega$, то X обладает свойством γ'_1 .

Введённая выше последовательность γ'_k -свойств, как целое, «выдерживает» взятие топологической суммы, нужно лишь сложить индексы. Точнее, справедлива следующая

Теорема 10: (а) Пусть k, m – произвольные натуральные числа. Если X является γ'_k -пространством, Y является γ'_m -пространством, тогда $X \oplus Y$ является γ'_{k+m} -пространством.

(б) Кроме того, $X \oplus X$ является γ'_k -пространством.

Доказательство: (а) Пусть η – открытое ω -покрытие пространства $X \oplus Y$, а η' является открытым $(k+m)$ -насыщенным семейством для η . Оно также является ω -покрытием для $X \oplus Y$. Покажем, что из η' можно извлечь последовательность, сходящуюся к $X \oplus Y$.

Построим семейства $\eta_1 = \{U \cap X \mid U \in \eta\}$ и $\eta_2 = \{U \cap Y \mid U \in \eta\}$, которые являются ω -покрытиями X и Y соответственно. Обозначим через η'_1 k -насыщенное семейство для η_1 и, аналогично, через η'_2 обозначим m -насыщенное семейство для η_2 . Так как X является γ'_k -пространством, то для семейства η'_1 существует последовательность $(A_n)_{n \in \omega}$ из η'_1 , такая, что $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$. По определению семейства η'_1 , для каждого $n \in \omega$ имеем $A_n = (V_1^n \cap X) \cup \dots \cup (V_k^n \cap X)$, где $V_i^n \in \eta$ при $i \leq k$. Аналогично, получим последовательность $(B_n)_{n \in \omega}$ из η'_2 , такую, что $B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Y$. По определению семейства η'_2 , для каждого $n \in \omega$ имеем $B_n = (U_1^n \cap Y) \cup \dots \cup (U_m^n \cap Y)$, где $U_j^n \in \eta$ при $j \leq m$. Положим $\xi = (V_n \cup U_n)_{n \in \omega}$, где $V_n = V_1^n \cup \dots \cup V_k^n$ и $U_n = U_1^n \cup \dots \cup U_m^n$. Заметим, что для всех $n \in \omega$ $V_n \in \eta'$, $U_n \in \eta'$ и $V_n \cup U_n \in \eta'$. Покажем, что последовательность $\xi = (V_n \cup U_n)_{n \in \omega}$ является искомой.

Рассмотрим произвольную точку z из $X \oplus Y$. Если $z \in X$, то существует $k_1 \in \omega$, такой, что для всех $n \geq k_1$ точка z содержится в A_n , откуда следует, что $z \in V_n \subset (V_n \cup U_n) \in \xi$. Аналогично для случая $z \in Y$.

(б) Рассмотрим случай $X \oplus X$. Пусть η – открытое ω -покрытие пространства $X \oplus X$, а η' является открытым k -насыщенным семейством для η . Обозначим слагаемые в сумме $X \oplus X$ через X^1 и X^2 . Пусть $I: X^1 \rightarrow X^2$ – тождественное отображение. Покажем, что семейства $\eta_1 = \{U \cap X^1 \mid U \in \eta\}$ и $\eta_2 = \{I(U \cap X^1) \cap (U \cap X^2) \mid U \in \eta\}$ являются ω -покрытиями пространств X^1 и X^2 соответственно. Для η_1 утверждение очевидно. Пусть K – конечное подмножество в X^2 , тогда существует $U \in \eta$, такое, что $K \cup I^{-1}(K) \subset U$. Таким образом, $K \subset U \cap X^2$ и $I^{-1}(K) \subset U \cap X^1$, откуда следует, что $K \subset I(U \cap X^1)$. Поэтому заключаем, что η_2 является ω -покрытием X^2 , так как $K \subset I(U \cap X^1) \cap (U \cap X^2) \in \eta_2$.

Пусть η'_2 является открытым k -насыщенным семейством для η_2 . Так как X^2 является γ'_k -пространством, то существует последовательность $(B_n)_{n \in \omega}$ из η'_2 , такая, что $B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X^2$, при этом $B_n = (I(U_{n,1} \cap X^1) \cap (U_{n,1} \cap X^2)) \cup \dots \cup (I(U_{n,k} \cap X^1) \cap (U_{n,k} \cap X^2))$. Положим $A_n = (U_{n,1} \cap X^1) \cup \dots \cup (U_{n,k} \cap X^1) \in \eta'_1$, где η'_1 является открытым k -насыщенным семейством для η_1 . Рассмотрим также

последовательность $(I^{-1}(B_n))_{n \in \omega}$ подмножеств в X^1 . По построению $I^{-1}(B_n) \subset A_n$. Поэтому, из того, что $I^{-1}(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X^1$, следует, что $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X^1$.

Покажем, что $W_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X \oplus X$, где $W_n = U_{n,1} \cup \dots \cup U_{n,k}$ для всех $n \in \omega$. Рассмотрим произвольную точку z из $X \oplus X$. Если $z \in X^2$, то существует $n_2 \in \omega$, что для всех $n \geq n_2$ точка $z \in B_n$, значит, $z \in W_n = U_{n,1} \cup \dots \cup U_{n,k}$. Если $z \in X^1$, то существует $n_1 \in \omega$, что для всех $n \geq n_1$ точка $z \in A_n$, значит, $z \in W_n = U_{n,1} \cup \dots \cup U_{n,k}$. $\square$

Замечание 11. В статье [4] в предположении аксиомы Мартина (МА) построен пример подмножеств X и Y вещественной прямой, обладающих γ -свойством, чья прямая сумма $X \oplus Y$ не обладает γ -свойством. По предложению 7 (а) и по теореме 10 (а), прямая сумма $X \oplus Y$ обладает γ'_2 -свойством. Стало быть, в предположении МА свойства γ'_1 и γ'_2 не совпадают. Без дополнительных теоретико-множественных предположений вопрос о различении свойств γ'_k и γ'_{k+1} является открытым.

Ниже устанавливается, что при произвольном $k \in \omega$ свойство γ'_k сохраняется при стандартных топологических операциях. Доказательства для перехода к замкнутому подпространству и к непрерывному образу опускаются ввиду их элементарности.

Предложение 12. Пусть X обладает свойством γ'_k , тогда

- (а) Непрерывный образ X обладает свойством γ'_k ;
- (б) Произвольное замкнутое подпространство X обладает свойством γ'_k .

Укажем здесь два естественных применения предложения 12 (б). Напомним, что дискретной клеточностью пространства X называется кардинал $dc(X) = \sup \{ |\mathcal{U}| \}$, где супремум берется по всем дискретным непустым семействам $\mathcal{U}$ открытых множеств в X . Экстендом $e(X)$ пространства X называют наименьший бесконечный кардинал τ , такой, что мощность каждого замкнутого дискретного подпространства пространства X не превосходит τ .

Следствие 13. Если X обладает свойством γ'_k для произвольного $k \in \omega$, то $e(X) \leq \omega$.

Следствие 14. Если X обладает свойством γ'_k для произвольного $k \in \omega$, то $dc(X) \leq \omega$.

Доказательство. Предположим, что $dc(X) > \omega$. Рассмотрим замкнутое дискретное подпространство $Y \subset X$, которое построено следующим образом: в каждом элементе некоторого дискретного несчетного семейства открытых подмножеств пространства X взято по произвольной точке. Таким образом, $|Y| > \omega$ и, по предложению 12 (б), Y должно иметь свойство γ'_k , что противоречит предложению 8. $\square$

Теорема 15. Если каждое замкнутое подпространство пространства X , не равное самому X , обладает свойством γ'_k , то X обладает свойством γ'_{k+1} .

Доказательство. Пусть η – открытое ω -покрытие пространства X , пусть η' является k -насыщенным семейством для η . Пусть U – произвольный элемент покрытия η . Рассмотрим подпространства $X \setminus U$ и семейство $\mu = \{(X \setminus U) \cap W \mid W \in \eta\}$. Легко проверить, что семейство μ является ω -покрытием $X \setminus U$. Тогда семейство $\mu' = \{((X \setminus U) \cap W_1) \cup \dots \cup ((X \setminus U) \cap W_k) \mid W_1, \dots, W_k \in \eta\}$ является k -насыщенным семейством для μ . Перепишем μ' следующим образом: $\mu' = \{(X \setminus U) \cap (W_1 \cup \dots \cup W_k) \mid W_1, \dots, W_k \in \eta\}$. Теперь видно, что μ' является следом η' в $X \setminus U$.

Так как $X \setminus U$ обладает свойством γ'_k , то существует последовательность $\mu_1 \subset \mu'$, такая, что, при всех $n \in \omega$ и $V_n \in \eta'$ последовательность $\mu_1 = (V_n \cap (X \setminus U))_{n \in \omega} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X \setminus U$. Покажем, что последовательность $\xi = (V_n \cup U)_{n \in \omega}$ сходится к X . Рассмотрим произвольную точку z из X . Если $z \in U$, то по построению точка z принадлежит всем членам последовательности ξ . Если $z \notin U$, то $z \in X \setminus U$, значит существует номер $k_1 \in \omega$, такой, что для всех $m \geq k_1$ точка $z \in V_m \cap (X \setminus U)$, откуда следует, что $z \in V_m \cup U$. $\square$

Ниже мы устанавливаем, что свойство γ'_k сохраняется при возведении в конечную степень. Нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 16 [8]. Пусть X является топологическим пространством и n – произвольное натуральное число. Если η – произвольное ω -покрытие пространства X^n , то существует открытое ω -покрытие μ пространства X , такое, что открытое покрытие $\{V^n \mid V \in \mu\}$ пространства X^n является измельчением η .

Теорема 17. Если X есть γ'_k -пространство для некоторого $k \in \omega$, то X^n – также γ'_k -пространство для любого $n \in \omega$.

Доказательство. Пусть η – произвольное открытое ω -покрытие пространства X^n . Пусть μ является ω -покрытием пространства X , таким, что открытое покрытие $\{V^n \mid V \in \mu\}$ пространства X^n является измельчением η (это возможно по лемме 16). Пусть μ' – k -насыщенное ω -покрытие пространства X . Так как X является γ'_k -пространством, то существует последовательность $\xi \subset \mu'$, такая, что $\xi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$. Для каждого $V_i = V_{i,1} \cup \dots \cup V_{i,k} \in \xi$ при $i \in \omega$, где $V_{i,j} \in \mu$ и $j \leq k$, рассмотрим множество $U_i = U_{i,1} \cup \dots \cup U_{i,k}$ в X^n , такое, что $V_{i,j}^n \subseteq U_{i,j} \in \eta$.

Покажем, что последовательность $\sigma = \{U_i\}_{i \in \omega}$ – искомая. Пусть $F \subset X^n$ является конечным множеством в X^n , найдем конечное множество K в X^n , такое, что проекции K на каждый сомножитель X^n одинаковые и $F \subset K$. Рассмотрим проекцию $p(K) \subset X$, тогда существует такое $t_0 \in \omega$, что для всех $t \geq t_0$ имеет место

$p(K) \subset V_t$ и $V_t^n \subseteq U_t \in \eta$. Таким образом, для произвольного конечного $F \subset X^n$ имеем $F \subset p(K)^n \subset V_t^n \subset U_t$ при всех $t \geq t_0$. $\square$

Замечание 18. Теорема 16, теорема 10 (б) и предложение 12 показывают, что «наивный» пример γ -пространств X, Y , для которых сумма $X \oplus Y$ не является γ -пространством, требует, чтобы пространство Y не могло быть получено из X конечным числом операций возведения в степень, перехода к замкнутому подпространству и к непрерывному образу.

Теорема 19. Пространство X линделёфово тогда и только тогда, когда X является γ'_ω -пространством.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим произвольное открытое ω -покрытие η пространства X . Так как X линделёфово, то можем выбрать последовательность $(U_n)_{n \in \omega} \subset \eta$, покрывающую X . Легко доказать, что последовательность $\mu = \{\bigcup_{i \leq n} U_i \mid n \in \omega\}$ сходится к X и состоит из элементов насыщенного семейства для η . Для доказательства в обратную сторону, достаточно произвольное покрытие замкнуть относительно операции конечного объединения, увидеть, что получившееся покрытие будет ω -покрытием и применить свойство γ'_ω . $\square$

Следствие 20. Пусть $X = \bigcup_{n \in \omega} F_n$, где каждое F_n обладает свойством $\gamma'_{k(n)}$.

Тогда X линделёфово.

Доказательство. Так как каждое F_n обладает свойством $\gamma'_{k(n)}$, то оно обладает и свойством γ'_ω (предложение 7 (в)). Тогда, по теореме 19, каждое F_n – линделёфово пространство. Стало быть, X – объединение счётного семейства своих линделёфовых подпространств и потому само линделёфово. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Gerlits J., Nagy Zs. Some properties of $C(X)$, I // Topology and its Applications. 1982. V. 14. Iss. 2. P. 151–161. DOI: 10.1016/0166-8641(82)90065-7.
2. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989.
3. Tkachuk V.V. A Cp-Theory Problem Book Topological and Function Spaces. Springer, 2010.
4. Galvin F., Miller A.W. γ -sets and other singular sets of real numbers // Topology and its Applications. 1984. V. 17. Iss. 2. P. 145–155. DOI: 10.1016/0166-8641(84)90038-5.
5. Sakai M. The Pytkeev property and the Rezhichecnko property in function spaces // Note Mat. 2003. V. 22. P. 43–52.
6. Sakai M. Property C'' and function spaces // Proc Amer. Math. Soc. 1998. V. 104. P. 917–919.
7. May N., Spadaro S., Szeptycki P. A new class of spaces with all finite powers Lindelöf // Topology and its Applications. V. 170. 2014. P. 104–118. DOI: 10.1016/j.topol.2014.04.004.
8. Just W., Miller A.W., Scheepers M., Szeptycki P.J. The combinatorics of open covers II // Topology and its Applications. V. 73. Iss. 3. 1996. P. 241–266. DOI: 10.1016/S0166-8641(96)00075-2.

Статья поступила 10.10.2021

Badmaev O.O. (2021) ON AN ADDITIVE MODIFICATION OF THE γ -PROPERTY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 5–11

DOI 10.17223/19988621/74/1

Keywords: ω -cover, γ -property, Gerlits–Nagy property, γ'_k -property, Lindelöf property

The aim of this article is to modify the notion of the γ -property so that the modified property is preserved under taking a direct topological sum. To this end, we use a procedure of “saturation” of ω -covers of topological spaces. Namely, we add to each ω -cover the family of all unions of its subfamilies consisting of at most k elements (“ k -saturation”), or the family of all unions of its finite subfamilies (“saturation”).

Thus, we obtain for Tychonoff spaces a sequence $(\gamma'_k)_{k < \omega}$ of covering properties such that $\gamma'_k \Rightarrow \gamma'_{k+1}$ for any integer k , and γ'_1 is the well-known γ -property. Also, the property γ'_ω such that $\gamma'_k \Rightarrow \gamma'_\omega$ for any integer k is obtained. It is proved that each γ'_k -property is preserved under usual topological operations, namely, taking closed subspaces, continuous images, and finite powers.

It is known that the classical γ -property can be failed under passing to topological sum. Our main result means that it is impossible with respect to whole sequence $(\gamma'_k)_{k < \omega}$. More precisely, if a space X satisfies γ'_k , Y satisfies γ'_m , then the sum $X \oplus Y$ satisfies γ'_{k+m} . Nevertheless, $X \oplus X$ satisfies γ'_k as X itself.

As another main result, we establish that the γ'_ω -property and the Lindelöf property are equivalent. It follows that any countable union of spaces X_n with the $\gamma'_{k(n)}$ -property is a Lindelöf space.

AMS Mathematical Subject Classification: MSC 54D20

Oleg O. BADMAEV (Tomsk State University, Tomsk, Russia). E-mail: badmaev1995@bk.ru

REFERENCES

1. Gerlits J., Nagy Zs. (1982) Some properties of $C(X)$. I. *Topology and its Applications*. 14(2). pp. 151–161. DOI: 10.1016/0166-8641(82)90065-7.
2. Arkhangel'skii A.V. (1992) *Topological Function Spaces*. Mathematics and its applications, Soviet Series, 78. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
3. Tkachuk V.V. (2011) *A C_p -Theory Problem Book*. Springer.
4. Galvin F., Miller A.W. (1984) γ -sets and other singular sets of real numbers. *Topology and Its Applications*. 17(2). pp. 145–155. DOI: 10.1016/0166-8641(84)90038-5.
5. Sakai M. (2003) The Pytkeev property and the Reznichenko property in function spaces. *Note di Matematica*. 22(2). pp. 43–52.
6. Sakai M. (1998) Property C'' and function spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 104(3). pp. 917–919.
7. May N., Spadaro S., Szeptycki P. (2013) A new class of spaces with all finite powers Lindelöf. *Topology and Its Applications*. 170(2). pp. 104–118. DOI: 10.1016/j.topol.2014.04.004.
8. Just W., Miller A.W., Scheepers M., Szeptycki P.J. (1996) The combinatorics of open covers II. *Topology and Its Applications*. 73(3). pp. 241–266. DOI: 10.1016/S0166-8641(96)00075-2.

Received: October 10, 2021

Е.А. Молчанова

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Строится асимптотическая модель спектральной задачи. Исходная краевая задача восьмого порядка приводится к последовательности краевых задач более низкого порядка. В нулевом приближении получается обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка. Решение задачи нулевого приближения подчиняется главным граничным условиям, что приводит к трансцендентному уравнению, асимптотическое упрощение которого дает приближенные формулы для собственных значений.

Ключевые слова: моделирование, спектральная задача, асимптотические методы, формальное асимптотическое разложение, собственные значения, собственные функции.

Целью работы является приближенное решение спектральной задачи.

Математическая модель как приближенное описание какого-либо класса явлений с помощью математической символики сводит исследование явления к математической задаче. Естественно, встает проблема выбора метода решения возникшей математической задачи. Так, в дифференциальных задачах, которые содержат малые параметры при старших производных, эффективным является применение асимптотических методов [1–3].

Дело в том, что такие задачи обнаруживают особую структуру интегралов, в число которых входят как «медленные» интегралы, существенные на всем промежутке интегралов, так и «быстрые» интегралы, локализованные в окрестности каких-либо точек, линий. Подобная структура возникает в ряде прикладных задач. Независимо от их физической сущности решение можно представить как асимптотические разложения [4–7].

Рассмотрим реализацию асимптотического моделирования спектральной задачи из теории оболочек [8, 9]. Пусть имеем класс оболочек, включающий в себя цилиндрические и близкие к ним оболочки. Спектральные задачи этого класса объектов описываются системой уравнений теории напряженных состояний с большой изменчивостью [10, 11]:

$$\varepsilon^4 \Delta^2 w + \Delta_R \Phi - \lambda \mu = 0, \varepsilon^4 \Delta^2 \Phi - \Delta_R w = 0, \quad (1)$$

где w – нормальный прогиб, Φ – функция напряжения, ε – малый параметр.

Операторы Δ и Δ_R , явный вид которых приведен в [10], содержат коэффициенты первой и второй квадратичных форм срединной поверхности оболочки.

Их можно выразить, дифференцируя векторное уравнение срединной поверхности

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \mu f(s, \varphi) \vec{n}_0, \quad (2)$$

в котором радиус-вектор $\vec{r}_0$ определяется положением точки на цилиндрической поверхности, орт внешней нормали которой образует правую тройку с ортами

e_1^0, e_2^0 координатных линий s, φ этой поверхности. Координата s отсчитывается вдоль образующей, φ – вдоль направляющей. Функция $f(s, \varphi)$ описывает отклонение от цилиндрической поверхности, μ – малый параметр.

Дифференцируя (2) по s, φ с учетом деривационных формул Гаусса – Вейнгартена [8], после преобразования получим коэффициенты первой квадратичной формы

$$A_1^2 = 1 + \mu^2 f_s'^2, \quad A_2^2 = 1 + 2\mu f k + \mu^2 (f_\varphi'^2 + f^2 k^2), \\ f_\varphi'^2 + f^2 k^2), f_\varphi'^2 + f^2 k^2), \quad k(\varphi) \equiv A_2^0 / R_2^0. \quad (3)$$

Коэффициенты второй квадратичной формы имеют более громоздкие выражения, из которых в дальнейшем используются один-два члена. Поэтому выпишем их, удерживая лишь старшие члены разложений по параметру μ :

$$1/R_1 = -\mu f_{ss}'' + O(\mu^2), \quad 1/R_{12} = \mu(f_{s\varphi}'' - f_\varphi') + O(\mu^2), \\ 1/R^2 = k - \mu(k^2 f + f_{\varphi\varphi}'' + f_s') + O(\mu^2). \quad (4)$$

В том случае, когда функция отклонений $f(s, \varphi)$ зависит только от s , координатные линии s, φ являются линиями кривизны и главные кривизны сравнительно просто записываются без каких-либо отбрасываний:

$$1/R_1 = \mu f_{ss}'' / (1 + \mu^2 (f_s')^2)^{3/2}, \quad 1/R_2 = (k - \mu f_s') / [(1 + \mu^2 (f_s')^2) \mu k f]. \quad (5)$$

С помощью формул (4) операторы Δ и Δ_R , приобретают следующий вид:

$$\Delta w = \partial^2 w / \partial s^2 + \partial^2 w / \partial \varphi^2, \\ \Delta_R w = k \partial w / \partial s - \mu (f_{ss}'' \partial^2 w / \partial \varphi^2 - 2 f_{\varphi s}'' \partial^2 w / \partial \varphi \partial s - (f_{\varphi\varphi}'')' \partial w / \partial s) + O(\mu). \quad (6)$$

Теперь, исключив функцию напряжения при помощи второго уравнения исходной системы (1), получим из первого уравнения этой системы после преобразований последовательность уравнений для определения прогиба

$$H_0 w_0 = 0, \quad H_0 w_1 + H_1 w_0 = 0, \quad H_0 w_2 + H_1 w_1 + H_2 w_0 = 0, \dots \quad (7)$$

Применительно к анализу уравнений тонкостенных упругих систем асимптотические методы настолько эффективны, что очень хорошую аппроксимацию дает уже нулевое приближение. В силу этих достоинств, не выписывая довольно громоздких выражений операторов $H_1, H_2, \dots$, приведем только H_0 :

$$H_0 w_0 \equiv (k^2 / q^4) w_0^{IV} + (k / q^2) ((f'' w_0)' + f'' w_0') + (q^4 + f''^2 - \lambda_0) w_0. \quad (8)$$

Если поверхность (2) близка к круговому цилиндру, то в (8) кривизна k постоянна и можно положить $k = 1$. Число q вещественно и определяет изменчивость в направлении φ . Дополнив уравнение $H_0 w_0 = 0$ граничными условиями, получим задачу на собственные значения, решением которой будет набор значений параметра λ_0 . Таким образом, асимптотическое моделирование позволяет существенно редуцировать исходную математическую модель (1), которая имеет 8-й порядок. Нулевое приближение (8) асимптотической задачи описывается уравнением 4-го порядка. Если отклонение от прямолинейной образующей имеет параболическую форму, то вторая производная f'' является постоянной. В этом случае (8) являет-

ся уравнением с постоянными коэффициентами, что позволяет получить сравнительно удобные формулы для собственного значения λ_0 .

Решение уравнения $H_0 w_0 = 0$ ищем в виде линейной комбинации

$$w_0 = \sum_{k=1}^4 a_k e^{b_k s}, \quad (9)$$

в которой корни характеристического уравнения $b_k = \pm q(-f'' \pm (\lambda_0 - q^4)^{1/2})^{1/2}$, $k = 1, \dots, 4$, а константы a_k находятся из условия равенства нулю определителя системы линейных алгебраических уравнений, которая получается в результате подчинения (9) граничным условиям. Так, при граничных условиях

$$w_0(0) = w_0(l) = w_0'(0) = w_0'(l) = 0$$

получаем равенство

$$F \equiv (\rho^2 - r^2) \operatorname{sh}(rl) \sin(\rho l) + 2r\rho (\operatorname{ch}(rl) \cos(\rho l) - 1) = 0, \quad (10)$$

в котором

$$r = ql(-f'' + (\lambda_0 - q^4)^{1/2})^{1/2}, \quad \rho = ql(f'' + (\lambda_0 - q^4)^{1/2})^{1/2}. \quad (11)$$

При параболической форме отклонения вторая производная $f'' = \text{const}$ и является параметром задачи. Параметр q определяет изменяемость собственной функции в окружном направлении, l – длина оболочки.

Асимптотический генезис возникающих трансцендентных уравнений позволяет и к этим уравнениям применить асимптотический анализ [12, 13], с помощью которого можно обнаружить компоненты уравнения, такие, которые вносят главный вклад в формирование спектра. Опуская менее существенные компоненты, получим более простые выражения и даже явные формулы для собственных значений.

Исследуем поведение корней. Левая часть уравнения (10) является суммой двух слагаемых $F = F_1 + F_2$. Нули функции $F_1 = (\rho^2 - r^2) \operatorname{sh}(rl) \sin(\rho l)$ совпадают с нулями $\sin(\rho l)$. Нули функции $F_2 = 2r\rho (\operatorname{ch}(rl) \cos(\rho l) - 1)$ совпадают с корнями уравнения $\operatorname{ch}(rl) \cos(\rho l) - 1 = 0$. Это известно из теории колебаний частотное уравнение балки, защемленной с обеих сторон [14].

Графическое решение уравнений $F = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ обнаруживает их близость в определенных диапазонах изменения параметра λ_0 .

На рис. 1 изобразим графики функций F (сплошная линия), F_1 (штрихпунктирная линия), F_2 (пунктирная линия). Из рисунка видно, что в области малых значений λ_0 слагаемые F_1 , F_2 равноудалены от их суммы F . С увеличением значений λ_0 обнаруживается явная тенденция к сближению F , F_2 , а F_1 существенно отстает. Эта тенденция хорошо иллюстрируется рис. 2, где взяты большие значения λ_0 .

Для сравнения числовых значений зафиксируем значения числовых параметров $l = 3$, $q = 2$, $f'' = -1$ и, применяя численный метод для определения значений параметра λ_0 , получим для первых десяти значений таблицу.

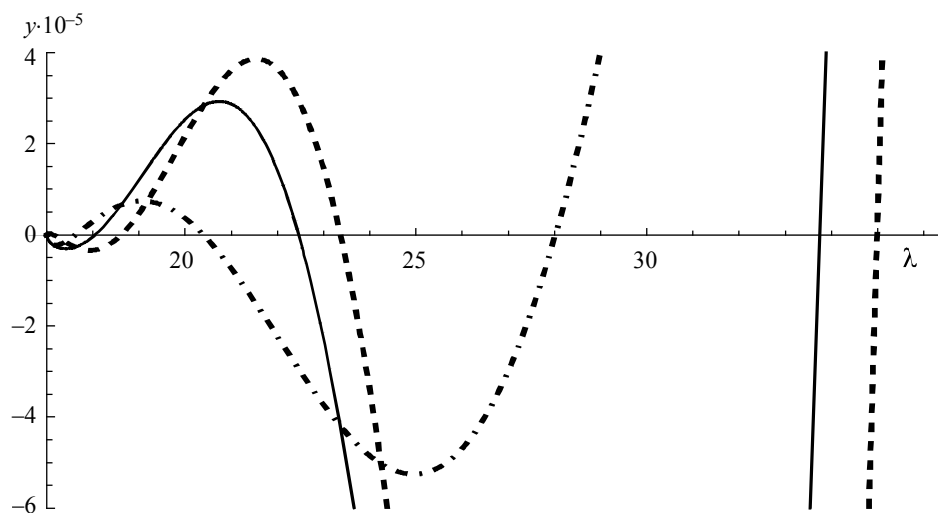


Рис. 1. Графики в диапазоне λ от 0 до 40 трёх функций F (сплошная линия), F_1 (штрих-пунктирная линия), F_2 (пунктирная линия), фигурирующих в левой части трансцендентного уравнения (10)

Fig. 1. Graphs ranging from λ from 0 to 40 for three functions F (solid line), F_1 (chain-dotted line), and F_2 (dashed line) appearing on the left side of the transcendental equation (10)

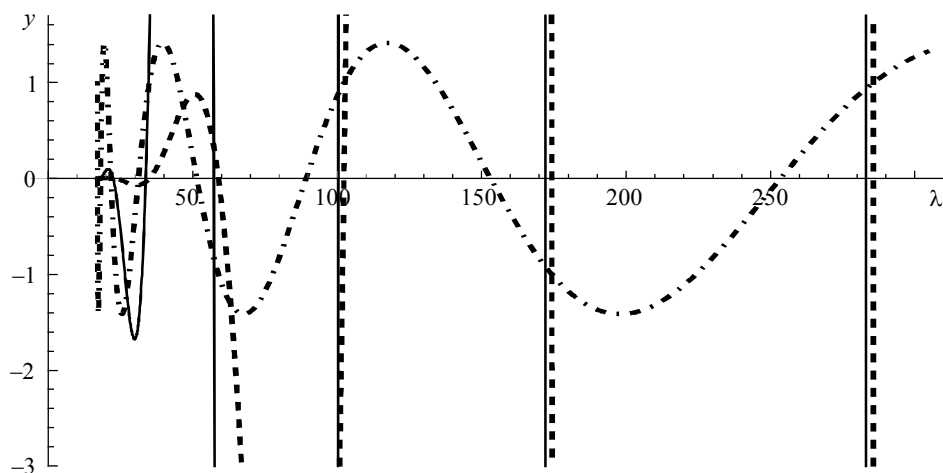


Рис. 2. Графики в диапазоне λ от 0 до 300 трёх функций F (сплошная линия), F_1 (штрих-пунктирная линия), F_2 (пунктирная линия), фигурирующих в левой части трансцендентного уравнения (10)

Fig. 2. Graphs ranging from λ from 0 to 300 for three functions F (solid line), F_1 (chain-dotted line), and F_2 (dashed line) appearing on the left side of the transcendental equation (10)

В первой строке таблицы содержатся корни уравнения $F_1 = 0$, во второй – корни уравнения $F = 0$, в третьей – корни уравнения $F_2 = 0$.

18.0402	21.7021	31.177	51.4256	89.2123	153.106	253.478	402.505	614.167	904.247
18.0476	22.4595	33.7547	57.3408	100.435	172.059	283.035	445.992	675.36	987.375
18.6142	23.3629	34.9957	58.9242	102.364	174.334	285.658	448.962	678.379	991.042

Из этих решений следует, что при больших значениях λ_0 их можно определять, решая уравнение $F_2 = 0$ или

$$\operatorname{ch}(rl) \cos(\rho l) - 1 = 0. \quad (12)$$

Корни этого уравнения близки к нулям функции $\cos(\rho l)$. Поэтому следует решить уравнение

$$\cos(ql(f'' + (\lambda_0 - q^4)^{1/2})^{1/2}) = 0, \quad (13)$$

из которого следует

$$ql(f'' + (\lambda_0 - q^4)^{1/2})^{1/2} = \pi/2, \text{ или } \lambda_0 = q^4 + [((\pi/2 + \pi n)/ql)^2 - f'']^2. \quad (14)$$

При малых значениях λ их можно решать из условия равенства синуса и косинуса аргумента $ql(f'' + (\lambda_0 - q^4)^{1/2})^{1/2}$ или, что то же самое, равенства единице тангенса этого аргумента. Поэтому надо решить уравнение

$$\operatorname{tg}(ql(f'' + (\lambda_0 - q^4)^{1/2})^{1/2}) = 1, \quad (15)$$

из которого следует

$$ql(f'' + (\lambda_0 - q^4)^{1/2})^{1/2} = \pi/4 + \pi n, \text{ или } \lambda_0 = q^4 + [((\pi/4 + \pi n)/ql)^2 - f'']^2. \quad (16)$$

Формулы (14) и (16) носят асимптотический характер и хорошо работают каждая в своей асимптотике. Однако формально каждую из них можно применить на всем спектре. Оказывается, что вычисления, произведенные по этим формулам, снова дают результаты таблицы, что свидетельствует об одной и той же точности формул (14), (16) и того численного метода, который используется в компьютерной программе.

Таким образом, в результате проведенного асимптотического моделирования получены приближенные формулы для собственных значений спектральной задачи.

Получены следующие результаты: из приведенного асимптотического моделирования получена задача нулевого приближения, в результате решения которой возникают трансцендентные уравнения. Асимптотическое моделирование рассмотренной спектральной задачи приводит к следующим утверждениям:

1) при асимптотике $\lambda \rightarrow \infty$ для спектрального параметра справедлива приближенная формула

$$\lambda_0 = q^4 + [((\pi/2 + \pi n)/ql)^2 - f'']^2;$$

2) при асимптотике $\lambda \rightarrow 0$ для спектрального параметра справедлива приближенная формула

$$\lambda_0 = q^4 + [((\pi/4 + \pi n)/ql)^2 - f'']^2.$$

Приближенные аналитические формулы удобны для анализа спектра рассмотренной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И. Асимптотическая математика и синергетика: путь к целостной простоте. М.: Editorial URSS, 2004. 304 с.
2. Аргатов И.И. Введение в асимптотическое моделирование в механике. СПб.: Политехника, 2004. 302 с.
3. Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Товстик П.Е., Филиппов С.Б. Асимптотические методы в механике твердого тела. М.: Ижевск, 2007. 356 с.
4. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
5. Вазов В. Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
6. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962. 128 с.
7. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
8. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: 1953. 544 с.
9. Гольденвейзер А.Л. Асимптотический метод в теории оболочек // Успехи механики. 1982. Т. 5. Вып.1. С. 137–182.
10. Гольденвейзер А.Л., Лидский Б.В., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: 1979. 384 с.
11. Товстик П.Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Изв. РАН: Механика твердого тела. 2005. № 1. С. 147–160.
12. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.
13. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
14. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.

Статья поступила 22.09.2021

Molchanova E.A. (2021) ASYMPTOTIC SIMULATION OF THE SPECTRAL PROBLEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 12–18

DOI 10.17223/19988621/74/2

Keywords: simulation, spectral problem, asymptotic methods, formal asymptotic expansion, eigenvalues, eigenfunctions.

A mathematical model of a spectral problem containing a small parameter at the higher derivatives is investigated by an asymptotic method. The expected solution and its geometric parameters are presented as formal asymptotic decompositions. As a result, the original high-order differential task is reduced to a sequence of lower order tasks. Next, the zero approximation problem under the main boundary conditions is solved, the execution of which leads to a system of linear algebraic equations containing a spectral parameter. Equating to the zero of the determinant of the resulting system gives transcendental equations for eigenvalues. The asymptotic genesis of emerging transcendental equations allows asymptotic analysis to be applied to these equations. It helps to reveal the components of the equation that make the major contribution to the spectrum formation. Graphical solutions are used as leading considerations in this analysis. As a result of the asymptotic simulation, approximate formulas for the eigenvalues of the spectral problem have been obtained.

AMS Mathematical Subject Classification: 41A60

Evgeniya. A. MOLCHANOVA (Candidate of Physics and Mathematics, Khakas State University, Abakan, Russian Federation). E-mail: mevgen2001@mail.ru

REFERENCES

1. Andrianov I.V., Barantsev R.G., Manevich L.I. (2004) *Asimptoticheskaya matematika i sinergetika: put' k tselostnoy prostote* [Asymptotical mathematics and synergetics: a way to holistic simplicity]. Moscow: Editorial URSS.
2. Argatov I.I. (2004) *Vvedeniye v asimptoticheskoye modelirovaniye v mekhanike* [Introduction to asymptotic modeling in mechanics]. St. Petersburg: Politehnika.
3. Bauer S.M., Smirnov A.L., Tovstik P.E., Filippov S.B. (2007) *Asimptoticheskiye metody v mekhanike tverdogo tela* [Asymptotic methods in mechanics of solids]. Moscow: URSS.
4. Fedoryuk M.V. (1983) *Asimptoticheskiye metody dlya lineynykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Asymptotic methods for linear ordinary differential equations]. Moscow: Nauka.
5. Wasow W. (1966) *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*. New York: John Wiley and Sons Inc.
6. Erdélyi A. (1956) *Asymptotic Expansions*. Dover Publications.
7. Vasil'yeva A.B., Butuzov V.F. (1973) *Asimptoticheskiye razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy* [Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations]. Moscow: Nauka.
8. Goldenveizer A.L. (1961) *Theory of Elastic Thin Shells*. New York: Pergamon Press.
9. Gol'denveizer A.L. (1982) Asimptoticheskiy metod v teorii obolochek [The asymptotic method in the theory of shells]. *Uspekhi mekhaniki*. 5(1). pp. 137–182.
10. Gol'denveyzer A.L., Lidskiy B.V., Tovstik P.E. (1979) *Svobodnyye kolebaniya tonkikh uprugikh obolochek* [Free vibrations of thin elastic shells], Moscow: Nauka.
11. Tovstik P.E. (2005) Local Buckling of Plates and Shallow Shells on an Elastic Foundation. *Mechanics of Solids (English Translation)*. 40(1). pp. 120–131.
12. Olver F. (1974) *Asymptotics and Special Functions*. Elsevier.
13. Fedoryuk M.V. (1987) *Asimptotika: Integraly i ryady* [Asymptotics: integrals and series]. Moscow: Nauka.
14. Babakov I.M. (1968) *Teoriya kolebaniy* [Theory of vibrations]. Moscow: Nauka.

Received: September 22, 2021

УДК 519.6, 517.95
DOI 10.17223/19988621/74/3

MSC 35C09, 35J25

А.В. Старченко, М.А. Седнев, **С.В. Панько**

**ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ
ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ
В НЕОДНОРОДНОМ КРУГЕ С УЧЕТОМ
СОПРОТИВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОДОВ¹**

Получено приближенное аналитическое решение распределения потенциала в двумерном круге с радиально неоднородной проводимостью для граничных условий полной электродной модели, учитывающей контактное сопротивление электродов при заданной силе тока. Решение получается за счет разделения переменных и использования рядов Фурье, для коэффициентов которых необходимо решать систему линейных уравнений. Полученное решение сравнивалось с приближенным аналитическим решением подобной задачи для однородного диска и граничными условиями Неймана – Робина. Получено хорошее согласование, качество которого улучшалось с увеличением количества учитываемых членов ряда.

Ключевые слова: *уравнение эллиптического типа в круге, кусочно-постоянные коэффициенты, полная электродная модель с интегро-дифференциальным краевым условием, ряды Фурье.*

Электроимпедансная томография (ЭИТ) – методика, позволяющая реконструировать внутреннее строение объектов живой природы, основываясь на измерении напряжения (потенциала) электрического тока, проходящего через прикрепленные к поверхности объектов электроды [1]. Зная значения электрического потенциала u на поверхности объекта и приняв эти значения за граничные условия, определяют пространственное распределение электрического сопротивления (импеданса). Такой подход называется обратной задачей ЭИТ. Он позволяет реконструировать внутреннюю структуру объекта по распределению электрической проводимости σ [2].

Наряду с обратной задачей ЭИТ часто рассматривается прямая задача электроимпедансной томографии, которая может быть использована при решении обратной. В этом случае задано распределение электрической проводимости внутри биологического объекта σ , значения электрического потенциала или плотности электрического тока на границе и требуется найти распределение электрического потенциала внутри рассматриваемого объекта. При определенных допущениях процесс распространения тока в объектах живой природы может описываться уравнением эллиптического типа вида

$$\operatorname{div}(\sigma \cdot \operatorname{grad}(u)) = 0. \quad (1)$$

На границе контакта области с воздушной средой используются условия изоляции (отсутствия тока через эту часть границы), которые математически представляют-

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2021-1392).

ся с помощью простых условий Неймана ($\vec{j} = -\sigma \text{grad}(u)$ – плотность электрического тока, $\vec{n}$ – внешняя нормаль):

$$j_n = -\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0. \quad (2)$$

В процессе получения аналитических и приближенных аналитических решений задача (1), (2) либо дополнялась граничными условиями на электродах, либо на всей границе области задавались граничные условия первого или второго рода [3].

В работе [4] приведена классификация таких «электродных» моделей, в зависимости от выбора которых (и модели на контактах электрода с поверхностью объекта) граничные условия формулировались тем или иным образом.

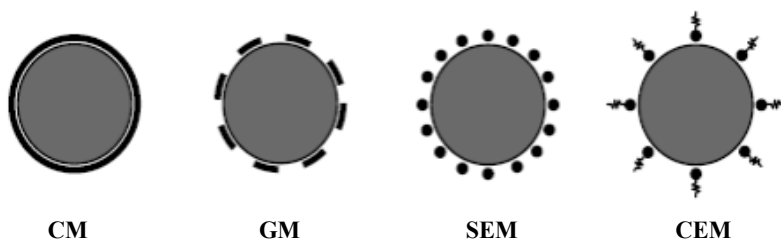


Рис. 1. Модели контактов электродов: CM – электрод занимает всю границу, GM – электроды конечных размеров с зазором, SEM – модель электрода с шунтом, CEM – полная электродная модель. Рисунок взят из [4]

Fig. 1. Models of electrode contacts: CM, the electrode occupies the whole boundary; GM, finite dimension electrodes with a gap; SEM, the shunt electrode model; and CEM, the complete electrode model. The figure is taken from [4]

Выделялись следующие модели: Continuous Model, когда на всей границе известно гладкое распределение плотности электрического тока j ; Point Electrode Model, когда электроды имеют точечный размер, на электродах задается плотность электрического тока, а в промежутках между ними исследуемое тело контактирует с воздухом; Gap Model – характеризуется известными условиями Неймана на электродах конечных размеров; Shunt Electrode Model – корректно моделирует геометрию электродов, но пренебрегает учетом сопротивления тонкого контактного слоя между объектом и электродом; Complete Electrode Model – добавляет учет контактного сопротивление z_l для каждого электрода [4]:

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = U_l, l = 1, \dots, NE, \quad (3)$$

где NE – количество электродов. U_l – напряжение на электроде. Если напряжение U_l неизвестно, а известна сила подаваемого на электрод тока I_l , то добавляют следующее условие на электроде с поверхностью E_l :

$$\int_{E_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} dl = I_l. \quad (4)$$

В настоящее время при решении прямых и обратных задач ЭИТ чаще всего используют численные методы [5, 6]. Для доказательства достоверности и настройки параметров таких численных методов часто привлекаются аналитические

или приближенные аналитические решения, полученные для двумерных канонических областей (прямоугольник, круг) [3, 7, 8].

В статье [7] для неоднородного диска с концентрической круглой вставкой с отличной проводимостью и известным распределением плотности электрического тока на границе диска получено за счет разделения переменных в полярных координатах аналитическое решение в виде рядов тригонометрических функций с коэффициентами, зависящими от радиальной координаты.

В работе [3] представлен целый ряд аналитических и полуаналитических решений разнообразных двумерных постановок прямых задач ЭИТ в прямоугольнике, круге, эллипсе. Рассматривались разные модели электродов (несколько точечных электродов, несколько электродов конечной ширины, на которых ставились граничные условия Дирихле, Неймана или Робина) и распределения проводимости внутри области (постоянная проводимость всей области, послойно постоянная проводимость, радиально симметрическое распределение проводимости, некоторые частные случаи двумерной зависимости проводимости, анизотропная электрическая проводимость, вложенные круговые аномалии и т.д.).

В работе [8] предложен приближенный аналитический метод решения прямой задачи ЭИТ в однородном круге с произвольным расположением неперекрывающихся друг друга электродов, в случае когда на электродах известно контактное сопротивление z_l и напряжение электрического тока U_l , т.е. используется граничное условие (3). Решение задачи ищется в полярных координатах разделением переменных в виде тригонометрических рядов Фурье [3]. Неизвестные коэффициенты Фурье в аналитическом решении получаются из решения системы линейных уравнений бесконечного размера [8].

Целью данной работы является применение методики [8] для получения приближенного аналитического решения для неоднородного круга с концентрической вставкой для полной электродной модели (3) – (4), когда на электродах учитывается контактное сопротивление и известна сила подаваемого тока.

Постановка задачи

Математическая постановка прямой задачи ЭИТ может быть получена из стационарных уравнений Максвелла, закона Ома для проводников и необходимых для получения однозначного решения граничных условий [9].

Прямая задача электроимпедансной томографии в двумерном случае (нахождение электрического потенциала $u(x,y)$ по известному распределению электропроводности $\sigma(x,y) > 0$ внутри области $\bar{\Omega}$ и силы электрического тока на электродах формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma(x,y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad (x,y) \in \Omega. \quad (5)$$

На границе, контактирующей с воздухом, задается производная, равная нулю

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (x,y) \notin \Gamma_l; \quad \Gamma_l - l\text{-й электрод}, \quad l = 1, \dots, NE. \quad (6)$$

На электродах ($l = 1, \dots, NE$ – количество электродов) задаются граничные условия полной электродной модели СЕМ:

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = U_l, \quad (x,y) \in \Gamma_l; \quad (7.1)$$

$$\int_{\Gamma_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} dl = I_l. \quad (7.2)$$

Здесь z_l – контактное сопротивление электрода; U_l – напряжение на электроде; I_l – сила тока на электроде. В [10] доказано, что для того, чтобы постановка задачи (5) – (7) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы сумма токов и сумма напряжений равнялись нулю: $\sum_{l=1}^{NE} I_l = 0$, $\sum_{l=1}^{NE} U_l = 0$.

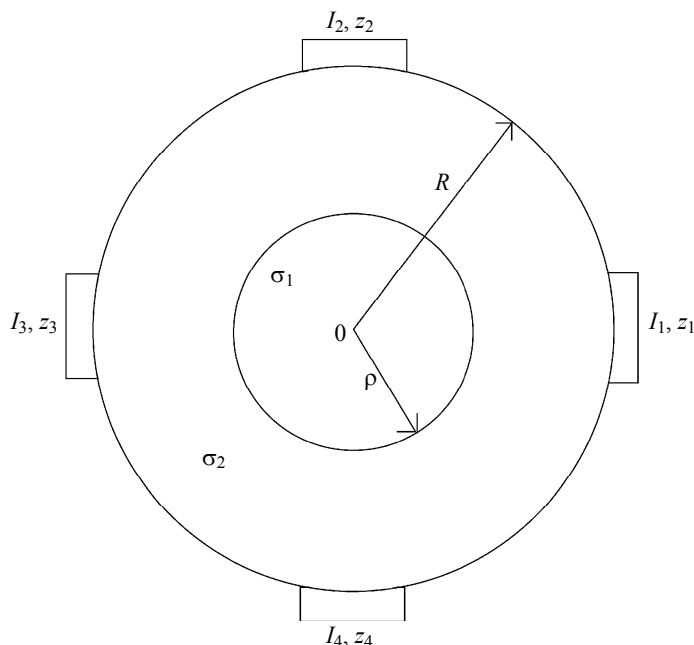


Рис. 2. Область исследования с указанием положения размещения электродов и изменения электрической проводимости σ
Fig. 2. Region under study with the shown position of electrode arrangement and changes in electric conductivity σ

Предположим, что область исследования Ω – круг радиуса R (рис. 2). На границе круга $r = R$ размещены NE электродов полуширины w , координаты центров которых θ_l – известны. Также известно распределение электрической проводимости:

$$\sigma(x, y) = \sigma(r, \theta) = \begin{cases} \sigma_1, & 0 \leq r < \rho, \quad 0 < \theta \leq 2\pi, \\ \sigma_2, & \rho < r \leq R, \quad 0 < \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Здесь σ_1, σ_2 – положительные постоянные.

На границе резкого изменения значений проводимости ($r = \rho$) используются граничные условия четвертого рода: непрерывность изменения решения (электрического потенциала) и плотности электрического тока. На внешней границе области 2 известны значения контактного сопротивления z_l и силы тока I_l на электродах.

С учетом этих условий окончательная математическая постановка задачи примет вид

$$\begin{aligned}
 r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= 0, \quad 0 \leq r < \rho, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \\
 r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= 0, \quad \rho < r < R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \\
 r = \rho : u &= v, \quad -\sigma_1 \frac{\partial u}{\partial r} = -\sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r}; \\
 r = R : -\sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r} &= 0, \quad \theta \notin [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad l = 1, \dots, NE; \\
 r = R : v + z_l \sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r} &= U_l, \quad \theta \in [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad R \int_{\theta_l - w}^{\theta_l + w} \sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r} d\theta = I_l, \quad l = 1 \cap 2 \cap \dots \cap NE.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что в постановке (8) неизвестным является напряжение на электродах U_l , которое легко может быть исключено, и последнее граничное условие в (8) примет вид

$$\begin{aligned}
 r = R : v + z_l \sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{2w} \int_{\theta_l - w}^{\theta_l + w} v(R, \tau) d\tau &= \frac{z_l I_l}{2wR}, \\
 \theta \in [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad l &= 1 \cap 2 \cap \dots \cap NE.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Получение решения с использованием рядов Фурье

Решение задачи (8), (9) будем искать в следующем виде [3, 7, 8]:

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta) &= u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\frac{r}{R} \right)^n f_n(\theta, C'_n, S'_n), \quad 0 \leq r \leq \rho; \\
 v(r, \theta) &= v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{r}{R} \right)^n + b_n \left(\frac{r}{R} \right)^{-n} \right] f_n(\theta, C'_n, S'_n), \quad \rho \leq r \leq R.
 \end{aligned}$$

Здесь $f_n(\theta, C'_n, S'_n) = C'_n \cos(n\theta) + S'_n \sin(n\theta)$; $u_0, v_0, \{a_n\}, \{b_n\}, \{d_n\}, \{C'_n\}, \{S'_n\}$ – неизвестные пока постоянные величины, которые в дальнейшем будут найдены из дополнительных условий (8), (9).

Сначала воспользуемся условиями сопряжения при $r = \rho$:

$$\begin{aligned}
 u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^n f_n(\theta, C'_n, S'_n) &= v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^n + b_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^{-n} \right] f_n(\theta, C'_n, S'_n); \\
 -\sigma_1 \sum_{n=1}^{\infty} n d_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-1} f_n(\theta, C'_n, S'_n) &= -\sigma_2 \sum_{n=1}^{\infty} n \left[a_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-1} - b_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^{-n-1} \right] f_n(\theta, C'_n, S'_n).
 \end{aligned}$$

Для выполнения этих условий потребуем

$$\begin{aligned}
 u_0 &= v_0; \\
 d_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^n &= a_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^n + b_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^{-n};
 \end{aligned}$$

$$\sigma_1 d_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^n = \sigma_2 \left[a_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^n - b_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^{-n} \right].$$

Из второго и третьего равенства получим

$$a_n = 0.5 \left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) d_n, \quad b_n = 0.5 \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2n} d_n.$$

Если ввести обозначения $C_n = d_n C'_n$ и $S_n = d_n S'_n$, то решение задачи (8) с учетом условий сопряжения будет выглядеть следующим образом:

$$u(r, \theta) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n [C_n \cos(n\theta) + S_n \sin(n\theta)], \quad 0 \leq r \leq \rho;$$

$$v(r, \theta) = u_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^n + \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2n} \left(\frac{r}{R} \right)^{-n} \right] [C_n \cos(n\theta) + S_n \sin(n\theta)],$$

$$\rho \leq r \leq R.$$

Для нахождения оставшихся неизвестных коэффициентов u_0 , $\{C_n\}$, $\{S_n\}$ воспользуемся граничными условиями при $r = R$ и методикой, представленной в [8]. Перепишем граничные условия при $r = R$ в (8), (9) в виде

$$\sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R} = \begin{cases} \frac{I_l}{2wR} + \frac{1}{2wz_l} \int_{\theta_l-w}^{\theta_l+w} v(R, \tau) d\tau - \frac{v(R, \theta)}{z_l}, \\ \theta \in [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad l = 1 \cap 2 \cap \dots \cap NE, \\ 0, \quad \theta \notin [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad l = 1, 2, \dots, NE. \end{cases} \quad (10)$$

Подставив вместо

$$v(r, \theta) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A \left(\frac{r}{R} \right)^n + B(n) \left(\frac{r}{R} \right)^{-n} \right] [C_n \cos(n\theta) + S_n \sin(n\theta)], \quad \rho \leq r \leq R$$

и произведя необходимое дифференцирование и интегрирование, получим

$$\frac{\sigma_2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} n(A - B(n)) f_n(\theta, C_n, S_n) =$$

$$= \begin{cases} \frac{I_l}{2wR} + \frac{1}{wz_l} \left\{ wu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(A + B(n)) \sin(nw)}{n} f_n(\theta_l, C_n, S_n) \right\} - \\ - \frac{1}{z_l} \left\{ u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A + B(n)) f_n(\theta, C_n, S_n) \right\}, \\ \theta \in [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad l = 1 \cap 2 \cap \dots \cap NE, \\ 0, \quad \theta \notin [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad l = 1, 2, \dots, NE. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь $A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)$; $B(k) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2k}$.

Для нахождения первых N коэффициентов C_n , S_n ($n = 1, \dots, N$) можно, как и в работе [8], умножая (11) на $\cos(k\theta)$ ($k = 1, \dots, N$) или $\sin(k\theta)$ ($k = 1, \dots, N$) и интегрируя обе части равенства от 0 до 2π , получить $2N$ линейных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_2 \pi [A - B(k)] k C_k}{R} + \sum_{n=1}^N C_n \left\{ [A + B(n)] \sum_{l=1}^{NE} \frac{1}{z_l} (M_{lkn}^{11} - P_{kn} \cos(n\theta_l) \cos(k\theta_l)) \right\} + \\ & + \sum_{n=1}^N S_n \left\{ [A + B(n)] \sum_{l=1}^{NE} \frac{1}{z_l} (M_{lkn}^{12} - P_{kn} \sin(n\theta_l) \cos(k\theta_l)) \right\} = \\ & = \frac{\sin(kw)}{kwR} \sum_{n=1}^{NE} I_l \cos(k\theta_l), \quad k = 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_2 \pi [A - B(k)] k S_k}{R} + \sum_{n=1}^N C_n \left\{ [A + B(n)] \sum_{l=1}^{NE} \frac{1}{z_l} (M_{lkn}^{12} - P_{kn} \cos(n\theta_l) \sin(k\theta_l)) \right\} + \\ & + \sum_{n=1}^N S_n \left\{ [A + B(n)] \sum_{l=1}^{NE} \frac{1}{z_l} (M_{lkn}^{22} - P_{kn} \sin(n\theta_l) \sin(k\theta_l)) \right\} = \\ & = \frac{\sin(kw)}{kwR} \sum_{n=1}^{NE} I_l \sin(k\theta_l), \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь [8]

$$\begin{aligned} M_{lkn}^{11} &= \begin{cases} w + \frac{\cos(2k\theta_l) \sin(2kw)}{2k}, & k = n; \\ \frac{\cos((k+n)\theta_l) \sin((k+n)w)}{k+n} + \frac{\cos((k-n)\theta_l) \sin((k-n)w)}{k-n}, & k \neq n. \end{cases} \\ M_{lkn}^{12} &= \begin{cases} \frac{\sin(2k\theta_l) \sin(2kw)}{2k}, & k = n; \\ \frac{\sin((k+n)\theta_l) \sin((k+n)w)}{k+n} - \frac{\sin((k-n)\theta_l) \sin((k-n)w)}{k-n}, & k \neq n. \end{cases} \\ M_{lkn}^{22} &= \begin{cases} w - \frac{\cos(2k\theta_l) \sin(2kw)}{2k}, & k = n; \\ \frac{\cos((k-n)\theta_l) \sin((k-n)w)}{k-n} - \frac{\cos((k+n)\theta_l) \sin((k+n)w)}{k+n}, & k \neq n. \end{cases} \\ P_{kn} &= \frac{2 \sin(nw) \sin(kw)}{nkw}. \end{aligned}$$

Для рассматриваемых в работе значений параметров матрица этой системы линейных уравнений имеет строгое диагональное преобладание. Ее определитель отличен от нуля, что подтверждается расчетами используемого для решения системы (12), (13) математического пакета MathCad, который хорошо себя зарекомендовал в том числе и для решения плохообусловленных систем линейных уравнений (В нашем случае число обусловленности матрицы системы при $N = 700$ около 10^3).

После решения этой системы линейных уравнений значение коэффициента u_0 находится из условия $\sum_{l=1}^{NE} U_l = 0$:

$$u_0 = \frac{- \sum_{l=1}^{NE} \left\{ \frac{z_l I_l}{2wR} + \frac{1}{w} \sum_{n=1}^N \frac{[A + B(n)]}{n} \sin(nw) [C_n \cos(n\theta_l) + S_n \sin(n\theta_l)] \right\}}{NE}. \quad (14)$$

Результаты расчетов

Проверка полученного приближенного решения прямой задачи электроимпедансной томографии в однородном по проводимости круге с граничными условиями на электродах с учетом контактного сопротивления проводилась для условий, взятых из работы [8]: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$, $R = 1$, $NE = 4$, $w = 0.25$, $z_1 = 1.0$, $z_2 = 0.1$, $z_3 = 0.01$, $z_4 = 0.1$. Для сравнения результатов расчетов прямых задач ЭИТ с разным способом задания граничных условий на электродах для (8) (в [8] известны значения $U_1 = 7$, $U_2 = -3$, $U_3 = -7$, $U_4 = 3$; в данной работе требуется задание значений I_1, I_2, I_3, I_4) выполнялась следующая вычислительная процедура в среде программирования MathCad. Сначала для выбранного N решалась задача с заданными значениями $\{U_l\}$, потом из ее решения аналитическим интегрированием определялись значения силы тока на электродах $\{I_l\}$ из формулы

$$I_l = R \int_{\theta_l - w}^{\theta_l + w} \sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r} d\theta, l = 1, 2, \dots, NE.$$

И, наконец, эти значения $\{I_l\}$ использовались в качестве известных величин в постановке (8) с граничным условием (9). Значения $\{U_l\}$ считались неизвестными и вычислялись из

$$(U_l)_{\text{calc}} = \frac{z_l I_l}{2wR} + \frac{1}{w} \left\{ wu_0 + \sum_{n=1}^N \frac{(A + B(n)) \sin(nw)}{n} (C_n \cos(n\theta_l) + S_n \sin(n\theta_l)) \right\},$$

$$l = 1, 2, \dots, NE. \quad (15)$$

Полученные решения для электрического потенциала и плотности электрического тока сравнивались с аналогичными величинами, полученными в [8], на границе области при $r = R$ для различных учтенных членов ряда Фурье N (рис. 3).

В таблице приведены рассчитанные из полученного решения с помощью (15) значения напряжения на электродах и диапазон изменения разности между рассчитанными значениями электрического потенциала и плотности электрического тока на границе круга.

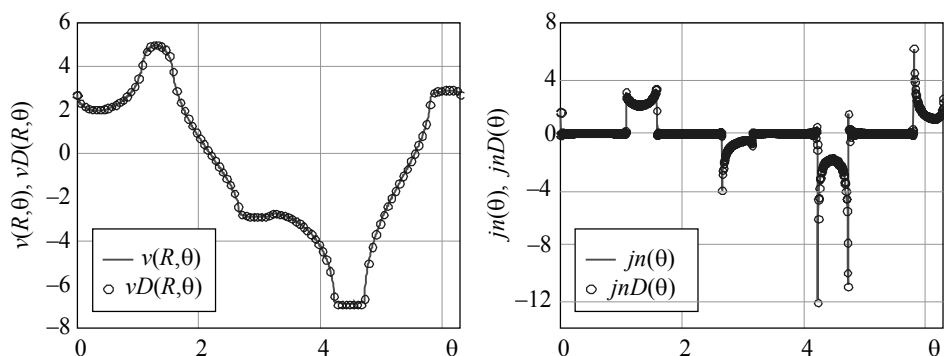


Рис. 3. Распределение приближенного аналитического решения на границе круга при $N = 700$. Слева – электрический потенциал $v(R, \theta)$, справа – плотность электрического тока (2). Значки – решение из [8]

Fig. 3. Distribution of the approximate analytical solution at the circle boundary at $N = 700$. On the left, the electric potential $v(R, \theta)$; on the right, the electric current density (2). The signs are the solution from [8]

Рассчитанные значения напряжения $\{U_B\}$ по формуле (15) и диапазон изменения разности решения [8] и полученного решения и их производных

	$N = 700$	$N = 1400$	$N = 2100$
$(U_1)_{\text{calc}}$	6,956	6.979	6.985
$(U_2)_{\text{calc}}$	–3.001	–3.001	–3.001
$(U_3)_{\text{calc}}$	–6.921	–6.960	–6.973
$(U_4)_{\text{calc}}$	2.966	2.983	2.988
$v(R, \theta) - vD(R, \theta)$	$\in [-0.04; 0.08]$	$\in [-0.02; 0.04]$	$\in [-0.01; 0.03]$
$jn(\theta) - jnD(\theta)$	$\in [-0.05; 0.21]$	$\in [-0.02; 0.09]$	$\in [-0.01; 0.07]$

Из таблицы видно, что при увеличении количества членов ряда N разница между вычисленными и задаваемыми значениями напряжения становится меньше. Также меньше становится диапазон расхождения значений потенциала и его производной, полученных при различных способах реализации полной электродной модели, учитывающей контактное сопротивление электродов. Здесь $v(R, \theta)$ и $jn(\theta)$ – рассчитанные по предлагаемому методу величины в случае, когда известна сила тока I на электродах; $vD(R, \theta)$ и $jnD(\theta)$ – полученные при приближенном аналитическом решении задачи Неймана – Робина (известны значения напряжения U на электродах) для уравнения Лапласа [8].

Заключение

Получено аналитическое решение для уравнения эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами в круге, на границе которого задаются условия Неймана и условия третьего рода с интегралом от искомого решения. Такая математическая постановка используется для прямой двумерной задачи электроимпедансной томографии в круге, проводимость которого является кусочно-постоянной функцией от радиальной координаты. На границе круга в местах крепления электродов рассматриваются интегро-дифференциальные граничные условия нового типа, с помощью которых учитывается контактное сопротивление электродов при заданной силе тока на них. Решение получено с использованием разделения переменных и тригонометрических рядов. Оно может использоваться для настройки и апробации разрабатываемых вычислительных технологий для решения прямых и обратных задач подобного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пеккер Я.С., Бразовский К.С., Усов В.Ю. и др. Электроимпедансная томография. Томск: НТЛ, 2004. 192 с.
2. Гуляев Ю.В., Корженевский А.В., Черепенин В.А. О возможности использования электроимпедансной компьютерной томографии для диагностики поражения легких вирусом COVID-19 // Журнал радиоэлектроники. 2020. № 5.
3. Pidcock M.K., Kuzuoglu M., Leblebicioglu K. Analytic and semi-analytic solutions in electrical impedance tomography. I. Two-dimensional problems // Physiol. Meas. 1995. V. 16(2). P. 77–90.
4. Boyle A., Adler A. Electrode models under shape deformation in electrical impedance tomography // Journal of Physics: Conference Series. 2010. V. 224. 012051.
5. Jehl M., Dedner A., Betcke T., Aristovich K., Klöfkom R., Holder D. A fast parallel solver for the forward problem in electrical impedance tomography // IEEE Trans Biomed Eng. 2015. V. 62(1). P. 126–137.

6. Шерина Е.С., Старченко А.В. Численное моделирование задачи электроимпедансной томографии и исследование подхода на основе метода конечных объемов // Бюллетень сибирской медицины. 2014. Т. 13. № 4. С. 156–164.
7. Isaacson D. Distinguishability of Conductivities by Electric Current Computed Tomography // IEEE Transactions on medical imaging. 1986. V. MI-5. No. 5. P. 91–95.
8. Demidenko E. An analytic solution to the homogeneous EIT problem on the 2D disk and its application to estimation of electrode contact impedances // Physiol Meas. 2011. V. 32(9). P. 1453–1471.
9. Borcea L. Electric Impedance Tomography. Topical Review // Inverse Problems. 2002. V. 18. P. R99–R136.
10. Somersalo E., Cheney M., Isaacson D. Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography // SIAM J. Appl. Math. 2002. V. 52. P. 1023–40.

Статья поступила 16.08.2021

Starchenko A.V., Sednev M.A., Panko S.V. (2021) AN APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION TO THE FORWARD INHOMOGENEOUS EIT PROBLEM ON THE 2D DISK WITH ALLOWANCE FOR THE ELECTRODE CONTACT IMPEDANCE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 19–29

DOI 10.17223/19988621/74/3

Keywords: elliptic equation in a circle, piecewise constant coefficients, complete electrode model with integro-differential boundary condition, Fourier series

An approximate analytical solution is obtained for the electrical potential distribution in a two-dimensional circle with radially inhomogeneous conductivity σ for the boundary conditions of the complete electrode model with allowance for the contact resistance of the electrodes z_l :

$$\begin{aligned}
 r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= 0, \quad 0 \leq r < \rho, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \\
 r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= 0, \quad \rho < r < R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \\
 r = \rho : u &= v, \quad -\sigma_1 \frac{\partial u}{\partial r} = -\sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r}; \\
 r = R : -\sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r} &= 0, \quad \theta \notin [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad l = 1, \dots, NE; \\
 r = R : v + z_l \sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{2w} \int_{\theta_l - w}^{\theta_l + w} v(R, \tau) d\tau &= \frac{z_l I_l}{2wR}, \\
 \theta \in [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad l &= 1 \cap 2 \cap \dots \cap NE.
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

An approximate solution is obtained by separating variables and using Fourier series for the coefficients of which it is necessary to solve a system of linear equations [8]. The obtained solution is compared with an approximate analytical solution of a similar problem for a homogeneous disk and Neumann–Robin boundary conditions [8]. A good agreement has been obtained. Its quality is improved with an increase in the number of considered terms of the series.

AMS Mathematical Subject Classification: MSC 35C09, 35J25

Financial support. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement No. 075-02-2021-1392).

Alexander V. STARCHENKO (Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Computational Mathematics and Computer Modelling of National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation. Scientific Researcher, Regional Scientific Educational Mathematical Center of Tomsk State University).

Maxim A. SEDNEV (Master Student of Department of Computational Mathematics and Computer Modelling of National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation.)

Sergey V. PANKO (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

REFERENCES

1. Pekker Ya.S., Brazovskiy K.S., Usov V.Yu. et. al. (2004) *Electrical Impedance Tomography*. Tomsk: NTL Publishing.
2. Gulyayev Yu.V., Korzhenevskiy A.V., Cherepenin V.A. O vozmozhnosti ispol'zovaniya elektroimpedansnoy komp'yuternoy tomografii dlya diagnostiki porazheniya legkikh virusom COVID-19 [On the possibility of using electrical impedance computed tomography for diagnosing lung damage with the COVID-19 virus]. *Zhurnal Radioelektroniki – Journal of Radio Electronics*. (5). Access mode: <http://jre.cplire.ru/jre/may20/8/text.pdf>. DOI: 10.30898/1684-1719.2020.5.8.
3. Pidcock M.K., Kuzuoglu M., Leblebicioglu K. (1995) Analytic and semi-analytic solutions in electrical impedance tomography. I. Two-dimensional problems. *Physiological Measurement*. 16(2). pp. 77–90.
4. Boyle A., Adler A. (2010) Electrode Models under Shape Deformation in Electrical Impedance Tomography. *Journal of Physics: Conference Series*. 224. 012051. DOI: 10.1088/1742-6596/224/1/012051.
5. Jehl M., Dedner A., Betcke T., Aristovich K., Klöfkom R., Holder D. (2015) A fast parallel solver for the forward problem in electrical impedance tomography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 62(1). pp. 126–137. DOI: 10.1109/TBME.2014.2342280
6. Sherina Y.S., Starchenko A.V. (2014) Chislennoye modelirovaniye zadachi elektroimpedansnoy tomografii i issledovaniye podkhoda na osnove metoda konechnykh ob'yemov [Numerical simulation of electrical impedance tomography problem and study of approach based on finite volume method]. *Byulleten' sibirskoy meditsiny – Bulletin of Siberian Medicine*. 13(4). pp. 156–164. Access mode: <https://doi.org/10.20538/1682-0363-2014-4-156-164>
7. Isaacson D. (1986) Distinguishability of Conductivities by Electric Current Computed Tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*. MI-5(5). pp. 91–95.
8. Demidenko E. (2011) An analytic solution to the homogeneous EIT problem on the 2D disk and its application to estimation of electrode contact impedances. *Physiological Measurement*. 32(9). pp. 1453–1471. DOI: 10.1088/0967-3334/32/9/008.
9. Borcea L. (2002) Electric Impedance Tomography. Topical Review. *Inverse Problems*. 18. pp. R99–R136.
10. Somersalo E, Cheney M., Isaacson D. (2002) Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 52(4). pp. 1023–1040. DOI: 10.1137/0152060.

Received: August 16, 2021

А.Ю. Степанова, Е.А. Тимошенко

МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭНДОМОРФИЗМОВ ПРИМАРНЫХ ГРУПП МАЛЫХ РАНГОВ¹

Для колец эндоморфизмов конечных примарных абелевых групп ранга 2 и 3 построены изоморфные им кольца обобщённых матриц. В каждом из этих матричных колец найдены необходимые и достаточные условия обратимости матриц, а также формулы для построения обратной матрицы.

Ключевые слова: примарная группа, кольцо эндоморфизмов, кольцо обобщённых матриц, обратная матрица.

Кольца обобщённых, или формальных, матриц берут начало в исследованиях Мориты (см. [1]). За последние десятилетия появилось много работ, посвящённых кольцам обобщённых матриц, а также модулям над ними; в первую очередь выделим монографию Крылова и Туганбаева [2]. Модули над кольцами обобщённых матриц порядка 2 и 3 рассматривались, в частности, в работах [3, 4]. В некоторых кольцах обобщённых матриц удаётся ввести понятие определителя матрицы (подробнее см. [5, 6]).

Кольца обобщённых матриц часто возникают при изучении колец эндоморфизмов прямых сумм абелевых групп и модулей. В данной статье представлены исследования колец эндоморфизмов конечных примарных групп ранга 2 и 3 и соответствующих им колец обобщённых матриц. Для таких матриц найдены критерии обратимости и формулы, позволяющие построить обратную матрицу.

Представление эндоморфизмов конечных p -групп ранга 2

Все группы, встречающиеся в статье, являются абелевыми. Через $\mathbf{Z}$ обозначается кольцо (и группа) целых чисел; $\blacksquare$ – символ конца доказательства либо его отсутствия.

Пусть p – простое число. Известно, что если $m \geq n > 0$, то:

1) элементы группы $\text{Hom}(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ (элемент $a + p^n\mathbf{Z}$ сопоставляется гомоморфизму $\psi \in \text{Hom}(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$, такому, что $\psi(z + p^m\mathbf{Z}) = az + p^n\mathbf{Z}$ при всех $z \in \mathbf{Z}$);

2) элементы группы $\text{Hom}(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ (элемент $b + p^n\mathbf{Z}$ сопоставляется гомоморфизму $\psi \in \text{Hom}(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$, такому, что $\psi(z + p^n\mathbf{Z}) = p^{m-n}bz + p^m\mathbf{Z}$ при всех z).

Заметим, что в каждом из двух случаев указанная биекция представляет собой групповой изоморфизм.

Всякая конечная p -группа H ранга 2 может быть отождествлена с подходящей группой вида $(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$, где $m \geq n > 0$; её элементы будем записывать как

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2021-1392).

вектор-столбцы. Из сказанного выше следует, что эндоморфизмы группы H находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества

$$R_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

состоящего из обобщённых матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. При этом эндоморфизму φ группы H сопоставляется та единственная матрица вида (1), для которой при любых $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$ выполнено

$$\varphi \begin{pmatrix} z_1 + p^m\mathbf{Z} \\ z_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + p^{m-n}bz_2 + p^m\mathbf{Z} \\ cz_1 + dz_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что указанное соответствие:

- является групповым изоморфизмом;
- сопоставляет тождественному эндоморфизму группы H матрицу

$$E = \begin{pmatrix} 1 + p^m\mathbf{Z} & 0 + p^n\mathbf{Z} \\ 0 + p^n\mathbf{Z} & 1 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Пусть эндоморфизму φ' группы H соответствует матрица

$$A' = \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbf{Z} & b' + p^n\mathbf{Z} \\ c' + p^n\mathbf{Z} & d' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Тогда для любых целых чисел z_1 и z_2 выполнено

$$\begin{aligned} (\varphi\varphi') \begin{pmatrix} z_1 + p^m\mathbf{Z} \\ z_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} &= \varphi \begin{pmatrix} a'z_1 + p^{m-n}b'z_2 + p^m\mathbf{Z} \\ c'z_1 + d'z_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} aa'z_1 + p^{m-n}ab'z_2 + p^{m-n}bc'z_1 + p^{m-n}bd'z_2 + p^m\mathbf{Z} \\ ca'z_1 + p^{m-n}cb'z_2 + dc'z_1 + dd'z_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (aa' + p^{m-n}bc')z_1 + p^{m-n}(ab' + bd')z_2 + p^m\mathbf{Z} \\ (ca' + dc')z_1 + (p^{m-n}cb' + dd')z_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Введём на R_2 операцию умножения, считая, что для матриц (1) и (3) выполнено

$$AA' = \begin{pmatrix} aa' + p^{m-n}bc' + p^m\mathbf{Z} & ab' + bd' + p^n\mathbf{Z} \\ ca' + dc' + p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}cb' + dd' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Из наших рассуждений следует, что эта операция задана корректно и что верна

Теорема 1. Множество обобщённых матриц R_2 с поэлементным сложением и операцией умножения, задаваемой равенством (4), образует кольцо, изоморфное кольцу эндоморфизмов $\text{End } H$ группы H . Единичным элементом кольца R_2 служит матрица (2). ■

Кольцо R_2 для случая $m > n$ рассматривалось также в [2, 5, 6].

Определим элемент матрицы $A \in R_2$ вида (1) назовём элемент $|A| = ad - p^{m-n}bc + p^n\mathbf{Z}$ кольца $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$.

Если для матриц (1) и (3) выполнено $A = A'$, то в силу неравенства $m \geq n$ будут справедливы следующие сравнения по модулю p^n :

$$a \equiv a', b \equiv b', c \equiv c', d \equiv d', ad - p^{m-n}bc \equiv a'd' - p^{m-n}b'c'.$$

Значит, понятие определителя введено корректно. Ясно также, что $|E| = 1 + p^n \mathbf{Z}$.

Предложение 2. Для любых $A, A' \in R_2$ выполнено $|AA'| = |A| \cdot |A'|$.

Доказательство. Действительно, для матрицы (4) имеем

$$\begin{aligned} |AA'| &= (aa' + p^{m-n}bc')(p^{m-n}cb' + dd') - p^{m-n}(ab' + bd')(ca' + dc') + p^n \mathbf{Z} = \\ &= aa'dd' + p^{m-n}aa'cb' + p^{m-n}bc'dd' + p^{2(m-n)}bc'cb' - \\ &- p^{m-n}ab'ca' - p^{m-n}ab'dc' - p^{m-n}bd'ca' - p^{m-n}bd'dc' + p^n \mathbf{Z} = \\ &= aa'dd' - p^{m-n}(ab'dc' + bd'ca') + p^{2(m-n)}bc'cb' + p^n \mathbf{Z} = \\ &= (ad - p^{m-n}bc)(a'd' - p^{m-n}b'c') + p^n \mathbf{Z} = |A| \cdot |A'|, \end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Если $m = n$, то R_2 – это кольцо матриц, элементы которых принадлежат одному и тому же кольцу вычетов $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$. В этом случае операция умножения и определитель в кольце R_2 совпадают с обычными; поэтому вопрос об обратимости матриц решается стандартным образом в соответствии со следующей теоремой (через K_l в ней обозначено кольцо $(l \times l)$ -матриц над коммутативным кольцом K , содержащим единицу):

Теорема 3 [7]. Матрица $A = (a_{ij}) \in K_l$ обратима в K_l тогда и только тогда, когда её определитель $\det A$ обратим в кольце K . Если это условие выполнено, то обратная к A матрица имеет вид $A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot A^*$, где

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{l1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{l2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1l} & A_{2l} & \dots & A_{ll} \end{pmatrix}$$

(через A_{ij} обозначено алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A). ■

Таким образом, нам остаётся рассмотреть случай $m > n$.

Теорема 4. Пусть $m > n > 0$. Для матрицы $A \in R_2$ вида (1) равносильны следующие условия:

- 1) Числа a и d не делятся на p .
- 2) Элемент $|A|$ обратим в кольце $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$.
- 3) Матрица A обратима слева в кольце R_2 .
- 4) Матрица A обратима справа в кольце R_2 .
- 5) Матрица A обратима в кольце R_2 .

Если эти условия выполнены, то матрица A^{-1} находится по формуле

$$\begin{pmatrix} W(1 + p^{m-n}bcF) + p^m \mathbf{Z} & -bF + p^n \mathbf{Z} \\ -cF + p^n \mathbf{Z} & aF + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $F + p^n \mathbf{Z} = |A|^{-1} \in \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$ и $W + p^m \mathbf{Z} = (a + p^{m-n}bc)^{-1} \in \mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z}$.

Доказательство. Импликация 5) $\Rightarrow$ 3) очевидна. Поскольку $m > n$, мы можем записать следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} |A| - \text{обратимый элемент в } \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} &\Leftrightarrow \text{НОД}(ad - p^{m-n}bc, p) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{НОД}(ad, p) = 1 \Leftrightarrow \text{НОД}(a, p) = \text{НОД}(d, p) = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, условия 1) и 2) равносильны.

3) $\Rightarrow$ 2) и 4) $\Rightarrow$ 2). Если $B \in R_2$ – левая обратная или правая обратная матрица для A , то по предложению 2 имеем $|A| \cdot |B| = |E| = 1 + p^n \mathbf{Z}$. Таким образом, смежный класс $|B| \in \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$ является обратным элементом для смежного класса $|A|$.

2) $\Rightarrow$ 4). Пусть $|A|$ – обратимый элемент в $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$. Так как справедлива импликация 2) $\Rightarrow$ 1), то число a не делится на p и, следовательно, элемент $a + p^m \mathbf{Z}$ обратим в кольце $\mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z}$, т.е. существует элемент $W + p^m \mathbf{Z} = (a + p^m \mathbf{Z})^{-1}$. Поскольку $m > n$, то $aW + p^n \mathbf{Z} = 1 + p^n \mathbf{Z}$. Убедимся, что матрица B , задаваемая формулой (5), является правой обратной для матрицы A . Для элементов x_{ij} матрицы $X = AB$ имеем

$$\begin{aligned} x_{11} &= aW(1 + p^{m-n}bcF) - p^{m-n}bcF + p^m \mathbf{Z} = aW + p^m \mathbf{Z} = 1 + p^m \mathbf{Z}; \\ x_{12} &= -abF + abF + p^n \mathbf{Z} = 0 + p^n \mathbf{Z}; \\ x_{22} &= -p^{m-n}bcF + adF + p^n \mathbf{Z} = (F + p^n \mathbf{Z})(ad - p^{m-n}bc + p^n \mathbf{Z}) = 1 + p^n \mathbf{Z}; \\ x_{21} &= cW(1 + p^{m-n}bcF) - cdF + p^n \mathbf{Z} = cW(1 + p^{m-n}bcF) - cWadF + p^n \mathbf{Z} = \\ &= cW(1 + p^{m-n}bcF - adF) + p^n \mathbf{Z} = cW[(1 + p^n \mathbf{Z}) - x_{22}] = 0 + p^n \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Таким образом, $AB = E$, что и требовалось.

4) $\Rightarrow$ 5). Пусть $B \in R_2$ и $AB = E$. Так как справедлива импликация 3) $\Rightarrow$ 2), то смежный класс $|B|$ является обратимым элементом кольца $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$. Пользуясь справедливостью импликации 2) $\Rightarrow$ 4), мы можем найти матрицу $B' \in R_2$, такую, что $BB' = E$. Тогда $A = AE = A(BB') = (AB)B' = EB' = B'$. Таким образом, $BA = E$, т.е. B – матрица, обратная к A . ■

В частности, мы получили, что обратимость матрицы $A \in R_2$ эквивалентна обратимости элемента $|A| \in \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$ как в случае $m = n$, так и в случае $m > n$ (что согласуется с результатами из [6]).

Замечание. Обратная матрица определена однозначно (если она существует). Отсюда, в частности, сразу следует, что задаваемая формулой (5) матрица не зависит от выбора конкретных чисел $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, удовлетворяющих равенству (1).

Представление эндоморфизмов конечных p -групп ранга 3

Перейдём к рассмотрению конечных p -групп ранга 3. Каждую такую группу H можно отождествить с группой вида $(\mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z})$, где $m \geq n \geq k > 0$. Эндоморфизмы группы H находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества

$$R_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

состоящего из обобщённых матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1 + p^m \mathbf{Z} & a_2 + p^n \mathbf{Z} & a_3 + p^k \mathbf{Z} \\ b_1 + p^n \mathbf{Z} & b_2 + p^n \mathbf{Z} & b_3 + p^k \mathbf{Z} \\ c_1 + p^k \mathbf{Z} & c_2 + p^k \mathbf{Z} & c_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $a_j, b_j, c_j \in \mathbf{Z}$. Эндоморфизму φ группы H сопоставляется та единственная матрица вида (6), для которой при любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{Z}$ выполнено

$$\varphi \begin{pmatrix} z_1 + p^m \mathbf{Z} \\ z_2 + p^n \mathbf{Z} \\ z_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 z_1 + p^{m-n} a_2 z_2 + p^{m-k} a_3 z_3 + p^m \mathbf{Z} \\ b_1 z_1 + b_2 z_2 + p^{n-k} b_3 z_3 + p^n \mathbf{Z} \\ c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Указанное соответствие является групповым изоморфизмом; ясно также, что оно сопоставляет тождественному эндоморфизму группы H матрицу

$$E = \begin{pmatrix} 1 + p^m \mathbf{Z} & 0 + p^n \mathbf{Z} & 0 + p^k \mathbf{Z} \\ 0 + p^n \mathbf{Z} & 1 + p^n \mathbf{Z} & 0 + p^k \mathbf{Z} \\ 0 + p^k \mathbf{Z} & 0 + p^k \mathbf{Z} & 1 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Пусть в дополнение к φ имеется эндоморфизм $\varphi' \in \text{End } H$, которому соответствует матрица

$$A' = \begin{pmatrix} a'_1 + p^m \mathbf{Z} & a'_2 + p^n \mathbf{Z} & a'_3 + p^k \mathbf{Z} \\ b'_1 + p^n \mathbf{Z} & b'_2 + p^n \mathbf{Z} & b'_3 + p^k \mathbf{Z} \\ c'_1 + p^k \mathbf{Z} & c'_2 + p^k \mathbf{Z} & c'_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Непосредственные вычисления выражения

$$(\varphi\varphi') \begin{pmatrix} z_1 + p^m \mathbf{Z} \\ z_2 + p^n \mathbf{Z} \\ z_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} a'_1 z_1 + p^{m-n} a'_2 z_2 + p^{m-k} a'_3 z_3 + p^m \mathbf{Z} \\ b'_1 z_1 + b'_2 z_2 + p^{n-k} b'_3 z_3 + p^n \mathbf{Z} \\ c'_1 z_1 + c'_2 z_2 + c'_3 z_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

где $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{Z}$, показывают, что эндоморфизму $\varphi\varphi'$ соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} \overline{a_1 a'_1 + s a_2 b'_1 + t a_3 c'_1} & \overline{a_1 a'_2 + a_2 b'_2 + t a_3 c'_2} & \overline{a_1 a'_3 + a_2 b'_3 + a_3 c'_3} \\ \overline{b_1 a'_1 + b_2 b'_1 + t b_3 c'_1} & \overline{s b_1 a'_2 + b_2 b'_2 + t b_3 c'_2} & \overline{s b_1 a'_3 + b_2 b'_3 + b_3 c'_3} \\ \overline{c_1 a'_1 + c_2 b'_1 + c_3 c'_1} & \overline{s c_1 a'_2 + c_2 b'_2 + c_3 c'_2} & \overline{s t c_1 a'_3 + t c_2 b'_3 + c_3 c'_3} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Здесь смежные классы $z + p^m \mathbf{Z}$, $z + p^n \mathbf{Z}$ и $z + p^k \mathbf{Z}$ обозначены через $\overline{z}$, $\overline{z}$ и $\overline{z}$ соответственно, а через s и t для краткости обозначены множители p^{m-n} и p^{n-k} .

Введём на R_3 операцию умножения, считая, что произведение AA' матриц, заданных равенствами (6) и (8), равно матрице (9). Наши рассуждения показывают, что эта операция задана корректно и что имеет место

Теорема 5. Множество обобщённых матриц R_3 с поэлементным сложением и указанной выше операцией умножения представляет собой кольцо, изоморфное кольцу $\text{End } H$. Единичным элементом кольца R_3 служит матрица (7). ■

Пусть матрица $A \in R_3$ имеет вид (6). Элемент

$$a_1 b_2 c_3 - p^{n-k} a_1 b_3 c_2 - p^{m-n} a_2 b_1 c_3 + p^{m-k} (a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1) + p^k \mathbf{Z}$$

кольца $\mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z}$ будем называть *определителем* матрицы A и обозначать через $|A|$. Как и в случае кольца R_2 , из условия $m \geq n \geq k$ нетрудно вывести, что понятие определителя введено корректно. Заметим также, что $|E| = 1 + p^k \mathbf{Z}$.

Предложение 6. Для любых $A, A' \in R_3$ выполнено $|AA'| = |A| \cdot |A'|$.

Доказательство. Пусть матрицы A и A' заданы равенствами (6) и (8). Легко видеть, что для целочисленных матриц

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & s a_2 & s t a_3 \\ b_1 & b_2 & t b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \quad J' = \begin{pmatrix} a'_1 & s a'_2 & s t a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & t b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix}$$

справедливы равенства $|A| = \det J + p^k \mathbf{Z}$ и $|A'| = \det J' + p^k \mathbf{Z}$, где через $\det$ обозначен обычный определитель. Далее, сравнивая матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1a'_1 + sa_2b'_1 + sta_3c'_1 & s(a_1a'_2 + a_2b'_2 + ta_3c'_2) & st(a_1a'_3 + a_2b'_3 + a_3c'_3) \\ b_1a'_1 + b_2b'_1 + tb_3c'_1 & sb_1a'_2 + b_2b'_2 + tb_3c'_2 & t(sb_1a'_3 + b_2b'_3 + b_3c'_3) \\ c_1a'_1 + c_2b'_1 + c_3c'_1 & sc_1a'_2 + c_2b'_2 + c_3c'_2 & stc_1a'_3 + tc_2b'_3 + c_3c'_3 \end{pmatrix}$$

(которая, как нетрудно проверить, совпадает с обычным произведением JJ' матриц J и J') с матрицей (9), видим, что $|AA'| = \det(JJ') + p^k\mathbf{Z}$. Для завершения доказательства остаётся заметить, что $\det(JJ') = \det J \cdot \det J'$. ■

Следующий результат доказывается точно так же, как и справедливость импликаций 3) $\Rightarrow$ 2) и 4) $\Rightarrow$ 2) в теореме 4:

Лемма 7. Если матрица A обратима слева или справа в кольце R_3 , то смежный класс $|A|$ является обратимым элементом кольца $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$. ■

Критерии обратимости и формулы для обратных матриц в R_3 будем выводить поэтапно.

Лемма 8. Если определитель матрицы $A \in R_3$ вида (6) обратим в кольце $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ и матрица $B \in R_3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} * & * & F(a_2b_3 - a_3b_2) + p^k\mathbf{Z} \\ * & * & F(p^{m-n}a_3b_1 - a_1b_3) + p^k\mathbf{Z} \\ * & * & F(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1) + p^k\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $F + p^k\mathbf{Z} = |A|^{-1} \in \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$, то третьи столбцы матриц AB и E совпадают.

Доказательство. Для элементов x_{i3} третьего столбца матрицы $X = AB$ имеем

$$\begin{aligned} x_{13} &= a_1F(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2F(p^{m-n}a_3b_1 - a_1b_3) + \\ &+ a_3F(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1) + p^k\mathbf{Z} = F(a_1a_2b_3 - a_1b_2a_3 + \\ &+ p^{m-n}b_1a_2a_3 - a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 - p^{m-n}b_1a_2a_3) + p^k\mathbf{Z} = 0 + p^k\mathbf{Z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{23} &= p^{m-n}b_1F(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2F(p^{m-n}a_3b_1 - a_1b_3) + \\ &+ b_3F(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1) + p^k\mathbf{Z} = F(p^{m-n}b_1a_2b_3 - p^{m-n}b_1b_2a_3 + \\ &+ p^{m-n}b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 + a_1b_2b_3 - p^{m-n}b_1a_2b_3) + p^k\mathbf{Z} = 0 + p^k\mathbf{Z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{33} &= p^{m-k}c_1F(a_2b_3 - a_3b_2) + p^{n-k}c_2F(p^{m-n}a_3b_1 - a_1b_3) + \\ &+ c_3F(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1) + p^k\mathbf{Z} = F[a_1b_2c_3 - p^{n-k}a_1b_3c_2 - p^{m-n}a_2b_1c_3 + \\ &+ p^{m-k}(a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2)] + p^k\mathbf{Z} = (F + p^k\mathbf{Z}) \cdot |A| = 1 + p^k\mathbf{Z}, \end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Лемма 9. Если определитель матрицы $A \in R_3$ вида (6) обратим в кольце $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$, разность $a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1$ не делится на p и матрица $B \in R_3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} * & -a_2Q + p^{n-k}a_3c_2F + p^n\mathbf{Z} & F(a_2b_3 - a_3b_2) + p^k\mathbf{Z} \\ * & a_1Q - p^{m-k}a_3c_1F + p^n\mathbf{Z} & F(p^{m-n}a_3b_1 - a_1b_3) + p^k\mathbf{Z} \\ * & F(p^{m-n}a_2c_1 - a_1c_2) + p^k\mathbf{Z} & F(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1) + p^k\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где целые числа F и Q задаются условиями

$$F + p^k\mathbf{Z} = |A|^{-1} \in \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}, \quad G + p^n\mathbf{Z} = (a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1 + p^n\mathbf{Z})^{-1} \in \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z},$$

$$M = a_1b_3c_2 + p^{m-n}(a_3b_2c_1 - a_3b_1c_2 - a_2b_3c_1), \quad Q = G(1 + p^{n-k}FM),$$

то у матриц AB и E совпадают второй и третий столбцы.

Доказательство. Заметим, что $|A| = a_1b_2c_3 - p^{m-n}a_2b_1c_3 - p^{n-k}M + p^k\mathbf{Z}$. Поскольку $n \geq k$, то справедливо равенство $G(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1) + p^k\mathbf{Z} = 1 + p^k\mathbf{Z}$. Для элементов x_{i2} второго столбца матрицы $X = AB$ имеем

$$\begin{aligned}
x_{12} &= a_1(-a_2Q + p^{n-k}a_3c_2F) + a_2(a_1Q - p^{m-k}a_3c_1F) + \\
&+ p^{n-k}a_3F(p^{m-n}a_2c_1 - a_1c_2) + p^nZ = p^{n-k}a_1c_2a_3F - p^{m-k}c_1a_2a_3F + \\
&+ p^{n-k}F(p^{m-n}c_1a_2a_3 - a_1c_2a_3) + p^nZ = 0 + p^nZ; \\
x_{22} &= p^{m-n}b_1(-a_2Q + p^{n-k}a_3c_2F) + b_2(a_1Q - p^{m-k}a_3c_1F) + \\
&+ p^{n-k}b_3F(p^{m-n}a_2c_1 - a_1c_2) + p^nZ = -p^{m-n}a_2b_1G(1 + p^{n-k}FM) + \\
&+ p^{m-k}a_3b_1c_2F + a_1b_2G(1 + p^{n-k}FM) - p^{m-k}a_3b_2c_1F + \\
&+ p^{n-k}F(p^{m-n}a_2b_3c_1 - a_1b_3c_2) + p^nZ = G(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1)(1 + p^{n-k}FM) + \\
&+ p^{n-k}F(p^{m-n}a_3b_1c_2 - p^{m-n}a_3b_2c_1 + p^{m-n}a_2b_3c_1 - a_1b_3c_2) + p^nZ = \\
&= 1 + p^{n-k}FM - p^{n-k}FM + p^nZ = 1 + p^nZ; \\
x_{32} &= p^{m-n}c_1(-a_2Q + p^{n-k}a_3c_2F) + c_2(a_1Q - p^{m-k}a_3c_1F) + \\
&+ c_3F(p^{m-n}a_2c_1 - a_1c_2) + p^kZ = -p^{m-n}a_2c_1G(1 + p^{n-k}FM) + p^{m-k}c_1c_2a_3F + \\
&+ a_1c_2G(1 + p^{n-k}FM) - p^{m-k}c_1c_2a_3F + c_3F(p^{m-n}a_2c_1 - a_1c_2) + p^kZ = \\
&= (a_1c_2 - p^{m-n}a_2c_1)G(1 + p^{n-k}FM) + c_3F(p^{m-n}a_2c_1 - a_1c_2) + p^kZ = \\
&= (a_1c_2 - p^{m-n}a_2c_1)[G(1 + p^{n-k}FM) - c_3F] + p^kZ = \\
&= (a_1c_2 - p^{m-n}a_2c_1)G[1 + p^{n-k}FM - (a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1)c_3F] + p^kZ = \\
&= (a_1c_2 - p^{m-n}a_2c_1)G[1 + F(p^{n-k}M - a_1b_2c_3 + p^{m-n}a_2b_1c_3)] + p^kZ = \\
&= (a_1c_2 - p^{m-n}a_2c_1)G[(1 + p^kZ) - (F + p^kZ) \cdot |A|] = 0 + p^kZ.
\end{aligned}$$

Ввиду леммы 8 отсюда следует требуемое утверждение. ■

Следствие 10. Пусть $m = n \geq k > 0$. Если определитель матрицы $A \in R_3$ вида (6) обратим в $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$, разность $a_1b_2 - a_2b_1$ не делится на p и матрица $B \in R_3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} * & -a_2Q + p^{n-k}a_3c_2F + p^nZ & F(a_2b_3 - a_3b_2) + p^kZ \\ * & a_1Q - p^{n-k}a_3c_1F + p^nZ & F(a_3b_1 - a_1b_3) + p^kZ \\ * & F(a_2c_1 - a_1c_2) + p^kZ & F(a_1b_2 - a_2b_1) + p^kZ \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где целые числа F и Q задаются условиями

$$F + p^kZ = |A|^{-1} \in \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}, \quad G + p^nZ = (a_1b_2 - a_2b_1 + p^nZ)^{-1} \in \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z},$$

$$M = a_1b_3c_2 + a_3b_2c_1 - a_3b_1c_2 - a_2b_3c_1, \quad Q = G(1 + p^{n-k}FM),$$

то у матриц AB и E совпадают второй и третий столбцы.

Доказательство. Требуемое утверждение следует из леммы 9 ввиду того факта, что при $m = n$ второй и третий столбцы матрицы (12) совпадают со вторым и третьим столбцами матрицы (11). ■

Теорема 11. Пусть $m = n > k > 0$. Для матрицы $A \in R_3$ вида (6) равносильны следующие условия:

- 1) Числа $a_1b_2 - a_2b_1$ и c_3 не делятся на p .
- 2) Элемент $|A|$ обратим в кольце $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$.
- 3) Матрица A обратима слева в кольце R_3 .
- 4) Матрица A обратима справа в кольце R_3 .
- 5) Матрица A обратима в кольце R_3 .

Если эти условия выполнены, то матрица A^{-1} имеет вид

$$\begin{pmatrix} b_2Q - p^{n-k}b_3c_2F + p^nZ & * & * \\ -b_1Q + p^{n-k}b_3c_1F + p^nZ & * & * \\ F(b_1c_2 - b_2c_1) + p^kZ & * & * \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где второй и третий столбцы берутся из матрицы (12), а целые числа F и Q задаются условиями

$$F + p^k \mathbf{Z} = |A|^{-1} \in \mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z}, \quad G + p^n \mathbf{Z} = (a_1 b_2 - a_2 b_1 + p^n \mathbf{Z})^{-1} \in \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z},$$

$$M = a_1 b_3 c_2 + a_3 b_2 c_1 - a_3 b_1 c_2 - a_2 b_3 c_1, \quad Q = G(1 + p^{n-k} F M).$$

Доказательство. Импликация $5) \Rightarrow 3)$ очевидна; импликация $3) \Rightarrow 2)$ верна в силу леммы 7.

Далее, так как $m = n$, то справедливо равенство

$$|A| = a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 + p^{n-k} (a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2) + p^k \mathbf{Z}.$$

Поскольку $n > k$, мы можем записать следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} |A| - \text{обратимый элемент в } \mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z} &\Leftrightarrow \text{НОД}(a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3, p) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{НОД}(a_1 b_2 - a_2 b_1, p) = \text{НОД}(c_3, p) = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, условия 1) и 2) равносильны.

$2) \Rightarrow 4)$. Пусть $|A|$ – обратимый элемент в $\mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z}$. Так как справедлива импликация $2) \Rightarrow 1)$, то смежный класс $a_1 b_2 - a_2 b_1 + p^n \mathbf{Z}$ обратим в $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$, т.е. существует элемент $G + p^n \mathbf{Z} = (a_1 b_2 - a_2 b_1 + p^n \mathbf{Z})^{-1}$. Покажем, что матрица B , задаваемая формулами (13) и (12), является правой обратной для матрицы A .

Ввиду следствия 10 последние два столбца матрицы AB будут такими же, как и у матрицы E . Кроме того, из следствия 10 вытекает, что второй столбец матрицы

$$\begin{pmatrix} b_2 + p^n \mathbf{Z} & b_1 + p^n \mathbf{Z} & b_3 + p^k \mathbf{Z} \\ a_2 + p^n \mathbf{Z} & a_1 + p^n \mathbf{Z} & a_3 + p^k \mathbf{Z} \\ c_2 + p^k \mathbf{Z} & c_1 + p^k \mathbf{Z} & c_3 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & -b_1 Q + p^{n-k} b_3 c_1 F + p^n \mathbf{Z} & * \\ * & b_2 Q - p^{n-k} b_3 c_2 F + p^n \mathbf{Z} & * \\ * & F(b_1 c_2 - b_2 c_1) + p^k \mathbf{Z} & * \end{pmatrix}$$

совпадает со вторым столбцом матрицы E . Так как при $m = n$ множитель s в формуле (9) равен 1, отсюда можно сделать вывод, что первый столбец матрицы AB совпадает с первым столбцом матрицы E . Таким образом, $AB = E$.

Наконец, импликация $4) \Rightarrow 5)$ устанавливается так же, как в теореме 4. ■

Теорема 12. Пусть $m > n > k > 0$. Для матрицы $A \in R_3$ вида (6) равносильны следующие условия:

- 1) Числа a_1, b_2 и c_3 не делятся на p .
- 2) Элемент $|A|$ обратим в кольце $\mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z}$.
- 3) Матрица A обратима слева в кольце R_3 .
- 4) Матрица A обратима справа в кольце R_3 .
- 5) Матрица A обратима в кольце R_3 .

Если эти условия выполнены, то матрица A^{-1} имеет вид

$$\begin{pmatrix} W(1 + p^{m-n} a_2 b_1 G) + p^{m-k} F G U + p^m \mathbf{Z} & * & * \\ -b_1 Q + p^{n-k} b_3 c_1 F + p^n \mathbf{Z} & * & * \\ F(b_1 c_2 - b_2 c_1) + p^k \mathbf{Z} & * & * \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где второй и третий столбцы берутся из матрицы (11), а целые числа F, G, Q, W, U задаются условиями

$$F + p^k \mathbf{Z} = |A|^{-1} \in \mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z}, \quad G + p^n \mathbf{Z} = (a_1 b_2 - p^{m-n} a_2 b_1 + p^n \mathbf{Z})^{-1} \in \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z},$$

$$M = a_1 b_3 c_2 + p^{m-n} (a_3 b_2 c_1 - a_3 b_1 c_2 - a_2 b_3 c_1), \quad Q = G(1 + p^{n-k} F M),$$

$$W + p^m \mathbf{Z} = (a_1 + p^m \mathbf{Z})^{-1} \in \mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z}, \quad U = (a_2 b_3 - a_3 b_2)(b_1 c_2 - b_2 c_1).$$

Доказательство. Импликации $5) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2)$ верны по тем же причинам, что и в теореме 11. Так как $t > n > k$, мы можем записать следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} |A| - \text{обратимый элемент в } \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z} &\Leftrightarrow \text{НОД}(a_1b_2c_3, p) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{НОД}(a_1, p) = \text{НОД}(b_2, p) = \text{НОД}(c_3, p) = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, условия 1) и 2) равносильны.

$2) \Rightarrow 4)$. Пусть $|A|$ – обратимый элемент в $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$. Так как справедлива импликация $2) \Rightarrow 1)$, то числа a_1 и b_2 не делятся на p , т.е. существуют смежные классы $G + p^n\mathbf{Z} = (a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1 + p^n\mathbf{Z})^{-1}$ и $W + p^m\mathbf{Z} = (a_1 + p^m\mathbf{Z})^{-1}$. Покажем, что матрица B , задаваемая формулами (14) и (11), является правой обратной для матрицы A .

Заметим, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} p^{m-n}U &= p^{m-n}(a_2b_1b_3c_2 - a_2b_2b_3c_1 - a_3b_1b_2c_2 + a_3b_2b_2c_1) = \\ &= b_2(a_1b_3c_2 + p^{m-n}a_3b_2c_1 - p^{m-n}a_3b_1c_2 - p^{m-n}a_2b_3c_1) + \\ &+ p^{m-n}a_2b_1b_3c_2 - a_1b_2b_3c_2 = b_2M - b_3c_2(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1), \end{aligned}$$

а значит, $p^{m-k}U = p^{n-k}b_2M - p^{n-k}b_3c_2(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1)$. Далее, так как $m > n > k$, то

$$\begin{aligned} G(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1) + p^k\mathbf{Z} &= 1 + p^k\mathbf{Z}, \quad a_1W + p^k\mathbf{Z} = 1 + p^k\mathbf{Z}, \\ p^{m-k}G(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1) + p^m\mathbf{Z} &= p^{m-k} + p^m\mathbf{Z}, \quad a_1W + p^n\mathbf{Z} = 1 + p^n\mathbf{Z}. \end{aligned}$$

В силу леммы 9 нам будет достаточно убедиться, что элементы x_{i1} первого столбца матрицы $X = AB$ совпадают с соответствующими элементами матрицы E . Напомним, что $|A| = a_1b_2c_3 - p^{m-n}a_2b_1c_3 - p^{n-k}M + p^k\mathbf{Z}$. Имеем

$$\begin{aligned} x_{11} &= a_1[W(1 + p^{m-n}a_2b_1G) + p^{m-k}FGU] + p^{m-n}a_2(-b_1Q + p^{n-k}b_3c_1F) + \\ &+ p^{m-k}a_3F(b_1c_2 - b_2c_1) + p^m\mathbf{Z} = 1 + p^{m-n}a_2b_1G + a_1FG \cdot p^{m-k}U - \\ &- p^{m-n}a_2b_1G(1 + p^{n-k}FM) + p^{m-k}a_2b_3c_1F + p^{m-k}F(a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1) + p^m\mathbf{Z} = \\ &= 1 - p^{m-n}a_2b_1G \cdot p^{n-k}FM + a_1FG[p^{n-k}b_2M - p^{n-k}b_3c_2(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1)] + \\ &+ p^{m-k}F(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1) + p^m\mathbf{Z} = \\ &= 1 - p^{m-k}a_2b_1FGM + p^{n-k}a_1b_2FGM - p^{n-k}a_1b_3c_2FG(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1) + \\ &+ p^{m-k}G(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1)F(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1) + p^m\mathbf{Z} = \\ &= 1 + p^{n-k}FGM(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1) - p^{n-k}a_1b_3c_2FG(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1) + \\ &+ p^{n-k}FG(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1)(p^{m-n}a_2b_3c_1 + p^{m-n}a_3b_1c_2 - p^{m-n}a_3b_2c_1) + p^m\mathbf{Z} = \\ &= 1 + p^{n-k}FG(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1)(M - a_1b_3c_2) + \\ &+ p^{n-k}FG(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1)(a_1b_3c_2 - M) + p^m\mathbf{Z} = 1 + p^m\mathbf{Z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{21} &= b_1[W(1 + p^{m-n}a_2b_1G) + p^{m-k}FGU] + b_2(-b_1Q + p^{n-k}b_3c_1F) + \\ &+ p^{n-k}b_3F(b_1c_2 - b_2c_1) + p^n\mathbf{Z} = b_1W(1 + p^{m-n}a_2b_1G) + b_1FG \cdot p^{m-k}U - \\ &- b_1b_2G(1 + p^{n-k}FM) + p^{n-k}b_2b_3c_1F + p^{n-k}F(b_1b_3c_2 - b_2b_3c_1) + p^n\mathbf{Z} = \\ &= b_1W[G(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1) + p^{m-n}a_2b_1G] + \\ &+ b_1FG[p^{n-k}b_2M - p^{n-k}b_3c_2(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1)] - b_1b_2G - p^{n-k}b_1b_2FGM + \\ &+ p^{n-k}b_1b_3c_2F + p^n\mathbf{Z} = b_1W \cdot a_1b_2G - b_1b_2G + p^{n-k}b_1b_2FGM - \\ &- p^{n-k}b_1b_3c_2FG(a_1b_2 - p^{m-n}a_2b_1) - p^{n-k}b_1b_2FGM + p^{n-k}b_1b_3c_2F + p^n\mathbf{Z} = \\ &= b_1b_2G - b_1b_2G - p^{n-k}b_1b_3c_2F + p^{n-k}b_1b_3c_2F + p^n\mathbf{Z} = 0 + p^n\mathbf{Z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{31} &= c_1[W(1+p^{m-n}a_2b_1G)+p^{m-k}FGU]+c_2(-b_1Q+p^{n-k}b_3c_1F)+ \\
&+ c_3F(b_1c_2-b_2c_1)+p^kZ = c_1W(1+p^{m-n}a_2b_1G)+c_1FG \cdot p^{m-k}U- \\
&- b_1c_2G(1+p^{n-k}FM)+p^{n-k}b_3c_1c_2F+c_3F(b_1c_2-b_2c_1)+p^kZ = \\
&= c_1W[G(a_1b_2-p^{m-n}a_2b_1)+p^{m-n}a_2b_1G]+ \\
&+ c_1FG[p^{n-k}b_2M-p^{n-k}b_3c_2(a_1b_2-p^{m-n}a_2b_1)]-b_1c_2G-p^{n-k}b_1c_2FGM+ \\
&+ p^{n-k}b_3c_1c_2F+c_3F(b_1c_2-b_2c_1)+p^kZ = c_1W \cdot a_1b_2G+p^{n-k}b_2c_1FGM- \\
&- p^{n-k}b_3c_1c_2FG(a_1b_2-p^{m-n}a_2b_1)-b_1c_2G-p^{n-k}b_1c_2FGM+ \\
&+ p^{n-k}b_3c_1c_2F+c_3FG(a_1b_2-p^{m-n}a_2b_1)(b_1c_2-b_2c_1)+p^kZ = \\
&= b_2c_1G+p^{n-k}FGM(b_2c_1-b_1c_2)-p^{n-k}b_3c_1c_2F-b_1c_2G+ \\
&+ p^{n-k}b_3c_1c_2F-FG(a_1b_2c_3-p^{m-n}a_2b_1c_3)(b_2c_1-b_1c_2)+p^kZ = \\
&= (b_2c_1-b_1c_2)G[1+p^{n-k}FM-F(a_1b_2c_3-p^{m-n}a_2b_1c_3)]+p^kZ = \\
&= (b_2c_1-b_1c_2)G[1-F(a_1b_2c_3-p^{m-n}a_2b_1c_3-p^{n-k}M)]+p^kZ = \\
&= (b_2c_1-b_1c_2)G[(1+p^kZ)-(F+p^kZ) \cdot |A|] = 0+p^kZ.
\end{aligned}$$

Таким образом, $AB = E$.

Импликация 4) $\Rightarrow$ 5) устанавливается так же, как в теореме 4. ■

Если $m = n = k$, то вопрос об обратимости матриц в R_3 решается в соответствии с теоремой 3. Таким образом, остаётся рассмотреть случай $m > n = k$.

Теорема 13. Пусть $m > n = k > 0$. Для матрицы $A \in R_3$ вида (6) равносильны следующие условия:

- 1) Числа a_1 и $b_2c_3 - b_3c_2$ не делятся на p .
- 2) Элемент $|A|$ обратим в кольце $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$.
- 3) Матрица A обратима слева в кольце R_3 .
- 4) Матрица A обратима справа в кольце R_3 .
- 5) Матрица A обратима в кольце R_3 .

Если эти условия выполнены, то матрица A^{-1} имеет вид

$$\begin{pmatrix} W(1+p^{m-n}FL)+p^m\mathbf{Z} & F(a_3c_2-a_2c_3)+p^k\mathbf{Z} & * \\ F(b_3c_1-b_1c_3)+p^k\mathbf{Z} & F(a_1c_3-p^{m-n}a_3c_1)+p^k\mathbf{Z} & * \\ F(b_1c_2-b_2c_1)+p^k\mathbf{Z} & F(p^{m-n}a_2c_1-a_1c_2)+p^k\mathbf{Z} & * \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где третий столбец берётся из матрицы (10), $L = a_2b_1c_3 - a_3b_1c_2 - a_2b_3c_1 + a_3b_2c_1 \in \mathbf{Z}$, $F+p^k\mathbf{Z} = |A|^{-1} \in \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ и $W+p^m\mathbf{Z} = (a_1+p^m\mathbf{Z})^{-1} \in \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$.

Доказательство. Импликации 5) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) справедливы по тем же причинам, что и в теореме 11. Далее, так как $n = k$, то $|A| = \delta + p^k\mathbf{Z}$, где

$$\begin{aligned}
\delta &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - p^{m-n}(a_2b_1c_3 - a_3b_1c_2 - a_2b_3c_1 + a_3b_2c_1) = \\
&= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - p^{m-n}L.
\end{aligned}$$

Поскольку $m > n$, мы можем записать следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned}
|A| - \text{обратимый элемент в } \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z} &\Leftrightarrow \text{НОД}(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2, p) = 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \text{НОД}(a_1, p) = \text{НОД}(b_2c_3 - b_3c_2, p) = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, условия 1) и 2) равносильны.

2) $\Rightarrow$ 4). Пусть $|A|$ — обратимый элемент в $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$. Так как справедлива импликация 2) $\Rightarrow$ 1), то a_1 не делится на p , т.е. существует элемент $W+p^m\mathbf{Z} = (a_1+p^m\mathbf{Z})^{-1}$. Поскольку $m > k$, то $a_1W+p^k\mathbf{Z} = 1+p^k\mathbf{Z}$. Убедимся, что матрица B , определяемая формулами (15) и (10), является правой обратной для матрицы A .

По лемме 8 третий столбец матрицы AB будет таким же, как и у матрицы E . Кроме того, из леммы 8 вытекает, что третий столбец матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 + p^m \mathbf{Z} & a_3 + p^k \mathbf{Z} & a_2 + p^k \mathbf{Z} \\ c_1 + p^k \mathbf{Z} & c_3 + p^k \mathbf{Z} & c_2 + p^k \mathbf{Z} \\ b_1 + p^k \mathbf{Z} & b_3 + p^k \mathbf{Z} & b_2 + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & F(a_3 c_2 - a_2 c_3) + p^k \mathbf{Z} \\ * & * & F(p^{m-n} a_2 c_1 - a_1 c_2) + p^k \mathbf{Z} \\ * & * & F(a_1 c_3 - p^{m-n} a_3 c_1) + p^k \mathbf{Z} \end{pmatrix}$$

совпадает с третьим столбцом матрицы E . Так как при $n = k$ множитель t в формуле (9) равен 1, отсюда можно сделать вывод, что второй столбец матрицы AB совпадает со вторым столбцом матрицы E . Остаётся рассмотреть элементы x_{i1} первого столбца матрицы $X = AB$:

$$\begin{aligned} x_{11} &= a_1 W(1 + p^{m-n} FL) + p^{m-n} a_2 F(b_3 c_1 - b_1 c_3) + \\ &+ p^{m-n} a_3 F(b_1 c_2 - b_2 c_1) + p^m \mathbf{Z} = 1 + p^{m-n} FL + \\ &+ p^{m-n} F(a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1) + p^m \mathbf{Z} = \\ &= 1 + p^{m-n} FL - p^{m-n} FL + p^m \mathbf{Z} = 1 + p^m \mathbf{Z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{21} &= b_1 W(1 + p^{m-n} FL) + b_2 F(b_3 c_1 - b_1 c_3) + b_3 F(b_1 c_2 - b_2 c_1) + p^k \mathbf{Z} = \\ &= b_1 W(1 + p^{m-n} FL) + F(b_1 b_3 c_2 - b_1 b_2 c_3) + p^k \mathbf{Z} = \\ &= b_1 W(1 + F \cdot p^{m-n} L) + b_1 F(b_3 c_2 - b_2 c_3) + p^k \mathbf{Z} = \\ &= b_1 W[1 + F(a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - \delta)] + b_1 a_1 W F(b_3 c_2 - b_2 c_3) + p^k \mathbf{Z} = \\ &= b_1 W[1 + F(a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2) - F\delta + F(a_1 b_3 c_2 - a_1 b_2 c_3)] + p^k \mathbf{Z} = \\ &= b_1 W(1 - F\delta) + p^k \mathbf{Z} = b_1 W(1 - 1) + p^k \mathbf{Z} = 0 + p^k \mathbf{Z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{31} &= c_1 W(1 + p^{m-n} FL) + c_2 F(b_3 c_1 - b_1 c_3) + c_3 F(b_1 c_2 - b_2 c_1) + p^k \mathbf{Z} = \\ &= c_1 W(1 + p^{m-n} FL) + F(b_3 c_1 c_2 - b_2 c_1 c_3) + p^k \mathbf{Z} = \\ &= c_1 W(1 + F \cdot p^{m-n} L) + c_1 F(b_3 c_2 - b_2 c_3) + p^k \mathbf{Z} = \\ &= c_1 W[1 + F(a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - \delta)] + c_1 a_1 W F(b_3 c_2 - b_2 c_3) + p^k \mathbf{Z} = \\ &= c_1 W[1 + F(a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2) - F\delta + F(a_1 b_3 c_2 - a_1 b_2 c_3)] + p^k \mathbf{Z} = \\ &= c_1 W(1 - F\delta) + p^k \mathbf{Z} = c_1 W(1 - 1) + p^k \mathbf{Z} = 0 + p^k \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Тем самым мы показали, что $AB = E$.

Импликация 4) $\Rightarrow$ 5) устанавливается так же, как в теореме 4. ■

В частности, из теорем 11, 12 и 13 вытекает, что обратимость матрицы $A \in R_3$ эквивалентна обратимости элемента $|A| \in \mathbf{Z}/p^k \mathbf{Z}$ в каждом из возможных случаев. Так как обратная матрица единственна (если она существует), то формулы, найденные для A^{-1} в каждой из этих трёх теорем, будут приводить к одной и той же матрице вне зависимости от выбора конкретных чисел $a_j, b_j, c_j \in \mathbf{Z}$, удовлетворяющих равенству (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A. 1958. V. 6. P. 83–142.
2. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Кольца формальных матриц и модули над ними. М.: МЦНМО, 2017.
3. Green E.L. On the representation theory of rings in matrix form // Pacific J. Math. 1982. V. 100. No. 1. P. 123–138. DOI: 10.2140/pjm.1982.100.123.
4. Haghighy A., Varadarajan K. Study of modules over formal triangular matrix rings // J. Pure Appl. Algebra. 2000. V. 147. No. 1. P. 41–58. DOI: 10.1016/S0022-4049(98)00129-7.

5. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Формальные матрицы и их определители // Фундам. и прикл. математика. 2014. Т. 19. № 1. С. 65–119.
6. Крылов П.А. Определители обобщённых матриц порядка 2 // Фундам. и прикл. математика. 2015. Т. 20. № 5. С. 95–112.
7. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра. Т. 1. М.: Гелиос АРБ, 2003.

Статья поступила 09.08.2021

Stepanova A.Y., Timoshenko E.A. (2021) MATRIX REPRESENTATION OF ENDOMORPHISMS OF PRIMARY GROUPS OF SMALL RANKS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 30–42

DOI 10.17223/19988621/74/4

Keywords: primary group, endomorphism ring, generalized matrix ring, inverse matrix.

Let p be a prime. Any finite Abelian p -group H of rank 2 can be identified with a group of the form $(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ with $m \geq n > 0$. The endomorphisms of this group H are in a one-to-one correspondence with elements of the following set of matrices:

$$R_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

If we define $\begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbf{Z} & b' + p^n\mathbf{Z} \\ c' + p^n\mathbf{Z} & d' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$ to be

$$\begin{pmatrix} aa' + p^{m-n}bc' + p^m\mathbf{Z} & ab' + bd' + p^n\mathbf{Z} \\ ca' + dc' + p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}cb' + dd' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

then we arrive at the following theorem:

Theorem 1. The set R_2 with entrywise addition and multiplication defined above forms a ring which is isomorphic to the endomorphism ring $\text{End } H$ of H . The identity element of R_2 is

$$E = \begin{pmatrix} 1 + p^m\mathbf{Z} & 0 + p^n\mathbf{Z} \\ 0 + p^n\mathbf{Z} & 1 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

For any $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \in R_2$, we define $|A| = ad - p^{m-n}bc + p^n\mathbf{Z} \in \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$.

Proposition 2. For any $A, A' \in R_2$, we have $|AA'| = |A| \cdot |A'|$.

If $m = n$, then R_2 is the usual matrix ring over $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ and the invertibility criterion for $A \in R_2$ is well-known.

Theorem 4. Let $m > n > 0$. For any matrix $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \in R_2$, the following are equivalent:

- 1) The prime p does not divide a and d .
- 2) The element $|A|$ is invertible in $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$.
- 3) The matrix A is left invertible in R_2 .
- 4) The matrix A is right invertible in R_2 .
- 5) The matrix A is invertible in R_2 .

If these conditions are satisfied, then

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} W(1 + p^{m-n}bcF) + p^m\mathbf{Z} & -bF + p^n\mathbf{Z} \\ -cF + p^n\mathbf{Z} & aF + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

where $F + p^n\mathbf{Z} = |A|^{-1} \in \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ and $W + p^m\mathbf{Z} = (a + p^m\mathbf{Z})^{-1} \in \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$.

Any finite Abelian p -group H of rank 3 can be identified with a suitable group of the form $(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})$ with $m \geq n \geq k > 0$. The endomorphisms of this group H are in one-to-one correspondence with the elements of the following set of matrices:

$$R_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z} \end{pmatrix} \right\}.$$

As in the case of R_2 , we endow R_3 with a multiplication such that R_3 becomes a ring which is isomorphic to $\text{End } H$.

For any matrix $A = \begin{pmatrix} a_1 + p^m\mathbf{Z} & a_2 + p^n\mathbf{Z} & a_3 + p^k\mathbf{Z} \\ b_1 + p^n\mathbf{Z} & b_2 + p^n\mathbf{Z} & b_3 + p^k\mathbf{Z} \\ c_1 + p^k\mathbf{Z} & c_2 + p^k\mathbf{Z} & c_3 + p^k\mathbf{Z} \end{pmatrix} \in R_3$, we denote by $|A|$ the element

$$a_1b_2c_3 - p^{n-k}a_1b_3c_2 - p^{m-n}a_2b_1c_3 + p^{m-k}(a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1) + p^k\mathbf{Z}.$$

Proposition 6. For any $A, A' \in R_3$, we have $|AA'| = |A| \cdot |A'|$.

The case when $m = n = k$ is trivial. For the cases $m = n > k$, $m > n > k$ and $m > n = k$, we give invertibility criteria for $A \in R_3$ and formulas for inverse matrices. In each of these cases the following are equivalent:

- The element $|A|$ is invertible in $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$.
- The matrix A is left invertible in R_3 .
- The matrix A is right invertible in R_3 .
- The matrix A is invertible in R_3 .

AMS Mathematical Subject Classification: 16S50

Financial support. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2021-1392).

Aleksandra Y. STEPANOVA (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: stepanova.alexa@mail.ru

Egor A. TIMOSHENKO (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Morita K. (1958) Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A*. 6. pp. 83–142.
2. Krylov P., Tuganbaev A. (2017) *Formal Matrices* (Algebra and Applications, Vol. 23). Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-53907-2.
3. Green E.L. (1982) On the representation theory of rings in matrix form. *Pacific Journal of Mathematics*. 100(1). pp. 123–138. DOI: 10.2140/pjm.1982.100.123.
4. Haghany A., Varadarajan K. (2000) Study of modules over formal triangular matrix rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*. 147(1). pp. 41–58. DOI: 10.1016/S0022-4049(98)00129-7.
5. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. (2015) Formal matrices and their determinants. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 211(3). pp. 341–380. DOI: 10.1007/s10958-015-2610-3.
6. Krylov P.A. (2018) Determinants of generalized matrices of order 2. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 230(3). pp. 414–427. DOI: 10.1007/s10958-018-3748-6.
7. Glukhov M.M., Elizarov V.P., Nechaev A.A. (2003) *Algebra* [Algebra]. Vol. 1. Moscow: Gelios ARV.

Received: August 9, 2021

Э.Г. Халилов

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Построена последовательность, сходящая к точному решению гиперсингулярного интегрального уравнения первого рода внешней краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца, которое является граничным значением решения внешней краевой задачи Неймана на границе области. Кроме того, построена последовательность, сходящая к точному решению слабосингулярного интегрального уравнения первого рода внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, которое является граничным значением нормальной производной решения внешней краевой задачи Дирихле на границе области.

Ключевые слова: интегральное уравнение первого рода, слабосингулярные интегральные уравнения, гиперсингулярные интегральные уравнения, уравнение Гельмгольца, внешняя краевая задача Неймана, внешняя краевая задача Дирихле.

1. Введение и постановки задачи

Известно, что одним из методов решения внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца является их приведение к интегральным уравнениям первого рода. Так как интегральные уравнения в замкнутом виде решаются лишь в очень редких случаях, первостепенное значение приобретает разработка приближенных методов решения интегральных уравнений с соответствующим теоретическим обоснованием.

Пусть $D \subset R^3$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей S , f и g – заданные непрерывные функции на S , $C^2(\Omega)$ – пространство всех дважды непрерывно дифференцируемых функций в области $\Omega \subset R^3$, а $C(\Omega)$ – пространство всех непрерывных функций в области Ω .

Рассмотрим следующие краевые задачи для уравнения Гельмгольца.

Внешняя краевая задача Дирихле. Найти функцию $u \in C^2(R^3 \setminus \bar{D}) \cap C(R^3 \setminus D)$,

удовлетворяющую уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в $R^3 \setminus \bar{D}$, условию излучения Зоммерфельда

$$\left(\frac{x}{|x|}, \text{grad} u(x) \right) - i k u(x) = o\left(\frac{1}{|x|} \right), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

равномерно по всем направлениям $x/|x|$ и граничному условию $u = f$ на S , где k – волновое число, причем $\text{Im } k \geq 0$.

Внешняя краевая задача Неймана. Найти функцию $u \in C^2(R^3 \setminus \bar{D}) \cap C(R^3 \setminus D)$, обладающую нормальной производной в смысле равномерной сходимости, т.е. предел

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}(x)} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} (\vec{n}(x), \text{grad} u(x + h\vec{n}(x))), \quad x \in S,$$

существует равномерно на S , удовлетворяющую уравнению Гельмгольца в $R^3 \setminus \bar{D}$, условию излучения Зоммерфельда на бесконечности и граничному условию $\partial u / \partial \vec{n} = g$ на S , где $\vec{n}(x)$ – единичная внешняя нормаль в точке $x \in S$.

В работе [1, с. 115] показано, что если решение уравнения Гельмгольца $u(x)$, удовлетворяющее условиям излучения имеет нормальную производную в смысле равномерной сходимости, то это решение можно представить в виде

$$u(x) = \int_S \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}(y)} \Phi_k(x, y) \right\} dS_y, \quad x \in R^3 \setminus \bar{D},$$

где $\Phi_k(x, y)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, т.е.

$$\Phi_k(x, y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|}, \quad x, y \in R^3, \quad x \neq y.$$

Используя это представление, в работе [1, с. 116–117] доказано, что функция

$$u(x) = \int_S \left\{ \psi(y) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} - g(y) \Phi_k(x, y) \right\} dS_y, \quad x \in R^3 \setminus \bar{D},$$

является решением внешней краевой задачи Неймана, если $\psi \in N(S)$ есть решение гиперсингулярного интегрального уравнения первого рода

$$T\psi = g + \tilde{K}g, \quad (1)$$

а функция

$$u(x) = \int_S \left\{ f(y) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} - \varphi(y) \Phi_k(x, y) \right\} dS_y, \quad x \in R^3 \setminus \bar{D},$$

является решением внешней краевой задачи Дирихле, если $\varphi \in C(S)$ есть решение слабосингулярного интегрального уравнения первого рода

$$L\varphi = -f + Kf, \quad (2)$$

где

$$(L\varphi)(x) = 2 \int_S \Phi_k(x, y) \varphi(y) dS_y, \quad x \in S,$$

$$(Kf)(x) = 2 \int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} f(y) dS_y, \quad x \in S,$$

$$(\tilde{K}g)(x) = 2 \int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \vec{n}(x)} g(y) dS_y, \quad x \in S,$$

$$(T\psi)(x) = 2 \frac{\partial}{\partial \vec{n}(x)} \left(\int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} \psi(y) dS_y \right), \quad x \in S,$$

а через $N(S)$ обозначено пространство всех непрерывных функций ψ , потенциал двойного слоя с плотностью ψ которых имеет непрерывные нормальные производные на обеих сторонах поверхности S .

Следует указать, что внешние краевые задачи Дирихле и Неймана можно привести различным интегральным уравнениям первого рода. Однако уравнения (1) и (2) имеют то преимущество, что решение уравнения (1) является граничным значением решения внешней краевой задачи Неймана на S , а решение уравнения (2) является граничным значением нормальной производной решения внешней краевой задачи Дирихле на S (см. [1, с. 116–117]). Отметим, что несмотря на полученные успехи в области численного решения интегральных уравнений первого рода (см. [2–6]), до сих пор не исследовано приближенное решение уравнений (1) и (2). Причина состоит в том, что несмотря на обратимость операторов T и L при $\text{Im } k > 0$, обратные операторы T^{-1} и L^{-1} выражаются через обратные операторы $(I - \tilde{K})^{-1}$ и $(I - \tilde{K})^{-1}$, явные виды которых неизвестны, где I – единичный оператор в пространстве $C(S)$.

Настоящая работа посвящена исследованию приближенных решений интегральных уравнений первого рода (1) и (2).

2. Исследование приближенного решения интегрального уравнения (1)

Отметим, что оператор T является неограниченным в пространстве $N(S)$. Однако в работе [1, с.102] показано, что если $\text{Im } k > 0$, то оператор T обратим, причем оператор T^{-1} , обратный к оператору T , дается соотношением

$$T^{-1} = -L(I - \tilde{K})^{-1}(I + \tilde{K})^{-1}.$$

Следовательно, при любой правой части $f \in C(S)$ гиперсингулярное интегральное уравнение (1) однозначно разрешимо в пространстве $N(S)$, причем решение интегрального уравнения (1) имеет вид

$$\psi = -L(I - \tilde{K})^{-1}(I + \tilde{K})^{-1}(I + \tilde{K})g = -L(I - \tilde{K})^{-1}g. \quad (3)$$

Используя формулу (3), дадим метод вычисления приближенного решения гиперсингулярного интегрального уравнения (1) в определенных точках.

Разобьем S на «регулярные» элементарные части: $S = \bigcup_{l=1}^N S_l$. Под «регулярной» элементарной частью условимся понимать множество точек, подчиненных следующим требованиям:

(1) для любого $l \in \{1, 2, \dots, N\}$ элементарная часть S_l замкнута и его множество внутренних относительно S точек S_l^0 не пусто, причем $\text{mes } S_l^0 = \text{mes } S_l$ и при $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, $j \neq l$, $S_l^0 \cap S_j^0 = \emptyset$;

(2) для любого $l \in \{1, 2, \dots, N\}$ элементарная часть S_l представляет собой связный кусок поверхности S с непрерывной границей;

(3) для любого $l \in \{1, 2, \dots, N\}$ существует так называемая опорная точка $x(l) = (x_1(l), x_2(l), x_3(l)) \in S_l$, такая, что

$$(3.1) \quad r_l(N) \sim R_l(N)^1, \text{ где } r_l(N) = \min_{x \in \partial S_l} |x - x(l)| \text{ и } R_l(N) = \max_{x \in \partial S_l} |x - x(l)|;$$

$$(3.2) \quad \sqrt{R_l(N)} \leq d/2, \text{ где } d - \text{радиус стандартной сферы (см. [7, с.400]);}$$

$$(3.3) \text{ для любого } j \in \{1, 2, \dots, N\} \quad r_j(N) \sim r_l(N).$$

Очевидно, что $r(N) \sim R(N)$ и $\lim_{N \rightarrow \infty} r(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} R(N) = 0$, где $R(N) = \max_{l=1, N} R_l(N)$, $r(N) = \min_{l=1, N} r_l(N)$. Кроме того, в работе [8] доказано, что при разбиении поверхности S на «регулярные» элементарные части имеет место соотношение $R(N) \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Рассмотрим матрицу $\tilde{K}^N = (\tilde{k}_{lj})_{l,j=1}^N$ с элементами

$$\tilde{k}_{lj} = \begin{cases} 0, & \text{при } l \neq j, \\ 2 \frac{\partial \Phi_k(x(l), x(j))}{\partial \vec{n}(x(l))} \text{mes} S_j, & \text{при } l = j. \end{cases}$$

Кроме того, пусть

$$f_{lj} = \begin{cases} 0, & \text{при } l \neq j, \\ 2 \Phi_k(x(l), x(j)) \text{mes} S_j, & \text{при } l = j, \end{cases}$$

и для функции $g \in C(S)$ вводим модуль непрерывности вида

$$\omega(g, \tau) = \max_{\substack{|x-y| \leq \tau \\ x, y \in S}} |g(x) - g(y)|, \quad \delta > 0.$$

В работе [9] доказано, что выражения

$$(Lg)^N(x(l)) = \sum_{j=1}^N f_{lj} g(x(j)) \text{mes} S_j \quad (4)$$

и

$$(\tilde{K}g)^N(x(l)) = \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj} g(x(j)) \text{mes} S_j$$

в точках $x(l), l = \overline{1, N}$, являются кубатурными формулами для интегралов $(Lg)(x)$ и $(\tilde{K}g)(x)$ соответственно, причем

$$\max_{l=1, N} |(Lg)(x(l)) - (Lg)^N(x(l))| \leq M^2 (\|g\|_\infty R(N) |\ln R(N)| + \omega(g, R(N))),$$

$$\max_{l=1, N} |(\tilde{K}g)(x(l)) - (\tilde{K}g)^N(x(l))| \leq M (\|g\|_\infty R(N) |\ln R(N)| + \omega(g, R(N))),$$

где $\|g\|_\infty = \max_{x \in S} |g(x)|$.

¹ $a(N) \sim b(N) \Leftrightarrow C_1 \leq a(N)/b(N) \leq C_2$, где C_1 и C_2 положительные постоянные, не зависящие от N .

² Здесь и далее через M будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

Сформулируем следующие леммы из работы [10].

Лемма 1 [10]. Если $\text{Im} k > 0$ и $g \in C(S)$, то существует обратная матрица $(I^N + \tilde{K}^N)^{-1}$, причем

$$M_1 = \sup_N \left\| (I^N + \tilde{K}^N)^{-1} \right\| < +\infty$$

$$\text{и } \max_{l=1, N} \left| \left((I + \tilde{K})^{-1} g \right)(x(l)) - \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj}^+ g(x(j)) \right| \leq M \left[\|g\|_\infty R(N) |\ln R(N)| + \omega(g, R(N)) \right],$$

где $\tilde{k}_{lj}^+$ – элемент l -й строки и j -го столбца матрицы $(I^N + \tilde{K}^N)^{-1}$, а I^N – единичная матрица с размерностью N .

Лемма 2 [10]. Если $\text{Im} k > 0$ и $g \in C(S)$, то существует обратная матрица $(I^N - \tilde{K}^N)^{-1}$, причем

$$M_2 = \sup_N \left\| (I^N - \tilde{K}^N)^{-1} \right\| < +\infty$$

$$\text{и } \max_{l=1, N} \left| \left((I - \tilde{K})^{-1} g \right)(x(l)) - \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj}^- g(x(j)) \right| \leq M \left[\|g\|_\infty R(N) |\ln R(N)| + \omega(g, R(N)) \right],$$

где $\tilde{k}_{lj}^-$ – элемент l -й строки и j -го столбца матрицы $(I^N - \tilde{K}^N)^{-1}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\text{Im} k > 0$ и $g \in C(S)$. Тогда последовательность

$$\psi^N(x(l)) = - \sum_{j=1}^N f_{lj} \left(\sum_{n=1}^N \tilde{k}_{jn}^- g(x(n)) \right)$$

сходится к значению решения $\psi(x)$ уравнения (1) в опорных точках $x(l)$, $l = \overline{1, N}$, причем

$$\max_{l=1, N} \left| \psi(x(l)) - \psi^N(x(l)) \right| \leq M \left[\|g\|_\infty \frac{\ln N}{\sqrt{N}} + \omega(g, 1/\sqrt{N}) \right].$$

Доказательство. Принимая во внимание оценку погрешности кубатурной формулы (4) и лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} \left| \psi(x(l)) - \psi^N(x(l)) \right| &\leq \left| \left(L(I - \tilde{K})^{-1} g \right)(x(l)) - \sum_{j=1}^N f_{lj} \left((I - \tilde{K})^{-1} g \right)(x(j)) \right| + \\ &\quad + \left| \sum_{j=1}^N f_{lj} \left[\left((I - \tilde{K})^{-1} g \right)(x(j)) - \sum_{n=1}^N \tilde{k}_{jn}^- g(x(n)) \right] \right| \leq \\ &\leq M \left[\left\| (I - \tilde{K})^{-1} g \right\|_\infty R(N) |\ln R(N)| + \omega \left((I - \tilde{K})^{-1} g, R(N) \right) \right] + \\ &\quad + M \left[\|g\|_\infty R(N) |\ln R(N)| + \omega(g, R(N)) \right] \sum_{j=1}^N |f_{lj}|. \end{aligned} \quad (5)$$

Известно, что, если $\operatorname{Im} k > 0$, то уравнение (см. [1, с. 92])

$$\rho - \tilde{K}\rho = g$$

имеет единственное решение $\rho_* = (I - \tilde{K})g \in C(S)$. Тогда, принимая во внимание неравенство

$$\omega(\tilde{K}\rho_*, h) \leq M \|\rho_*\|_\infty h |\ln h|,$$

находим

$$\begin{aligned} \omega\left((I - \tilde{K})^{-1}g, R(N)\right) &= \omega(\rho_*, R(N)) = \omega(g + \tilde{K}\rho_*, R(N)) \leq \\ &\leq \omega(g, R(N)) + \omega(\tilde{K}\rho_*, R(N)) \leq \omega(g, R(N)) + M \|\rho_*\|_\infty R(N) |\ln R(N)| = \\ &= \omega(g, R(N)) + M \left\| (I - \tilde{K})^{-1}g \right\|_\infty R(N) |\ln R(N)| \leq \\ &\leq \omega(g, R(N)) + M \left\| (I - \tilde{K})^{-1}g \right\|_\infty R(N) |\ln R(N)|. \end{aligned} \quad (6)$$

Кроме того, поступая точно так, как и в работе [9], можно показать, что выражение $\sum_{j=1}^N |f_{lj}|$ в точках $x(l)$, $l = \overline{1, N}$, является кубатурной формулой для интеграла

$$2 \int_S |\Phi_k(x, y)| dS_y,$$

причем
$$\max_{l=1, N} \left| 2 \int_S |\Phi_k(x(l), y)| dS_y - \sum_{j=1}^N |f_{lj}| \right| \leq M R(N) |\ln R(N)|.$$

Следовательно,

$$\max_{l=1, N} \sum_{j=1}^N |f_{lj}| \leq 2 \max_{x \in S} \int_S |\Phi_k(x, y)| dS_y + M R(N) |\ln R(N)| \leq M.$$

Тогда, учитывая приведенные выше неравенства в (5) и принимая во внимание соотношение $R(N) \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$, получаем доказательство теоремы.

3. Исследование приближенного решения интегрального уравнения (2)

Следует указать, что оператор L^{-1} , обратный компактному оператору L , является неограниченным в пространстве $N(S)$ (см. [1, с. 101]). Однако в работе [11] показано, что если $\operatorname{Im} k > 0$, то оператор L^{-1} обратим, причем обратный оператор L^{-1} определяется соотношением

$$L^{-1} = -(I - \tilde{K})^{-1} (I + \tilde{K})^{-1} T.$$

Пусть $H_{1,\alpha}(S)$ – линейное пространство всех непрерывно дифференцируемых на S функций f , удовлетворяющих условию

$$|\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(y)| \leq M_f |x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in S,$$

где $0 < \alpha \leq 1$, а M_f – положительная постоянная, зависящая от f , а не от x и y .

Автором [12] доказано, что если $f \in H_{1,\alpha}(S)$, то потенциал двойного слоя с плотностью f имеет непрерывную нормальную производную, причем $Kf \in H_{1,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha$, т.е. $(I - K)f \in H_{1,\beta}(S)$. Тогда при любой правой части $f \in H_{1,\alpha}(S)$ уравнение (2) имеет единственное решение, причем решение интегрального уравнения (2) имеет вид

$$\varphi = (I - \tilde{K})^{-1} (I + \tilde{K})^{-1} T(I - K)f. \quad (7)$$

Используя формулу (7), дадим метод вычисления приближенного решения уравнения (2) в определенных точках.

Разобьем S на «регулярные» элементарные части $S = \bigcup_{l=1}^N S_l$. Пусть

$$P_l = \{j \mid 1 \leq j \leq N, |x(l) - x(j)| \leq \sqrt{R(N)}\}$$

и

$$Q_l = \{j \mid 1 \leq j \leq N, |x(l) - x(j)| > \sqrt{R(N)}\}.$$

В работе [8] доказано, что выражение

$$(Tf)^N(x(l)) = \sum_{j=1}^N t_{lj} f(x(j)) \quad (8)$$

в точках $x(l)$, $l = \overline{1, N}$, является кубатурной формулой для $(Tf)(x)$, причем

$$\begin{aligned} & \max_{l=1, N} |(Tf)(x(l)) - (Tf)^N(x(l))| \leq \\ & \leq M \left[\|f\|_{\infty} R(N) |\ln(R(N))| + \|\text{grad } f\|_{\infty} \sqrt{R(N)} + \int_0^{\sqrt{R(N)}} \frac{\omega(\text{grad } \rho, t)}{t} dt \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} t_{ll} &= \frac{3}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^N \frac{(x(j) - x(l), \vec{n}(x(j)))(x(j) - x(l), \vec{n}(x(l)))}{|x(l) - x(j)|^5} \text{mes } S_j - \\ & - \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in Q_l} \frac{(\vec{n}(x(l)), \vec{n}(x(j)))}{|x(l) - x(j)|^3} \text{mes } S_j \quad \text{при } l = \overline{1, N}; \\ t_{lj} &= \left[2 \frac{\partial}{\partial \vec{n}(x(l))} \left(\frac{\partial(\Phi_k(x(l), x(j)) - \Phi_0(x(l), x(j)))}{\partial \vec{n}(x(j))} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2\pi} \frac{(x(j) - x(l), \vec{n}(x(j)))(x(j) - x(l), \vec{n}(x(l)))}{|x(l) - x(j)|^5} \right] \text{mes } S_j \quad \text{при } j \in P_l, j \neq l; \\ t_{lj} &= \left[2 \frac{\partial}{\partial \vec{n}(x(l))} \left(\frac{\partial(\Phi_k(x(l), x(j)) - \Phi_0(x(l), x(j)))}{\partial \vec{n}(x(j))} \right) + \frac{1}{2\pi} \frac{(\vec{n}(x(l)), \vec{n}(x(j)))}{|x(l) - x(j)|^3} - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2\pi} \frac{(x(j) - x(l), \vec{n}(x(j)))(x(j) - x(l), \vec{n}(x(l)))}{|x(l) - x(j)|^5} \right] \text{mes } S_j \quad \text{при } j \in Q_l. \end{aligned}$$

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $\text{Im}k > 0$ и $f \in H_{1,\alpha}(S)$, $0 < \alpha \leq 1$. Тогда последовательность

$$\varphi^N(x(l)) = \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj}^- \left(\sum_{n=1}^N \tilde{k}_{jn}^+ \left(\sum_{m=1}^N t_{nm} (f(x(m)) - (Kf)(x(m))) \right) \right)$$

сходится к значению решения $\varphi(x)$ уравнения (2) в опорных точках $x(l)$, $l = \overline{1, N}$, причем

$$\max_{l=1, N} |\varphi(x(l)) - \varphi^N(x(l))| \leq M N^{-\beta/2},$$

где $0 < \beta < \alpha$.

Доказательство. Из леммы 1 и 2 очевидно, что

$$\max_{j=1, N} \sum_{n=1}^N |\tilde{k}_{jn}^+| \leq M_1, \quad \max_{j=1, N} \sum_{n=1}^N |\tilde{k}_{jn}^-| \leq M_2.$$

Тогда, принимая во внимание леммы 1 и 2 и оценку погрешности кубатурной формулы (8), имеем

$$\begin{aligned} & \left| \varphi(x(l)) - \varphi^N(x(l)) \right| \leq \\ & \leq \left| \left((I - \tilde{K})^{-1} (I + \tilde{K})^{-1} T(I - K)f \right)(x(l)) - \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj}^- \left((I + \tilde{K})^{-1} T(I - K)f \right)(x(j)) \right| + \\ & + \left| \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj}^- \left[\left((I + \tilde{K})^{-1} T(I - K)f \right)(x(j)) - \sum_{n=1}^N \tilde{k}_{jn}^+ (T(I - K)f)(x(n)) \right] \right| + \\ & + \left| \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj}^- \left[\sum_{n=1}^N \tilde{k}_{jn}^+ \left[(T(I - K)f)(x(n)) - \sum_{m=1}^N t_{nm} (f(x(m)) - (Kf)(x(m))) \right] \right] \right| \leq \\ & \leq M \left[\left\| (I + \tilde{K})^{-1} \right\| \|T(I - K)f\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| + \omega \left((I + \tilde{K})^{-1} T(I - K)f, R(N) \right) \right] + \\ & + M M_2 \left[\|T(I - K)f\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| + \omega(T(I - K)f, R(N)) \right] + \\ & + M M_1 M_2 \left[\|(I - K)f\|_{\infty} R(N) |\ln(R(N))| + \|\text{grad}(I - K)f\|_{\infty} \sqrt{R(N)} + \right. \\ & \left. + \int_0^{\sqrt{R(N)}} \frac{\omega(\text{grad}(I - K)f, t)}{t} dt \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как $(I - K)f \in H_{1,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha$, то

$$\|\text{grad}(I - K)f\|_{\infty} \leq M_f, \quad \omega(\text{grad}(I - K)f, t) \leq M_f t^{\beta}.$$

Кроме того, поступая точно так, как и в доказательстве неравенства (6), можно показать, что

$$\omega \left((I + \tilde{K})^{-1} f, R(N) \right) \leq \omega(f, R(N)) + M \|f\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)|.$$

Тогда, принимая во внимание неравенства из работы [12]

$$\|Tf\|_{\infty} \leq M \left(\|f\|_{\infty} + \|\text{grad } f\|_{\infty} + \int_0^{\text{diam} S} \frac{\omega(\text{grad } f, t)}{t} dt \right) \leq M_f$$

$$\text{и } \omega(Tf, h) \leq M_f \left(h |\ln h| + \omega(\text{grad } f, h) + \int_0^h \frac{\omega(\text{grad } f, t)}{t} dt + h \int_h^{\text{diam} S} \frac{\omega(\text{grad } f, t)}{t^2} dt \right) \leq M_f h^{\alpha},$$

получаем, что

$$\omega(T(I-K)f, R(N)) \leq M_f (R(N))^{\beta}$$

$$\text{и } \omega\left((I+\tilde{K})^{-1}T(I-K)f, R(N)\right) \leq \\ \leq \omega(T(I-K)f, R(N)) + M \|T(I-K)f\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| \leq M_f (R(N))^{\beta},$$

где $0 < \beta < \alpha$. В результате, учитывая неравенства в (9) и принимая во внимание соотношение $R(N) \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$, получаем доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
2. Davies P.J., Duncan D.B. Numerical approximation of first kind Volterra convolution integral equations with discontinuous kernels // Journal Integral Equations Applications. 2017. V. 29. No. 1. P. 41–73.
3. Giroire J., Nedelec J.C. Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double layer potential // Mathematics of Computation. 1978. V. 32. P. 973–990.
4. Hsiao G.C., Wendland W. A finite element method for some integral equations of the first kind // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1977. V. 58. P. 449–481.
5. Каширин А.А., Смагин С.И. О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 8. С. 1492–1505.
6. Polishchuk O.D. Finite element approximations in projection methods for solution of some Fredholm integral equation of the first kind // Mathematical Modeling and Computing. 2018. V. 5. No. 1. P. 74–87.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
8. Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для одного класса поверхностных интегральных уравнений // Математические заметки. 2020. Т. 107. № 4. С. 604–622.
9. Khalilov E.H. Cubic formula for class of weakly singular surface integrals // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. 2013. V. 39. No. 47. P. 69–76.
10. Khalilov E.H. On an approximate solution of a class of surface singular integral equations of the first kind // Georgian Mathematical Journal. 2020. V. 27. No. 1. P. 97–102.
11. Халилов Э.Г. О приближенном решении одного класса граничных интегральных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. No. 9. P. 1277–1283.
12. Халилов Э.Г. Некоторые свойства оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55. № 3. С. 690–700.

Статья поступила 08.07.2021

Khalilov E.H. (2021) INVESTIGATION OF AN APPROXIMATE SOLUTION OF SOME CLASSES OF SURFACE INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 43–54

DOI 10.17223/19988621/74/5

Keywords: integral equation of the first kind, weakly singular integral equations, hypersingular integral equations, Helmholtz equation, exterior Neumann boundary-value problem, exterior Dirichlet boundary-value problem.

The work is devoted to the study of an approximate solution of a hypersingular integral equation of the first kind

$$T\psi = g + \tilde{K}g, \quad (1)$$

and of a weakly singular integral equation of the first kind

$$L\varphi = -f + Kf, \quad (2)$$

obtained from the exterior Neumann and Dirichlet boundary-value problems for the Helmholtz equation, respectively. Here,

$$\begin{aligned} (L\varphi)(x) &= 2 \int_S \Phi_k(x, y) \varphi(y) dS_y, \\ (Kf)(x) &= 2 \int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \bar{n}(y)} f(y) dS_y, \\ (\tilde{K}g)(x) &= 2 \int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \bar{n}(x)} g(y) dS_y, \\ (T\psi)(x) &= 2 \frac{\partial}{\partial \bar{n}(x)} \left(\int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \bar{n}(y)} \psi(y) dS_y \right), \\ x &\in S, \end{aligned}$$

S is a twice continuously differentiable surface in R^3 , f and g are given continuous functions on S , $\Phi_k(x, y)$ is the fundamental solution of the Helmholtz equation, i.e.

$$\Phi_k(x, y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|}, \quad x, y \in R^3, \quad x \neq y,$$

k is the wave number, and $\bar{n}(x)$ is the unit outward normal at the point $x \in S$. It should be pointed out that the exterior Neumann and Dirichlet boundary-value problems can be reduced to various integral equations of the first kind. However, equations (1) and (2) have the advantage that the solution to Eq. (1) is the boundary value of the solution to the exterior Neumann boundary-value problem on S , and the solution to Eq. (2) is the boundary value of the normal derivative of the solution to the exterior Dirichlet boundary-value problem on S .

Let $C(S)$ denote the space of all continuous functions on the surface S with the norm $\|g\|_\infty = \max_{x \in S} |g(x)|$, and $H_{1,\alpha}(S)$ be the linear space of all continuously differentiable functions f on S satisfying the condition

$$|\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(y)| \leq M_f |x-y|^\alpha, \quad \forall x, y \in S,$$

where $0 < \alpha \leq 1$, and M_f be a positive constant depending on f , not on x or y . For the function $g \in C(S)$, we introduce a modulus of continuity of the form

$$\omega(g, \tau) = \max_{\substack{|x-y| \leq \tau \\ x, y \in S}} |g(x) - g(y)|, \quad \delta > 0.$$

Let S be partitioned into "regular" elementary parts: $S = \bigcup_{l=1}^N S_l$. Let $x(l) = (x_1(l), x_2(l), x_3(l)) \in S_l$ be the control points and $R(N) = \max_{l=1, \overline{N}} R_l(N)$, where $R_l(N) = \max_{x \in \partial S_l} |x - x(l)|$. Consider the matrix $\tilde{K}^N = (\tilde{k}_{lj})_{l,j=1}^N$ with the entries

$$\tilde{k}_{lj} = \begin{cases} 0, & \text{for } l \neq j, \\ 2 \frac{\partial \Phi_k(x(l), x(j))}{\partial \bar{n}(x(l))} \text{mes } S_j, & \text{for } l = j. \end{cases}$$

Moreover, let

$$f_{lj} = \begin{cases} 0, & \text{for } l \neq j, \\ 2 \Phi_k(x(l), x(j)) \text{mes } S_j, & \text{for } l = j, \end{cases}$$

$$P_l = \{j \mid 1 \leq j \leq N, |x(l) - x(j)| \leq \sqrt{R(N)}\}, \quad Q_l = \{j \mid 1 \leq j \leq N, |x(l) - x(j)| > \sqrt{R(N)}\}$$

and

$$\begin{aligned} t_{ll} &= \frac{3}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^N \frac{(x(j) - x(l), \bar{n}(x(j)))(x(j) - x(l), \bar{n}(x(l)))}{|x(l) - x(j)|^5} \text{mes } S_j - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in Q_l} \frac{(\bar{n}(x(l)), \bar{n}(x(j)))}{|x(l) - x(j)|^3} \text{mes } S_j \quad \text{for } l = \overline{1, N}; \\ t_{lj} &= \left[2 \frac{\partial}{\partial \bar{n}(x(l))} \left(\frac{\partial(\Phi_k(x(l), x(j)) - \Phi_0(x(l), x(j)))}{\partial \bar{n}(x(j))} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2\pi} \frac{(x(j) - x(l), \bar{n}(x(j)))(x(j) - x(l), \bar{n}(x(l)))}{|x(l) - x(j)|^5} \right] \text{mes } S_j \quad \text{for } j \in P_l, j \neq l; \\ t_{lj} &= \left[2 \frac{\partial}{\partial \bar{n}(x(l))} \left(\frac{\partial(\Phi_k(x(l), x(j)) - \Phi_0(x(l), x(j)))}{\partial \bar{n}(x(j))} \right) + \frac{1}{2\pi} \frac{(\bar{n}(x(l)), \bar{n}(x(j)))}{|x(l) - x(j)|^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2\pi} \frac{(x(j) - x(l), \bar{n}(x(j)))(x(j) - x(l), \bar{n}(x(l)))}{|x(l) - x(j)|^5} \right] \text{mes } S_j \quad \text{for } j \in Q_l. \end{aligned}$$

The following two theorems are proved in this paper.

Theorem 1. Let $\text{Im } k > 0$ and $g \in C(S)$. Then the sequence

$$\Psi^N(x(l)) = - \sum_{j=1}^N f_{lj} \left(\sum_{n=1}^N \tilde{k}_{jn}^- g(x(n)) \right)$$

converges to the value of the solution $\psi(x)$ of Eq. (1) at the control points $x(l)$, $l = \overline{1, N}$, so that

$$\max_{l=1, \overline{N}} |\psi(x(l)) - \Psi^N(x(l))| \leq M \left[\|g\|_{\infty} \frac{\ln N}{\sqrt{N}} + \omega(g, 1/\sqrt{N}) \right],$$

where $\tilde{k}_{lj}^-$ is the entry at the l -th row and j -th column of the matrix $(I^N - \tilde{K}^N)^{-1}$, I^N is the identity matrix of size N , and M is a positive constant.

Theorem 2. Let $\text{Im}k > 0$ and $f \in H_{1,\alpha}(S)$, $0 < \alpha \leq 1$. Then the sequence

$$\varphi^N(x(l)) = \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj}^- \left(\sum_{n=1}^N \tilde{k}_{jn}^+ \left(\sum_{m=1}^N t_{nm} (f(x(m)) - (Kf)(x(m))) \right) \right)$$

converges to the value of the solution $\varphi(x)$ of Eq. (2) at the control points $x(l)$, $l = \overline{1, N}$, so that

$$\max_{l=1, N} |\varphi(x(l)) - \varphi^N(x(l))| \leq M N^{-\beta/2},$$

where $0 < \beta < \alpha$, $\tilde{k}_{jn}^+$ is the entry at the j -th row and n -th column of the matrix $(I^N + \tilde{K}^N)^{-1}$, and M is a positive constant.

AMS Mathematical Subject Classification: 45E05; 31B10

Elnur H. KHALILOV (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of General and Applied Mathematics of the Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: elnurkhalil@mail.ru

REFERENCES

- Colton D.L., Kress R. (1983) *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. John Wiley & Sons.
- Davies P.J., Duncan D.B. (2017) Numerical approximation of first kind Volterra convolution integral equations with discontinuous kernels. *Journal of Integral Equations and Applications*. 29(1). pp. 41–73. DOI: 10.1216/JIE-2017-29-1-41.
- Giroire J., Nedelec J.C. (1978) Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double layer potential. *Mathematics of Computation*. 32(144). pp. 973–990.
- Hsiao G.C., Wendland W. (1977) A finite element method for some integral equations of the first kind. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 58. pp. 449–481. DOI: 10.1016/0022-247X(77)90186-X.
- Kashirin A.A., Smagin S.I. (2012) Potential-based numerical solution of Dirichlet problems for the Helmholtz equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 52(8). pp. 1173–1185. <https://doi.org/10.1134/S0965542512080052>.
- Polishchuk O.D. (2018) Finite element approximations in projection methods for solution of some Fredholm integral equation of the first kind. *Mathematical Modeling and Computing*. 5(1). pp. 74–87. DOI: 10.23939/mmc2018.01.074.
- Vladimirov V.S. (1971) *Equations of Mathematical Physics*. New York: Marcel Dekker.
- Khalilov E.H. (2020) Justification of the collocation method for a class of surface integral equations. *Mathematical Notes*. 107(4). pp. 663–678. DOI: 10.1134/S0001434620030335.
- Khalilov E.H. (2013) Cubic formula for class of weakly singular surface integrals. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*. 39(47). pp. 69–76. Access mode: http://imm.az/journals/RMI_eserleri/cild39_N47_2013/meqaleler/69-76.pdf
- Khalilov E.H. (2020) On an approximate solution of a class of surface singular integral equations of the first kind. *Georgian Mathematical Journal*. 27(1). pp. 97–102. DOI: 10.1515/gmj-2018-0038.
- Khalilov E.H. (2016) On an approximate solution of a class of boundary integral equations of the first kind. *Differential Equations*. 52(9). pp. 1234–1240. DOI: 10.1134/S0012266116090147.
- Khalilov E.H. (2014) Some properties of the operators generated by a derivative of the acoustic double layer potential. *Siberian Mathematical Journal*. 55(3). pp. 564–573. DOI: 10.1134/S0037446614030173.

Received.: 8 July 2021

МЕХАНИКА

UDK 536.5

DOI 10.17223/19988621/74/6

A.P. Sarode

TEMPERATURE ASPECTS OF A CUBOID CRYSTAL
IN PHOTOACOUSTIC INTERACTION

When a solid crystal undergoes photoacoustic effect, excitation process occurs due to a fraction of incident radiation absorbed by that sample. The nature of excitation depends on the energy of incident radiation. The relaxation processes, generally non-radiative in nature, are observed. Alternate processes of absorption and non-radiative relaxation cause variation in translational temperature in atoms of the crystal. In this paper, the thermal aspects of an isotropic cuboid crystal of elastic material in photoacoustic interaction are presented. This theoretical determination is carried out by applying the finite Marchi–Fasulo integral transform method within the crystal size limitations of a homogeneous cuboid crystal. The results are obtained in terms of infinite series, and the numerical calculations are carried out by using MATHCAD-7 software. The transient translational temperature on the surface of the cuboid crystal in photoacoustic interaction is mathematically determined in terms of thermal conductivity of the elastic material of the crystal.

Keywords: *cuboid crystal, photoacoustic cell, photoacoustic effect, Marchi – Fasulo integral transform, transient translational temperature.*

1. Introduction

Today, crystalline solids are widely used in industries because of their wide applications. Their great practical importance has attracted researchers for finding new scopes. Elastic parameters of crystals are studied to discover their applicability. Crystals of better quality and large size are prepared artificially for their practical use. Thermal aspects of crystals are of great importance since they are related to their strength and fragile nature.

In photoacoustic interaction with a crystal, electromagnetic radiation is absorbed by molecules of the sample crystal. Electromagnetic radiation leads to the crystal warming-up in that area. During the relaxation processes by non-radiative way, the molecular collisions occur. Thermal expansion of the crystal creates pressure fluctuations, which can be detected as ultrasonic waves or an acoustic signal [1]. In other words, the conversion of an optical signal into an acoustic signal takes place in a photoacoustic effect [2]. The solid crystal absorbs a fraction of the radiation falling upon it, and an excitation process occurs. The excitation type depends on the energy of the incident radiation.

Relaxation processes, which are also known as non-radiative de-excitation processes, are typical for the considered processes. The light–matter interaction is responsible for heat generation within a solid crystal. In the experiments, when modulated inci-

dent radiation is used, it has been observed that the thermal energy generation within the crystal becomes periodic. A pressure wave or a thermal wave is produced [3] that has the same frequency as the modulation of the incident radiation. The pressure wave or the thermal wave transfers energy towards the sample boundary. As a result, the periodic temperature change is observed. The temperature varies on the crystal surface, and the variations are periodic in nature. This process results in the acoustic signal generation in the gas around the solid sample. This sound wave travels through the surrounding volume of the gas to a detector. The detector may be a piezoelectric transducer, a microphone, or an optical method at the place where the signal is produced. The signal from the detector or microphone is plotted as a function of the wavelength, and it gives the spectrum that is proportional to the absorption spectrum of the sample [4–6]. This principle of photoacoustic effect can be schematically represented as shown in figure 1.

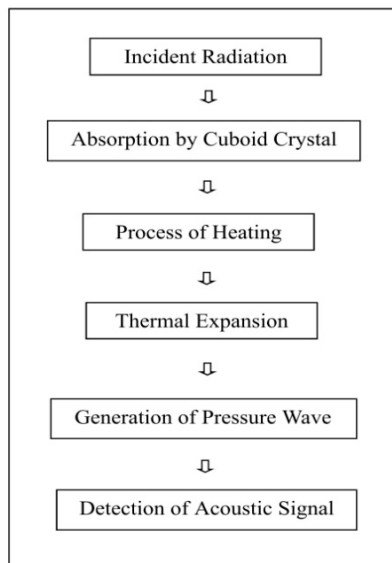


Fig. 1. Processes in Photoacoustic generation in a cuboid crystal

However, very little attention has been paid by researchers to the thermal stress determination during photoacoustic analysis. The main purpose of the present work is to determine mathematical aspects of the transient temperature generated in a cuboid crystal in photoacoustic effect.

Initial theoretical explanation of temperature of solids during photoacoustic interaction was presented by Rosencwaig in 1975 [7]. He correlated the temperature of the sample with thermal conductivity, density and specific heat of the sample undergoing photoacoustic investigation. Later, in 1976, a one-dimensional model of the heat flow and temperature was formulated by Rosencwaig and Gersho [8]. They derived mathematically the temperature distribution in a cell with a solid sample. McDonald and Wetzel published temperature calculations of photoacoustic interaction in a three-dimensional model with restrictions on thermal waves in the transverse direction [9]. They presented a composite piston model and proved its validity for thermally thick samples. Quimby and Yen primarily calculated the surface heat transfer in temperature

estimation [10]. Chow developed a three-dimensional model in a general way without any restrictions on the sample size in a photoacoustic cell [11]. He showed that for an incident beam with a narrow focus, the analysis of the Gaussian beam profile indicated an insignificant role of the spot size. In the recent years, Merzadinova et al. calculated ambient temperature of a solid in thermal diffusivity determination of structurally inhomogeneous, multilayer, and composite solids in photoacoustic interaction [12]. The work was based on the fundamental Rosencwaig–Gersho model by using laser flash method. Though a large number of research papers have been published regarding photoacoustic interaction till date, the theoretical presentation of temperature aspects of a homogeneous and isotropic crystal, which is cuboid in shape, have not been presented yet. This paper presents such theoretical estimation.

2. Photoacoustic effect

In photoacoustic effect, interaction of electromagnetic radiation with matter generates sound. This effect represents the absorption of incident radiation by a target molecule. Photoacoustic effect is popular due to a minimal sample preparation during execution and an ability to examine scattering and opaque sample along with the capability to access a depth profile [13]. These features enable photoacoustic spectroscopy to be used for monitoring of various gases as well as for depth-resolved characterization of solid crystals [14]. The energy absorbed by the solid crystal can be measured by pressure fluctuations generating shock pulses or sound waves [15]. In photoacoustic spectrum, a plot of the intensity of the detected acoustic signal against the excitation wavelength is analyzed. The sound waves are detected by a piezoelectric detector or a microphone.

In 1880–1881, Alexander Graham Bell [16] discovered the way the light interacts with solid. He observed that, when the mechanically chopped sunlight falls on a thin disk, sound waves were generated. The similar effect was observed, when infrared or ultraviolet light was used. It is called the photoacoustic effect. A plot of the sound loudness against the wavelength of the light used is called a photoacoustic spectrum. According to Haisch and Niessner [17], this effect captured the interest of scientists worldwide when researchers led by Allen Rosencwaig at Bell Laboratories rediscovered the phenomenon.

3. Photoacoustic interaction in a cell

The photoacoustic interaction is generally carried out in a small structure having an air-tight arrangement with a sensitive acoustic sensor. Such a cell is termed as a photoacoustic cell [18]. The sensor is embedded into one of the walls of the cell. When the periodic variations in temperature occur at a respective point of the surface of the solid crystal [19–20], an acoustic wave is generated in the gas [21]. This wave travels through the volume of the surrounding gas to a detector. This detector converts it into equivalent electrical signals. The detector may be a piezoelectric transducer or a capacitance transducer [22] in the adjoining gas phase of the crystal. This clearly shows that the photoacoustic signal is a result of two types of the processes taking place in the crystal. These processes are the absorption of electromagnetic radiation, expressed by the absorption coefficient B , and the propagation of thermal energy in the solid crystal which is specified by the thermal diffusivity, α .

The crystal under execution has an important parameter, known as the optical absorption length [23]. It represents the depth up to which total incident radiation is absorbed in the crystal. Due to this absorption, the resulting thermal wave generated in the

crystal becomes heavily damped. This wave can be considered as a fully damped in a specific distance of $2\pi\mu_s$. Here, μ_s is the thermal diffusion length. It is generally assumed that the thermal waves, which originate from a depth less than or equal to μ_s , make significant contribution to the photoacoustic signal generated. The thermal diffusion length is dependent on the thermal diffusivity as well as the modulation frequency ω of the incident radiation. All these parameters can be expressed by the following relation:

$$\mu_s = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}}. \quad (1)$$

This formula is very important, because if the modulation frequency ω is changed, then for a given solid crystal with known thermal diffusivity, the examined depth μ_s may also be changed.

The resulted photoacoustic signal is of complex nature because it has a magnitude and a phase related with the modulation of the incident radiation. Since the thermal characteristics of the solid crystal and the modulation frequency are dependent on the absorption coefficient, the resulting photoacoustic signal is directly proportional to the power of the incident radiation. This signal also depends on the characteristics of the gas surrounding the solid crystal surface. The properties of the material that backs the crystal also play an important role for the photoacoustic signal.

4. Arrangement of a cuboid crystal

Consider a cuboid crystal made of thermoelastic material is inserted into a modified photoacoustic cell. The crystal is homogeneous and isotropic. This crystal is placed in a cylindrical cavity of the photoacoustic cell to produce a photoacoustic signal. The cell is air-tight, and, hence, it has a constant volume of the gas surrounding the crystal. The crystal is irradiated by a proper laser source. The crystal absorbs heat and generates the photoacoustic signal.

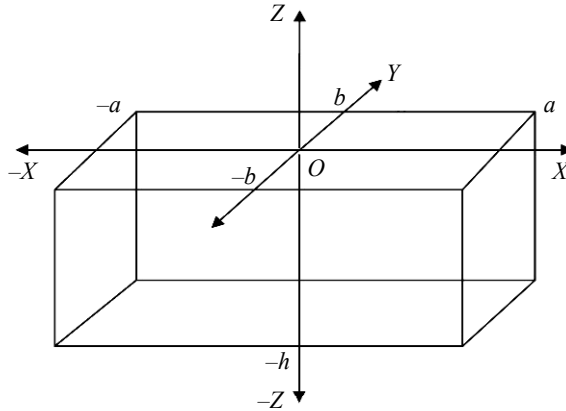


Fig. 1. Cuboid crystal in Photoacoustic interaction

Assume that the cubic crystal placed in the cell is occupying the space, as shown in figure 2. This space is mathematically defined as

$$D: -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, 0 \leq z \leq -h. \quad (2)$$

Consider a Cartesian coordinate system, in which the displacement components are u_x , u_y , u_z in x , y , z directions, respectively [24–25]. These displacement components can be expressed in the integral form as

$$u_x = \int \left[\frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + \lambda T \right] dx, \quad (3)$$

$$u_y = \int \left[\frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \lambda T \right] dy, \quad (4)$$

$$u_z = \int \left[\frac{1}{Y} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \lambda T \right] dz, \quad (5)$$

where Y , ν , and λ are the Young modulus, the poisson ratio, and the coefficient of linear thermal expansion of the material of the crystal, respectively.

5. Temperature aspects

Consider that $U(x, y, z, t)$ is the airy stress function [26] which satisfies the differential equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 U(x, y, z, t) = -\lambda Y \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 T(x, y, z, t). \quad (6)$$

Here, $T(x, y, z, t)$ denotes the translational temperature of the crystal satisfying the following differential equation:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\theta(x, y, z, t)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (7)$$

where k is the thermal conductivity and α is the thermal diffusivity of the material of the crystal. Let $\theta(x, y, z, t)$ be the heat generated within the crystal for $t > 0$ under initial conditions

$$T(x, y, z, 0) = F(x, y, z). \quad (8)$$

The finite Marchi–Fasulo integral transform of $f(z)$ within the limitations $-h < z < h$ is defined as [27]

$$\bar{F} = \int_{-h}^h f(z) P_n(z) dz. \quad (9)$$

The Marchi–Fasulo transform technique is used to determine the unknown temperature, temperature distribution, displacement of the fields and thermal stresses on a plane surface of a thin object. Here, the determination of three-dimensional transient thermal parameters for a thin crystal made of elastic material is considered within the context of the theory of generalized elasticity. At each point within $(-h, h)$, the function $f(z)$ is continuous. Again, the inverse finite Marchi–Fasulo transform for previous conditions is defined as [28]

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{F}(n)}{\lambda_n} P_n(z). \quad (10)$$

Here,

$$\begin{aligned}
 P_n(z) &= Q_n \cos(a_n z) - W_n \sin(a_n z), \\
 Q_n &= a_n (\alpha_1 + \alpha_2) \cos(a_n h) + (\beta_1 - \beta_2) \sin(a_n h), \\
 W_n &= (\beta_1 + \beta_2) \cos(a_n h) + (\alpha_1 - \alpha_2) a_n \sin(a_n h), \\
 \lambda_n &= \int_{-h}^h P_n^2(z) dz, \\
 \lambda_n &= h [Q_n^2 + W_n^2] + \frac{\sin(2a_n h)}{2a_n} [Q_n^2 - W_n^2].
 \end{aligned}$$

Eigenvalues a_n are the solutions of the equation

$$\begin{aligned}
 &[\alpha_1 \cos(ah) + \beta_1 \sin(ah)] \times [\beta_2 \cos(ah) + \alpha_2 \sin(ah)] = \\
 &= [\alpha_2 \cos(ah) - \beta_2 \sin(ah)] \times [\beta_1 \cos(ah) - \alpha_1 \sin(ah)].
 \end{aligned} \quad (11)$$

Here, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ are constants.

By applying the finite Marchi-Fasulo transform to boundary conditions and their inverses three times, we obtain

$$\frac{d\bar{T}^*}{dt} + \infty q^2 \bar{T}^* = \infty \left(\emptyset + \frac{\bar{\theta}}{k} \right), \quad (12)$$

where

$$\emptyset = P_m(a)F_2 - P_m(-a)F_1 + P_n(b)F_4 - P_n(-b)F_3 + P_l(h)f_2 - P_l(-h)f_1$$

$$\text{and} \quad q^2 = a_m^2 + a_n^2 + a_l^2 \text{ is the eigenvalue.} \quad (13)$$

First order differential equation (12) has the following solution:

$$\bar{T}^*(m, n, l, t) = e^{-\infty q^2 t} \left[\int_0^t \infty \left(\emptyset + \frac{\bar{\theta}}{k} \right) e^{\infty q^2 t' dt'} + c, \quad c = \bar{F}^*(m, n, l) \right], \quad (14)$$

$$\bar{T}^*(m, n, l, t) = \int_0^t \infty \left(\emptyset + \frac{\bar{\theta}}{k} \right) e^{\infty (a_m^2 + a_n^2 + a_l^2)(t-t')} dt' + e^{-\infty (a_m^2 + a_n^2 + a_l^2)t} \bar{F}^*(m, n, l). \quad (15)$$

If we apply the inverse finite Marchi-Fasulo transform to this equation with boundary conditions three times, we obtain

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z, t) &= \frac{k}{c^2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \left[\frac{P_m(x)}{\lambda_m} \right] \left[\frac{P_n(y)}{\mu_n} \right] [\phi_1(z) \Psi_1(t) - \phi_2(z) \Psi_2(t)] + \\
 &+ \frac{2k\pi}{h^2} \sum_{l,m,n=1}^{\infty} \left[\frac{P_m(x)}{\lambda_m} \right] \left[\frac{P_n(y)}{\mu_n} \right] \left[\frac{l}{\cos l\pi} \right] \left[\frac{1}{1 + cl\pi^2} \right] [n_1(z) \Psi_3(t) - n_2(z) \Psi_4(t)]. \quad (16)
 \end{aligned}$$

6. Conclusions

Exact expression (16) for transient translational temperature on the surface of a cuboid crystal in photoacoustic interaction is mathematically determined using the Marchi-Fasulo method in terms of thermal conductivity of thermoelastic material of the crystal. This expression allows calculating of various parameters of the cuboid crystal such as the constants related with elasticity. Since various crystals are used in industrial applications at different temperatures, their ability to withstand a given temperature value for particular application is helpful when designing various scientific and industrial processes involving laser interactions. This mathematical approach constitutes an important step towards determination of various aspects of premature failure of solid state industrial components and devices. The proposed approach provides a theoretical basis for the study on the influence of stresses in photoacoustic interaction in various cuboid crystals. The obtained results are of great importance when studying optical and thermal properties of complex materials. This work can be used in future research for scientific and industrial applications.

Abhijit P. SARODE (Doctor of Physics, Associate Professor, Dr. Annasaheb G.D. Bendale Girls College, Jalgaon, India). E-mail: abhijitsarode@yahoo.com

REFERENCES

1. McDonald F.A. (1980) Photoacoustic effect and the physics of waves. *American Journal of Physics*. 48(1). pp. 41–47. DOI: 10.1119/1.12250.
2. Schmid T. (2006) Photoacoustic spectroscopy for process analysis. *Analytical and Bioanalytical Chemistry*. 384(5). pp. 1071–1086. DOI: 10.1007/s00216-005-3281-6.
3. Davies S.J., Edwards C., Taylor G.S., Palmer S.B. (1993) Laser-generated ultrasound: its properties, mechanisms and multifarious applications. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 26(3). pp. 329–348. DOI: 10.1088/0022-3727/26/3/001.
4. Hutchins D.A., Wilkins D.E. (1985) Elastic waveforms using laser generation and electromagnetic acoustic transducer detection. *Journal of Applied Physics*. 58. pp. 2469–2477. DOI: 10.1063/1.335923.
5. Nosaka Y., Igarashi R., Miyama H. (1985) Pulsed photoacoustic spectroscopy for powder suspension using a flash lamp. *Analytical Chemistry*. 57(1). pp. 92–94. DOI: 10.1021/ac00279a026.
6. Nelson E.T., Patel C.K.N. (1981) Response of piezoelectric transducers used in pulsed optoacoustic spectroscopy. *Optics Letters*. 6(7). pp. 354–356. DOI: 10.1364/OL.6.000354.
7. Rosencwaig A. (1975) Photoacoustic spectroscopy of solids. *Physics Today*. 28(9). pp. 23–30. DOI: 10.1063/1.3069155.
8. Rosencwaig A., Gersho A. (1976) Theory of the photoacoustic effect with solids. *Journal of Applied Physics*. 47(1). pp. 64–68. DOI: 10.1063/1.322296.
9. McDonald F., Wetsel G. (1978) Generalized theory of the photoacoustic effect. *Journal of Applied Physics*. 49(4). pp. 2313–2322. DOI: 10.1063/1.325116.
10. Quimby R., Yen W. (1980) Photoacoustic theory including energy migration. *Journal of Applied Physics*. 51(9). pp. 4985–4990. DOI: 10.1063/1.328377.
11. Chow H. (1980) Theory of three dimensional photoacoustic effect with solids. *Journal of Applied Physics*. 51(8). pp. 4053–4056. DOI: 10.1063/1.328255.
12. Merzadinova G., Sakipov K., Sharifov D., Mirzo A., Bekeshev A. (2019) Laser photoacoustics method for determination of the coefficients of thermal conductivity and thermal diffusivity of materials. *Eurasian Physical Technical Journal*. 16(1). pp. 94–98. DOI: 10.31489/2019No1/94-98.
13. Viator J.A., Jacques S.L., Pahl S.A. (1999) Depth profiling of absorbing soft materials using photoacoustic methods. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. 5(4). pp. 989–996. DOI: 10.1109/2944.796321.

14. Sigrist M.W. (1999) Photoacoustic spectroscopy, method and instrumentation. *Encyclopedia of Spectroscopy and Spectrometry*. 3. p. 1810.
15. Pincus R.L. (2014) Photoacoustic spectroscopy: a method for investigating weak molecular absorption. *Reed College Journal*. p. 43.
16. Bell A.G. (1880) Photoacoustic imaging and spectroscopy. *American Journal of Science*. 20. p. 305.
17. Haisch C., Niessner R. (2002) Light and sound – photoacoustic spectroscopy. *Spectroscopy Europe*. 14(5). pp. 10–15.
18. West G.A., Barrett J.J., Siebert D.R., Reddy K.V. (1983) Photoacoustic spectroscopy. *Review of Scientific Instruments*. 54. pp. 797–817. DOI: 10.1063/1.1137483.
19. White R.M. (1963) Generation of elastic waves by transient surface heating. *Journal of Applied Physics*. 34(12). pp. 3559–3567. DOI: 10.1063/1.1729258.
20. Salikhov T.Kh., Melikkhudza N., Khodzhaev Y.P., Khodzhakhonov I.T. (2017) K teorii generatsii fotoakusticheskogo signala tverdotel'nyimi obraztsami [To the theory of generation of photoacoustic signal by solid state samples]. *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan – Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*. 60(11-12). pp. 569–574.
21. Nelson E.T., Patel C.K.N. (1981) Response of piezoelectric transducers used in pulsed optoacoustic spectroscopy. *Optics Letters*. 6(7). pp. 354–356. DOI: 10.1364/OL.6.000354.
22. Scruby C.B., Wadley H.N.G. (1978) A calibrated capacitance transducer for the detection of acoustic emission. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 11(1). pp. 1487–1494. DOI: 10.1088/0022-3727/11/11/007.
23. Sarode A.P., Mahajan O.H. (2018) Theoretical aspects of photoacoustic effect with solids. *International Journal for Science and Advance Research in Technology*. 4(2). pp. 1237–1242. DOI: 10.13140/RG.2.2.21345.45921.
24. Ailawalia P., Sachdeva S.K., Singh P.D. (2017) Effect of mechanical force along the interface of semi-infinite semiconducting medium and thermo-elastic micropolar cubic crystal. *Cogent Mathematics*. 4(1). pp. 231–234. DOI: 10.1080/23311835.2017.1347991.
25. Nyawere P.W.O., Makau N.W., Amolo G.O. (2014) First-principles calculations of the elastic constants of the cubic, orthorhombic and hexagonal phases of BaF₂. *Physica B: Condensed Matter*. 434. pp.122–128. DOI: 10.1016/j.physb.2013.10.051.
26. Mahmoud S.R., Ghaleb Sh.A., Alzahrani A.K., Ghandourah E. (2017) Mathematical model for problem of stresses in thermo-magneto-piezoelectric material. *Applied Mathematics & Information Sciences*. 11(4). pp. 1217–1223. DOI: 10.18576/amis/110429.
27. Patel S.R. (1971) Inverse problems of transient heat conduction with radiation. *The Mathematics Education*. 5(4). pp. 85–90.
28. Sneddon I.N. (1974) *The Use of Integral Transform*. New Delhi: Tata McGraw-Hill.

Received: May 31, 2020

Sarode A.P. (2021) TEMPERATURE ASPECTS OF A CUBOID CRYSTAL IN PHOTO-ACOUSTIC INTERACTION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 55–62

DOI 10.17223/19988621/74/6

УДК 531.383

DOI 10.17223/19988621/74/7

Е.А. Антонов

ДИНАМИКА ДВУХМАССОВОГО МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА L - L -ТИПА В РЕЖИМЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Исследуется динамика двухмассовой модели микромеханического гироскопа типа L - L в режиме вынужденных колебаний в линейной постановке. Приведена теоретико-механическая модель чувствительного элемента гироскопа с двумя активными массами («инерционная масса – рамка»). Для решения был предложен новый метод анализа двухчастотной системы. В итоге было получено решение и построены амплитудно-частотные характеристики для рассматриваемой модели. На основе полученных результатов сделаны соответствующие выводы по поведению системы.

Ключевые слова: Микромеханический гироскоп, линейные вибрации, вынужденные колебания, линейная система.

На сегодняшний день микросистемная техника (МСТ) используется практически в любой сфере жизнедеятельности человека [1, 2]. МСТ – это научно-техническое направление, целью которого является создание в ограниченном объеме твердого тела или на его поверхности микросистем, представляющих собой упорядоченные композиции областей с заданным составом, структурой и геометрией. МСТ базируется, в первую очередь, на высокоточных и миниатюрных датчиках, эффективных микродвигателях и качественных преобразователях.

Микромеханические гироскопы (ММГ) являются неотъемлемой частью МСТ. Основными свойствами микромеханических гироскопов являются их миниатюрные габариты, сверхмалое энергопотребление, высокая устойчивость к внешним воздействующим факторам. Разработка таких устройств основана на создании и анализе теоретико-механических моделей, описывающих движение чувствительного элемента и учитывающих различное влияние внешних факторов: нелинейные параметры системы, медленно меняющиеся параметры, различные условия функционирования и т.д. [3–5]

Актуальной проблемой является создание новых теоретико-механических микромеханических гироскопов и выявление новых, более точных аналитических зависимостей для различных режимов работы устройства, которые позволят существенно повысить точностные свойства гироскопов.

Постановка задачи

Рассматривается следующая конструктивная схема чувствительного элемента микромеханического гироскопа типа L - L (рис. 1).

На рис. 1 изображена инерционная масса 1, которая закреплена при помощи четырёх внутренних упругих элементов (торсионов) 4 в рамке 2. Рамка 2 также связана с подложкой основания 6 четырьмя внешними торсионами 5. «Гребенчатая структура» 3 образуется из электродов, закреплённых на основании 6 и рамке 2.

Образованная «гребенчатая структура» относится к двигателю системы и является системой плоских конденсаторов, при помощи которой возбуждаются колебания в системе (за счет изменения емкости между гребенками). Колебания инерционной массы 1 на выходе системы снимаются специальной регистрационной системой, основанной на емкостном принципе работы, после чего проходят обработку внешней компьютерной системой [6].

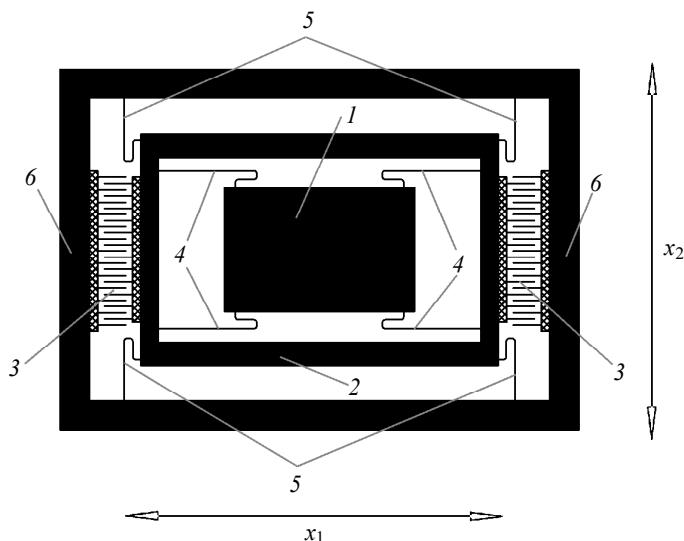


Рис. 1. Кинематическая модель ММГ L - L -типа
Fig. 1. Kinematic model of an L - L -type micromechanical gyroscope

ММГ типа L - L не содержит в своей структуре вращающихся частей и использует только линейные вибрации инерционной массы и рамки, в которой она закреплена в направлении взаимно перпендикулярных осей x_1 и x_2 .

Цель данной работы заключается в анализе поведения двухчастотной системы в режиме вынужденных колебаний при помощи нового метода получения решения.

Построение уравнений движения

Рассмотрим связанную систему «рамка – инерционная масса», закрепленную на подвижном основании, которое вращается с произвольной скоростью Ω , где Ω соизмеримо меньше, чем собственная частота колебаний [7], иначе прибор не будет работать, но пренебречь этим значением в построении теоретико-механической модели нельзя.

Кинетическая энергия системы «рамка – инерционная масса»

$$T = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_1^2 + (x_1 \cdot \Omega)^2) + \frac{1}{2} m_{ин} ((\dot{x}_1 - x_2 \cdot \Omega)^2 + (\dot{x}_2 + x_1 \cdot \Omega)^2),$$

где: x_1, x_2 – координаты, определяющие положение чувствительного элемента в заданной системе координат, связанной с основанием; $m_{ин}$ – инерционная масса; m_p – масса рамки; Ω – угловая скорость основания.

Потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1x_1^2 + \frac{1}{2}c_2x_2^2,$$

где c_1, c_2 – жесткость внешних и внутренних торсионов соответственно.

Таким образом, лагранжиан системы записывается в виде

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m_p(\dot{x}_1^2 + (x_1 \cdot \Omega)^2) + \frac{1}{2}m_{ин}((\dot{x}_1 - x_2 \cdot \Omega)^2 + (\dot{x}_2 + x_1 \cdot \Omega)^2) - \frac{1}{2}c_1x_1^2 - \frac{1}{2}c_2x_2^2. \quad (1)$$

В колебательной системе всегда присутствует диссипация. С целью учета диссипативных сил в системе воспользуемся функцией Релея

$$\Phi = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2,$$

где k_1 – коэффициент, который определяет энергию рассеивания при движении рамки; k_2 – коэффициент, учитывающий рассеивание энергии при движении инерционной массы.

Пусть на систему действует внешняя гармоническая вынуждающая сила в общем случае $F(t)$ вдоль обобщенной координаты x_1 (рис. 1).

Воспользовавшись формализмом Лагранжа, запишем уравнения движения чувствительного элемента

$$\ddot{x}_1(m_p + m_{ин}) - 2m_{ин}\Omega \cdot \dot{x}_2 - (m_p + m_{ин})\Omega^2 x_1 + c_1x_1 = F(t); \quad (2)$$

$$\ddot{x}_2m_{ин} + 2m_{ин}\Omega \cdot \dot{x}_1 - m_{ин}\Omega^2 x_2 + c_2x_2 = 0.$$

Рассмотрим идеальный случай, когда коэффициенты упругости связаны следующим соотношением:

$$c_1 = \frac{m_p + m_{ин}}{m_{ин}}c_2. \quad (3)$$

Соотношение (3) вводится для улучшения резонансных свойств ММГ.

Проведём процедуру нормализации системы уравнений (2), взяв за нормирующий параметр величину h – зазор между гребенками контактов, образующих систему плоских конденсаторов (рис. 1):

$$\ddot{\alpha} + 2\gamma_1\omega_0\dot{\alpha} - 2\frac{1}{1+\delta}\Omega\dot{\beta} + (\omega_0^2 - \Omega^2)\alpha = f(t); \quad (4)$$

$$\ddot{\beta} + 2\gamma_2\omega_0\dot{\beta} + 2\Omega\dot{\alpha} + (\omega_0^2 - \Omega^2)\beta = 0,$$

где α и β – малые безразмерные амплитуды колебаний ($|\alpha|$ и $|\beta| \ll 1$); ω_0 – собственная частота чувствительного элемента;

$$x_1 = h \cdot \alpha; \quad x_2 = h \cdot \beta; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_{ин}}};$$

$f(t)$ – нормализованная вынуждающая сила; γ_1 и $\gamma_2 \ll 1$ – безразмерные коэффициенты затухания (в таком случае система обладает хорошей добротностью);

$$2\omega_0\gamma_i = \frac{k_i}{m_{ин}\omega_0}; \quad f(t) = \frac{F(t)}{m_{ин}h}.$$

Далее рассматриваем систему, где $k_1 = k_2$, параметр δ , равный отношению массы рамки к инерционной массе, является параметром порядка ε .

Пусть внешняя вынуждающая сила задаётся в виде $f_0 \sin \mu t$, где амплитуда вынуждающей силы f_0 мала по отношению к жесткости торсионов c , т. е. будем рассматривать мягкое возбуждение, при котором значение f_0 порядка $\varepsilon^{3/2}$, μ – безразмерная частота внешнего воздействия.

Перепишем систему (4) в виде

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} - 2\Omega\dot{\beta} + (\omega_0^2 - \Omega^2)\alpha &= -G_1; \\ \ddot{\beta} + 2\Omega\dot{\alpha} + (\omega_0^2 - \Omega^2)\beta &= -G_2,\end{aligned}\tag{5}$$

где введены следующие замены:

$$\begin{aligned}G_1 &= 2\gamma\omega_0\dot{\alpha} + 2\Omega\delta\dot{\beta} - f_0 \sin \mu t; \\ G_2 &= 2\gamma\omega_0\dot{\beta}.\end{aligned}$$

Анализ динамики чувствительного элемента

Для решения двухчастотной системы (5) был применён новый метод, который основывается на методике Крылова – Боголюбова [8].

Запишем вначале общий вид решения в переменных амплитуда – фаза:

$$\begin{aligned}\alpha &= A(t) \sin(\mu t + \varphi_1(t)) + B(t) \sin(\mu t + \varphi_2(t)); \\ \beta &= A(t) \cos(\mu t + \varphi_1(t)) - B(t) \cos(\mu t + \varphi_2(t)).\end{aligned}\tag{6}$$

Для однородной системы уравнения (6) перепишутся в виде

$$\begin{aligned}\alpha &= A(t) \sin(\omega_1 t + \varphi_1(t)) + B(t) \sin(\omega_2 t + \varphi_2(t)); \\ \beta &= A(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1(t)) - B(t) \cos(\omega_2 t + \varphi_2(t)),\end{aligned}\tag{7}$$

где ω_1 и ω_2 – корни однородной системы

$$\omega_1 = \omega_0 - \Omega; \quad \omega_2 = \omega_0 + \Omega.\tag{8}$$

Перейдем от переменных $A, B, \varphi_1, \varphi_2$ в (6) к переменным g_1, g_2, r_1, r_2 :

$$\begin{aligned}\alpha &= g_1 \sin \mu t + r_1 \cos \mu t + g_2 \sin \mu t + r_2 \cos \mu t; \\ \beta &= g_1 \cos \mu t - r_1 \sin \mu t - g_2 \cos \mu t + r_2 \sin \mu t,\end{aligned}\tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}g_1(t) &= A(t) \cos \varphi_1(t); \quad r_1(t) = A(t) \sin \varphi_1(t); \\ g_2(t) &= B(t) \cos \varphi_2(t); \quad r_2(t) = B(t) \sin \varphi_2(t).\end{aligned}\tag{10}$$

Запишем уравнения (7) в новых переменных:

$$\begin{aligned}\alpha &= g_1 \sin \omega_1 t + r_1 \cos \omega_1 t + g_2 \sin \omega_2 t + r_2 \cos \omega_2 t; \\ \beta &= g_1 \cos \omega_1 t - r_1 \sin \omega_1 t - g_2 \cos \omega_2 t + r_2 \sin \omega_2 t.\end{aligned}\tag{11}$$

Продифференцировав уравнения (6) по времени и преобразовав полученные выражения в соответствии с выражениями (11), получим

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= g_1 \omega_1 \cos \mu t - r_1 \omega_1 \sin \mu t + g_1 (\mu - \omega_1) \cos \mu t - r_1 (\mu - \omega_1) \sin \mu t + \\ &+ g_2 \omega_2 \cos \mu t - r_2 \omega_2 \sin \mu t + g_2 (\mu - \omega_2) \cos \mu t - r_2 (\mu - \omega_2) \sin \mu t; \\ \dot{\beta} &= -g_1 \omega_1 \sin \mu t - r_1 \omega_1 \cos \mu t - g_1 (\mu - \omega_1) \sin \mu t - r_1 (\mu - \omega_1) \cos \mu t + \\ &+ g_2 \omega_2 \sin \mu t + r_2 \omega_2 \cos \mu t + g_2 (\mu - \omega_2) \sin \mu t + r_2 (\mu - \omega_2) \cos \mu t.\end{aligned}\tag{12}$$

В таком случае условие совместности запишется в виде

$$\begin{aligned}\dot{g}_1 \sin \mu t + \dot{r}_1 \cos \mu t + \dot{g}_2 \sin \mu t + \dot{r}_2 \cos \mu t &= 0; \\ \dot{g}_1 \cos \mu t - \dot{r}_1 \sin \mu t - \dot{g}_2 \cos \mu t + \dot{r}_2 \sin \mu t &= 0.\end{aligned}\quad (13)$$

Продифференцировав (12), получим вторые производные для амплитуд α и β . Подставив найденные производные в исходную систему уравнений (5), имеем

$$\begin{aligned}\dot{g}_1 \mu \cos \mu t - \dot{r}_1 \mu \sin \mu t + \dot{g}_2 \mu \cos \mu t - \dot{r}_2 \mu \sin \mu t &= -F_1; \\ -\dot{g}_1 \mu \sin \mu t - \dot{r}_1 \mu \cos \mu t + \dot{g}_2 \mu \sin \mu t + \dot{r}_2 \mu \cos \mu t &= -F_2,\end{aligned}\quad (14)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}F_1 &= 2\gamma\omega_0\dot{\alpha} + 2\delta\Omega\dot{\beta} - \omega_0^2 f_0 \sin \mu t - g_1 (\mu^2 - \omega_1^2) \sin \mu t - \\ &- r_1 (\mu^2 - \omega_1^2) \cos \mu t - g_2 (\mu^2 - \omega_2^2) \sin \mu t - r_2 (\mu^2 - \omega_2^2) \cos \mu t - \\ &- 2\Omega (-g_1 (\mu - \omega_1) \sin \mu t - r_1 (\mu - \omega_1) \cos \mu t + g_2 (\mu - \omega_2) \sin \mu t + r_2 (\mu - \omega_2) \cos \mu t); \\ F_2 &= 2\gamma\omega_0\dot{\beta} - g_1 (\mu^2 - \omega_1^2) \cos \mu t + r_1 (\mu^2 - \omega_1^2) \sin \mu t + \\ &+ g_2 (\mu^2 - \omega_2^2) \cos \mu t - r_2 (\mu^2 - \omega_2^2) \sin \mu t + \\ &+ 2\Omega (g_1 (\mu - \omega_1) \cos \mu t - r_1 (\mu - \omega_1) \sin \mu t + g_2 (\mu - \omega_2) \cos \mu t - r_2 (\mu - \omega_2) \sin \mu t).\end{aligned}$$

Разрешим (14) и (13) относительно переменных g_1 , g_2 , r_1 , r_2 . Так как данные переменные являются медленными функциями времени, воспользуемся методом осреднения Крылова – Боголюбова [8]:

$$\begin{aligned}2\mu\dot{g}_1 &= -\gamma\omega_0\mu (g_1 + g_2 + r_1 - r_2) - \delta\mu\Omega (-r_1 + r_2) + \\ &+ 2\Omega ((g_1 - r_1)(\mu - \omega_1) - (r_2 - g_2)(\mu - \omega_2)) - \\ &- (g_1 - r_1)(\mu^2 - \omega_1^2) - (r_2 - g_2)(\mu^2 - \omega_2^2); \\ 2\mu\dot{r}_1 &= -\mu\omega_0 f_0 + \gamma\omega_0\mu (-g_1 + g_2 - r_1 - r_2) + \\ &+ \delta\mu\Omega (-g_1 + g_2) + 2\Omega ((g_1 + r_1)(\mu - \omega_1) + (r_2 - g_2)(\mu - \omega_2)) - \\ &- (g_1 - r_1)(\mu^2 - \omega_1^2) - (r_2 + g_2)(\mu^2 - \omega_2^2); \\ 2\mu\dot{g}_2 &= -\gamma\omega_0\mu (g_1 + g_2 - r_1 + r_2) - \delta\mu\Omega (-r_1 + r_2) - \\ &- 2\Omega ((g_1 - r_1)(\mu - \omega_1) + (r_2 + g_2)(\mu - \omega_2)) + \\ &+ (g_1 + r_1)(\mu^2 - \omega_1^2) + (r_2 - g_2)(\mu^2 - \omega_2^2); \\ 2\mu\dot{r}_2 &= -\mu\omega_0 f_0 + \gamma\omega_0\mu (g_1 - g_2 - r_1 - r_2) + \\ &+ \delta\mu\Omega (-g_1 + g_2) + 2\Omega ((g_1 + r_1)(\mu - \omega_1) - (r_2 + g_2)(\mu - \omega_2)) - \\ &- (g_1 + r_1)(\mu^2 - \omega_1^2) - (r_2 + g_2)(\mu^2 - \omega_2^2).\end{aligned}\quad (15)$$

Предложенный новый метод анализа вынужденных колебаний по сравнению с другими методами, используемыми в работах В.Ф. Журавлевым и А. Найфе [7, 9] (нахождение решения в переменных амплитуда – фаза), Н.Н. Боголюбовым и А.Ю. Митропольским (переход к нормальным координатам), имеет такие преимущества, как отсутствие в решении тригонометрических функций, а также не требует перехода к новым переменным и, как следствие, возврата к исходным.

Числовой пример

Рассмотрим двухмассовый ММГ с характеристиками: $m_{\text{ин}} = 10^{-6}$ кг (масса инерционной массы); величина зазора между контактами гребенки $h = 100$ мкм (нормализующий параметр). Построим амплитудно-частотные характеристики для различных значений параметров

На рис. 2 изображены амплитудно-частотные характеристики со следующими параметрами:

- 1 – $\Omega = 0$, $\gamma = 0$;
- 2 – $\Omega = 0.05$, $\gamma = 0$;
- 3 – $\Omega = 0.05$, $\gamma = 0.007$.

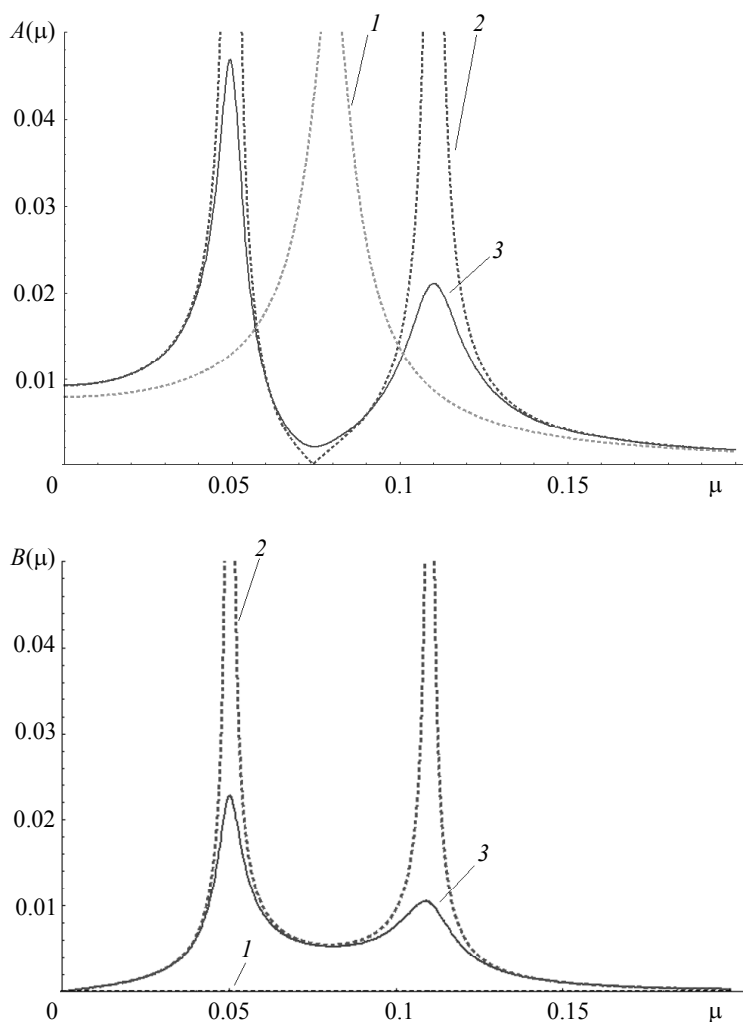


Рис. 2. Графики зависимости амплитуды первичных и вторичных колебаний от частоты внешнего воздействия
Fig. 2. Amplitude of primary and secondary oscillations as a function of the frequency of the external action

Рассмотрев АЧХ, представленные на графиках (см. рис. 2) можно отметить следующее:

- для системы при угловой скорости $\Omega = 0$ в отсутствии вязкого трения АЧХ вторичных колебаний совпадает с осью μ , так как амплитуда в этом случае пропорциональна угловой скорости основания;

- при приближении частоты μ к одной из резонансных частот, амплитуда колебаний возрастает. Когда же частота удаляется от резонансных частот – наблюдаются установившиеся колебания малой амплитуды;

- для колебаний по первой моде при приближении к первой резонансной частоте ω_1 амплитуда колебаний имеет значение больше, нежели при достижении частотой внешнего воздействия второй резонансной частоты ω_2 . Для вторичных колебаний $B(\mu)$ ситуация противоположна.

Заключение

Представлена теоретико-механическая модель двухмассового микромеханического гироскопа типа L-L, учитывающая вязкое трение и произвольную угловую скорость основания. Анализ полученной модели проводился в режиме вынужденных колебаний с применением нового метода.

Основная цель данной работы – продемонстрировать новый метод анализа двухчастотных систем, который имеет ряд преимуществ перед своими аналогами: отсутствие в решении тригонометрических функций, не требует перехода к новым переменным. Данный метод будет полезен для анализа сложных двухчастотных нелинейных систем.

Построены необходимые АЧХ и сделаны соответствующие выводы о поведении системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blixhaven B., Lapadatu D., Holm R., Kvisterfy T. SAR-500-A novel high-precision gyroscope // Symposium Gyro Technology. Karlsruhe, Germany, 2010.
2. Пешехонов В.Г. Современное состояние и перспективы развития гироскопических систем // Гироскопия и навигация. 2011. № 1. С. 3–17.
3. Нарайкин О.С., Сорокин Ф.Д., Козубняк С.А., Вахлярский Д.С. Численное моделирование прецессии упругой волны в цилиндрическом резонаторе волнового твердотельного гироскопа с неоднородным распределением плотности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2017. № 5. С. 41–51. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-5-41-51.
4. Лестев А.М., Ефимовская А.В. О влиянии нелинейных факторов на динамику микромеханического гироскопа с двухмассовым чувствительным элементом // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2012. Т. 55. №5. С. 40–46.
5. Евстифеев М.И., Челпанов И.Б. Вопросы обеспечения стойкости микромеханических гироскопов при механических воздействиях // Гироскопия и навигация. 2013. № 1. С. 119–131.
6. Бурцев В.А., Дергачев П.Б., Карелин А.П., Лестев А.М., Лестев М.А., Попова И.В., Семенов А.А. Микромеханической гироскоп. Патент на полезную модель RU 30972 U1 МПК G01C 19/56 от 2003.02.04 / Оpubл. 2003.07.10.
7. Журавлев В.Ф. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 27–35.
8. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974 503 с.
9. Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.

Antonov E.A. (2021) DYNAMICS OF AN L-L-TYPE TWO-MASS MICROMECHANICAL GYROSCOPE UNDER FORCED OSCILLATIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 63–70

DOI 10.17223/19988621/74/7

Keywords: micromechanical gyroscope, linear vibrations, forced oscillations, linear system.

This paper is devoted to a study of dynamics of an L-L-type two-mass micromechanical gyroscope (abbreviated as MMG) under forced oscillations. The mechanical-theoretical model of MMG with a sensitive element in the form of a model with two active masses (“Inertial mass – Frame”) is obtained. Based on the model, the system of differential equations is written. A distinctive feature of this paper is that an arbitrary angular velocity of the base Ω is considered. A new method is used to find a solution to the system. This method is suitable for analyzing dual-frequency systems. Finally, the solution is determined, and the amplitude-frequency characteristics of the system are described. The obtained analytical expressions and graphs are analyzed, and the reasonable conclusions about system behavior under forced oscillations are made. The proposed method for analyzing complex systems is compared with other available methods.

Egor A. ANTONOV (Candidate of Technical Sciences, Public Joint Stock Company «Tupolev», Moscow, Russian Federation). E-mail: ve.no.m@yandex.ru

REFERENCES

1. Blixhaven B., Lapadatu D., Holm R., Kvisterfy T. (2010) SAR-500-A Novel High-Precision Gyroscope. *Symposium Gyro Technology. Karlsruhe, Germany*.
2. Peshekhonov V.G. (2011) Sovremennoe sostoyanie i perspektivy razvitiya giroskopicheskikh sistem [The current state and prospects of development of gyroscopic systems]. *Giroskopiya i navigatsiya – Gyroscopy and Navigation*. 1. pp. 3–17.
3. Naraykin O.S., Sorokin F.D., Kozubnyak S.A., Vakhlyarskiy D.S. (2017) Chislennoe modelirovaniye pretsessii uprugoy volny v tsilindricheskom rezonatore volnovogo tverdotel'nogo giroskopa s neodnorodnym raspredeleniem plotnosti [Numerical simulation of elastic wave precession in the cylindrical resonator of a hemispherical resonator gyroscope featuring a non-homogeneous density distribution]. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Seriya Mashinostroyeniye – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*. 5. pp. 41–51. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-5-41-51.
4. Lestev A.M., Efimovskaya A.V. (2012) O vliyaniy nelineynykh faktorov na dinamiku mikromekhanicheskogo giroskopa s dvukhmassovym chuvstvitel'nyy elementom [Nonlinear factors effect on dynamics of micromechanical gyroscope with two-mass sensitive element]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroyeniye – Journal of Instrument Engineering*. 55(5). pp. 40–46.
5. Evstifeev M.I., Chelpanov I.B. (2013) Voprosy obespecheniya stoykosti mikromekhanicheskikh giroskopov pri mekhanicheskikh vozdeystviyakh [Issues of ensuring durability of micromechanical gyroscopes under mechanical stress]. *Giroskopiya i navigatsiya – Gyroscopy and Navigation*. 1. pp. 119–131.
6. Zbrutskiy A.B., Apostolyuk V.A. (1998) Dinamika chuvstvitel'nogo elementa mikromekhanicheskogo giroskopa s dopolnitel'noy ramkoy [Dynamics of the sensitive element of a micromechanical gyroscope with an additional frame]. *Giroskopiya i navigatsiya – Gyroscopy and Navigation*. 22(3). pp. 13–23.
7. Zhuravlev V.F. (1997) Upravlyaemyy mayatnik Fuko kak model' odnogo klassa svobodnykh giroskopov [A controlled Foucault pendulum as a model of a class of free gyros]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 6. pp. 27–35.
8. Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy Yu.A. (1974) *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations]. Moscow: Nauka.
9. Nayfe A. (1976) *Metody vozmushcheniy* [Perturbation methods]. Moscow: Mir.

Received: December 16, 2020

УДК 531.57

DOI 10.17223/19988621/74/8

**В.В. Буркин, А.С. Дьячковский, А.Н. Ищенко, В.З. Касимов,
К.С. Рогаев, А.Д. Сидоров, Е.Ю. Степанов**

ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ВЫСТРЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЫСОКОПЛОТНЫХ ТОПЛИВ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ДУЛЬНОЙ СКОРОСТИ СНАРЯДА¹

Проведены теоретические исследования, направленные на демонстрацию положительного эффекта применения высокоплотных высокоэнергетических топлив в артиллерийском выстреле. С помощью специального программного комплекса, в основе которого лежит математическая модель внутрибаллистических процессов, проведены параметрические исследования возможностей выстрела с применением модельного высокоплотного топлива в режиме присоединенного заряда, располагаемого в канале ствола за снарядом в дополнение к основному пороховому заряду, в условиях модельной баллистической установки среднего калибра. Закон горения топлива, полученный расчетно-экспериментальным путем на установке малого калибра, был адаптирован к условиям установки среднего калибра. Определены условия заряжания, позволяющие добиться наибольшего повышения дульной скорости снаряда при использовании топлива по сравнению с выстрелом по классической схеме заряжания и с сохранением требуемого уровня давления. Представлены рекомендации по модернизации высокоплотного топлива для получения дополнительного прироста дульной скорости снаряда.

Ключевые слова: *внутренняя баллистика, ствольные системы, газовая динамика, высокоэнергетическое топливо, присоединенный заряд, горение топлив.*

Исследование новых перспективных схем заряжания является одним из основных направлений внутренней баллистики, позволяющих повысить дульную скорость снаряда. Наличие «эффекта насыщения» ограничивает скорость снаряда в классической схеме выстрела при использовании порохового метательного заряда, поскольку максимальная скорость метания при сгорании пороха определяется предельной скоростью разлета пороховых газов в вакууме. Традиционные способы повышения скорости снаряда практически исчерпали свой потенциал и не позволяют значительно повысить дульную скорость [1]. Для повышения скорости требуется применение нетрадиционных схем метания.

Перспективным направлением в области высокоскоростного метания является схема выстрела с присоединенным зарядом (ПЗ), используемым в выстреле вместе с основным зарядом [2]. ПЗ представляет из себя моноблочный дополнительный заряд, состоящий из новых высокоэнергетических топлив и располагаемый за снарядом в стволе (рис. 1).

Включение в заряд ПЗ позволяет увеличить суммарную массу заряда и, как следствие, повысить среднюю плотность заряжания. В процессе выстрела сначала

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-79-00028).

происходит инициирование пороха. Спустя время, определяемое, в частности, импульсом давления на фронте горения, воспламеняется ПЗ, горение происходит в торцевом режиме при движении снаряда по каналу ствола. Применение схемы выстрела с ПЗ приводит к перераспределению энергии продуктов сгорания в за-снарядном пространстве, что позволяет повысить давление на снаряде без увеличения давления в камере сгорания [3]. При использовании схемы выстрела с ПЗ появляется возможность реактивного подгона снаряда в стволе. Перечисленные преимущества позволяют повысить дульную скорость снаряда без повышения максимального давления на дно канала ствола [4].

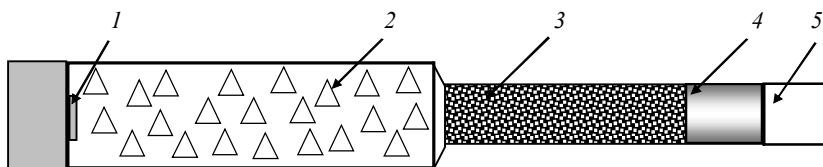


Рис. 1. Схема выстрела с применением ПЗ:

1 – воспламенитель; 2 – порох; 3 – ПЗ; 4 – снаряд; 5 – ствол

Fig. 1. Schematic diagram of a shot with a traveling charge:

1 – an initiator; 2 – a gunpowder; 3 – a traveling charge; 4 – a projectile; 5 – a barrel

Целью работы является расчетно-теоретическое исследование возможностей повышения дульной скорости снаряда при сохранении максимального давления на дно канала ствола путем применения ПЗ, а также выработка рекомендаций по модернизации ПЗ. В основе данной работы лежат результаты проведенных экспериментально – теоретических исследований применения высокоэнергетического топлива в режиме ПЗ на лабораторной гладкоствольной установке малого калибра [5].

В работе используется программный комплекс, в основе которого лежит математическая модель внутрибаллистических процессов в ствольных системах, базируемая на основных допущениях механики многофазных сред [6]. Математическая модель предусматривает наличие в пороховом заряде произвольного количества фракций частиц, а также наличие в составе заряда моноблочных элементов, которые горят по своим законам и диспергируют на отдельные частицы дополнительной фракции.

Основная система газодинамических уравнений, определяющая внутрибаллистические процессы, записана в виде законов сохранения массы смеси газов, импульса и энергии в квазиодномерном приближении с учетом разных типов частиц и замыкается уравнением состояния для газовой смеси [6]. Уравнения решаются по модифицированной схеме С.К. Годунова второго порядка точности по координате [7] и времени [8] с использованием на предварительном шаге решения задачи о распаде произвольного разрыва.

Результаты параметрических исследований

В исследовании по повышению дульной скорости снаряда принят следующий базовый выстрел: масса снаряда 9 кг, масса пороха 7.9 кг, максимальное давление в канале ствола 560 МПа, дульная скорость 1575 м/с. Для топлива за основу был выбран закон горения, полученный в [5] на малом калибре и адаптированный к условиям среднего калибра.

ПЗ загорается в процессе движения по каналу ствола через некоторое время после начала горения пороха, определяемое конкретным параметром. В модели, описанной в [6], в качестве такого параметра выбран импульс давления на фронте горения I_1 [9], который контролирует начало горения без учета зажигания. Закон горения ПЗ выглядит следующим образом:

$$U_r = 0, \text{ при } I < I_1,$$

$$U_r = B_1 \left(\frac{P}{P_{\text{атм}}} \right)^v, \text{ при } I \geq I_1,$$

$$I_1 = \int_0^{t_1} P dt,$$

где B_1 – коэффициент закона скорости горения; P – давление газа на фронте горения; $P_{\text{атм}}$ – атмосферное давление; v – показатель степени в законе горения.

Считается, что на фронте горения ПЗ помимо газообразных продуктов горения образуются частицы. Начальная степень превращения ПЗ в газ $\Psi_0 = 0.1$. Это означает, что на фронте горения в каждый момент времени 10% топлива переходит в газ, а 90% – в частицы, которые догорают в канале ствола. Для частиц задается степенной закон горения

$$U_c = U_1 \left(\frac{P}{P_{\text{атм}}} \right)^v,$$

где U_1 – единичная скорость горения – скорость горения при $P = P_{\text{атм}} = 0.1$ МПа; v – показатель степени в законе горения частиц.

Параметрические исследования проведены с учетом следующих допущений. Длина ствола постоянна. Порох состоит из зернового семиканального и трубчатого одноканального пороха, равномерно расположенных по объему камеры сгорания. Горение ПЗ происходит в одну стадию. Массы ПЗ, частей пороха и импульс давления на фронте горения топлива подбирались таким образом, чтобы реализовывалось максимальное давление 560 МПа (базовый выстрел). Масса ПЗ варьируется: 13, 17, 20, 23 и 26% от общей массы заряда (порох + топливо). Импульс I_1 меняется от 450 до 1150 МПа·с. Использовались такие условия заряжания, чтобы происходило полное сгорание топлива за время выстрела.

Результаты параметрических исследований представлены на рис. 2. Установлено, что наибольшее повышение дульной скорости достигается при 20%-й доле массы ПЗ от общей массы заряда. Дальнейшее увеличение доли ПЗ приводит к его недогоранию за время выстрела в стволе. При этом масса снаряда увеличивается на массу недогоревшего ПЗ, что не дает возможности дальнейшего повышения дульной скорости без проектирования новой ствольной системы или модернизации топливного состава.

Изменение импульса давления на фронте горения позволяет регулировать процесс зажигания ПЗ. Воспламенение ПЗ после достижения максимума давления в камере сгорания позволяет повысить дульную скорость. Дальнейшее увеличение импульса давления при постоянстве скорости горения приводит к недогоранию ПЗ в канале ствола и уменьшению дульной скорости снаряда (рис. 2). На рис. 3 представлены временные зависимости давления газа в камере сгорания, давления газа на дне снаряда и скорости снаряда для выстрела по классической

схеме заряжания и для выстрела с ПЗ. Второй всплеск давления после основного максимума (указан стрелкой на рис. 3) говорит о начале горения ПЗ [3]. В результате проведенного исследования максимальное повышение дульной скорости до 1733 м/с (прирост на 10% по сравнению с базовым выстрелом) возможно при использовании ПЗ массой 20% от общей массы заряда, импульсом $I_1 = 950$ МПа·с.

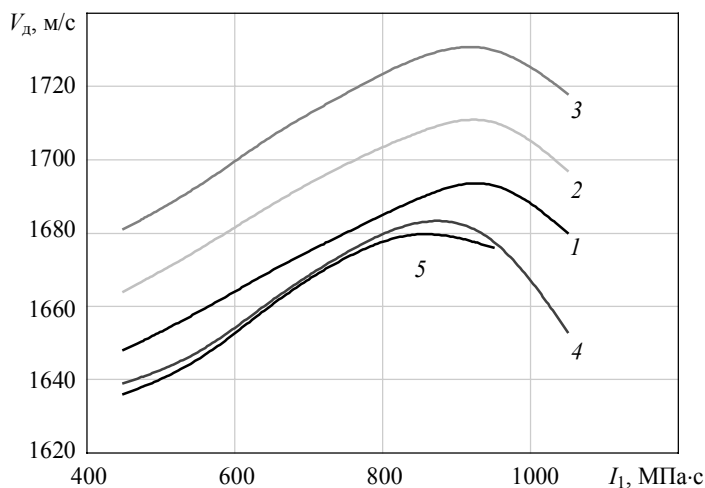


Рис. 2. Зависимости дульной скорости от импульса давления на фронте горения:

1 – 13%, 2 – 17%, 3 – 20%, 4 – 23%, 5 – 26%

Fig. 2. Dependences of the muzzle velocity on the pressure transient at the flame front:

1 – 13%, 2 – 17%, 3 – 20%, 4 – 23%, and 5 – 26%

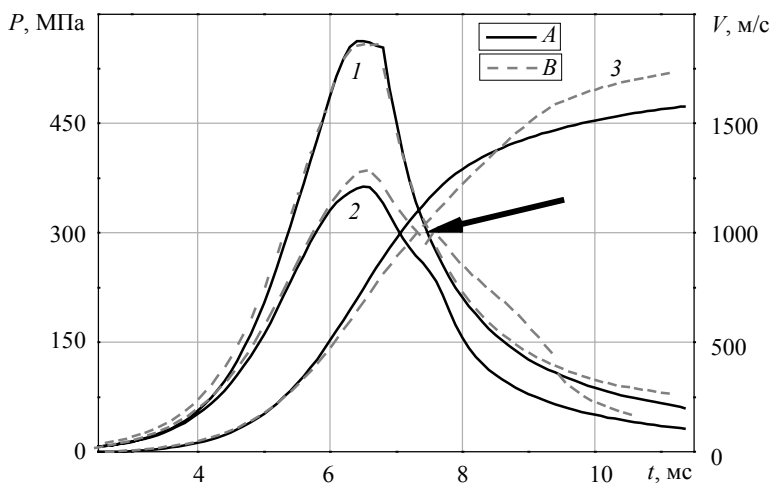


Рис. 3. Временные зависимости давления газа в камере сгорания 1, давления газа на дне снаряда 2 и скорости снаряда 3. А – классическая схема заряжания, В – выстрел с ПЗ

Fig. 3. Time dependences of: 1, gas pressure in a combustion chamber; 2, gas pressure at a shot base; and 3, projectile velocity. А – a classic loading scheme, В – a shot with a traveling charge

Рассмотренное топливо разработано для применения на малом калибре и апробировано в условиях среднего калибра. Для получения большего прироста дульной скорости снаряда на установке среднего калибра требуется разработка перспективных топлив и проведение дополнительного теоретического исследования.

В качестве начальной точки дополнительного исследования выбраны условия заряжания, которые позволили получить максимальное повышение дульной скорости до 1733 м/с (10%). Исследования по оценке возможностей схемы выстрела с ПЗ проведены путем модернизации ПЗ за счет изменения коэффициента в законе скорости горения B_1 и силы топлива f – аналога силы пороха [10] при неизменном импульсе $I_1 = 950$ МПа·с. Фиксированный импульс позволит провести корректное сравнение с расчётными данными начальной точки.

Согласно проведенным расчётам, к максимальному повышению дульной скорости при сохранении базового давления ведет уменьшение параметра B_1 , что позволяет продлить работу ПЗ в стволе, а также увеличение силы топлива f (рис. 4). А именно: уменьшение B_1 на 15% и увеличение f на 20% позволило добиться максимального повышения дульной скорости снаряда до 1772 м/с (прирост на 15.7%).

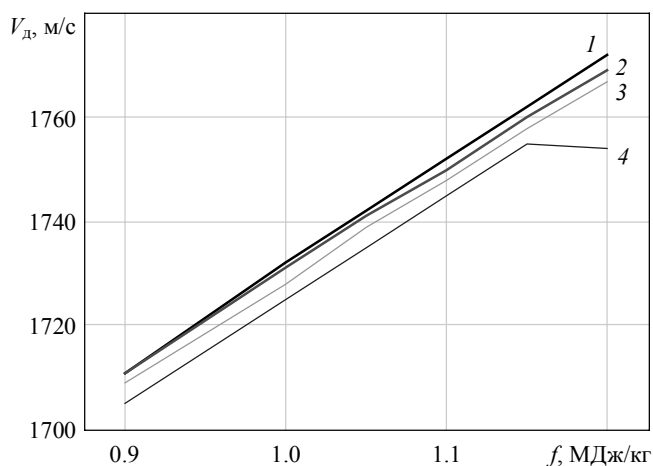


Рис. 4. Зависимость дульной скорости снаряда от энергетики топлива для разных B_1 :

1 – $0.85B_1$; 2 – $0.95B_1$; 3 – B_1 ; 4 – $1.1B_1$

Fig. 4. Dependence of the projectile muzzle velocity on fuel energy for different B_1 :

1 – $0.85B_1$; 2 – $0.95B_1$; 3 – B_1 ; and 4 – $1.1B_1$

Большее увеличение силы топлива способствует существенному повышению температуры горения, что на практике приводит к возрастанию скорости износа установки, сокращению живучести ствольных систем и, как следствие, снижению дульной скорости снаряда, уменьшению прицельной дальности орудия и ухудшению кучности стрельбы.

Заключение

Проведено теоретическое исследование возможностей повышения дульной скорости снаряда путем применения высокоэнергетического топлива в режиме ПЗ на установке среднего калибра. Закон горения топлива, полученный расчетно-

экспериментальным путем в условиях установки малого калибра, был адаптирован к условиям среднего калибра (120 мм). Показана возможность повышения дульной скорости снаряда при использовании высокоэнергетического топлива в режиме ПЗ при сохранении максимального давления на дно канала ствола. При варьировании массы ПЗ и импульса давления на фронте горения, отвечающего за начало горения топлива, наибольшее повышение дульной скорости снаряда составило 10%. Получено оно было при использовании топлива с импульсом $I_1 = 950$ МПа·с и массой 20% от массы всего заряда.

Для получения дополнительного прироста дульной скорости снаряда на установке среднего калибра проведены расчеты с использованием топлива с измененными параметрами: коэффициента закона скорости горения B_1 и силы f , при фиксированном значении импульса давления на фронте $I_1 = 950$ МПа·с. Применение модернизированного топлива с повышенной силой f (на 20%) и пониженным коэффициентом закона скорости горения B_1 (на 15%) позволило повысить дульную скорость снаряда на 15.7% с сохранением максимального давления на дно канала ствола.

ЛИТЕРАТУРА

1. Horst A.W. A Brief Journey Through the History of Gun Propulsion. ARL-TR-3671 November 2005.
2. Lu X., Zhou Y., Yu Y. Experimental and numerical investigations on traveling charge gun using liquid fuels // J. Appl. Mech. 2011. V. 78. Iss. 5. P. 051002-1–051002-6.
3. Liang T., Lv B., Ma Z., Zhong-liang Xiao. The research on energy releasing control of traveling charge // International Conference on Computer Science and Electronic Technology (ICCSET 2014). 2014. P. 67–70.
4. Ермолаев Б.С., Сулимов А.А., Романьков А.В. Присоединенный высокоплотный заряд конвективного горения в комбинированной схеме выстрела: Новые результаты // Горение и взрыв. 2013. № 6. С. 206–210.
5. Рогаев К.С., Ищенко А.Н., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Сидоров А.Д., Степанов Е.Ю. Исследование горения высокоплотных топлив в условиях модельной баллистической установки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. С. 127–138.
6. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 256 с.
7. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 3. № 6. С. 68–77.
8. Bogdanoff D.W., Miller R.J. New Higher-Order Godunov Code for Modelling Performance of Two-Stage Light Gas Guns. NASA TM – 110363, September 1995. 45 p.
9. Leciejewski Z., Surma Z. Investigation of influence of propellant charge temperature on gun firing phenomenon // High-Energetic Materials Instytut Przemysłu Organicznego. 2009. V. 1. P. 42–47.
10. Серебряков М.Е. Внутренняя баллистика ствольных систем и пороховых ракет. М.: Оборонгиз, 1962. 703 с.

Статья поступила 25.12.2020 г.

Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Rogaev K.S., Sidorov A.D., Stepanov E.Yu. (2021) ESTIMATION OF ULTIMATE CAPABILITIES OF A SHOT WITH THE USE OF HIGH-DENSITY PROPELLANTS FOR AN INCREASE IN PROJECTILE MUZZLE VELOCITY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 71–78

DOI 10.17223/19988621/74/8

Keywords: internal ballistics, barrel systems, gas dynamics, high-energy propellants, travelling charge, combustion of propellants.

Theoretical studies aimed at demonstrating efficiency of using high-density high-energy propellants in an artillery round are carried out. Parametric studies on shot capabilities are performed using the special software package based on a mathematical model of intraballistic processes. The shot is fired using a model high-density propellant with a traveling charge placed in the bore behind the shell in addition to the main propellant charge in a medium-caliber model ballistic setup. The propellant burning law obtained by calculations and experiments on a small-caliber setup is adapted to a medium-caliber one. Charging conditions are determined to achieve the highest increase in the projectile muzzle velocity with the use of propellants as compared with a classical charging scheme of the shot at a maintained level of the required pressure. Recommendations for upgrading high-density propellants resulting in an additional increase in the projectile muzzle velocity are presented.

Financial support. The study was carried out at the expenses of the grant from the Russian Science Foundation (project No. 19-79-00028).

Viktor V. BURKIN (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: v.v.burkin@mail.ru

Aleksey S. D'YACHKOVSKIY (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lex_okha@mail.ru

Aleksandr N. ISHCENKO (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Vladimir Z. KASIMOV (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ksm@niipmm.tsu.ru

Konstantin S. ROGAEV (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rogaev@ftf.tsu.ru

Aleksey D. SIDOROV (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aleksid92@gmail.com

Evgeniy Yu. STEPANOV (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: stepanov_eu@mail.ru

REFERENCES

1. Horst A.W. (2005) *A Brief Journey Through the History of Gun Propulsion*. Army Research Laboratory. DOI: 10.21236/ada441021.
2. Lu X., Zhou Y., Yu Y. (2011) Experimental and numerical investigations on traveling charge gun using liquid fuels. *Journal of Applied Mechanics*. 78(5). pp. 051002-1–051002-6. DOI: 10.1115/1.4004292.

3. Liang T., Lv B., Ma Z., Zhong-liang Xiao (2015) The research on energy releasing control of travelling charge. *Proceedings of the 2014 International Conference on Computer Science and Electronic Technology*. pp. 67–70. DOI: 10.2991/iccset-14.2015.15.
4. Ermolaev B.S., Sulimov A.A., Roman'kov A.V. (2013) Prisoedinyonnyy vysokoplotnyy zaryad konvektivnogo goreniya v kombinirovannoy skheme vystrela: Novye rezul'taty [Traveling high-density charge of convective burning in the hybrid configuration: new results]. *Gorenie i vzryv – Combustion and Explosion*. 6. pp. 206–210.
5. Rogaev K.S., Ishchenko A.N., Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Sidorov A.D., Stepanov E.Yu. (2021) Issledovanie goreniya vysokoplotnykh topliv v usloviyakh model'noy ballisticheskoy ustanovki [A study of the combustion of high-density propellants in a model ballistic installation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 69. pp. 127–138. DOI: 10.17223/19988621/69/10.
6. Khomenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999) *Matematicheskoe modelirovanie vntriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematical simulation of intraballistic processes in barrel systems]. Novosibirsk: SB RAS Publishing House.
7. Kolgan V.P. (1974) Primenenie printsipa minimal'nykh znacheniy proizvodnoy k postroeniyu konechnoraznostnykh skhem dlya rascheta razryvnykh resheniy gazovoy dinamiki [Application of the principle of minimizing the derivative to the construction of finite-difference schemes for computing discontinuous solutions of gas dynamics]. *Uchenye zapiski TSAGI – TsAGI Science Journal*. 6. pp. 68–77.
8. Bogdanoff D.W., Miller R.J. (1995) *New Higher-Order Godunov Code for Modelling Performance of Two-Stage Light Gas Guns*. NASA TM.
9. Leciejewski Z., Surma Z. (2009) Investigation of influence of propellant charge temperature on gun firing phenomenon. *Materiały Wysokoenergetyczne – High-Energetic Materials*. 1. pp. 42–47.
10. Serebryakov M.E. (1962) *Vnutrennyaya ballistika stvol'nykh sistem i porokhovykh raket* [Internal ballistics of barrel systems and powder rockets]. Moscow: Oborongiz.

Received: December 25, 2020

УДК 532.5

DOI 10.17223/19988621/74/9

Н.В. Бурмашева, Е.А. Ларина, Е.Ю. Просвиряков

**ТЕЧЕНИЕ ТИПА КУЭТТА С УЧЕТОМ ИДЕАЛЬНОГО СКОЛЬЖЕНИЯ
НА КОНТАКТЕ С ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ¹**

Построено новое точное решение, описывающее сдвиговое однонаправленное течение вязкой несжимаемой жидкости в горизонтальном слое при нулевом расходе и идеальном скольжении на контакте с твердой поверхностью. Проводится анализ свойств решения в зависимости от характеристик температуры и давления на верхней границе слоя. Показано, что данное решение способно описывать стратификацию гидродинамических полей.

Ключевые слова: конвекция вязкой жидкости, точное решение, сдвиговое течение, застойные точки, расслоение полей.

Одной из наиболее распространенных моделей, используемых для описания вихревых конвективных течений вязких жидкостей, является система уравнений Обербека – Буссинеска [1–5]. Эта модель строится при помощи гипотезы о линейной зависимости плотности жидкости от температуры, которая учитывается только в массовых силах [6].

Для решения практических задач и проведения теоретической оценки устойчивости установившихся движений жидкости часто используются и исследуются однонаправленные течения жидкости $\mathbf{V} = (V_x(z), 0, 0)$ [7–11]. Одним из первых слоистых течений, свойства которого описаны в точной постановке решений вида $\mathbf{V} = (V_x(z), 0, 0)$ уравнений движения вязкой жидкости, является изотермическое и изобарическое течение Куэтта [12]. Еще одним известным однонаправленным изотермическим течением такого вида является градиентное течение Пуазейля [13], вызванное перепадом давления. И эксперименты, и анализ данного решения показывают, что оно обладает ненулевой завихренностью, обусловленной (в отличие от течения Куэтта) неоднородным распределением поля скорости относительно координаты z . Таким образом, учет неоднородности (по координатам) гидродинамических полей позволяет создавать модели, наиболее приближенные к действительности, поскольку реальные течения жидкостей являются вихревыми [14, 15].

Более сложным объектом для моделирования являются конвективные течения, поскольку требуется дополнительно учитывать температурные факторы, распределение которых зависит от положения элементарного жидкого объема в рассматриваемой области течения. Одним из первых в этом классе было решение Остроумова – Бириха [16, 17]. Краевые условия, отвечающие этому решению, подразумевают задание неоднородного поля температуры, характеризуемого одинаковыми значениями продольных градиентов на обеих границах рассматриваемого слоя жидкости, а также замкнутость потока.

Однако независимо от структуры поля скоростей, закладываемой при выводе точного решения уравнений гидродинамики, все известные (классические) тече-

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-19-00571).

ния используют условие прилипания для описания взаимодействия жидкости на контакте с твердой поверхностью [2, 3, 8, 18–23]. На настоящий момент для специалистов, занимающихся поиском приложений теоретических достижений к областям практики, вызывает отдельный интерес течение жидкостей на контакте со слабо смачиваемыми (гидрофобными) покрытиями [24–26]. В этом случае использование условия прилипания является неприемлемым, необходимо брать в расчет альтернативные условия – условия скольжения [20, 27–31].

В данной работе исследуется обобщение течения Остроумова – Бириха на предельный случай проскальзывания жидкости (случай идеального скольжения [32–34] Навье) при постоянном (нулевом) расходе жидкости и неоднородном распределении поля температуры.

Постановка задачи

Рассматривается установившееся однонаправленное сдвиговое конвективное течение вязкой несжимаемой жидкости, движущейся со скоростью $\mathbf{V} = (V_x(z), 0, 0)$, в горизонтальном слое постоянной толщины h . Введем декартову систему координат таким образом, что ось Oz направлена строго вверх, ось Ox – вдоль исследуемого потока жидкости (рис. 1).

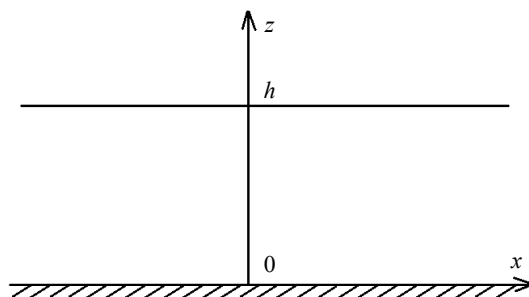


Рис. 1. Область течения

Fig. 1. Flow area

Система уравнений тепловой конвекции для таких течений принимает следующий вид [35]:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = g\beta T; \quad (1)$$

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Здесь V_x – скорость течения вдоль оси Ox ; $P = P(x, y, z)$ – отклонение давления от гидростатического, отнесённое к постоянной средней плотности жидкости ρ ; $T = T(x, y, z)$ – отклонение от средней температуры; ν и χ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости соответственно; β – тем-

пературный коэффициент объемного расширения жидкости; g – ускорение свободного падения.

Уравнения (1) есть проекции векторного уравнения движения вязкой жидкости (уравнений Навье – Стокса с учетом приближения Буссинеска) на оси выбранной системы координат, уравнение (2) представляет собой закон изменения температуры при движении этой жидкости, а уравнение (3) отражает свойство ее несжимаемости. Заметим, что уравнение несжимаемости выполняется тождественно для поля скоростей $\mathbf{V} = (V_x(z), 0, 0)$, поэтому при записи уравнений сохранения моментов импульса (1) обнуляются конвективное слагаемое и вторые производные от скорости по переменным x и y .

Кроме того, в системе (1) – (3) число уравнений превосходит число неизвестных функций, поэтому рассматриваемая система является также и переопределенной. Факт переопределенности приводит к вопросу о существовании совместного нетривиального решения данной системы. Разрешимость переопределенной системы будет обеспечена, если удовлетворить «избыточным» уравнениям. Для этого решение системы (1) – (3) будем искать в классе функций следующего вида [36–40]:

$$V_x = U(z); \quad (4)$$

$$P = P_0(z) + xP_1(z), \quad T = T_0(z) + xT_1(z). \quad (5)$$

Представление (4) обеспечивает тождественное удовлетворение уравнения несжимаемости (3) и тем самым выравнивает баланс числа уравнений и числа неизвестных в системе уравнений тепловой конвекции (1) – (3). Отметим, что представление (4), (5) является частным случаем класса Линя – Сидорова – Аристова [2, 3, 8, 19, 37–39, 41–43].

В результате подстановки представлений (4) и (5) в систему уравнений тепловой конвекции и проецирования получившихся выражений на оси Ox , Oy , Oz выбранной декартовой системы координат приходим к следующей редуцированной системе обыкновенных дифференциальных уравнений [2, 8, 12, 13, 16, 17, 37–39, 44]:

$$T_1'' = 0, \quad P_1' = g\beta T_1, \quad \nu U'' = P_1, \quad \chi T_0'' = UT_1, \quad P_0' = g\beta T_0. \quad (6)$$

Операция дифференцирования в системе (6) ведется по вертикальной координате z . Полученная редуцированная (в классе (4), (5)) система наследует свойство нелинейности от изначальной системы (1) – (3). При этом, согласно порядку системы (6), для описания с ее помощью конкретных течений необходимо задать соответствующее число краевых условий.

Будем считать, что нижняя граница бесконечного горизонтального слоя жидкости, задаваемая уравнением $z = 0$ (рис. 1), является абсолютно твердой и неподвижной. При этом на этой границе выполняется условие идеального скольжения [32 – 34]. Значение температуры на нижней границе принимаем за отсчетное значение. С учетом структуры (4), (5) выбранного обобщенного класса решений эти условия записываются в следующем виде:

$$T_0(0) = 0, \quad U'(0) = 0. \quad (7)$$

На верхней границе $z = h$ (рис. 1) задано неоднородное распределение температурного поля и однородное распределение поля давления. Кроме того, полагаем верхнюю границу свободной (поле касательных напряжений, действующее на

ней, считаем нулевым). Согласно структуре класса решений (4), (5) эти условия принимают вид

$$T_0(h) = 0, \quad T_1(h) = A, \quad U'(h) = 0, \quad P_0(h) = 0, \quad P_1(h) = 0. \quad (8)$$

Кроме того, полагаем, что течение происходит с нулевым расходом жидкости [17, 37]:

$$\int_0^h U dz = 0. \quad (9)$$

Условие (9) для однонаправленных течений является аналогом уравнения неразрывности. Решение системы уравнений (6), удовлетворяющее граничным условиям (7) – (9), с учетом замены $Z = z/h \in [0, 1]$ является полиномиальным:

$$U = \frac{Ag\beta h^3}{120\nu} (-3 + 30Z^2 - 40Z^3 + 15Z^4); \quad (10)$$

$$T_0 = \frac{A^2 g h^5 \beta}{1680\nu\chi} (-1 + Z) Z (15 - 27Z - 6Z^2 + 64Z^3 - 55Z^4 + 15Z^5); \quad (11)$$

$$T_1 = A(-2 + 3Z); \quad (12)$$

$$P_0 = S_0 + \frac{A^2 g^2 h^6 \beta^2}{40320\nu\chi} (-1 + Z)^2 (25 + 50Z - 150Z^2 + 76Z^3 + 131Z^4 - 150Z^5 + 45Z^6); \quad (13)$$

$$P_1 = \frac{1}{2} Ag\beta h (-1 + Z)(-1 + 3Z). \quad (14)$$

Введение нормированной вертикальной координаты Z позволяет рассматривать слой фиксированной толщины, не зависящей от параметров краевой задачи, что в свою очередь снижает зависимость анализа свойств решения (10) – (14) от этих параметров.

Анализ точного решения для поля скорости

Проанализируем точное решение (10), описывающее свойства поля скорости. Известно, что границами зон обратного (возвратного) течения [2, 45, 46] при их наличии выступают точки, в которых скорость принимает нулевое значение. Изучим свойства полинома (10) на этот предмет.

Очевидно, что коэффициент $Ag\beta h^3/(120\nu)$ не оказывает влияния на расположение нулевых точек. Поэтому при нормировке скорости на этот коэффициент можно без потери общности рассматривать полином $-3 + 30Z^2 - 40Z^3 + 15Z^4$, входящий в выражение (10). Этот многочлен имеет единственный на интервале $[0, 1]$ нуль – это точка $Z = 0.4445$ (рис. 2).

Таким образом, поле скорости U расслаивается на две зоны относительно нулевого значения: в одной скорость U совпадает по направлению с осью Ox , а в другой – противоположна ей. Направление скорости U в каждой из этих двух областей определяется знаком параметра A , задаваемого на верхней границе. При этом положение границы этих областей не зависит от параметров краевой задачи, а определяется только структурой выбранного класса (4), (5) и типом краевых условий (7) – (9).

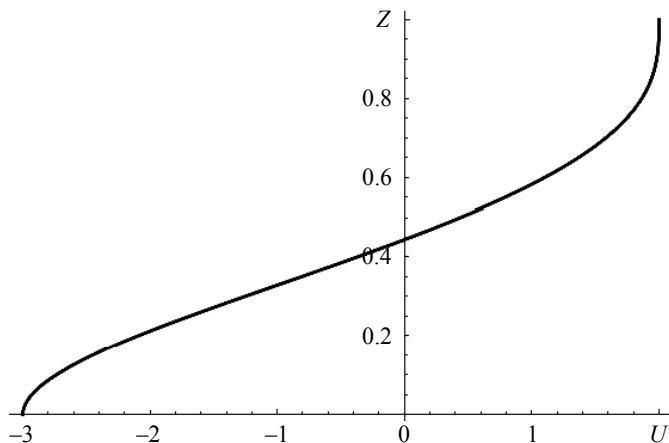


Рис. 2. Профиль скорости U , нормированной на множитель $Ag\beta h^3/(120\nu)$

Fig. 2. A profile of the velocity U normalized to a multiplier $Ag\beta h^3/(120\nu)$

Изучим далее зависимость касательного напряжения τ_{xz} , определяемого выражением

$$\tau_{xz} = \eta \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = \frac{\eta}{h} \frac{dU}{dZ} = \frac{\eta h^2 Ag\beta}{2\nu} Z(Z-1)^2, \quad (15)$$

от граничных параметров (здесь η – коэффициент динамической вязкости). Очевидно, что напряжение τ_{xz} всюду в слое $[0,1]$ принимает значения только одного знака.

Анализ точного решения для поля температуры

Исследуем теперь свойства поля температуры T , определяемого точным решением (11), (12). Горизонтальный градиент температуры $T_1 = A(-2 + 3Z)$ (12) есть строго монотонно возрастающая функция. Он может принимать нулевое значение только в одной точке – точке $Z = 2/3$, причем независимым от значения параметра A (как и от значений других параметров краевой задачи) образом.

Рассмотрим теперь многочлен (11), характеризующий распределение фоновой температуры T_0 . Очевидно, что фоновая температура обращается в нуль на границах интервала $[0,1]$, а также может принимать нулевое значение в точках, являющихся нулями полинома $f(Z) = 15 - 27Z - 6Z^2 + 64Z^3 - 55Z^4 + 15Z^5$. Анализ свойств функции $f(Z)$ показывает, что она всюду на интервале $(0,1)$ принимает только положительные значения.

Следовательно, фоновая температура, определяемая выражением (11), не имеет нулей внутри рассматриваемого слоя жидкости (рис. 3), но имеет немонотонный характер. Это говорит о том, что при некотором возмущении (в роли которых могут выступать дополнительно накладываемые тепловые поля, например поле $T_1(x)$) итоговое тепловое поле может стратифицироваться на зоны относительно отсчетного значения. Взаимодействие тепловых полей, определяемых компонентами T_0 и T_1 , представим, согласно выражениям (11), (12), в следующем виде:

$$T = T_0 + T_1 x = A \left[b(-1 + Z)Z(15 - 27Z - 6Z^2 + 64Z^3 - 55Z^4 + 15Z^5) + (-2 + 3Z)x \right]. \quad (16)$$

Здесь введено обозначение: $b = Ag\beta h^5/1680\nu\chi$. Выражение (16), описывающее поведение результирующего температурного поля T , является функцией трех переменных: координаты x , координаты Z , введенного параметра b . При этом параметр A , характеризующий распределение температуры на верхней границе слоя, не влияет на форму изолиний температурного поля T в явном виде, только опосредованно (как один из множителей, входящих в выражение для параметра b). На рис. 4 в качестве примера приведено распределение изолиний в плоскости xZ для значения $b = 1$ (для значений горизонтальной координаты $x \in [-1, 1]$).

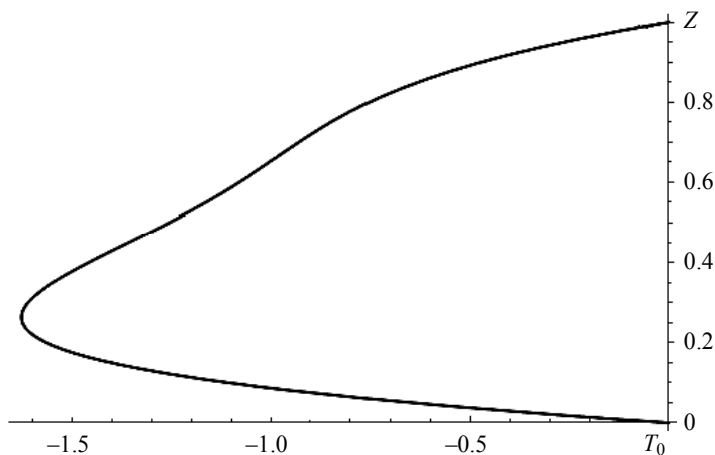


Рис. 3. Профиль фоновой температуры

Fig. 3. A background temperature profile

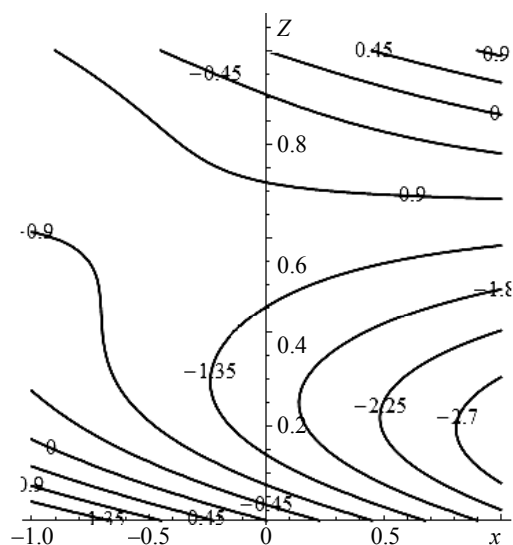


Рис. 4. Изолинии температуры T при $b = 1$

Fig. 4. Isolines of temperature T at $b = 1$

Отметим, что случай $b = 0$ описывает распределение изолиний дополнительного поля T_{1x} , отвечающего за неоднородность распределения тепловых эффектов. Кроме того, при увеличении значения параметра b происходит искривление изотерм. Это объясняется тем, что при увеличении значения параметра b возрастает влияние нелинейного (по переменной Z) слагаемого (вклад фоновой температуры) в выражении (16) для итогового температурного поля T .

Анализ точного решения для поля давления

Изучение свойств поля давления начнем так же, как поля температуры, с исследования свойств его продольного градиента P_1 . Решение (14) определяет квадратичную зависимость градиента P_1 от координаты Z . Нулями этого полинома являются значения $Z = 1$ и $Z = 1/3$. В этих точках будет происходить переход от положительно значения градиента давления к отрицательному значению (или наоборот) (рис. 5).

Далее изучим поведение фонового давления P_0 . Заметим, что выражение (13) содержит слагаемое S_0 – значение фонового давления на верхней границе слоя. Рассмотрим возможные варианты относительно этого значения. Если $S_0 = 0$, тогда выражение (13) примет вид

$$P_0 = \frac{A^2 g^2 h^6 \beta^2}{40320 \nu \chi} (-1 + Z)^2 (25 + 50Z - 150Z^2 + 76Z^3 + 131Z^4 - 150Z^5 + 45Z^6). \quad (17)$$

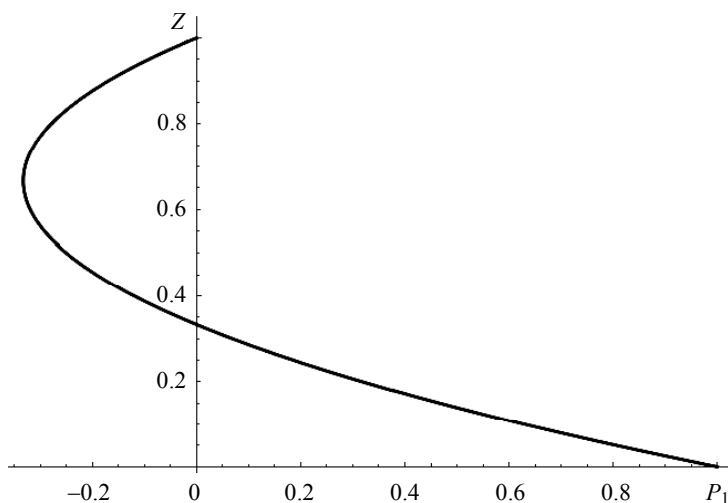


Рис. 5. Профиль компоненты P_1 поля давления
Fig. 5. A profile of pressure component P_1

При анализе расположения нулей выражения (17) можно не брать во внимание общий коэффициент, стоящий перед выражением, так как он не влияет на корни полинома (17). Единственный корень на промежутке $[0, 1]$ – это значение $Z = 1$, отвечающее положению верхней границы рассматриваемого слоя. Это означает, что в случае $S_0 = 0$ фоновое давление P_0 всюду внутри слоя отлично от нуля (рис. 6).

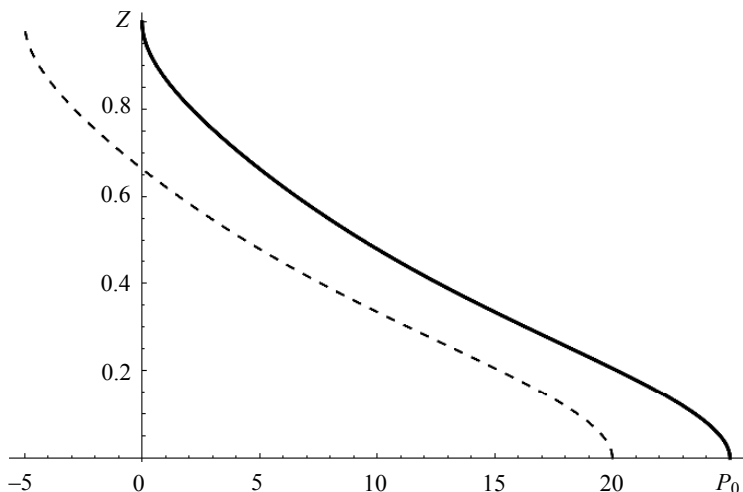


Рис. 6. Характерный профиль фонового давления P_0 при $S_0 = 0$ (сплошная линия) и $S_0 = -5$ (пунктирная линия)

Fig. 6. Typical profiles of background pressure P_0 at $S_0 = 0$ (solid line) and $S_0 = -5$ (dashed line)

Заметим, что слагаемое S_0 в выражении (13) определяет сдвиг, а не формоизменение профиля фонового давления. Таким образом, в случае $S_0 \neq 0$ при определенных значениях этого параметра возможно появление одной нулевой точки (рис. 6).

Теперь изучим распределение итогового поля давления, определяемого точным решением (13), (14). Заметим, что в тривиальном случае, когда $A = 0$, продольный градиент давления $P_1 = 0$, а фоновое давление P_0 принимает постоянное значение S_0 . И, очевидно, стратификации поля давления такого вида не наблюдается. Поэтому будем далее полагать, что параметр A отличен от нуля.

Рассмотрим сначала частный случай $S_0 = 0$. Давление тогда примет вид

$$P = \frac{A^2 g^2 h^6 \beta^2}{40320 \nu \chi} (-1 + Z)^2 (25 + 50Z - 150Z^2 + 76Z^3 + 131Z^4 - 150Z^5 + 45Z^6) + x \frac{A g h \beta}{2} (-1 + Z)(-1 + 3Z).$$

Выполним элементарные преобразования и используем замену $b = A g h^5 / 1680 \nu \chi$:

$$P = \frac{(-1+Z)840\nu\chi}{h^4} \left[\frac{b^2}{12} (-1+Z)(25+50Z-105Z^2+76Z^3+131Z^4-150Z^5+45Z^6) + x b (-1+3Z) \right]. \quad (18)$$

Из структуры полинома (18) видно, что одним из его корней будет граничная точка $Z = 1$. Разберем поведение функции

$$f = \frac{b^2}{12} (-1+Z)(25+50Z-105Z^2+76Z^3+131Z^4-150Z^5+45Z^6) + x b (-1+3Z),$$

стоящей в квадратных скобках выражения (18). Функция f зависит от трех параметров — x , b и Z . Рассмотрим, как влияют параметры x , b на поведение f .

Для сравнения с характером распределения поля температуры на рис. 7 приведено распределение изолиний поля давления на промежутке $x \in [-1, 1]$ при значении $b = 1$.

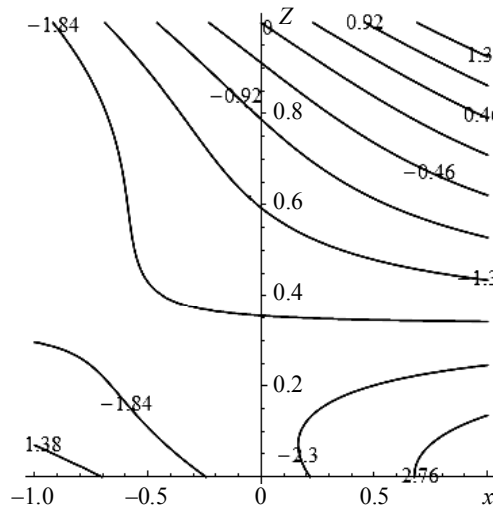


Рис. 7. Изолинии функции f при $b = 1$
Fig. 7. Isolines of function f at $b = 1$

Функция f в зависимости от расположения выбранного (по координате x) сечения имеет не более одной нулевой точки внутри слоя $Z \in [0, 1]$. Значит, итоговое давление (18) также имеет не более одной нулевой точки внутри промежутка $Z \in [0, 1]$. (рис. 8).

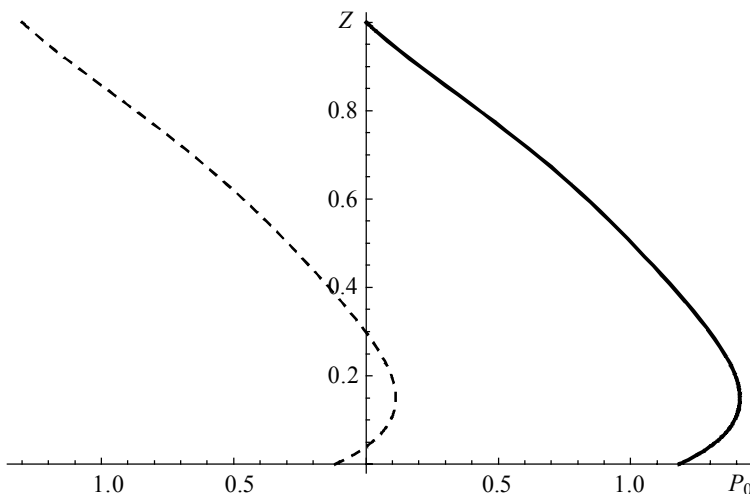


Рис. 8. Характерный профиль давления P при $b = 1$, $x = -0.9$
в случае $S_0 = 0$ (сплошная линия) и в случае $S_0 = -1.3$ (пунктирная линия)
Fig. 8. Typical profiles of pressure P at $b = 1$, $x = -0.9$
in the case of $S_0 = 0$ (solid line) and $S_0 = -1.3$ (dashed line)

Как было сказано выше, учет ненулевого значения S_0 в выражениях для давления (в частности, в выражении (18)) приводит к сдвигу профилей. Это означает, что в случае $S_0 \neq 0$ итоговое давление P в некоторых сечениях может иметь две нулевые точки (рис. 8). Характерные профили такого же, как на рис. 8, типа говорят о явной локализации поля давления в придонной области для рассматриваемых сечений.

Заключение

В ходе анализа приведенного в статье точного решения было установлено, что распределение полей скорости, температуры и давления в общем случае неоднородно и зависит от значений краевых параметров. Было показано, что поле скорости может расслаиваться на две зоны относительно нулевого значения: в одной направлении течения жидкости совпадает с соответствующей координатной осью, а в другой – противоположно ей. При этом соответствующее касательное напряжение не допускает возникновения стратификации. Температурное поле, в свою очередь, демонстрирует аналогичное поведение: наблюдается переход от нагрева жидкости в одной из зон к охлаждению в соседней с ней зоне. Поле давления может иметь не более двух нулевых (относительно отсчетного значения) точек внутри рассматриваемого слоя жидкости, т. е. смена знака давления происходит не более двух раз по толщине изучаемого слоя. Полученные выводы применимы к различным по своей природе вязким жидкостям, так как анализ был проведен в общем виде (без конкретизации значений физических констант, однозначным образом идентифицирующих исследуемую жидкость).

Литература

1. Степанова И.В. Построение и анализ точного решения уравнений Обербека – Буссинеска // Журнал СФУ. Математика и физика. 2019. Т. 12. № 5. С. 590–597. DOI: 10.17516/1997-1397-2019-12-5-590-597.
2. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect // Journal of King Saud University – Science. 2020. V. 32. Iss. 8. P. 3364–3371. DOI: 10.1016/j.jksus.2020.09.023.
3. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23. № 2. С. 341–360. DOI: 10.14498/vsgtu1670.
4. Васенин И.М., Крайнов А.Ю., Шахтин А.А., Мазур Р.Л., Зернаев П.В., Чуканов М.В. Математическая модель и результаты численных расчетов перелива UF_6 в присутствии микроколичеств легких примесей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. Т. 2. № 10. С. 53–59.
5. Гончарова О.Н. Моделирование микроконвекции в жидкости, заключенной между теплопроводными массивами // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52. № 1. С. 84–91.
6. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
7. Брутян М.А. Однонаправленные течения простых жидкостей и их газодинамическое описание // Механика композиционных материалов и конструкций. 1995. Т. 1. № 2. С. 83–90.
8. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Термокапиллярная конвекция вертикально завихренной жидкости // Теоретические основы химической технологии. 2020. Т. 54. № 1. С. 114–124. DOI: 10.31857/S0040357119060034.

9. Жучков В.И., Раева В.М., Фролова А.К. Исследование селективности бинарных агентов методом газожидкостной хроматографии // Теоретические основы химической технологии. 2020. Т. 54. № 1. С. 69–74. DOI: 10.31857/S0040357120010248.
10. Spurk J.H., Aksel N. Laminar unidirectional flows. In: Fluid Mechanics. Springer, Cham., 2020. DOI: 10.1007/978-3-030-30259-7_6.
11. Wichterle K., Večeř M. Chapter Twelve – The steady unidirectional flow // Transport and Surface Phenomena. Elsevier, 2020. DOI: 10.1016/B978-0-12-818994-8.00012-9.
12. Couette M. Etudes sur le frottement des liquides // Ann. Chim. Phys. 1890. V. 21. No. 6. P. 433–510.
13. Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres // Comptes Rendus. 1844. V. 9. P. 1–122.
14. Наумов И.В., Миккельсен Р.Ф., Окулов В.Л. Формирование застойной зоны на оси замкнутого закрученного течения // Теплофизика и аэромеханика. 2014. Т. 21. № 6. С. 799–802.
15. Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск: Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе, 2003. 503 с.
16. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
17. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.: Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1952. 256 с.
18. Гебхарт Б., Джалаурия Й., Махаджан Р., Самакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен: в 2 кн. Кн. 1. М.: Мир, 1991. 678 с.
19. Бурмашева Н.В., Просвирыков Е.Ю. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 3. С. 528–541. DOI: 10.14498/vsgtu1770.
20. Bulíček M., Málek J. Internal flows of incompressible fluids subject to stick-slip boundary conditions // Vietnam J. Math. 2017. V. 45. P. 207–220. DOI: 10.1007/s10013-016-0221-z.
21. Zhang S., Huan J., Song H., Liu X., Wei Y.G. Plastic effect on the sliding inception between a cylinder and a rigid flat // Acta Mech. Solida Sin. 2019. V. 32. P. 1–16. DOI: 10.1007/s10338-018-0060-4.
22. Chen Y., O'Shaughnessy T.J., Kamimori G.H., Horner D.M., Egnoto M.J., Bagchi A. Role of interfacial conditions on blast overpressure propagation into the brain // Front. Neurol. 2020. V. 11. 323. DOI: 10.3389/fneur.2020.00323.
23. Ekiel-Jeżewska M.L., Wajnryb E. Motion of a particle with stick-slip boundary conditions towards a flat interface: hard wall or free surface // Physicochem. Probl. Miner. Process. 2018. V. 54. No. 1. P. 203–209. DOI: 10.5277/ppmp1849.
24. Кошоридзе С.И., Левин Ю.К. Образование пузырька на гидрофобной поверхности // Журнал технической физики. 2020. Т. 90. №. 6. С. 886–890. DOI: 10.21883/JTF.2020.06.49272.182-19.
25. Varughese S.M., Bhandaru N. Durability of submerged hydrophobic surfaces // Soft Matter. 2020. V. 16. P. 1692–1701. DOI: 10.1039/C9SM01942A.
26. Li J., Wang W., Mei X., Pan A. Effects of surface wettability on the dewetting performance of hydrophobic surfaces // ACS Omega. 2020. V. 5. P. 28776–28783. DOI: 10.1021/acsomega.0c04106.
27. Qian T.Z., Wang X.P., Sheng P. Molecular scale contact line hydrodynamics of immiscible fluids // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. 016306. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.016306.
28. Hooman K., Hooman F., Famouri M. Scaling effects for flow in micro-channels: Variable property, viscous heating, velocity slip, and temperature jump // Int. Communications in Heat and Mass Transfer. 2009. V. 36. P. 192–196.
29. Neto C., Evans D., Craig V.S.J., Bonaccorso E. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies // Reports on Progress in Physics. 2005. V. 39. P. 2859–2897. DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05_2.
30. Bahrami M., Tamayol A., Taheri P. Slip-flow pressure drop in microchannels of general cross section // J. Fluids Engineering. 2009. V. 131. 031201.

31. Шварц К.Г., Шварц Ю.А. Устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое несжимаемой жидкости при наличии условия проскальзывания // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2020. № 1. С. 33–44. DOI: 10.31857/S0568528120010119.
32. Эйжкел Я. Проскальзывание жидкости в микро- и нанофлюидике: недавние исследования и их возможные применения // Научные труды НИПИ Нефтегаз ГНКАР. 2010. № 4. С. 62–66. DOI: 10.5510/OGP20100400047.
33. Борзенко Е.И., Дьякова О.А., Шрагер Г.Р. Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 2(28). С. 35–44.
34. Шелухин В.В., Христенко У.А. Об одном условии проскальзывания для уравнений вязкой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 5. С. 101–109.
35. Андреев В.К., Бекежанова В.Б., Ефимова М.В., Рыжков И.И., Степанова И.В. Неклассические модели конвекции: точные решения и их устойчивость // Вычислительные технологии. 2009. Т. 14. № 6. С. 5–18.
36. Stepanova I.V. Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity // Applied Mathematics and Computation. 2019. V. 343. P. 57–66. DOI: 10.1016/j.amc.2018.09.036.
37. Burmasheva N.V., Larina E.A., Prosviryakov E.Yu. Unidirectional convective flows of a viscous incompressible fluid with slippage in a closed layer // AIP Conference Proceedings. 2019. V. 2176. 030023. DOI: 10.1063/1.5135147.
38. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 2. С. 79–87. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
39. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2020. Т. 32. С. 33–48. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
40. Барановский Е.С., Артемов М.А. О стационарном течении жидкостей второго порядка в канале // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. № 4. С. 342–353. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.401.
41. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. 1958. V. 1. P. 391–395. DOI: 10.1007/BF00298016.
42. Сидоров А.Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // ПМТФ. 1989. № 2. С. 34–40.
43. Аристов С.Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости: автореф. ... дис. докт. физ.-мат. наук. Владивосток, 1990.
44. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование поля скоростей // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21. № 1. С. 180–196. DOI: 10.14498/vsgtu1527.
45. Shtern V. Counterflows. Paradoxical fluid mechanics phenomena. Cambridge, Cambridge University Press, 2012. DOI: 10.1017/CBO9781139226516.
46. Павленко А.М., Занин Б.Ю., Катасонов М.М., Зверков И.Д. Преобразование структуры открытого течения с помощью локального воздействия // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17. № 1. С. 17–22.

Burmasheva N.V., Larina E.A., Prosviryakov E.Yu. (2021) A COUETTE-TYPE FLOW WITH A PERFECT SLIP CONDITION ON A SOLID SURFACE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 79–94

DOI 10.17223/19988621/74/9

Keywords: viscous fluid convection, exact solution, shear flow, stagnation points, stratification of fields.

On the basis of a system of hydrodynamic equations, the unidirectional steady flow of a viscous incompressible fluid in a horizontal extended layer is studied. The solution to the governing equations is discovered in a distinguished class of functions that are linear in coordinates.

The contact of the fluid with a lower hydrophobic solid boundary is described by the Navier-slip condition. At the upper boundary of the layer, the temperature and pressure fields are assumed to be given, and a zero shear stress is specified. The system of boundary conditions is redefined due to the fact that all conditions for velocities are assigned as their derivatives. Zero flow rate is taken as an additional condition.

The obtained exact solution to the boundary value problem is the only possible polynomial solution. The highest (eighth) degree of polynomials corresponds to a solution for background pressure. Analysis of the solution shows that it can describe a multiple stratification of kinetic-force fields.

Since the analysis is carried out in a general form (without specifying physical constants that uniquely identify the fluid under study), the obtained results are applicable to viscous fluids of different nature.

Financial support. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 19-19-00571).

Natal'ya V. BURMASHEVA (Candidate of Technical Sciences, Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation). E-mail: nat_burm@mail.ru

Ekaterina A. LARINA (Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation). E-mail: larinakaterina@hotmail.com

Evgeniy Yu. PROSVIRYAKOV (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation). E-mail: evgen_pros@mail.ru

REFERENCES

1. Stepanova I.V. (2019) Construction and analysis of exact solution of Oberbeck–Boussinesque equations. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 12(5). pp. 590–597. DOI: 10.17516/1997-1397-2019-12-5-590-597.
2. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect. *Journal of King Saud University – Science*. 32(8). pp. 3364–3371. DOI: 10.1016/j.jksus.2020.09.023.
3. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2019) Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation. *Journal of Samara State Technical University, Series Physical and Mathematical Sciences*. 23(2). pp. 341–360. DOI: 10.14498/vsgtu1670.
4. Vasenin I.M., Krainov A.Yu., Shakhtin A.A., Mazur R.L., Zernaev P.V., Chukanov M.V. (2010) Matematicheskaya model' i rezul'taty chislennykh raschetov pereliva UF₆ v prisutstvii mikrokolichestv legkikh primesey [Mathematical model and results of numerical calculations for UF₆ overflowing in presence of microquantities of light impurities]. *Vestnik Tomskogo*

- gosudarstvennogo universiteta. *Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(10). pp. 53–59.
5. Goncharova O.N. (2011) Modeling of microconvection in a fluid between heat conducting solids. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 52(1). pp. 67–73. DOI: 10.1134/S002189441101010X.
 6. Gershuni G.Z., Zhukovitskii E.M. (1976) *Convective Stability of Incompressible Fluids*. Jerusalem: Keter Publications.
 7. Brutyan M.A. (1995) Odnopravlennye techeniya prostykh zhidkostey i ikh gazodinamicheskoe opisanie [Unidirectional flows of simple liquids and their gas-dynamic description]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktivnykh materialov – Journal on Composite Mechanics and Design*. 1(2). pp. 83–90.
 8. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Y. (2020) Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 54(1). pp. 230–239. DOI: 10.1134/S0040579519060034.
 9. Zhuchkov V.I., Raeva V.M., Frolkova A.K. (2020) Study of the selectivity of binary agents by gas–liquid chromatography. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 54(1). pp. 194–199. DOI: 10.31857/S0040357120010248.
 10. Spurk J.H., Aksel N. (2020) Laminar unidirectional flows. In: *Fluid Mechanics*. Cham, Springer. DOI: 10.1007/978-3-030-30259-7_6.
 11. Wichterle K., Večeř M. (2020) Chapter twelve – The steady unidirectional flow. *Transport and Surface Phenomena*. Elsevier. DOI: 10.1016/B978-0-12-818994-8.00012-9.
 12. Couette M. (1890) Etudes sur le frottement des liquides. *Annales de Chimie et de Physique*. 21. pp. 433–510.
 13. Poiseuille J. (1844) Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres. *Comptes Rendus*. 9. pp. 1–122.
 14. Naumov I.V., Okulov V.L., Mikkelsen R.F. (2014) Stagnation zone formation on the axis of a closed vortex flow. *Thermophysics and Aeromechanics*. 21(6). pp. 767–770. DOI: 10.1134/S0869864314060134.
 15. Alekseenko S.V., Kuybin P.A., Okulov V.L. (2003) *Vvedenie v teoriyu kontsentrirrovannykh vikhrey* [Introduction to the theory of concentrated vortices]. Novosibirsk: Institut teplofiziki im S.S. Kutateladze.
 16. Birikh R.V. (1966) Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 7. pp. 43–44.
 17. Ostroumov G.A. (1958) *Free Convection under the Condition of the Internal Problem*. Washington, NACA Technical Memorandum 1407, National Advisory Committee for Aeronautics.
 18. Gebhart B., Jaluria Y., Mahajan R.L., Sammakia B. (1988) *Buoyancy-induced Flows and Transport*. Springer.
 19. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation. *Journal of Samara State Technical University, Series Physical and Mathematical Sciences*. 24(3). pp. 528–541. DOI: 10.14498/vsgtu1770.
 20. Bulíček M., Málek J. (2017) Internal flows of incompressible fluids subject to stick-slip boundary conditions. *Vietnam Journal of Mathematics*. 45. pp. 207–220. DOI: 10.1007/s10013-016-0221-z.
 21. Zhang S., Huan J., Song H., Liu X., Wei Y.G. (2019) Plastic effect on the sliding inception between a cylinder and a rigid flat. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 32. pp. 1–16. DOI: 10.1007/s10338-018-0060-4.
 22. Chen Y., O'Shaughnessy T.J., Kamimori G.H., Horner D.M., Egnoto M.J., Bagchi A. (2020) Role of interfacial conditions on blast overpressure propagation into the brain. *Frontiers in Neurology*. 11. Article 323. DOI: 10.3389/fneur.2020.00323.
 23. Ekiel-Jezewska M.L., Wajnryb E. (2018) Motion of a particle with stick-slip boundary conditions towards a flat interface: hard wall or free surface. *Physicochemical Problems of Mineral Processing*. 54(1). pp. 203–209. DOI: 10.5277/ppmp1849.

24. Koshoridze S.I., Levin Y.K. (2020) Bubble formation on a hydrophobic surface. *Technical Physics*. 65(6). pp. 846–850. DOI: 10.1134/S1063784220060171.
25. Varughese S.M., Bhandaru N. (2020) Durability of submerged hydrophobic surfaces. *Soft Matter*. 6. DOI: 10.1039/C9SM01942A.
26. Li J., Wang W., Mei X., Pan A. (2020) Effects of surface wettability on the dewetting performance of hydrophobic. *ACS Omega*. 5. pp. 28776–28783. DOI: 10.1021/acsomega.0c04106.
27. Qian T.Z., Wang X.P., Sheng P. (2003) Molecular scale contact line hydrodynamics of immiscible fluids. *Physical Review E*. 68. Article 016306. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.016306.
28. Hooman K., Hooman F., Famouri M. (2009) Scaling effects for flow in micro-channels: Variable property, viscous heating, velocity slip, and temperature jump. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 36(2). pp. 192–196. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2008.10.003.
29. Neto C., Evans D., Bonaccorso E. (2005) Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies. *Reports on Progress in Physics*. 39. pp. 2859–2897. DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
30. Bahrami M., Tamayol A., Taheri P. (2009) Slip-flow pressure drop in microchannels of general cross section. *Journal of Fluids Engineering*. 131. Article 031201. DOI: 10.1115/1.3059699.
31. Schwarz K.G., Schwarz Y.A. (2020) Stability of advective flow in a horizontal incompressible fluid layer in the presence of the Navier slip condition. *Fluid Dynamics*. 55. pp. 31–42. DOI: 10.1134/S0015462820010115.
32. Eijkel J. (2007) Liquid slip in micro- and nanofluidics: recent research and its possible implications. *Lab on a Chip*. 7(3). pp. 299–301. DOI: 10.1039/B700364C.
33. Borzenko E.I., Diakova O.A., Shrager G.R. (2014) Issledovanie yavleniya proskal'zyvaniya v sluchae tehnicheskoy vyzkoy zhidkosti v izognutom kanale [Studying the slip phenomenon for a viscous fluid flow in a curved channel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(28). pp. 35–44.
34. Shelukhin V.V., Khristenko U.A. (2013) On one slip condition for the equations of a viscous fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 54(5). pp. 773–780. DOI: 10.1134/S0021894413050106.
35. Andreev V.K., Bekezhanova V.B., Efimova M.V., Ryzhkov I.I., Stepanova I.V. (2009) Neklassicheskie modeli konveksii: tochnye resheniya i ikh ustoychivost' [Non-classical convection models: exact solutions and their stability]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 14(6). pp. 5–18.
36. Stepanova I.V. (2019) Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity. *Applied Mathematics and Computation*. 343. pp. 57–66. DOI: 10.1016/j.amc.2018.09.036.
37. Burmasheva N.V., Larina E.A., Prosviryakov E.Yu. (2019) Unidirectional convective flows of a viscous incompressible fluid with slippage in a closed layer. *AIP Conference Proceedings*. 2176. Article 030023. DOI: 10.1063/1.5135147.
38. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) Tochnoe reshenie uravneniy Nav'e–Stoksa, opisuyayushchee prostranstvenno neodnorodnye techeniya vrashchayushcheyasya zhidkosti [Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*. 26(2). pp. 79–87. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
39. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) Klass tochnykh resheniy dlya dvumernykh uravneniy geofizicheskoy gidrodinamiki s dvumya parametrami Koriolisa [A class of exact solutions for two-dimensional equations of geophysical hydrodynamics with two Coriolis parameters]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematika» – The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*. 32. pp. 33–48. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
40. Baranovskiy E.S., Artemov M.A. (2017) O statsionarnom techenii zhidkostey vtorogo porjadka v kanale [Steady flows of second-grade fluids in a channel]. *Vestnik Sankt-Peterburg-*

- skogo universiteta. *Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya – Vestnik of Saint Petersburg State University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 13(4). pp. 342–353. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.401.
41. Lin C.C. (1958) Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1. pp. 391–395. DOI: 10.1007/BF00298016.
 42. Sidorov A.F. (1989) Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 30(2). pp. 197–203. DOI: 10.1007/BF00852164.
 43. Aristov S.N. (1990) *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Eddy currents in thin liquid layers]: Dissertation. Institute of Automation and Control Processes.
 44. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2017) Krupnomasshtabnaya sloistaya statsionarnaya konvektsiya vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti pod deystviem kasatel'nykh napryazheniy na verkhney granitse. Issledovanie polya skorostey [A large-scale layered stationary convection of an incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Velocity field investigation]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki – Journal of Samara State Technical University, Series Physical and Mathematical Sciences*. 21(1). pp. 180–196. DOI: 10.14498/vsgtu1527.
 45. Shtern V. (2012) *Counterflows. Paradoxical Fluid Mechanics Phenomena*. Cambridge: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9781139226516.
 46. Pavlenko A.M., Zanin B.Y., Katasonov M.M., Zverkov I.D. (2010) Alteration of separated-flow structure achieved through a local action. *Thermophysics and Aeromechanics*. 17(1). pp. 15–20. DOI: 10.1134/S0869864310010026.

Received: May 06, 2021

УДК: 536.46+662.61

DOI 10.17223/19988621/74/10

А. Кантарбаева, К.М. Моисеева

**ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛАМЕНИ
В УГЛЕ-ПРОПАНО-ВОЗДУШНОЙ ГАЗОВЗВЕСИ¹**

Представлена физико-математическая модель и результаты численного исследования особенностей горения пропано-воздушной смеси с примесью угольных частиц. В задаче определялась видимая скорость горения пропано-воздушной газовзвеси. Варьировались массовая концентрация пропана и частиц в смеси, а также радиус частиц угольной пыли. Задача решалась численно. Показано влияние радиуса частиц угольной пыли на видимую скорость горения газовзвеси.

Ключевые слова: *скорость горения, пропано-воздушная смесь, угольная пыль, математическое моделирование.*

Изучение особенностей горения реакционноспособных газовзвесей является актуальной задачей. Это обусловлено широким распространением углеводородных топлив во всех сферах промышленности. Определение скорости горения газовых смесей является важной проблемой пожаро-взрывобезопасности.

В работе [1] представлена модель горения пропано-воздушной смеси, в которой определялась зависимость скорости распространения ламинарного пламени от количества горючего в смеси. Расчеты проводились в широком диапазоне начальной температуры $T_0 = 680\text{--}1900$ К и давления $p_0 = 0.17\text{--}30$ атм. Коэффициент избытка горючего варьировался в диапазоне от 0.6 до 1.6. Достоверность результатов, полученных авторами, подтверждается экспериментальными данными из работы [2]. Исследование распространения пламени в богатых пропано-воздушных смесях приведено в работе [3]. Содержание пропана в смеси менялось от 5 до 10%. Было выбрано начальное значение температуры $T_0 = 298$ К и давления $p_0 = 0.1$ МПа. Авторы исследовали зависимость нормальной скорости горения смеси от содержания пропана. Было показано, что при увеличении концентрации пропана в смеси больше стехиометрического значения нормальная скорость падает. Установлено, что максимальная температура пламени может значительно превышать адиабатическое значение.

Авторы [4] экспериментально исследовали зависимость видимой скорости горения пропано-воздушной смеси от содержания пропана в смеси при различных давлениях. Эксперимент проводился при значениях начальной температуры $T_0 = 300, 325, 350$ К и давления $p_0 = 0.5, 1.0, 1.5$ атм. Коэффициент избытка горючего варьировался от 0.6 до 1.5. В ходе исследования было установлено, что видимая скорость горения пропано-воздушной смеси возрастает вместе с увеличением коэффициента избытка горючего, но после того, как содержание пропана достигало стехиометрического значения, скорость падала. Также было показано, что видимая скорость горения возрастает линейно с увеличением начальной температуры.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ р-мол-а 19-48-703006.

Добавка реакционноспособных частиц в газовую смесь может приводить к изменению скорости распространения пламени. Так, в работе [5] показано неоднозначное влияние присутствия частиц угольной пыли на скорость горения углеметано-воздушной газовзвеси. Отмечено снижение скорости распространения пламени по газовзвеси при высоких концентрациях частиц пыли и при малом содержании метана в смеси. Пропан на сегодняшний день является одним из распространенных типов горючего. Кроме того, пропан является одним из углеводородов, способных выделиться из угольного пласта. Температура самовоспламенения пропано-воздушной смеси мала и присутствие реакционноспособных частиц повышает вероятность воспламенения и горения газовзвеси.

Целью данной работы является определение видимой скорости горения пропано-воздушной газовзвеси угольной пыли в зависимости от содержания пропана и реакционноспособных частиц в газовзвеси.

Построение математической модели

Предполагается, что в пропано-воздушной смеси равномерно распределены частицы угольной пыли. Объемная доля частиц мала. Учитывается зависимость коэффициентов диффузии и теплопроводности газа от температуры. Между газом и частицами учитывается динамическое и тепловое взаимодействие. В газе протекает химическая реакция второго порядка между пропаном и кислородом. На поверхности частиц протекает гетерогенная химическая реакция первого порядка окислительно. Скорость реакции на частицах определяется с учетом массоотдачи [6]. Постановка задачи основана на работах [7, 8]. При сформулированных допущениях математическая постановка задачи принимает следующий вид:

Уравнение неразрывности для газа

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g u_g}{\partial x} = G_1; \quad (1)$$

Уравнение сохранения импульса газа

$$\frac{\partial \rho_g u_g}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_g u_g^2 + p_g)}{\partial x} = -\tau_{tr} + G_1 u_p; \quad (2)$$

Уравнение энергии газа

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_g (\epsilon_g + 0.5 u_g^2)}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_g u_g (\epsilon_g + 0.5 u_g^2) + p_g u_g]}{\partial x} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial x} \right) + Q_2 G_2 + G_1 (0.5 u_p^2 + c_p T_p) - u_p \tau_{tr} + \alpha_p n_p S_p (T_p - T_g); \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение баланса массы окислителя в смеси

$$\frac{\partial \rho_{ox}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{ox} u_g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_g D_g \frac{\partial a_{ox}}{\partial x} \right) - \alpha_1 G_1 - \alpha_2 G_2; \quad (4)$$

Уравнение баланса массы горючей компоненты в газе

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial \rho_f u_g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_g D_g \frac{\partial a_f}{\partial x} \right) - G_2; \quad (5)$$

Уравнения баланса массы частиц

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p u_p}{\partial x} = -G_1; \quad (6)$$

Уравнение сохранения импульса частиц

$$\frac{\partial (\rho_p u_p)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p u_p^2}{\partial x} = \tau_{tr} - G_1 u_p; \quad (7)$$

Уравнение энергии частиц

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_p (\varepsilon_p + 0.5 u_p^2)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p u_p (\varepsilon_p + 0.5 u_p^2)}{\partial x} = \\ = Q_1 G_1 - \alpha_p S_p n_p (T_p - T_g) - G_1 (c_p T_p + 0.5 u_p^2) + \tau_{tr} u_p; \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение счетной концентрации частиц

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + \frac{\partial n_p u_p}{\partial x} = 0; \quad (9)$$

Уравнение состояния газа

$$p_g = \rho_g R_g T_g. \quad (10)$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} T_g(x, t_z) = \begin{cases} T_0, & 0 \leq x \leq x_0 \\ T_{gb}, & x_0 < x \leq \infty \end{cases}; \quad T_p(x, t_z) = T_{gb}; \quad p_g(x, t_z) = p_{gb}; \\ \rho_p(x, t_z) = m_p; \quad \rho_{ox}(x, t_z) = a_{ox,b} \rho_{gb}; \quad \rho_f(x, t_z) = a_{f,b} \rho_{gb}; \\ u_g(x, t_z) = u_p(x, t_z) = 0; \quad n_p(x, t_z) = n_p^b. \end{aligned} \quad (11)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_g(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \rho_p(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial n_p(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial T_p(0, t)}{\partial x} = 0; \quad u_p(0, t) = u_g(0, t) = 0; \\ \frac{\partial \rho_{ox}(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \rho_f(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial T_g(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \rho_{ox}(\infty, t)}{\partial x} = \frac{\partial \rho_f(\infty, t)}{\partial x} = \frac{\partial T_g(\infty, t)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В уравнениях (1) – (9) использованы величины, определяемые следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \alpha_p = Nu_p \lambda_g / (2 r_p); \quad Nu_p = 2 + (Nu_l^2 + Nu_t^2)^{1/2}; \quad Nu_l = 0.664 Re^{0.5}; \\ Nu_t = 0.037 Re^{0.8}; \quad \tau_{tr} = n_p F_{tr}; \quad F_{tr} = C_r S_m \rho_g (u_g - u_p) |u_g - u_p| / 2; \\ C_r = 24 (1 + 0.15 Re^{0.682}) / Re; \quad Re = 2 \rho_g |u_g - u_p| r_p / \eta; \quad \lambda_g = \lambda_b (T/T_b)^{2/3}; \\ D_g = \lambda_g / (c_{pg} \rho_g); \quad \varepsilon_g = p_g / (\rho_g (\gamma - 1)); \quad \varepsilon_p = c_p T_p; \quad r_p = \sqrt[3]{\frac{3 \rho_p}{4 \pi n_p \rho_p^0}}; \\ G_1 = n_p S_p j_1 \rho_{ox}; \quad j_1 = \frac{\beta_m k_{01} \exp(-E_{a,1} / (R_u T_p))}{\beta_m + k_{01} \exp(-E_{a,1} / (R_u T_p))}; \quad \beta_m = \frac{\lambda_g(T) Nu_D}{c_g \rho_g r_k}; \\ G_2 = \rho_f \rho_{ox} k_{02} \exp(-E_{a,2} / (R_u T_g)); \end{aligned}$$

где u – скорость; t – время; x – координата; r_p – радиус частицы; p – давление; Q – тепловой эффект реакции; T – температура; k_0 – константа скорости химической реакции; η – коэффициент динамической вязкости газа; μ – молярная масса; ρ_{ox} – парциальная плотность окислителя; ρ_f – парциальная плотность горючего; ρ_p^0 – собственная плотность частиц; Nu_D – диффузионный аналог числа Нуссельта, $Nu_D = Nu_p$; Re – число Рейнольдса; Nu_p – число Нуссельта; α_p – коэффициент теплообмена газа с частицами; λ – коэффициент теплопроводности; D – коэффициент диффузии; ε – внутренняя энергия; γ – показатель адиабаты; G_i – массовая скорость химической реакции; $S_p = 4\pi r_p^2$ – площадь поверхности частицы; $S_m = \pi r_p^2$ – площадь миделевого сечения частицы; E_a – энергия активации химической реакции; R_u – универсальная газовая постоянная; α_1, α_2 – стехиометрические коэффициенты реакции кислорода с частицами угольной пыли и пропаном; r – радиус частицы; β_m – коэффициент массоотдачи для частиц; C_r – коэффициент трения; τ_{ir} – сила трения, F_{ir} – сила взаимодействия одиночной частицы с газом; j_1 – скорость гетерогенной реакции на частицах, n_p – счетная концентрация частиц. Индексы: b – начальные значения; p – параметры частиц; g – параметры газа; ox – окислитель; C – углерод; f – горючая компонента; 1 – реакция на поверхности частиц; 2 – реакция в газе.

Метод решения и результаты

Система уравнений (1) – (5) решалась численно с использованием метода С.К. Годунова [9]. Поток энергии, массы и импульса находился из решения задачи о распаде произвольного разрыва в параметрах состояния газа в соседних ячейках [9]. Поток энергии, массы и импульса для частиц в уравнениях (6) – (9) определялся с использованием решения задачи о распаде произвольного разрыва в параметрах состояния частиц в соседних ячейках по методу А.Н. Крайко (используется алгоритм распада произвольного разрыва в среде, без собственного давления) [10]. В расчетах минимальный шаг по пространству определен из исследования сеточной сходимости и равен $\Delta h = 10^{-5}$ м. Шаг по времени выбирался согласно условию устойчивости Куранта.

Расчет задачи был выполнен при следующих значениях исходных величин:

$$c_{pg} = 1350 \text{ Дж/кг·К}; k_{01} = 6 \cdot 10^{10} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}); k_{02} = 79000 \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с});$$

$$E_{a,1} = 171.16 \text{ кДж/моль}; E_{a,2} = 135 \text{ кДж/моль}; Q_1 = 42.45 \text{ МДж/кг};$$

$$Q_2 = 20 \text{ МДж/кг}; R_u = 8.31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}; a_{ox} = 0.21; p = 10^5 \text{ Па}; \alpha_1 = 2.67;$$

$$\alpha_2 = 3.64; \lambda_b = 0.025 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}; \eta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}; T_0 = 3000 \text{ К}; T_b = 293 \text{ К}.$$

Начальная массовая доля пропана в смеси варьировалась в диапазоне $a_{f,b} = 0.02$ – 0.06 . Радиус частиц угольной пыли изменялся в диапазоне $r_p = 10^{-6}$ – $3 \cdot 10^{-6}$ м. Начальная масса частиц в смеси на кубический метр варьировалась в диапазоне $m_p = 0.03$ – 0.05 кг/м^3 . Были проведены параметрические расчеты при различных составах смеси, в каждом из которых определялась видимая скорость горения. Видимая скорость горения определялась как скорость перемещения координаты, соответствующей выгоранию окислителя до половины от начального значения. Расчеты проведены для значений массовой концентрации пропана в пропано-воздушной смеси, меньших или равных стехиометрическому значению.

На рис. 1 представлена зависимость видимой скорости горения пропано-воздушной смеси с примесью частиц от содержания пропана в смеси при различных составах угольной пыли. Верхняя шкала на рис. 1 определяет величину $\phi = a_{ox,b} / a_{ox,n}$, где $a_{ox,n}$ – количество окислителя, которое потребовалось для полного сгорания заданной массы частиц и пропана, $a_{ox,n} = \alpha_1 m_p + \alpha_2 a_{f,b}$.

Согласно рис. 1, при всех массовых концентрациях частиц увеличение содержания пропана в смеси приводит к увеличению видимой скорости горения газозвеси. При малой массовой концентрации частиц (рис. 1, а) наибольшая скорость горения наблюдается для частиц радиусом 3 мкм. Для частиц радиусом 1 и 2 мкм в области $a_{f,b} = 0.04$ наблюдается изменение поведения кривых, определяющих зависимость видимой скорости горения газозвеси от содержания пропана в смеси. До значения $a_{f,b} = 0.04$ большую видимую скорость горения имеет газозвесь с частицами радиуса 1 мкм, выше $a_{f,b} = 0.04$ большую скорость горения имеет газозвесь с частицами радиуса 2 мкм (рис. 1, а). На рис. 1, б показано, что при массовой концентрации частиц 0.04 кг/м^3 в диапазоне массовых концентраций пропана $a_{f,b} > 0.045$ скорость распространения пламени в газозвеси пропано-воздушной смеси слабо зависит от радиуса частиц.

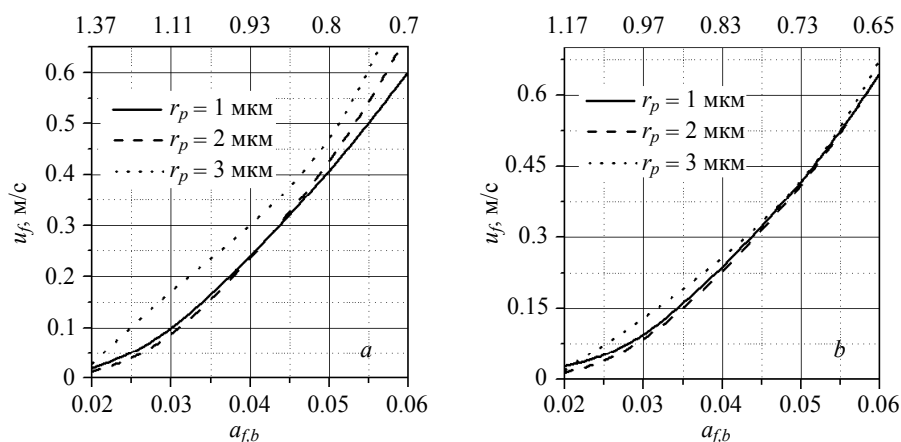


Рис. 1. Зависимость видимой скорости горения угле-пропано-воздушной газозвеси от массовой концентрации пропана в газе. $m_p = 0.03 \text{ кг/м}^3$ (а), 0.04 кг/м^3 (б)

Fig. 1. The observed burning velocity of a coal-propane-air gas suspension as a function of propane mass concentration in the gas. $m_p =$ (а) 0.03 and (б) 0.04 kg/m^3

На рис. 2 представлена зависимость видимой скорости горения пропано-воздушной газозвеси от радиуса частиц. Согласно кривой 1, рис. 2, видимая скорость горения снижается при возрастании радиуса частиц. Однако при увеличении массовой доли пропана в газозвеси и одинаковом содержании частиц наблюдается обратная зависимость. В этом случае видимая скорость горения возрастает с увеличением радиуса частиц, это видно на кривых 2 и 3. Стоит отметить, что при массе частиц в смеси $m_p = 0.03 \text{ кг/м}^3$ видимая скорость горения газозвеси выше, чем при массе $m_p = 0.05 \text{ кг/м}^3$.

Поведение кривых на рис. 1 и 2 объясняется следующим образом. Реакция окисления частиц конкурирует с реакцией окисления пропана. Снижение скорости реакции на частицах при увеличении их радиуса позволяет большему количе-

ству пропана прореагировать с кислородом. Таким образом, увеличение радиуса частиц ведет к возрастанию видимой скорости горения газовозвеси, что видно на кривых 2 и 3, рис. 2. В газовозвесах с небольшим содержанием пропана уменьшение видимой скорости горения с увеличением радиуса частиц можно объяснить снижением коэффициента массоотдачи. Так как пропан успевает полностью прореагировать с кислородом, а скорость реакции на частицах снижается, наблюдается уменьшение видимой скорости горения газовозвеси.

На рис. 3 представлено сравнение видимой скорости горения пропано-воздушной смеси без частиц и с угольными частицами. При расчете видимой скорости горения газовозвеси пропано-воздушной смеси была взята масса частиц в смеси $m_p = 0.04 \text{ кг/м}^3$ и радиус частиц $r = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}$. Согласно рисунку, видимая скорость горения угле-пропано-воздушной смеси в диапазоне $a_{fb} = 0.03\text{--}0.06$ значительно ниже видимой скорости горения смеси без частиц. Пропано-воздушная смесь с массовой концентрацией $a_{fb} < 0.03$ не горит, так как содержание пропана меньше нижнего предела воспламеняемости пропано-воздушных смесей. Снижение скорости распространения пламени в газовозвеси угле-пропано-воздушной смеси по сравнению с чистой пропано-воздушной смесью объясняется тем, что частицы угольной пыли обладают меньшей удельной теплотой сгорания. Добавка частиц приводит к возрастанию коэффициента избытка горючего, который будет превышать стехиометрическое значение. Этим и объясняется снижение видимой скорости горения пропано-воздушной газовозвеси с частицами. В то же время примесь частиц в бедную пропано-воздушную смесь приводит к горению газовозвеси пропано-воздушной смеси с малой скоростью.

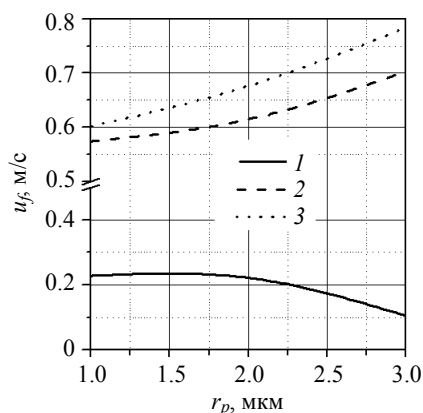


Рис. 2. Зависимость видимой скорости горения угле-пропано-воздушной газовозвеси от радиуса частиц. Кривые: 1 – $a_{fb} = 0.02$, $m_p = 0.05 \text{ кг/м}^3$ ($\phi = 1.02$), 2 – $a_{fb} = 0.06$, $m_p = 0.05 \text{ кг/м}^3$ ($\phi = 0.6$), 3 – $a_{fb} = 0.06$, $m_p = 0.03 \text{ кг/м}^3$ ($\phi = 0.7$)

Fig. 2. The observed burning velocity of the coal-propane-air suspension as a function of the radius of particles. Curves: 1 – $a_{fb} = 0.02$, $m_p = 0.05 \text{ kg/m}^3$ ($\phi = 1.02$), 2 – $a_{fb} = 0.06$, $m_p = 0.05 \text{ kg/m}^3$ ($\phi = 0.6$), 3 – $a_{fb} = 0.06$, $m_p = 0.03 \text{ kg/m}^3$ ($\phi = 0.7$)

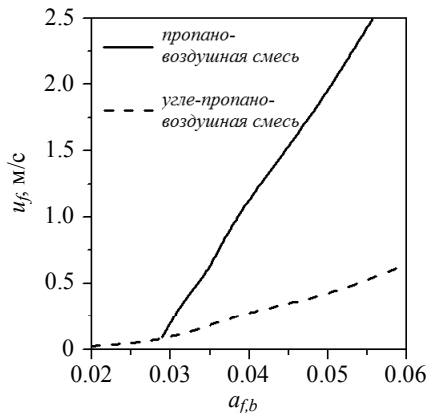


Рис. 3. Зависимость видимой скорости горения смеси от массовой доли горючего в пропано-воздушной смеси

Fig. 3. The observed burning velocity of the mixture as a function of the fuel mass fraction in the propane-air mixture

Выводы

Разработана физико-математическая модель горения реакционноспособной газозвеси угольной пыли в пропано-воздушной смеси. Проведено параметрическое исследование задачи, определена видимая скорость горения пропано-воздушной смеси с примесью угольных частиц. Определены зависимости видимой скорости горения пропано-воздушной газозвеси от коэффициента избытка горючего и от радиуса частиц. Показано, что в смесях с небольшим содержанием пропана видимая скорость горения снижается при увеличении радиуса частиц. Напротив, в смесях с большим содержанием пропана при увеличении радиуса частиц наблюдается возрастание видимой скорости горения. Также видимую скорость горения газозвеси с большим содержанием пропана можно повысить если уменьшить массу частиц в смеси. Видимая скорость горения пропано-воздушной смеси с угольными частицами значительно меньше скорости горения смеси без частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Титова Н.С., Кулешов П.С., Старик А.М. Кинетический механизм воспламенения и горения пропана в воздухе // Физика горения и взрыва. 2011. Т. 47. № 3. С. 3 – 19.
2. Gerstein M., Levine O., Wong E.L. Flame propagation. II. The determination of fundamental burning velocities of hydrocarbons by a revised tube method // Journal of the American Chemical Society. 1951. V. 73. No. 1. P. 418–422.
3. Kwon S., Tseng L.-K., Faeth G.M. Laminar burning velocities and transition to unstable flames in H₂/O₂/N₂ and C₃H₈/O₂/N₂ mixtures // Combustion and Flame. 1992. V. 90. No. 3–4. P. 230–246.
4. Palm-Leis A., Strehlow R.A. On the propagation of turbulent flames // Combustion and Flame. 1969. V. 13. No 2. P. 111–129.
5. Rockwell S.R., Rangwala A.S. Influence of coal dust on premixed turbulent methane-air flames // Combustion and Flame. 2013. V. 160(3). P. 635–640.
6. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987.
7. Moiseeva K.M., Krainov A.Yu., Krainov D.A. Numerical investigation on burning rate of propane-air mixture // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2019. V. 696. 012011.
8. Моисеева К.М., Крайнов А.Ю., Моисеев Д.М. Устойчивость горения полидисперсной угле-метано-воздушной смеси в горелке с рекуперацией тепла // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 48. С. 82–90.
9. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
10. Крайко А.Н. О поверхностях разрыва в среде, лишенной 'собственного' давления // Прикладная математика и механика. 1979. Т. 43. № 3. С. 500–510.

Статья поступила 13.07.2021

Kantarbaeva A., Moiseeva K.M. (2021) FEATURES OF FLAME PROPAGATION IN A PROPANE-AIR GAS SUSPENSION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 95–102

DOI 10.17223/19988621/74/10

Keywords: burning velocity, propane-air mixture, coal dust, mathematical modeling.

The mathematical model of combustion for a reactive gas suspension of coal dust in a propane-air mixture is developed. The parametric study of the problem is carried out. The observed burning velocity of the propane-air mixture with an admixture of coal particles is

determined. Dependences of the observed burning velocity of the propane-air gas suspension on the equivalence ratio and on the radius of the particles are obtained. It is shown that, the observed burning velocity decreases with an increase in the radius of the particles. On the contrary, with an increase in the radius of the particle, the observed burning velocity increases for high-propane mixtures. Moreover, in the case of high-propane mixtures, the observed burning velocity of the gas suspension can be increased by reducing the mass of the particles. The observed burning velocity for a propane-air mixture with particles is significantly less than that for a mixture without particles.

Financial support. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 19-48-703006 r_mol_a).

Kseniya M. MOISEEVA (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

Aruzhan KANTARBAEVA (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

REFERENCES

1. Titova N.S., Kuleshov P.S., Starik A.M. (2011) Kinetic mechanism of propane ignition and combustion in air. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 47(3). pp. 249–264. DOI: 10.1134/S0010508211030014.
2. Gerstein M., Levine O., Wong E.L. (1951) Flame propagation. II. The determination of fundamental burning velocities of hydrocarbons by a revised tube method. *Journal of the American Chemical Society*. 73(1). pp. 418–422. DOI: 10.1021/ja01145a136.
3. Kwon S., Tseng L.-K., Faeth G.M. (1992) Laminar burning velocities and transition to unstable flames in $H_2/O_2/N_2$ and $C_3H_8/O_2/N_2$ mixtures. *Combustion and Flame*. 90(3–4). pp. 230–246. DOI: 10.1016/0010-2180(92)90085-4.
4. Palm-Leis A., Strehlow R.A. (1969) On the propagation of turbulent flames. *Combustion and Flame*. 13(2). pp. 111–129. DOI: 10.1016/0010-2180(69)90042-X.
5. Rockwell S.R., Rangwala A. S. (2013) Influence of coal dust on premixed turbulent methane-air flames. *Combustion and Flame*. 160(3). pp. 635–640. DOI: 10.1016/j.combustflame.2012.10.025.
6. Frank-Kamenetskiy D.A. (1987) *Diffuziya i teploperedacha v khimicheskoy kinetike* [Diffusion and heat transfer in chemical kinetics]. Moscow: Nauka.
7. Moiseeva K.M., Krainov A.Yu., Krainov D.A. (2019) Numerical investigation on burning rate of propane-air mixture. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 696. Article 012011. DOI: 10.1088/1757-899X/696/1/012011.
8. Moiseeva K.M., Krainov A.Yu., Moiseev D.M. (2017) Ustoychivost' goreniya polidispersnoy ugle-metano-vozdushnoy smesi v gorelke s rekuperatsiey tepla [Stability of the combustion of polydisperse coal-methane-air mixture in the heat recovery burner]. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta, Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 48. pp. 82–90. DOI: 10.17223/19988621/48/8.
9. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.I., Kraiko A.N., Prokopov G.P. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems in gas dynamics]. Moscow: Nauka.
10. Kraiko A.N. (1979) On discontinuity surfaces in a medium devoid of "proper" pressure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 43(3). pp. 539–549. DOI: 10.1016/0021-8928(79)90102-3.

Received: July 13, 2021

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/74/11

А.Ш. Кусяков

ПРОЕКТИРОВАНИЕ МНОГОСТЕНОЧНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК

Исследуется проблема оптимального проектирования многостеночных цилиндрических оболочек из композитного материала, работающих на устойчивость и прочность под действием сжимающих нагрузок. В качестве целевой функции используется масса конструкции. При построении ограничений по устойчивости учитываются как общая, так и местная формы потери устойчивости. Доказано, что при выполнении определенных условий задача оптимального проектирования имеет единственное решение. Приведены численные результаты, позволяющие оценить эффективность подкрепляющих элементов в конструкции оболочки.

Ключевые слова: многостеночная оболочка, композит, устойчивость, прочность, проектирование.

Вопросам оптимального проектирования тонкостенных конструкций из традиционных и композитных материалов посвящена обширная литература. Методы расчета и проектирования подкрепленных пластин и оболочек из традиционных материалов достаточно подробно представлены, например, в работах [1–5]. Композитные материалы и конструкции из них, включая ребристые и сетчатые тонкостенные конструкции, исследовались в работах [6–13], трехслойные конструкции – в работах [14–16]. Многостеночные композитные конструкции – это сравнительно новый вид несущих конструкций ракетно-космической техники [17–19], которые могут быть использованы вместо ребристых и трехслойных конструкций.

Известные к настоящему времени алгоритмы проектирования подкрепленных конструкций основаны, как правило, на предположении, что решение задачи существует и единственно. В подавляющем большинстве исследований решение задачи оптимального проектирования подкрепленных конструкций осуществляется методами нелинейного математического программирования. Таким образом, исследование проблемы существования и единственности решений, а также построение инженерных алгоритмов, не требующих применения методов нелинейного математического программирования, представляют собой одну из наиболее актуальных проблем оптимального проектирования композитных конструкций.

Цель работы – построение алгоритма оптимального проектирования многостеночной композитной оболочки, позволяющего оценить эффективность использования подкрепляющих элементов с учетом условий существования и единственности решения задачи.

Постановка задачи

Многостеночная цилиндрическая оболочка радиусом R и длиной L находится под действием осевых сжимающих нагрузок, равномерно распределенных по торцам оболочки (рис. 1). Требуется при заданных габаритных размерах и величине

сжимающей нагрузки оценить эффективность использования подкрепляющих элементов в конструкции оболочки.

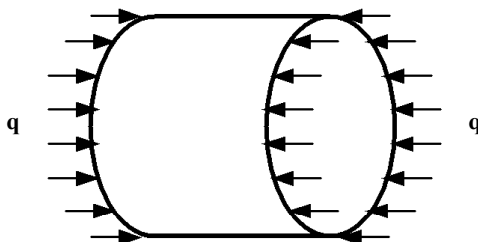


Рис. 1. Осевое сжатие цилиндрической оболочки
Fig. 1. Axial compression of a cylindrical shell

Многостеночная цилиндрическая оболочка состоит из двух несущих слоев, соединенных набором стенок из композитного материала (рис. 2).

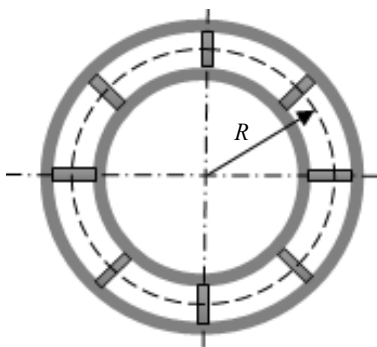


Рис. 2. Сечение многостеночной оболочки
Fig. 2. Cross-section of a multi-walled shell

Основным структурным элементом несущего слоя является монослой, состоящий из параллельно уложенных волокон, связанных между собой полимерным связующим – матрицей (рис. 3). Стенка представляет собой однонаправленный композит, изготовленный из того же материала, что и несущие слои.

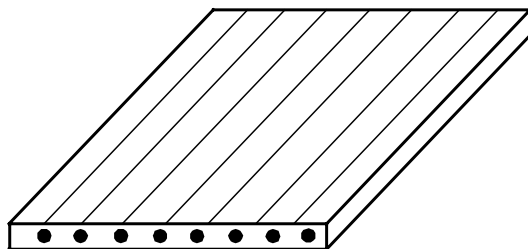


Рис. 3. Монослой
Fig. 3. Monolayer

Критические нагрузки

Введем обозначения:

- h_0 – толщина одного несущего слоя;
- t_s – расстояние между центрами тяжести стенок;
- H_s, B_s – соответственно высота и толщина стенки;
- H_{sm} – максимально допустимая по условиям технологии высота стенки;
- E_1, E_2 – модули Юнга вдоль и поперек волокон материала несущих слоев соответственно;
- ν_{12}, ν_{21} – коэффициенты Пуассона материала несущих слоев;
- G_{12} – модуль сдвига материала несущих слоев;
- $b_{11}, b_{22}, b_{12}, b_{33}$ – компоненты матрицы жесткости монослоя;
- $D_{xx}, D_{yy}, D_{xy}, D_G$ – изгибные жесткости несущего слоя;
- $C_{xx}, C_{yy}, C_{xy}, C_G$ – мембранные жесткости несущего слоя;
- E_s – модуль Юнга материала стенок вдоль волокон.

Критическую нагрузку, соответствующую общей форме потери устойчивости, будем определять по классической формуле для ортотропной оболочки с «приведенными» жесткостями [20]

$$q_{cr} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{D_{xx}^{(p)}}{\delta_{yy}^{(p)}}}, \quad (1)$$

где
$$D_{xx}^{(p)} = 8D_{xx} \left(1 + 3 \left(\frac{H_s}{h} \right)^2 + 3 \frac{H_s}{h} \right) + \frac{E_s h_s H_s^2}{12}; \quad (2)$$

$$h_s = \frac{B_s H_s}{t_s}, \quad h = 2h_0; \quad (3)$$

$$\delta_{yy}^{(p)} = \frac{2C_{xx} + E_s h_s}{2C_{yy} (2C_{xx} + E_s h_s) - 4C_{xy}^2}. \quad (4)$$

С точностью до эффектов Пуассона влиянием стенок на податливость конструкции в окружном направлении можно пренебречь, то есть

$$\delta_{yy}^{(p)} = \frac{1}{2C_{yy}}. \quad (5)$$

Если несущие слои и стенки многостеночной оболочки состоят только из продольных монослоев, «приведенная» изгибная жесткость может быть представлена в виде

$$D_{xx}^{(p)} = D_f (\gamma^3 + 3r_H \gamma^2 + 2r_H^2 \gamma + r_H^2). \quad (6)$$

Здесь
$$h_f = h + h_s, \quad D_f = \frac{b_{11} h_f^3}{12}, \quad \gamma = \frac{h}{h_f}, \quad r_H = \frac{H_s}{h_f}. \quad (7)$$

Податливость конструкции в окружном направлении запишем следующим образом:

$$\delta_{yy}^{(p)} = \frac{1}{b_{22} h_f \gamma}. \quad (8)$$

Подставив выражения (6) и (8) в формулу (1), получим

$$q_{cr} = q_f \sqrt{p(\gamma)\gamma}, \quad (9)$$

где
$$q_f = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{D_f}{\delta_f}}, \quad p(\gamma) = \gamma^3 + 3r_H \gamma^2 + 2r_H^2 \gamma + r_H^2. \quad (10)$$

Здесь δ_f – податливость гладкой оболочки толщиной h_f в окружном направлении.

Критическую нагрузку, соответствующую местной форме потери устойчивости, вычисляем по известной формуле для гладкой ортотропной пластинки [18]:

$$q_{crm} = k_s \frac{2\pi^2}{t_s^2} \left(\sqrt{D_{xx}D_{yy}} + D_{xy} + 2D_G \right). \quad (11)$$

Здесь k_s – редуccionный коэффициент, вычисляемый по формуле

$$k_s = 2 \left(1 + \frac{E_s h_s}{E_x h} \right). \quad (12)$$

где E_x – модуль Юнга несущих слоев по направлению действия нагрузки.

Если несущие слои оболочки состоят только из продольных монослоев, изгибные жесткости и коэффициент редуccionции можно соответственно представить следующим образом:

$$D_{xx} = \frac{b_{11} h_f^3}{12} \left(\frac{\gamma}{2} \right)^3, \quad D_{yy} = \frac{b_{22} h_f^3}{12} \left(\frac{\gamma}{2} \right)^3, \quad D_{xy} = \frac{b_{12} h_f^3}{12} \left(\frac{\gamma}{2} \right)^3, \quad D_G = \frac{b_{33} h_f^3}{12} \left(\frac{\gamma}{2} \right)^3, \quad k_s = \frac{2}{\gamma}. \quad (13)$$

Здесь

$$b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad b_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad b_{33} = G_{12}. \quad (14)$$

Алгоритм проектирования

Алгоритм проектирования многостеночной конструкции состоит из следующих шагов:

1. Полагаем, что несущие слои и стенки оболочки состоят только из продольных монослоев. Данная схема укладки является, очевидно, наилучшей по условиям прочности.

2. Вычисляем полную условную толщину h_f многостеночной оболочки из условия прочности:

$$h_f = \frac{q_0}{\sigma_{-1b}}. \quad (15)$$

Здесь σ_{-1b} – предел прочности монослоя при сжатии в направлении волокон, q_0 – заданная сжимающая нагрузка.

3. Полагая $h = h_f$, находим критическую нагрузку для гладкой оболочки q_f , а затем проверяем выполнение условия устойчивости:

$$q_f \geq q_0.$$

Если это условие соблюдается, то процесс проектирования завершается. Введение подкрепляющих элементов в этом случае не позволяет снизить массу конструкции.

Если условие устойчивости не выполняется, вычисляем максимально возможную по условиям устойчивости толщину гладкой оболочки

$$h_{\max} = \sqrt{\frac{q_0 R \sqrt{3}}{\sqrt{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}}} . \quad (16)$$

Вычисляем теоретический коэффициент снижения массы

$$k_{ilm} = \frac{h_f}{h_{\max}} . \quad (17)$$

4. Полагая $H_s = H_{sm}$, решаем относительно γ уравнение общей устойчивости

$$q_f \sqrt{p(\gamma) \gamma} = q_0 . \quad (18)$$

5. По найденным значениям γ и h_f вычисляем толщины несущих слоев и основную «толщину» стенок.

6. Расстояние между стенками находим из условия сохранения местной устойчивости

$$t_s = \pi \sqrt{\frac{2k_s}{q_0} (\sqrt{D_{xx} D_{yy}} + D_{xy} + 2D_G)} . \quad (19)$$

Изгибные жесткости и коэффициент редукиции, входящие в правую часть последнего выражения, вычисляются по формулам (13).

7. По известной полной условной «толщине» многостеночной оболочки вычисляем массу конструкции

$$G_f = 2\pi R L \rho_0 h_f . \quad (20)$$

Здесь ρ_0 – плотность материала конструкции.

Существование и единственность решения

В приведенном выше алгоритме определяющим является уравнение (17), обеспечивающее выполнение условия общей формы потери устойчивости. Искомой величиной в этом уравнении является относительная толщина несущих слоев γ . Покажем, что уравнение (17) может иметь только один положительный корень на промежутке $[0; 1]$, то есть задача проектирования имеет единственное решение.

Уравнение общей устойчивости (17) запишем в виде

$$f(\gamma) = 0, \quad (21)$$

где

$$f(\gamma) = \gamma^4 + 3r_H \gamma^3 + 2r_H^2 \gamma^2 + r_H^2 \gamma - \left(\frac{q_0}{q_f} \right)^2 . \quad (22)$$

Таким образом, уравнение (21) представляет собой алгебраическое уравнение четвертой степени относительно γ . По теореме Декарта количество положительных корней многочлена с вещественными коэффициентами равно количеству перемен знаков в ряду его коэффициентов или на четное число меньше этого количества. В многочлене (22) имеет место только одна перемена знака, следовательно, уравнение может иметь только один положительный корень.

Корень общего уравнения устойчивости должен принадлежать промежутку $[0; 1]$. Исследуем знаки многочлена (21) на границах данного промежутка.

Если $\gamma = 0$, тогда

$$f(0) = -\left(\frac{q_0}{q_f}\right)^2 < 0.$$

Если $\gamma = 1$, тогда

$$f(1) = 1 + 3r_H + 3r_H^2 - \left(\frac{q_0}{q_f}\right)^2.$$

Уравнение (20) имеет корень на промежутке $[0;1]$, если выполняется условие

$$f(1) > 0.$$

Таким образом, получаем квадратное неравенство относительно r_H

$$3r_H^2 + 3r_H + 1 - r_f^2 > 0,$$

где

$$r_f = \frac{q_0}{q_f} > 1.$$

Решив неравенство, получим условие существования решения общего уравнения устойчивости на промежутке $[0;1]$:

$$r_H > r_{IH}, \quad (23)$$

где

$$r_{IH} = \frac{\sqrt{3(4r_f^2 - 1)} - 3}{6}. \quad (24)$$

Если условие (23) нарушается, необходима корректировка коэффициента снижения массы в сторону его увеличения. В этом случае на промежутке $[k_{lim}; 1]$ определяем наименьшее возможное значение коэффициента снижения массы, при котором уравнение имеет решение. Для нахождения данного значения можно воспользоваться любой известной процедурой одномерного анализа, например методом дихотомии.

Пример оценки эффективности подкрепляющих элементов

В качестве примера рассмотрим многостеночную цилиндрическую оболочку радиусом $R = 0.5$ м и длиной $L = 0.5$ м, находящуюся под действием сжимающей нагрузки $q_0 = 5 \cdot 10^6$ Н/м. Физические характеристики материала монослоев (углепластик КМУ-4Л): $\sigma_{1b} = 0.7$ ГПа, $E_1 = 140$ ГПа; $E_2 = 7$ ГПа; $\nu_{12} = 0.24$; $G_{12} = 2.25$ ГПа; $\rho_0 = 1450$ кг/м³. Оценим эффективность введения в конструкции оболочки подкрепляющих элементов, если максимальная высота стенки равна $H_{sm} = 0.015$ м.

В результате расчетов были получены следующие значения полной условной толщины и теоретического коэффициента снижения массы соответственно

$$h_f = 0.007 \text{ м и } k_{lim} = 0.6.$$

Таким образом, теоретически, введение подкрепляющих элементов позволяет снизить массу конструкции на 40%.

Величины r_H и r_{IH} , входящие в условие существования решения, соответственно равны

$$r_H = 2.1 \text{ и } r_{IH} = 1.04.$$

Таким образом,

$$r_H > r_{IH},$$

то есть решение задачи существует и единственно.

Подставив найденные значения величин k_{ilm} и h_f в уравнение общей устойчивости (21), получим

$$\gamma^4 + 6.3\gamma^3 + 8.82\gamma^2 + 4.41\gamma - 7.33 = 0.$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень

$$\gamma = 0.6.$$

Полученный результат означает, что масса подкрепляющих элементов должна составлять 40% от общей массы оптимальной многостеночной конструкции.

По найденным значениям величин h_f и γ определяем суммарную толщину несущих слоев, условную толщину стенок, расстояние между центрами тяжести стенок и массу конструкции соответственно:

$$h = 0.0043 \text{ м}; h_s = 0.0029 \text{ м}; t_s = 0.029 \text{ м}; G = 16.3 \text{ кг}.$$

Заключение

Существование и единственность решения – это одна из наименее изученных проблем в задачах проектирования подкрепленных композитных конструкций. Изложенный выше подход позволил решить данную проблему применительно к задачам проектирования многостеночных композитных оболочек, подверженных действию сжимающих нагрузок. В основу предлагаемого подхода положена идея сведения уравнения устойчивости к алгебраическому уравнению четвертой степени, что позволило обосновать единственность и сформулировать условия существования решения задачи.

Результаты численного анализа показали, что введение в конструкцию оболочки подкрепляющих элементов позволяет существенно снизить массу конструкции. Приведенные в работе результаты исследований могут найти применение в задачах расчета и оптимального проектирования композитных конструкций, используемых в ракетно-космической отрасли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лизин В.Т., Пяткин В.А. Проектирование тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1976. 408 с.
2. Маневич А.И. Устойчивость и оптимальное проектирование подкрепленных оболочек. Киев; Донецк: Вища школа, 1979. 152 с.
3. Кабанов В.В. Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1982. 256 с.
4. Карпов В.В. Уравнения в смешанной форме для ребристых оболочек общего вида и методика их решения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 2. С. 116–134. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.09.
5. Степанов К.А., Тимченко С.В. Аэродинамическое проектирование изолированного трехмерного крыла беспилотного летательного аппарата // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 54. С. 118–130. DOI: 10.17223/19988621/54/10.
6. Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.

7. Кусяков А.Ш. Проектирование композитных стрингерных пластин // Вестник Пермского университета: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 4(47). С. 44–48. DOI 10.17072/1993-0550-2019-4-44-48.
8. Почтман Ю.М., Тугай О.В. Подкрепленные многослойные цилиндрические оболочки минимального веса, сжатые в осевом направлении // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Вып. 1. Горький: Горьковский государственный университет, 1980. С. 153–156.
9. Разин А.Ф., Никитюк В.А., Халиманович В.И. Анализ сетчатых структур из композиционных материалов, применяемых в силовых конструкциях космических аппаратов // Конструкции из композиционных материалов. 2011. № 2. С. 3–7.
10. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
11. Васильев В.В., Лопатин А.В. Теория сетчатых и подкрепленных композитных оболочек // Механика конструкций из композиционных материалов: Сборник трудов IV симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С. 31–36.
12. Бокучаева П.Н., Евстафьев В.А., Бабук В.А. Численное исследование влияния количества и расположения продольных ребер на массу композитных сетчатых цилиндрических оболочек летательных аппаратов // Конструкции из композиционных материалов. 2018. № 3. С. 19–22.
13. Советова Ю.В., Сидоренко Ю.Н., Скрипняк В.А. Многоуровневый подход к исследованию влияния объемного соотношения компонентов волокнистого однонаправленного углепластика на его механические характеристики // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 2 (28). С. 77–89.
14. Burton W.S., Noor A.K. Assessment of computational models for sandwich panels and shells // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 1995. V. 124. Iss. 1-2. P. 125–151.
15. Кусяков А.Ш. Проектирование трехслойных пластин, находящихся в условиях цилиндрического изгиба // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвузовский сборник научных трудов / Перм. гос. нац. иссл. ун-т. 2019. Вып. 51. С. 6–12.
16. Сухинин С.Н. Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. М.: Физматлит, 2010. 248 с.
17. Болтаев П.И., Зорин В.А. Методы расчета подкрепленных оболочек из композиционных материалов // Конструкции из композиционных материалов. 2011. № 2. С. 8–20.
18. Смердов А.А., Шон Ф.Т. Расчетный анализ и оптимизация многостеночных композитных несущих оболочек // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2014. № 11. С. 90–98.
19. Смердов А.А., Шон Ф.Т. Анализ эффективности оптимальных композитных оболочек многостеночной и трехслойной схем для отсеков ракет-носителей и разгонных блоков // Конструкции из композиционных материалов. 2016. № 3. С. 58–65.
20. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

Статья поступила 26.11.2020

Kusyakov A.Sh. (2021) DESIGN OF MULTI-WALLED COMPOSITE SHELLS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 103–112

DOI 10.17223/19988621/74/11

Keywords: multi-walled shell, composite, stability, strength, design.

This paper investigates a problem of optimal design of a multi-walled cylindrical shell under axial compressive loads. The multi-walled shell consists of two load-carrying layers connected by a set of composite walls. The main structural element of the load-carrying layer is a monolayer comprising parallel-laid fibers that are interconnected by a polymer binder – a matrix. The wall represents a unidirectional composite made from the same material as the load-carrying layers.

Both strength and stability constraints are taken into account during mathematical modeling. The critical load corresponding to a general form of buckling is determined by a classical formula for an orthotropic shell with “reduced” stiffnesses. The critical load corresponding to a local form of buckling is calculated using the well-known formula for a smooth orthotropic plate. The target function is the mass of the structure.

The solution to the problem of optimal design of a multi-walled structure is proved to be unique. The conditions ensuring the existence of the problem solution are formulated. The example of evaluating the efficiency of reinforcing elements in a shell structure is given. The presented research results can find application in design problems for modern composite structures in rocket and space industry.

Alfred Sh. KUSYAKOV (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: kusyakov@psu.ru

REFERENCES

1. Lizin V.T., Pyatkin V.A. (1976) *Proektirovanie tonkostennykh konstruksiy* [Design of thin-walled structures]. Moscow: Mashinostroenie.
2. Manevich A.I. (1979) *Ustoychivost' i optimal'noe proektirovanie podkrepnyonnykh obolochek* [Stability and optimal design of reinforced shells]. Kyiv; Donetsk: Vishcha shkola.
3. Kabanov V.V. (1982) *Ustoychivost' neodnorodnykh tsilindricheskikh obolochek* [Stability of non-uniform cylindrical shells]. Moscow: Mashinostroenie.
4. Karpov V.V. (2019) Uravneniya v smeshannoy forme dlya rebristyykh obolochek obshchego vida i metodika ikh resheniya [Mixed form equations for ribbed shells of a general type and their solutions]. *Vestnik natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNPu Mechanics Bulletin*. 2. pp. 116–134. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.09.
5. Stepanov K.A., Timchenko S.V. (2018) Aerodinamicheskoe proektirovanie izolirovannogo trekhmernogo kryla bespilotnogo letatel'nogo apparata [Aerodynamic design for an isolated three-dimensional wing of an unmanned aerial vehicle]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 54. pp. 118–130. DOI: 10.17223/19988621/54/10.
6. Banichuk N.V., Kobelev V.V., Rikards R.B. (1988) *Optimizatsiya elementov konstruksiy iz kompozitsionnykh materialov* [Optimization of composite structural elements]. Moscow: Mashinostroenie.
7. Kusyakov A.Sh. (2019) Proektirovanie kompozitnykh stringernykh plastin [Design of composite stringer plates]. *Vestnik Permskogo universiteta: Matematika. Mekhanika. Informatika*. 4(47). pp. 44–48. DOI: 10.17072/1993–0550–2019–4–44–48.
8. Pochtman Yu.M., Tugay O.V. (1980) Podkrepnyonnye mnogosloynnye tsilindricheskie obolochki minimal'nogo vesa, szhatye v osovom napravlenii [Reinforced multilayer cylindrical shells of minimum weight under axial compression]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti*. 1. pp. 153–156.
9. Razin A.F., Nikityuk V.A., Khalimanovich V.I. (2011) Analiz setchatykh struktur iz kompozitsionnykh materialov, primenyaemykh v silovykh konstruksiyakh kosmicheskikh apparatov [Analysis of lattice composite structures in application to load-carrying elements of space vehicles]. *Konstruksii iz kompozitsionnykh materialov – Composite Materials Constructions*. 2. pp. 3–7.
10. Vasil'ev V.V. (1988) *Mekhanika konstruksiy iz kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite structures]. Moscow: Mashinostroenie.
11. Vasil'ev V.V., Lopatin A.V. (1984) Teoriya setchatykh i podkrepnyonnykh kompozitnykh obolochek [Theory of lattice and reinforced composite shells]. *Proceedings of the Fourth Symposium «Mechanics of Composite Structures»*. Novosibirsk: Nauka. pp. 31–36.
12. Bokuchaeva P.N., Evstaf'ev V.A., Babuk V.A. (2018) Chislennoe issledovanie vliyaniya kolichestva i raspolozheniya prodol'nykh ryober na massu kompozitnykh setchatykh tsilindricheskikh obolochek letatel'nykh apparatov [Numerical analysis of the influence of the lon-

- gitudinal ribs quantity and location on aircraft composite lattice cylindrical shells mass]. *Konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov – Composite Materials Constructions*. 3. pp. 19–22.
13. Sovetova Yu.V., Sidorenko Yu.N., Skripnyak V.A. (2014) Mnogourovnevyy podkhod k issledovaniyu vliyaniya ob'yomnogo sootnosheniya komponentov odnapravlennoy voloknistoy armirovannoy plastiki na ego mekhanicheskiye kharakteristiki [The multilevel approach to studying the influence of the volumetric ratio in components of unidirectional carbon fiber composite on its mechanical properties]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(28). pp. 77–89.
 14. Burton W.S., Noor A.K. (1995) Assessment of computational models for sandwich panels and shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 124(1-2). pp. 125–151. DOI: 10.1016/0045-7825(94)00750-H.
 15. Kusiakov A.Sh. (2019) Proektirovaniye trekhslonnykh plastin, nakhodyashchikhsya v usloviyakh tsilindricheskogo izгиба [Design of three-layer plates under cylindrical bending]. *Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelineynye dinamicheskiye sistemy: mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh trudov*. 51. pp. 6–12.
 16. Sukhinin S.N. (2010) *Prikladnye zadachi ustoychivosti mnogoslonykh kompozitnykh obolochek* [Applied problems of stability of multilayer composite shells]. Moscow: Fizmatlit.
 17. Boltaev P.I., Zorin V.A. (2011) Metody rascheta podkrepyonnykh obolochek iz kompozitsionnykh materialov [Methods of analysis of stiffened shells from composite materials]. *Konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov – Composite Materials Constructions*. 2. pp. 8–20.
 18. Smerdov A.A., Shon F.T. (2014) Raschetnyy analiz i optimizatsiya mnogostenochnykh kompozitnykh nesushchikh obolochek [Design analysis and optimization of composite multiwalled load-bearing shells] *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie – Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*. 1. pp. 90–98. DOI: 10.18698/0536-1044-2014-11-90-98.
 19. Smerdov A.A., Shon F.T. (2016) Analiz effektivnosti optimal'nykh kompozitnykh obolochek mnogostenochnoy i trekhslonnoy skhem dlya otsekov raket-nositeley i razgonnykh blokov [Comparative analysis of optimal composite multi-walled and sandwich shells for modules of launch vehicles and upper stages]. *Konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov – Composite Materials Constructions*. 3. pp. 58–65.
 20. Vol'mir A.S. (1967) *Ustoychivost' deformiruemykh sistem* [Stability of deformable systems]. Moscow: Nauka.

Received: November 26, 2020

УДК 532.556.2

DOI 10.17223/19988621/74/12

Д.А. Мамазова, К.Е. Рыльцева, Г.Р. Шрагер

**СТРУКТУРА ПОТОКА И КИНЕМАТИКА
ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ
В ТРУБЕ С ВНЕЗАПНЫМ РАСШИРЕНИЕМ¹**

Решается задача о движении неньютоновской жидкости в цилиндрической трубе с внезапным изменением поперечного сечения в условиях ламинарного установившегося течения. Реологические свойства жидкой среды описываются уравнением Оствальда – де Ваала для степенной жидкости. Решение осуществляется с использованием численных методов. Стационарное решение получено методом установления. Решение дискретных уравнений производится конечно-разностным методом на основе схемы переменных направлений. Метод прогонки используется для вычисления значений искомых функций. Проведено исследование для степенной жидкости, в ходе которого были выполнены параметрические расчеты при варьировании числа Рейнольдса, степени расширения трубы и показателя нелинейности жидкости, построены зависимости местного гидравлического сопротивления от определяющих параметров задачи.

Ключевые слова: модель Оствальда – де Ваала, неньютоновская жидкость, осесимметричное течение, внезапное расширение, циркуляционная зона, число Рейнольдса, гидравлическое сопротивление.

Моделирование движения жидкости в трубах переменного радиуса важно для изучения особенностей транспортировки жидкой среды и обработки жидких материалов, таких как пасты, краски, полимерные расплавы, нефтепродукты, в технических приложениях при определенных условиях [1–24]. Наличие в трубах внезапно расширяющихся элементов позволяет контролировать течение, планировать нагрузки на трубопровод и распределение давления.

Течение ньютоновской жидкости в трубах с внезапным расширением в различных условиях при варьировании соотношений радиусов составляющих трубы широко изучалось как численно [1–3], так и экспериментально [4, 5]. Однако моделирование многих технологических процессов сопровождается необходимостью изучения течения неньютоновских жидкостей.

В работах [6–7] рассматривается движение жидкости, подчиняющейся степенному закону, в трубах с переменной площадью сечения. Показано, что подобные течения состоят из следующих структурных частей: областей, находящихся в непосредственной близости к входному и выходному сечению, – зон одномерного течения, областей, размещенных вверх и вниз по потоку от скачка сечения, – зон двумерного течения и области, для которой присуще циркулирующее течение в окрестности внутреннего угла, – циркуляционной зоны. Показано изменение длин указанных зон в зависимости от числа Рейнольдса.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-19-00021-П).

Среди исследований, направленных на изучение движения жидкости в трубах с расширением, большое внимание уделяется вопросам, посвященным определению длины циркуляционной зоны [8, 10] и изучению условий, при которых происходило нарушение симметрии течения [9]. В [10] была получена следующая картина течения в окрестности расширения трубы: поток разделяется в той части, где происходит резкое расширение, основное течение реализуется в направлении оси трубы и циркуляционная зона формируется в окрестности внутреннего угла. Расстояние от скачка сечения до места, где основной поток присоединяется к твердой границе, определяет длину циркуляционной зоны.

Наличие расширения в трубах способствует перемешиванию потока за счет образования циркуляционной зоны после скачка сечения. Так, к примеру, в [11] использовали последовательность внезапных расширений для улучшения перемешивания реагентов в реакторе, предназначенном для удаления кристаллического фосфора из сточных вод.

При исследовании течений неньютоновской жидкости для описания реологических свойств среды применяются различные модели [12]. В качестве примера в области гемодинамики можно привести работу [13], в которой для описания реологии крови используются три реологические модели: модель Кэссона, модель Оствальда – де Ваала и модель Кэмада. В приложении к пищевой промышленности, в [14] реологические свойства водного раствора кукурузного крахмала в процессе течения через плоский расширяющийся канал описываются с помощью степенного закона и квадратичной модели.

В [15] рассматривается изотермическое течение степенной жидкости в трубе с симметричным внезапным расширением 1:2 для числа Рейнольдса, равного 10. Показано, что длина циркуляционной зоны зависит от показателя нелинейности.

Степень расширения трубы также используется в качестве определяющего параметра для характеристик течения. В работах [16–19] представлены результаты, демонстрирующие рост длины циркуляционной зоны с увеличением степени расширения, в частности, в [19] численно и экспериментально исследовали асимметричное установившееся движение жидкой степенной среды в плоском случае. В [20] показано, как меняются изолинии функции тока для течения жидкости, подчиняющейся степенному закону, в плоской трубе при варьировании числа Рейнольдса от 40 до 130. Для различных степеней нелинейности жидкости определены значения числа Рейнольдса, приводящие к нарушению симметрии потока.

В результате проведения исследований движения жидкости в трубе с внезапным расширением определены местные потери давления, которые являются следствием резкого изменения геометрии области течения. Обзор работы [21] включает в себя список литературы, в которой представлена информация о результатах расчетов местных гидравлических потерь давления для труб с разными степенями расширения при исследовании течения неньютоновской жидкости.

В данной работе исследуются характеристики структуры потока степенной жидкости в трубе с расширением и местное гидравлическое сопротивление для различных чисел Рейнольдса, степени расширения и показателя нелинейности жидкости.

Постановка задачи

Рассматривается движение неньютоновской жидкости с постоянной плотностью в трубе с внезапным изменением поперечного сечения в условиях ламинарного установившегося течения. Решение задачи выполняется в рамках осесимметричной постановки. На рис. 1 продемонстрирована область движения жидкости в цилиндрической системе координат (z, r) .

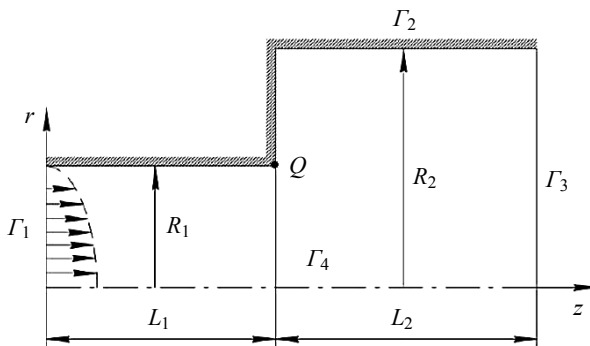


Рис. 1. Схема потока жидкости

Fig. 1. Fluid flow diagram

Система уравнений, описывающая течение жидкости, состоит из уравнений движения и уравнения неразрывности, и в физических переменных записывается в виде [12]

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\Delta v - \frac{v}{r^2} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta u + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0.$$

Эта система переписывается в переменных функция тока – вихрь и в безразмерной форме принимает вид [22]

$$\frac{\partial(u\omega)}{\partial z} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial r} = \frac{2^n \cdot B}{\text{Re}} \left(\Delta \omega - \frac{\omega}{r^2} \right) + \frac{2^n \cdot S}{\text{Re}}, \quad (1)$$

$$\Delta \psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r\omega. \quad (2)$$

Здесь ω – вихрь, а ψ – функция тока

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -vr, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = ur,$$

$$S = 2 \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + 2 \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial z} + 2 \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\omega}{r} \frac{\partial B}{\partial r}.$$

Уравнение (1) содержит безразмерный параметр – число Рейнольдса (Re), которое вычисляется как

$$\text{Re} = \frac{\rho U^{2-n} (2R_1)^n}{k}.$$

Реология жидкости описывается степенной моделью Оствальда – де Ваала. При использовании данной степенной модели формула для безразмерной эффективной вязкости имеет вид

$$B = A^{n-1}, \quad (3)$$

$$A = \sqrt{2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2},$$

где n – показатель нелинейного поведения жидкости; k – показатель консистенции.

В системе уравнений используются следующие обозначения: (u, v) – аксиальная и радиальная компоненты вектора скорости; p – давление; ρ – плотность среды; μ – эффективная вязкость; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа. Для обезразмеривания скорости, длины, вязкости используются следующие величины: U – среднерасходная скорость в трубе с радиусом R_1 ; R_1 – радиус узкой части трубы; комплекс $k(U/R_1)^{n-1}$ соответственно.

На входе в трубу Γ_1 при постоянстве расхода профиль аксиальной скорости жидкости соответствует условиям стационарного течения для выбранной реологии. На твердой стенке Γ_2 реализуются условия прилипания. На выходе из трубы Γ_3 используются мягкие граничные условия, которые предполагают формирование одномерного установившегося течения на достаточном удалении от скачка сечения. На оси симметрии Γ_4 применяются условия симметрии. Степень расширения можно определить с помощью отношения радиусов составляющих частей трубы $\beta = R_2/R_1$. Граничные условия математически записываются следующим образом:

$$\Gamma_1 : u = f_1(r), \quad v = 0, \quad \psi = \int_0^r u r dr, \quad \omega = -\frac{\partial u}{\partial r}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad z = 0; \quad (4)$$

$$\Gamma_2 : u = 0, \quad v = 0, \quad \psi = \text{const}, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad r = 1, \quad 0 < z \leq L_1; \quad (5)$$

$$\psi = \text{const}, \quad \omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad 1 < r \leq \beta, \quad z = L_1; \quad (6)$$

$$\psi = \text{const}, \quad \omega = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad r = \beta, \quad L_1 < z < L_1 + L_2; \quad (7)$$

$$\Gamma_3 : \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq r \leq \beta, \quad z = L_1 + L_2; \quad (8)$$

$$\Gamma_4 : \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad v = 0, \quad \psi = 0, \quad \omega = 0, \quad r = 0, \quad 0 < z \leq L_1 + L_2. \quad (9)$$

Метод решения

Рассматриваемая задача решается с помощью численного метода. Задача решается на основе метода установления, согласно которому основные уравнения дополняются фиктивными производными функции тока и вихря по времени. Этот метод обеспечивает получение установившегося решения. В уравнениях, описывающих течение в трубе, производится соответствующая замена производных их конечно-разностными аналогами на основе схемы переменных направлений. Для вычисления значений искомых функций используется метод продольно-поперечной прогонки.

В случае, когда $n < 1$ (псевдопластичная жидкость), в реологической модели Оствальда – де Ваала на оси трубы имеется особенность «бесконечной» эффективной вязкости. В связи с этим проводится регуляризация выражения для эффективной вязкости, что подразумевает введение малого параметра регуляризации (ϵ). В результате формула (3) принимает вид

$$B = (A + \epsilon)^{n-1}.$$

Модификация позволяет перейти к исходному выражению (3) при $\epsilon \rightarrow 0$. Параметр регуляризации в ходе численного эксперимента выбирается таким образом, чтобы картина течения принимала минимальные искажения относительно стационарного течения в трубе. Для верификации численного алгоритма выполняется проверка аппроксимационной сходимости посредством проведения расчетов на последовательности вложенных сеток.

На рис. 2 проиллюстрированы распределения u в скачке сечения и на выходе при варьировании шага квадратной сетки (h). Относительная ошибка в значения u на оси симметрии в выходном сечении трубы ($u_{\text{вых}}$) получена путем сравнения с соответствующим аналитическим значением скорости течения, которое определяется по формуле

$$u_{\text{ан}} = \frac{3n+1}{(n+1)\beta^2}.$$

Относительная ошибка вычисляется с помощью формулы

$$E_u = |(u_{\text{ан}} - u_{\text{вых}})| / u_{\text{ан}} \cdot 100\%.$$

Результаты на рис. 2 и в табл. 2 при $\epsilon = 0.0001$ подтверждают факт аппроксимационной сходимости разработанного алгоритма. В табл. 1 для случая $Re = 1$, $\beta = 2$, $n = 0.6$ при $h = 0.025$ приведены значения относительной ошибки $u_{\text{вых}}$ для степенной жидкости при варьировании параметра регуляризации. С уменьшением ϵ и h рассчитанные значения максимальной скорости в выходном сечении приближаются к аналитическому значению. На основе полученных данных для параметрических расчетов выбраны следующие значения: $\epsilon = 0.0001$; $h = 0.025$.

Для течения неньютоновской жидкости в трубе с внезапным расширением можно выделить два вида потерь полного давления: потери на трение $\Delta P_{\text{тр}}$ и потери на местное сопротивление $\Delta P_{\text{м}}$. Первые формируются во всей области движения жидкости и их возникновение связано с действием вязких сил в потоке жидкости – потери на трение. Последние наблюдаются вблизи расширения, их появление объясняется необходимостью перестройки потока, резким изменением значения скорости и образованием зоны циркуляции – потери на местное сопротивление.

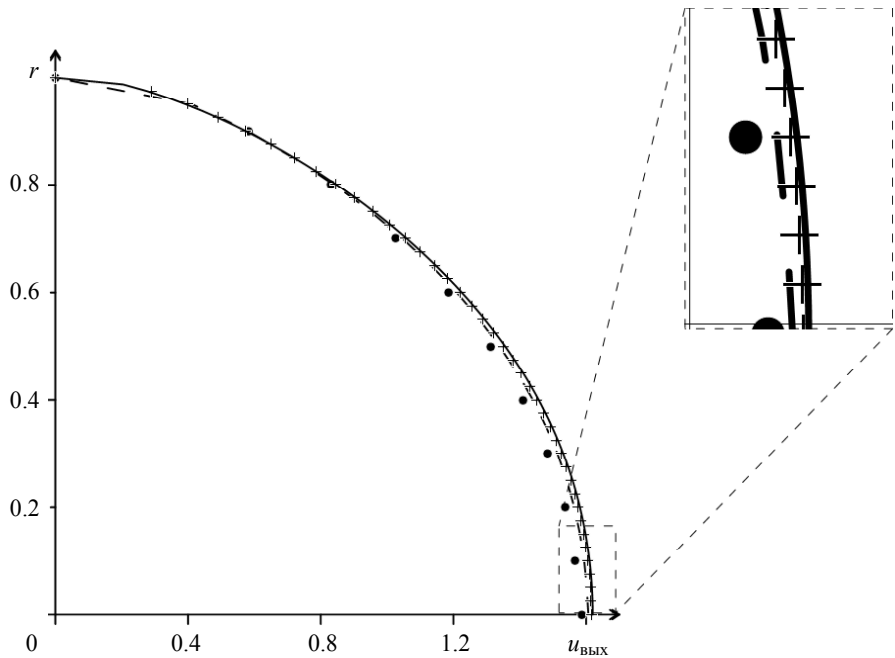


Рис. 2. Распределение u в скачке сечения: $\beta = 2, Re = 1, n = 0.6, \varepsilon = 0.0001$;
●●● – $h = 0.1$, ---- $h = 0.05$, +++ – $h = 0.025$, ——— – $h = 0.0125$
Fig. 2. Distribution of u at the expansion plane: $\beta = 2, Re = 1, n = 0.6, \varepsilon = 0.0001$;
●●● – $h = 0.1$, ---- $h = 0.05$, +++ – $h = 0.025$, and ——— – $h = 0.0125$

Таблица 1

ε	$E_u, \%$
0.1	5.215
0.05	3.380
0.01	0.977
0.005	0.540
0.001	0.082
0.0005	0.075
0.0001	0.020

Таблица 2

h	$E_u, \%$
0.1	0.087
0.05	0.032
0.025	0.020
0.0125	0.014

Расчет коэффициента местного сопротивления осуществляется по формуле [23]

$$C_m = \frac{\Delta p_m}{0.5 \rho U^2} + \alpha \left(1 - \frac{1}{\beta^4} \right), \tag{10}$$

где Δp_m – перепад давления на переходном участке течения;

$$\alpha = \frac{3(3n+1)^2}{(2n+1)(5n+3)}$$

– коэффициент, корректирующий кинетическую энергию [24].

Результаты

Параметрические расчеты проводились для следующих диапазонов изменения основных параметров: $0.1 \leq Re \leq 100$, $1.25 \leq \beta \leq 4$, $0.5 \leq n \leq 1.5$. На рис. 3 представлены типичные картины течения псевдопластичной и дилатантной жидкостей в трубе с расширением. Можно отметить качественное совпадение структуры потока для двух классов жидкостей – формирование зон одномерного течения на достаточном удалении от скачка сечения и зон двумерного течения в окрестности скачка вниз и вверх по потоку. В области внутреннего угла образуется циркуляционная зона, размер которой находится в зависимости от значения n : с увеличением этого параметра наблюдается рост циркулярной зоны.

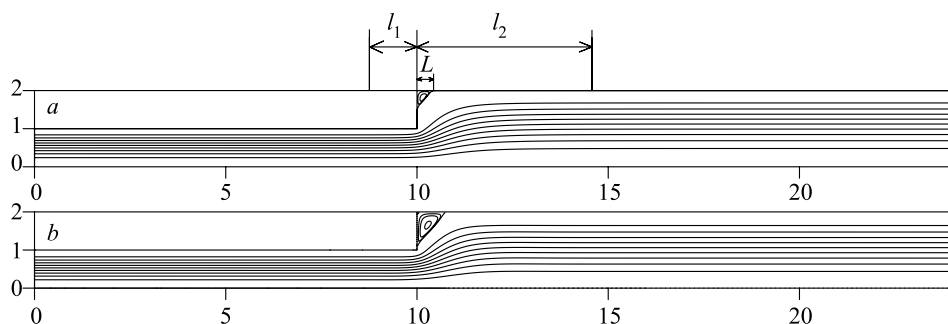


Рис. 3. Распределения линий тока вдоль трубы:

(a) $Re = 1$, $\beta = 2$, $n = 0.6$, (b) $Re = 1$, $\beta = 2$, $n = 1.4$

Fig. 3. Streamline distributions along the pipe:

(a) $Re = 1$, $\beta = 2$, $n = 0.6$; and (b) $Re = 1$, $\beta = 2$, $n = 1.4$

Вследствие проведенных численных экспериментов получены распределения линий тока, на основе которых вводятся безразмерные геометрические характеристики структуры потока для количественного анализа движения: длина циркуляционной зоны (L) и длины областей, в которых помимо аксиальной скорости присутствует радиальная составляющая – длины зон двумерного течения до и после расширения (l_1 и l_2 соответственно). Длины l_1 и l_2 определяются расстояниями от сечения, где происходит резкое расширение трубы, до сечений, в которых u на оси трубы отличается на 1% от её величины в области одномерного течения в составляющих частях трубы.

На рис. 4 показано развитие профиля аксиальной скорости в разных сечениях трубы. На рис. 5 представлены результаты для профилей u , которые формируются в скачке сечения, при изменении числа Re и n .

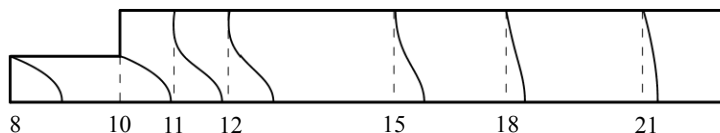


Рис. 4. Развитие профиля скорости в разных сечениях трубы

для $n = 0.8$, $\beta = 2$, $Re = 50$

Fig. 4. Development of the velocity profile in different pipe sections

for $n = 0.8$, $\beta = 2$, $Re = 50$

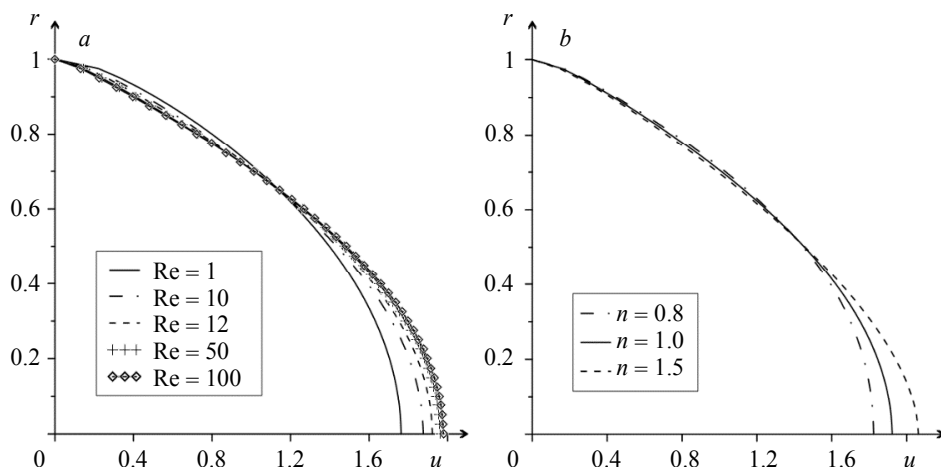


Рис. 5. Распределение u в скачке сечения при изменении:

(a) Re для $\beta = 2$, $n = 1.0$; (b) n для $\beta = 2$, $Re = 20$

Fig. 5. Distribution of u at the expansion plane with varying:

(a) Re for $\beta = 2$, $n = 1.0$; (b) n for $\beta = 2$, $Re = 20$

Изменения геометрических характеристик структуры потока от Re , β , n для жидкости, подчиняющейся степенному закону Оствальда – де Ваале, показаны на рис. 6. В случае $n = 1$ зависимости от параметров представлены на рис. 7. В результате анализа геометрических характеристик структуры потока получены следующие зависимости от числа Re , β и n :

- при возрастании числа Re замечен рост l_2 и L , так как в этом случае инерционные силы преобладают над вязкими, что влечет к увеличению участка установления потока, тогда как длина зоны двумерного течения перед скачком уменьшается;

- увеличение β способствует росту l_2 и L , а l_1 практически не меняется, это связано с тем, что при изменении площадей поперечных сечений трубы характер течения в узкой части остается практически неизменным;

- с ростом n наблюдается уменьшение l_1 и l_2 , при этом L увеличивается.

Выполненные параметрические расчеты показали, что увеличение β способствует росту местного сопротивления, связанного с увеличением зоны циркуляционного движения; с возрастанием показателя нелинейности также наблюдается рост местного сопротивления, с увеличением параметра Re местное гидравлическое сопротивление уменьшается (рис. 8). Результаты расчетов для $n = 1$ представлены на рис. 9.

В табл. 3 приведено сравнение результатов расчетов C_m , которые были получены в данной работе и в работе [21] для жидкости с показателем нелинейности $n = 0.8$, степени расширения трубы $\beta = 2.6$ при изменении числа Рейнольдса. В рассматриваемом диапазоне изменения числа Re сравнение результатов показывает количественное согласование.

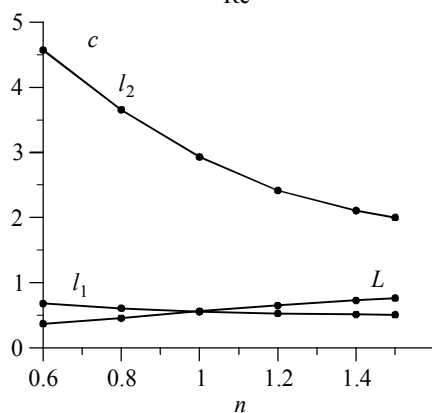
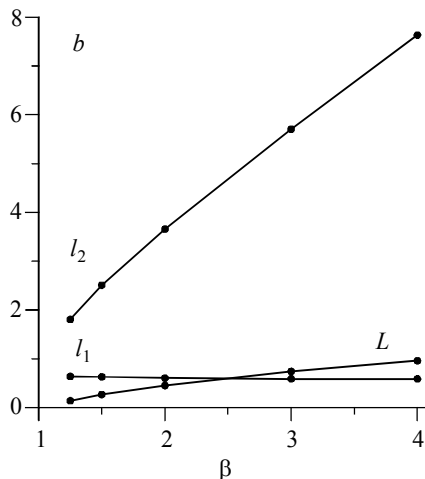
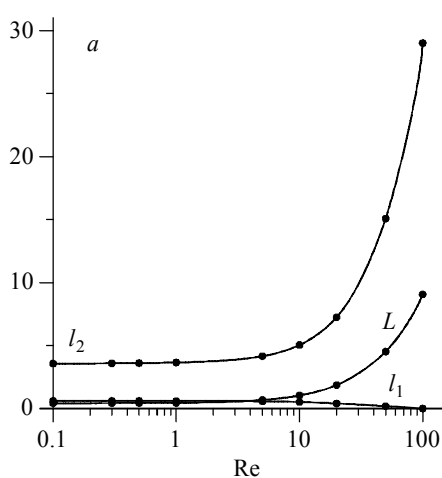


Рис. 6. Изменения характеристик структуры потока от параметров Re , β , n : (a) $n=0.8$, $\beta=2$, (b) $n=0.8$, $Re=1$, (c) $\beta=2$, $Re=1$

Fig. 6. Variation in flow structure characteristics with parameters Re , β , and n : (a) $n=0.8$, $\beta=2$, (b) $n=0.8$, $Re=1$, and (c) $\beta=2$, $Re=1$

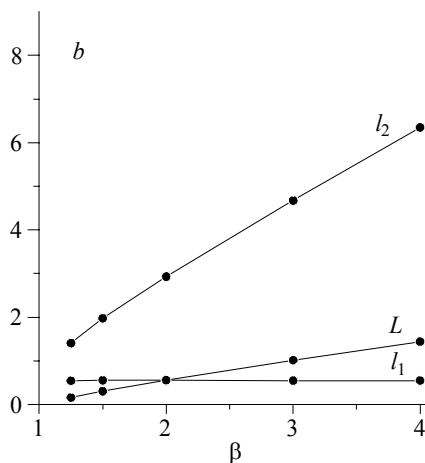
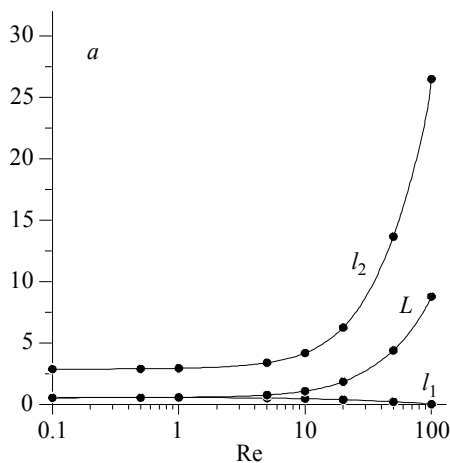


Рис. 7. Изменения характеристик структуры потока от параметров Re и β для $n=1$: (a) $\beta=2$, (b) $Re=1$

Fig. 7. Variation in flow structure characteristics with parameters Re and β for $n=1$: (a) $\beta=2$ and (b) $Re=1$

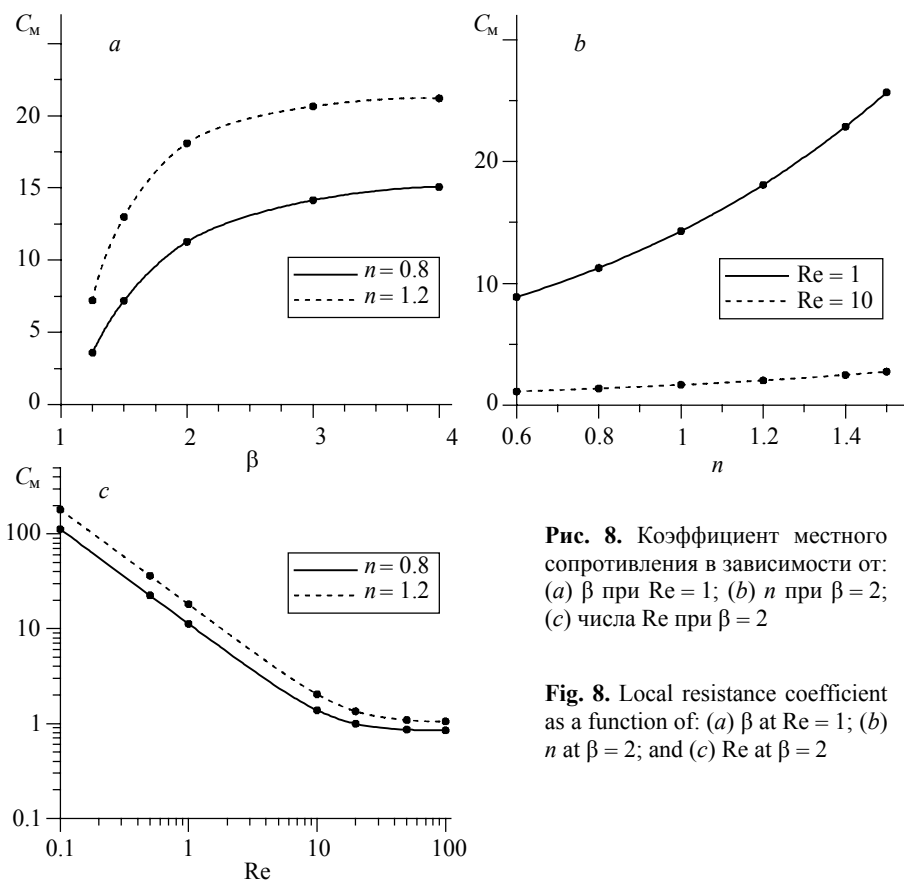


Рис. 8. Коэффициент местного сопротивления в зависимости от: (a) β при $Re = 1$; (b) n при $\beta = 2$; (c) числа Re при $\beta = 2$

Fig. 8. Local resistance coefficient as a function of: (a) β at $Re = 1$; (b) n at $\beta = 2$; and (c) Re at $\beta = 2$

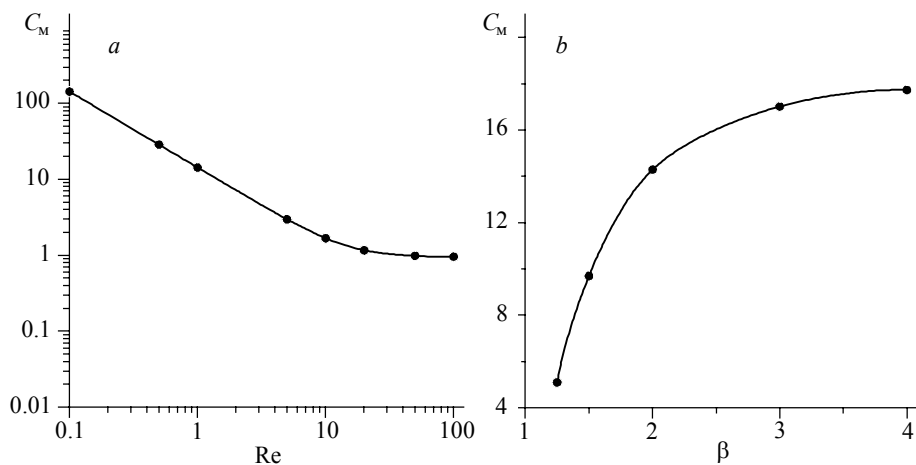


Рис. 9. Коэффициент местного сопротивления для $n = 1$ в зависимости от (a) Re при $\beta = 2$; (b) β при $Re = 1$

Fig. 9. Local resistance coefficient as a function of (a) Re at $\beta = 2$ and (b) β at $Re = 1$ for $n = 1$

Таблица 3

Re	C_m в [21]	C_m
0.2047	65.72	65.31
0.6832	19.76	19.60
6.8319	2.191	2.189
20.4992	1.275	1.273
34.1630	1.201	1.196

Заключение

Численно исследовано движение неньютоновской жидкости в трубе с внезапным изменением поперечного сечения в условиях ламинарного установившегося течения. Сформулирована математическая постановка задачи о движении жидкости. На основе численных экспериментов можно сделать следующие выводы: течение для псевдопластичной и дилатантной жидкостей состоит из характерных зон одномерного и двумерного движения. Построены зависимости длин зон двумерного течения в составляющих частях трубы от числа Re , показывающие, что с увеличением данного параметра наблюдается рост длины зоны двумерного течения после скачка сечения, а длина зоны двумерного течения до скачка сечения уменьшается. Получены графики изменения структурных частей потока от степени расширения и показателя нелинейности жидкости. Отмечено, что для степенной жидкости в окрестности внутреннего угла в рамках рассматриваемого диапазона $0.1 \leq Re \leq 100$, $1.25 \leq \beta \leq 4$, $0.5 \leq n \leq 1.5$ наблюдается образование циркуляционной зоны, которая увеличивается в размере с возрастанием Re и степени расширения, а с уменьшением степени нелинейности n она уменьшается.

Проведены вычислительные эксперименты, в результате которых получены картины течений и изменения геометрических характеристик структуры потока и местных потерь давления в зависимости от параметров задачи. Критериальные зависимости, полученные в данной работе, показали, что с ростом таких параметров, как степень расширения трубы, показатель нелинейности жидкости, местные потери давления увеличиваются, а с ростом числа Рейнольдса, наоборот, уменьшаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Habib M.A., Whitelaw J.H.* The calculation of turbulent flow in wide-angle diffusers // Numerical Heat Transfer. 1982. V. 5. No. 2. P. 145–164.
2. *Macagno E.O., Hung T.K.* Computational and experimental study of a captive annular eddy // Journal of Fluid Mechanics. 1967. V. 28. No. 1. P. 43–63.
3. *Oliveira P.J., Pinho F.T.* Pressure drop coefficient of laminar Newtonian flow in axisymmetric sudden expansions // International Journal of Heat and Fluid Flow. 1997. V. 18. No. 5. P. 518–529.
4. *Stieglmeier M., Tropea C., Weiser N., Nitsche W.* Experimental investigation of the flow through axisymmetric expansions // Journal of Fluids Engineering. 1989. V. 111. No. 4. P. 464–471.
5. *Back L.H., Roschke E.J.* Shear-layer flow regimes and wave instabilities and reattachment lengths downstream of an abrupt circular channel expansion // Journal of Applied Mechanics. 1972. V. 39. No. 3. 677–681.
6. *Борзенко Е.И., Рылъцева К.Е., Шрагер Г.Р.* Численное исследование характеристик течения неньютоновской жидкости в трубе с внезапным сужением // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 58. С. 56–70.

7. Pienaar V.G. Viscous Flow Through Sudden Contractions. Dissertation. Cape Peninsula University of Technology. 2004.
8. Hammad K.J., Vradis G.C., Ötügen M.V. Laminar flow of a Herschel-Bulkley fluid over an axisymmetric sudden expansion // *Journal of Fluids Engineering*. 2001. V. 123. No. 3. P. 588–594.
9. Hawa T., Rusak Z. Viscous flow in a slightly asymmetric channel with a sudden expansion // *Physics of Fluids*. 2000. V. 12. No. 9. P. 2257–2267.
10. Hammad K.J. Suddenly expanding recirculating and non-recirculating viscoplastic non-Newtonian flows // *Journal of Visualization*. 2015. V. 18. No. 4. P. 655–667.
11. Forrest A.L., Fattah K.P., Mavinic D.S., Koch F.A. Optimizing struvite production for phosphate recovery in WWTP // *Journal of Environmental Engineering*. 2008. V. 134. No. 5. P. 395–402.
12. Шульман З.П. Конвективный теплоперенос реологически сложных жидкостей. М.: Энергия, 1975. 352 с.
13. Neofytou P., Drikakis D. Non-Newtonian flow instability in a channel with a sudden expansion // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2003. V. 111. No. 2–3. P. 127–150.
14. Ternik P., Marn J., & Žunič Z. Non-Newtonian fluid flow through a planar symmetric expansion: Shear-thickening fluids // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2006. V. 135. No. 2–3. P. 136–148.
15. Bell B.C., Surana K.S. p-Version least squares finite element formulation for two-dimensional incompressible Newtonian and non-Newtonian non-isothermal fluid flow // *Computers & Structures*. 1995. V. 54. No. 1. P. 83–96.
16. Scott P.S., Mirza F.A., Vlachopoulos J. A finite element analysis of laminar flows through planar and axisymmetric abrupt expansions // *Computers & Fluids*. 1986. V. 14. No. 4. P. 423–432.
17. Badekas D., Knight D.D. Eddy correlations for laminar axisymmetric sudden expansion flows // *Journal of Fluids Engineering*. 1992. V. 114. No. 1. P. 119121.
18. Dağtekin İ., Ünsal M. Numerical analysis of axisymmetric and planar sudden expansion flows for laminar regime // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2011. V. 65. No. 9. P. 1133–1144.
19. Mishra S., Jayaraman K. Asymmetric flows in planar symmetric channels with large expansion ratio // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2002. V. 38. No. 10. P. 945–962.
20. Manica R., De Bortoli A. Simulation of sudden expansion flows for power-law fluids // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2004. V. 121. No. 1. P. 35–40.
21. Pinho F.T., Oliveira P.J., Miranda J.P. Pressure losses in the laminar flow of shear-thinning power-law fluids across a sudden axisymmetric expansion // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2003. V. 24. No. 5. P. 747–761.
22. Рыльцева К.Е. Неизотермические течения реологически сложных жидкостей в каналах переменного сечения: диссертация. Томск: Национальный исследовательский Томский государственный университет, 2020. 103 с.
23. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / под ред. М.О. Штейнберга. 3-е изд. М.: Машиностроение, 1992. 672 с.
24. Tiu C., Boger D.V., Halmos A.L. Generalized method for predicting loss coefficients in entrance region flows for inelastic fluids // *The Chemical Engineering Journal*. 1972. V. 4. Iss. 2. P. 113–117.

Статья поступила 15.09.2021 г.

Mamazova D.A., Ryltseva K.E., Shrager G.R. (2021) THE STRUCTURE AND KINEMATICS OF A NON-NEWTONIAN FLUID FLOW IN A PIPE WITH A SUDDEN EXPANSION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 113–126

DOI 10.17223/19988621/74/12

Keywords: Ostwald-de Waele model, non-Newtonian fluid, axisymmetric flow, sudden expansion, recirculation zone, Reynolds number, hydraulic resistance.

This paper deals with a problem of a laminar steady-state flow of a non-Newtonian incompressible fluid in a pipe with a sudden expansion. The flow is described by a system of dimensionless equations in terms of stream function and vorticity in a cylindrical coordinate system: an equation of vorticity transfer and Poisson's equation for stream function. Rheological properties of the medium are defined by the Ostwald-de Waele model. The problem is solved numerically. The false transient method is applied to obtain a steady-state solution to the problem. The equations are discretized in accordance with the finite-difference method based on the alternating direction scheme. The final system of equations is solved by the tridiagonal matrix algorithm.

Flow structures of Newtonian, pseudoplastic, and dilatant fluids are found to include two-dimensional flow zones before and after expansion plane. A recirculation region occurs in the inner corner. To assess the effect of the Reynolds number, expansion ratio, and power-law index on the lengths of the two-dimensional flow zones and recirculation region, the graphs are plotted over a wide range of variation in the parameters. Local pressure losses are presented as functions of the governing parameters of the problem.

Financial support. The research is implemented at the expenses of the Russian Science Foundation (project No. 18-19-00021-II).

Dilara A. Mamazova (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mamazova.dilara@mail.ru

Kira E. Ryltseva (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kiraworkst@gmail.com

Gennady R. Shrager (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shg@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Habib M.A., Whitelaw J.H. (1982) The calculation of turbulent flow in wide-angle/diffusers. *Numerical Heat Transfer*. 5(2). pp. 145–164. DOI: 10.1080/10407788208913440.
2. Macagno E.O., Hung T.K. (1967) Computational and experimental study of a captive annular eddy. *Journal of Fluid Mechanics*. 28(1). pp. 43–63. DOI: 10.1017/s0022112067001892.
3. Oliveira P.J., Pinho F.T. (1997) Pressure drop coefficient of laminar Newtonian flow in axisymmetric sudden expansions. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 18(5). pp. 518–529. DOI: 10.1016/s0142-727x(97)80010-0.
4. Stieglmeier M., Tropea C., Weiser N., Nitsche W. (1989) Experimental investigation of the flow through axisymmetric expansions. *Journal of Fluids Engineering*. 111(4). pp. 464–471. DOI: 10.1115/1.3243669.
5. Back L.H., Roschke E.J. (1972) Shear-layer flow regimes and wave instabilities and reattachment lengths downstream of an abrupt circular channel expansion. *Journal of Applied Mechanics*. 39(3). pp. 677–681. DOI: 10.1115/1.3422772.
6. Borzenko E.I., Ryltseva K.E., Shrager G.R. (2019) Chislennoe issledovanie kharakteristik techeniya nen'yutonovskoy zhidkosti v trube s vnezapnym suzheniem [Numerical investigation of non-Newtonian fluid flow through a pipe sudden contraction]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 58. pp. 56–70. DOI: 10.17223/19988621/58/5.

7. Pienaar V.G. (2004) *Viscous Flow Through Sudden Contractions*. Dissertation. Cape Peninsula University of Technology.
8. Hammad K.J., Vradis G.C., Ötügen M.V. (2001) Laminar flow of a Herschel-Bulkley fluid over an axisymmetric sudden expansion. *Journal of Fluids Engineering*. 123(3). pp. 588–594. DOI: 10.1115/1.1378023.
9. Hawa T., Rusak Z. (2000) Viscous flow in a slightly asymmetric channel with a sudden expansion. *Physics of Fluids*. 12(9). pp. 2257–2267. DOI: 10.1063/1.1287610.
10. Hammad K.J. (2015) Suddenly expanding recirculating and non-recirculating viscoplastic non-Newtonian flows. *Journal of Visualization*. 18(4). pp. 655–667. DOI: 10.1007/s12650-015-0279-9.
11. Forrest A.L., Fattah K.P., Mavinic D.S., Koch F.A. (2008) Optimizing struvite production for phosphate recovery in WWTP. *Journal of Environmental Engineering*. 134(5). pp. 395–402. DOI: 10.1061/(asce)0733-9372(2008)134:5(395).
12. Shul'man Z.P. (1975) *Konvektivnyy teplomassoperenos reologicheskii slozhnykh zhidkostey* [Convective heat and mass transfer of rheologically complex fluids]. Moscow: Energiya.
13. Neofytou P., Drikakis D. (2003) Non-Newtonian flow instability in a channel with a sudden expansion. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 111(2-3). pp. 127–150. DOI: 10.1016/s0377-0257(03)00041-7.
14. Ternik P., Marn J., Žunič Z. (2006) Non-Newtonian fluid flow through a planar symmetric expansion: Shear-thickening fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 135(2-3). pp. 136–148. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2006.01.003.
15. Bell B.C., Surana K.S. (1995) p-Version least squares finite element formulation for two-dimensional incompressible Newtonian and non-Newtonian non-isothermal fluid flow. *Computers & Structures*. 54(1). pp. 83–96. DOI: 10.1016/0045-7949(94)e0280-f.
16. Scott P.S., Mirza F.A., Vlachopoulos J. (1986) A finite element analysis of laminar flows through planar and axisymmetric abrupt expansions. *Computers & Fluids*. 14(4). pp. 423–432. DOI: 10.1016/0045-7930(86)90016-2.
17. Badekas D., Knight D.D. (1992) Eddy correlations for laminar axisymmetric sudden expansion flows. *Journal of Fluids Engineering*. 114(1). pp. 119–121. DOI: 10.1115/1.2909986.
18. Dağtekin İ., Ünsal M. (2011) Numerical analysis of axisymmetric and planar sudden expansion flows for laminar regime. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 65(9). pp. 1133–1144. DOI: 10.1002/fld.2239.
19. Mishra S., Jayaraman K. (2002) Asymmetric flows in planar symmetric channels with large expansion ratio. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 38(10). pp. 945–962. DOI: 10.1002/fld.242.
20. Manica R., De Bortoli A. (2004) Simulation of sudden expansion flows for power-law fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 121(1). pp. 35–40. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2004.03.009.
21. Pinho F., Oliveira P., Miranda J. (2003) Pressure losses in the laminar flow of shear-thinning power-law fluids across a sudden axisymmetric expansion. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 24(5). pp. 747–761. DOI: 10.1016/s0142-727x(03)00083-3.
22. Ryltseva K.E. (2020) *Neizotermicheskie techeniya reologicheskii slozhnykh zhidkostey v kanalakh peremennogo secheniya* [Non-isothermal flows of rheologically complex fluids in channels with a variable cross-section]. Dissertation. Tomsk State University.
23. Idel'chik I.E. (1966) *Handbook of Hydraulic Resistance*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations.
24. Tiu C., Boger D.V., Halmos A.L. (1972) Generalized method for predicting loss coefficients in entrance region flows for inelastic fluids. *The Chemical Engineering Journal*. 4(2). pp. 113–117. DOI: 10.1016/0300-9467(72)80003-0.

Received: September 15, 2021

УДК 531.01
DOI 10.17223/19988621/74/13

А.И. Родионов, С.Р. Кравцов

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ЭНЕРГИЙ ПАРЦИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГОЛОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ, ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Представлена теорема об изменении энергий парциальных движений механических, электрических и электромеханических голономных систем со стационарными связями и несколькими степенями свободы. Классическая теорема об изменении кинетической энергии становится частным случаем предложенной теоремы. Из теоремы вытекает наипростейший по объёму вычислений метод составления уравнения движения таких систем с числом степеней свободы $s \geq 2$.

Ключевые слова: *уравнения движения систем с несколькими степенями свободы; принцип кинетостатики; парциальные движения и их уравнения; уравнения мощностей; парциальные (собственные) и сторонние силы инерции; 2-й закон Кирхгофа; постулат Максвелла; теорема об изменении энергии парциальных движений механических, электрических и электромеханических систем; примеры.*

При решении задач динамики механических систем с несколькими степенями свободы для составления уравнений движения (УД) традиционно используются либо принцип Германа – Эйлера – Даламбера – Лагранжа, известный сегодня как принцип кинетостатики (ПК) – принцип Даламбера (ПД) для системы, либо общее уравнение динамики (ОУД), либо ковариантные формы УД типа уравнений Лагранжа, Нильсена, Аппеля, Гамильтона... [1–6].

Получив любым способом УД, перед их решением часто возникает вопрос о динамическом анализе взаимодействий движений системы или взаимодействий какого-либо тела с остальной частью системы. Для этого авторами [4, 7] были введены формы записи УД в виде «Представления взаимодействующих движений» (ПВД) и «Представления взаимодействующих тел» (ПВТ). Суть этого заключается в том, что в ПВД в левые части уравнений переносятся члены, описывающие кинематически чистое парциальное движение (ПД) по одной из обобщённых координат q_j [4, 7]. В правой же части остаются все остальные силы (пары сил), включая и сторонние по отношению к данному движению силы инерции. Эти силы инерции являются динамическими реакциями внутренних инерционных связей по отношению к данному j -му парциальному движению. ПВТ есть аналог второго закона Ньютона для каждого тела. «Представления» позволяют понимать процесс взаимодействия движений разных степеней свободы и взаимодействия тел. После этого анализа решается система уравнений и находится закон движения системы (ЗДС).

Рассматривается пример для механической системы с двумя степенями свободы без трения. Исходная расчётная схема изображена на рис. 1.

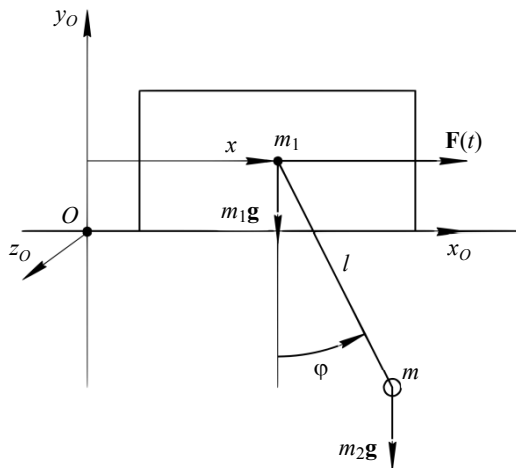


Рис. 1. Исходная расчётная схема скользящего без трения бруска по горизонтальной поверхности с прикреплённым к его центру масс метаматематическим маятником (m_1 – масса бруска; m_2 – масса маятника; l – длина нити; $\mathbf{F}(t)$ – внешняя сила; x_O, y_O, z_O – система координат; x, φ – обобщённые координаты; $m_1\mathbf{g}, m_2\mathbf{g}$ – силы тяжести первого и второго тела)

Fig. 1. Initial design model of a bar sliding without friction on a horizontal surface with a simple pendulum attached to its center of mass (m_1 – mass of the bar; m_2 – mass of the pendulum; l – length of the pendulum; $\mathbf{F}(t)$ – external force; x_O, y_O, z_O – coordinate system; x, φ – generalized coordinates; $m_1\mathbf{g}, m_2\mathbf{g}$ – gravity forces of the first and second bodies)

Выведенные УД, например по Лагранжу, представлены в виде ПВД

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} = F(t) + (\Phi_{2\tau}^\varphi)_x + (\Phi_{2n}^\varphi)_x, \quad (1)$$

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 g l \sin(\varphi) = M_{2z}^\varphi(m_2 \ddot{x})$$

и в виде ПВТ

$$m_1 \ddot{x} = F(t) + (\Phi_{2\tau}^\varphi)_x + (\Phi_{2n}^\varphi)_x + (\Phi_2^x)_x, \quad (2)$$

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} = M_{2z}^\varphi(m_2 \ddot{x}) + M_{2z}^\varphi(m_2 \mathbf{g}),$$

где Φ – силы инерции и далее их проекции на координатные оси:

$$(\Phi_{2\tau}^\varphi)_x = -m_2 l \ddot{\varphi} \cos(\varphi), \quad (\Phi_{2n}^\varphi)_x = m_2 \dot{\varphi}^2 l \sin(\varphi),$$

$$M_{2z}^\varphi(m_2 \ddot{x}) = -m_2 l \ddot{x} \cos(\varphi), \quad (\Phi_2^x)_x = -m_2 \ddot{x}, \quad M_{2z}^\varphi(m_2 \mathbf{g}) = -m_2 g l \sin(\varphi).$$

Левые части (1) являются уравнениями чистых парциальных движений.

При нахождении ЗДС на основе ПК недостатком является то, что приходится определять и реакции всех связей. С учётом этого задачи для нескольких степеней свободы в целом становятся весьма громоздкими.

Предлагаемая теорема (далее Th) позволяет как составлять УД, так и исследовать перетоки энергии в системе между степенями свободы и телами системы, что весьма актуально для понимания физики процесса взаимодействия парциальных подсистем.

Таким образом, Th сегодня становится весьма актуальной при чтении современных очень кратких курсов «Теоретическая механика», в которых есть только ПД – ПК и нет общего уравнения динамики, уравнений Лагранжа, Нильсена....

Следует заметить, что применение Th при составлении уравнений движения, например, уменьшает число дифференциальных операций до s по сравнению с уравнениями Лагранжа ($3s$) и уравнениями Нильсена ($2s + 1$). Здесь s – число степеней свободы. Это также является преимуществом в учебном процессе изложения курса «Теоретическая механика» (ТМ).

1. Теорема об изменении энергий парциальных движений механической системы

С учётом наличия кратких курсов ТМ в современных российских ВУЗах достаточно ограничиться выводом Th исходя из ПК. Разумеется, возможен вывод Th исходя из общего уравнения динамики, уравнений Лагранжа II-го рода и т.д. [1–6]. В последнем случае это возможно в силу того, что для голономных систем со стационарными связями действительные перемещения и скорости являются подмножеством возможных.

Вывод Th производится в дифференциальной форме. Предварительно вводится удобная терминология. Назовём силы инерции на парциальном j -м движении системы – парциальными (собственными) силами инерции $\Phi_{\text{парц}j}$. Все остальные, не парциальные силы инерции, назовём сторонними по отношению к этому движению $\Phi_{\text{стор}j}$. «Эйлероподобные» [4–8] сторонние силы инерции и их моменты становятся активными по отношению к данным j -м парциальным движениям. Они являются реакциями динамических инерциальных связей как следствий неизменности расстояний между точками модели «Твёрдое тело» в процессе движения [4, 7, 8].

Очевидно, что мощности $\Phi_{\text{парц}j}$ с учётом знака можно представить для каждого парциального движения как производные по времени от кинетической энергии парциального движения

$$\frac{d}{dt}(T_j) = -\Phi_{\text{парц}j} \cdot \mathbf{V}_j. \quad (3)$$

Конкретное парциальное движение может определяться не только кинетической T_j , но и потенциальной Π_j энергией, а также диссипативными силами, включаемыми в правую часть теоремы

$$E_j = T_j + \Pi_j,$$

где E_j – полная механическая энергия j -го парциального движения.

Это породит для всей механической системы ряд Th об изменении механической энергии парциальных движений в дифференциальной форме записи. Эти Th-мы будут сформулированы так: «Быстрота изменения энергии E_j каждого j -го ПД системы равна сумме мощностей на этом движении задаваемых сил и пар сил, реакций неидеальных связей и сторонних для j -го ПД сил инерции».

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(E_j) = \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{V}_j + \Phi_{\text{стор}j} \cdot \mathbf{V}_j, \\ \frac{d}{dt}(E_k) = \mathbf{M}_k^{\mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{\omega}_k + \mathbf{M}_{\text{стор}k}^{\Phi} \cdot \boldsymbol{\omega}_k, \\ j + k = s. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{F}_j$, $\Phi_{\text{стор } j}$ – главные векторы непотенциальных задаваемых сил на j -м поступательном парциальном движении, в которые включены реакции неидеальных связей и сторонних по отношению к j -му движению сил инерции; $\mathbf{M}_k^F$, $\mathbf{M}_{\text{стор } k}^\Phi$ – соответствующие главные моменты на k -м вращательном движении; $j + k = s$ – число степеней свободы системы.

В данной работе для вывода Th за основу берётся ПК с учётом реалий современных кратких курсов теоретической механики. Выделяется в системе подсистемы кинематически чистых движений, соответствующих q_j и в общем случае динамически связанных. Это позволит получить уравнения движения системы в обобщённых координатах в ПВД (или ПВТ) и проанализировать переток энергии из одной степени свободы в другую, и от k -го тела к другим телам системы.

После анализа всех сил и пар сил на j -м движении как задаваемых, включая в них реакции неидеальных связей, так и реакции идеальных связей и даламберовых сил инерции, действующих в системе, составляются уравнения кинестатики системы в виде

$$\begin{cases} \mathbf{F}_j + \mathbf{R}_j + \Phi_j = 0; \\ \mathbf{M}_k^F + \mathbf{M}_k^R + \mathbf{M}_k^\Phi = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{R}_j$, Φ_j – главные векторы j -х реакций идеальных связей и даламберовых сил инерции поступательных парциальных подсистем, а $\mathbf{M}_k^R$, $\mathbf{M}_k^\Phi$ – соответствующие силам и парам сил главные моменты k -х вращательных парциальных подсистем.

Систему уравнений (5) ПК следует переписать в виде

$$\begin{cases} -\Phi_{\text{парц } j} = \mathbf{F}_j + \mathbf{R}_j + \Phi_{\text{стор } j}, \quad \Phi_{\text{стор } j} = (\Phi_j - \Phi_{\text{парц } j}); \\ -\mathbf{M}_{\text{парц } k}^\Phi = \mathbf{M}_k^F + \mathbf{M}_k^R + \mathbf{M}_{k\text{стор}}^\Phi, \quad \mathbf{M}_{k\text{стор}}^\Phi = (\mathbf{M}_k^\Phi - \mathbf{M}_{\text{парц } j}^\Phi); \\ j + k = s. \end{cases} \quad (6)$$

Далее, для каждого парциального движения системы составляется уравнения мощностей всех сил и пар сил, сторонних к данному движению. Умножаются выражения для всех сил на соответствующую парциальной силе инерции линейную скорость $\mathbf{V}_j$ а выражения для моментов – на соответствующую парциальному моменту сил инерции угловую скорость ω_k . При составлении уравнений мощностей во время умножения на линейную или угловую парциальные скорости j , k -го движений все остальные сторонние движения зафиксированы. Мощности главных векторов и моментов реакций идеальных связей станут равны нулю в соответствии с постулатом идеальности связей. В результате получим (4), что и следовало.

При описании движений структурно сколь угодно сложных механических систем, но с $s = 1$, Th вырождается в классическую теорему об изменении кинетической энергии.

2. Теоремы об изменении энергий парциальных движений электрических и электромеханических систем

При рассмотрении движений электрических систем с $s \geq 2$... имеет место аналогичная механической Th с учётом первой электромеханической аналогии Максвелла [1, 2, 4]. Она доказывается аналогично приведенной выше Th но уже на основе метода контурных токов (МКТ). Последний базируется на 1-м и 2-м законах Кирхгофа. Известно, что 2-й закон Кирхгофа [9–11] исторически является в теории электричества аналогом принципа Даламбера в механике. На основе Th могут

исследоваться перетоки энергии между степенями свободы электрических систем. Также могут составляться уравнения движения таких систем.

Объединяя законы и уравнения теоретической механики с теоретическими основами электротехники на основе постулата Максвелла [1, 2], получим Th об изменении энергии взаимодействующих парциальных движений электромеханических систем.

Подводя итоги, подчеркнём, что Th становится весьма актуальной при преподавании укороченных сегодня российских курсов ТМ, теоретических основ электротехники, электромеханики, в которых не читаются ковариантные формы уравнений движения.

Далее рассмотрен ряд простых примеров составления уравнений движения механических, электрических и электромеханических систем с несколькими степенями свободы на основании предложенной Th.

3. Примеры

Пример № 1. Составим уравнения движения быстро вращающегося диска на упругом валу массы m и моментом инерции J_c относительно центра масс смещённого по отношению к исходному положению вала O при $t = 0$. Вал вращается под действием момента $\mathbf{M}(t)$. Сила тяжести диска, находящегося в невесомости, не учитывается. Упругость вала определяется двумя жёсткостями k по осям x и y . В момент движения вал проходит через диск в точке $A(x, y)$. Исходная расчётная схема системы с тремя степенями свободы по x , y , φ изображена на рис. 2 и 3 в двух видах: сверху и спереди.

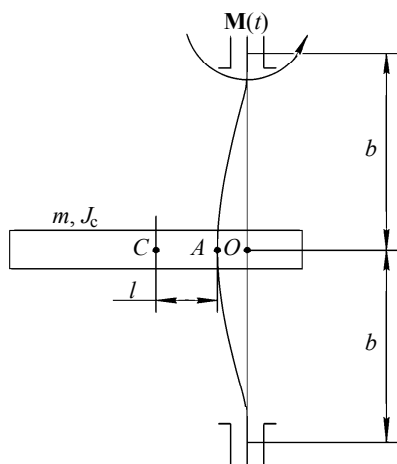


Рис. 2. Исходная расчётная схема диска (вид сбоку) (m – масса диска; J_c – момент инерции; $\mathbf{M}(t)$ – вращающий момент)

Fig. 2. Initial design model of a disk on an elastic shaft (side view) (m – mass of the disk; J_c – moment of inertia; $\mathbf{M}(t)$ – external torque)

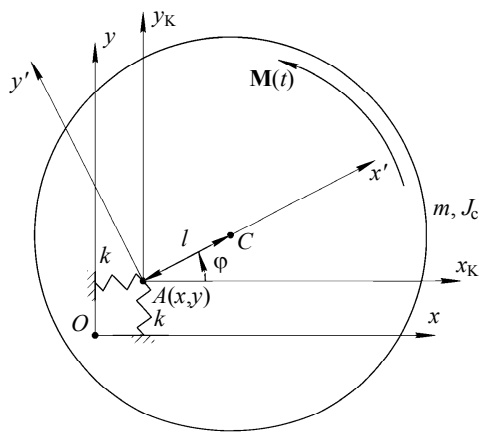


Рис. 3. Исходная расчётная схема диска (вид сверху) (x , y , φ – система координат и обобщённые координаты; x_k , y_k – оси Кёнига; x' , y' – подвижные оси; k – жёсткость пружины)

Fig. 3. Initial design model of the disk on the elastic shaft (top view) (x , y , φ – coordinate system and generalized coordinates; x_k , y_k – Kenig's axes; x' , y' – moving axes; k – longitudinal rigidity of a spring)

Изобразим и проанализируем все действующие в рассматриваемой системе силы, как показано на рис. 4. Упругие силы представлены пружинами. Силы упругости будут определены через парциальную энергию.

Инерциальные силы на рис. 4 распишутся в виде

$$\Phi_x = m\ddot{x}, \quad \Phi_y = m\ddot{y}, \quad \Phi_n^\varphi = m\omega^2 l = m\dot{\varphi}^2 l, \quad \Phi_\tau^\varphi = m\ddot{\varphi} l, \quad M_z^\Phi = J_c \ddot{\varphi}.$$

Исследуем парциальные движения этой системы по обобщённым координатам (рис. 5 – 7). При рассмотрении парциального движения по координате x любое движение по координате y и φ «замораживается» и наоборот.

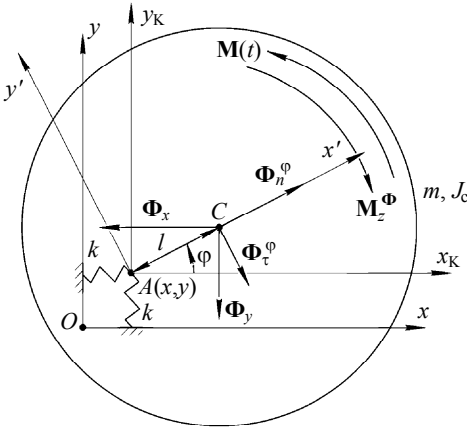


Рис. 4. Силы и пары сил, действующие на диск

Fig. 4. Active forces exerted on the disk

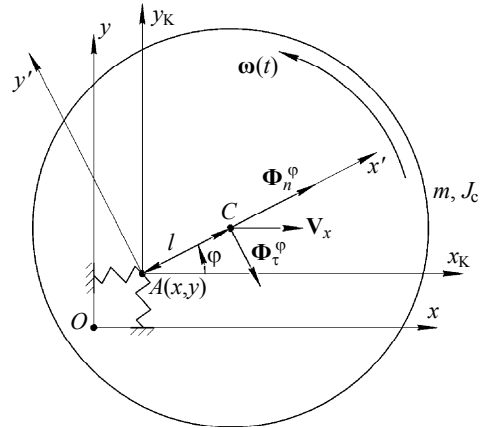


Рис. 5. Расчётная схема сторонних сил инерции на парциальном движении по координате x

Fig. 5. Design model of external inertial forces at partial motion of the system along x -coordinate

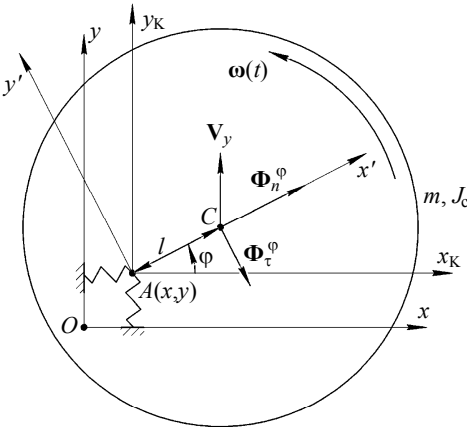


Рис. 6. Расчётная схема сторонних сил инерции на парциальном движении по координате y

Fig. 6. Design model of external inertial forces at partial motion of the system along y -coordinate

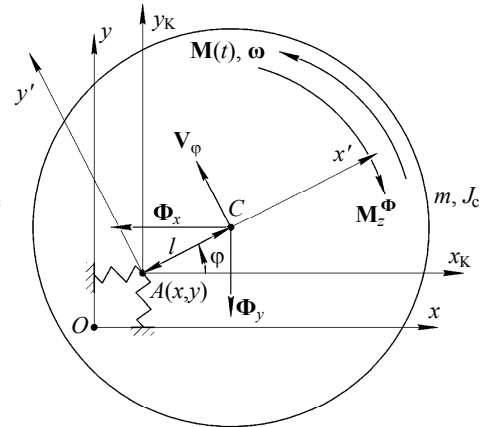


Рис. 7. Расчётная схема сторонних сил инерции на парциальном движении по координате φ

Fig. 7. Design model of external inertial forces at partial motion of the system along φ -coordinate

Запишем для каждого парциального движения энергию этого движения

$$E_1 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \quad E_2 = \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{ky^2}{2}, \quad E_3 = \frac{(J_C + ml^2)\dot{\varphi}^2}{2}. \quad (7)$$

На основе (4) получаются выражения

$$\frac{d}{dt} E_1 = (\Phi_n^\varphi \cdot \mathbf{V}_x) + (\Phi_\tau^\varphi \cdot \mathbf{V}_x); \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} E_2 = (\Phi_n^\varphi \cdot \mathbf{V}_y) + (\Phi_\tau^\varphi \cdot \mathbf{V}_y); \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} E_3 = (\mathbf{M}_z(\Phi_x) \cdot \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{M}_z(\Phi_y) \cdot \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{M}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}), \quad (10)$$

где $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $\omega = \dot{\varphi}$, $M_z(\Phi_x) = m\ddot{x}l \sin \varphi$, $M_z(\Phi_y) = m\ddot{y}l \cos \varphi$.

Раскрывая (8) – (10) и сокращая в каждом выражении общие множители, запишем УДС в ПВД:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = ml\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + ml\ddot{\varphi} \sin \varphi, \\ m\ddot{y} + ky = ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - ml\ddot{\varphi} \cos \varphi, \\ (J_C + ml^2)\ddot{\varphi} = m\ddot{x}l \sin \varphi - m\ddot{y}l \cos \varphi + M(t). \end{cases} \quad (11)$$

Уравнения движения (11) рассматриваемой системы идентичны уравнениям движения, полученным из уравнений Лагранжа II рода.

Пример № 2. На рис. 8 представлена электрическая схема из двух связанных контуров. Покажем, что уравнения электрических движений этой системы могут быть получены не только на основе метода контурных токов [11] или уравнений Лагранжа – Максвелла [2, 4], но также и на основе предложенной Th.

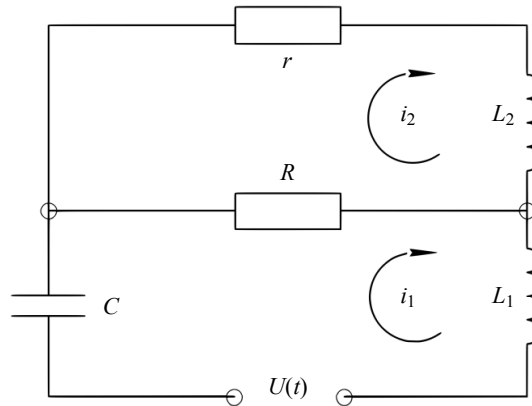


Рис. 8. Электрическая схема с двумя связанными контурами (R , r – сопротивления резисторов; C – ёмкость конденсатора; L_1 , L_2 – индуктивности катушек; $U(t)$ – заданное напряжение на внешнем контуре; i_1 , i_2 – контурные токи)

Fig. 8. Electrical diagram with two coupled circuits (R , r – resistors; C – capacity of a condenser; L_1 , L_2 – inductance of coils; $U(t)$ – given voltage on the outer circuit; i_1 , i_2 – cyclic currents)

Парциальные движения в данном случае будут определяться контурными парциальными токами i_1 и i_2 . За обобщённые координаты примем заряды, производные по времени от которых дадут соответствующие контурные токи:

$$i_i(t) = \frac{d}{dt} q_i(t).$$

Энергии этих электрических парциальных движений примут вид

$$E_1 = \frac{L_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{q_1^2}{2C}, \quad E_2 = \frac{L_2 \dot{q}_2^2}{2}. \quad (12)$$

А мощности на каждом парциальном движении выразятся через ЭДС, действующие в замкнутом контуре, и падения напряжений на резистивных элементах в каждом контуре.

На первом контуре

$$U_R^I = R(\dot{q}_1 - \dot{q}_2). \quad (13)$$

На втором контуре

$$U_R^{II} = (R+r)\dot{q}_2 - R\dot{q}_1. \quad (14)$$

Тогда для рассматриваемой системы (рис. 5) Th (4) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_1 &= (\mathbf{U} \cdot \mathbf{i}_1) + (\mathbf{U}_R^I \cdot \mathbf{i}_1) + (\mathbf{U}_C \cdot \mathbf{i}_1), \\ \frac{d}{dt} E_2 &= (\mathbf{U}_R^{II} \cdot \mathbf{i}_2). \end{aligned} \quad (15)$$

Расписывая (15) и сокращая в каждом выражении общие множители контурных токов i_i , уравнения движения контурных парциальных токов с учётом диссипативных членов примут вид

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{q}_1 + R\dot{q}_1 + \frac{q_1}{C} &= U(t) + R\dot{q}_2, \\ L_2 \ddot{q}_2 + (R+r)\dot{q}_2 &= R\dot{q}_1, \end{aligned} \quad (16)$$

где $R\dot{q}_2$ для первого движения есть падение напряжения от второго контурного тока, выполняющего роль сторонней ЭДС по отношению к первому парциальному движению.

Эта система уравнений тождественна ПВД-уравнениям, полученным с помощью уравнений Лагранжа – Максвелла или методом контурных токов.

Пример № 3. Рассмотрим электромеханическую систему типа датчика ускорений или вибростенда с двумя степенями свободы: одной механической по x и одной электрической по i , изображённой на рис. 9.

Система имеет две степени свободы – механическую и электрическую: движение якоря датчика по координате x и ток $i(t)$ в контуре. Причём

$$i(t) = \dot{q},$$

где q – заряд в контуре.

Уравнения движения получим на основе Th для каждого парциального движения

$$\frac{d}{dt}(E_x) = \sum P_x^{(k)}, \quad \frac{d}{dt}(E_q) = \sum P_q^{(k)}. \quad (17)$$

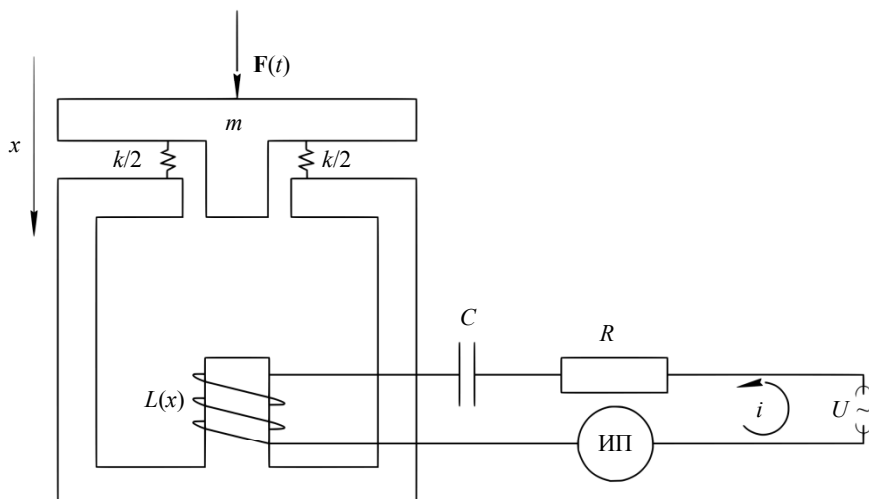


Рис. 9. Принципиальная схема электромеханической системы (m – масса якоря датчика; k – жёсткость пружины; $L(x)$ – индуктивность катушки; C – ёмкость конденсатора; R – сопротивление резистора; U – заданное напряжение на внешнем контуре; ИП – идеальный измерительный прибор с $R = 0$; $F(t)$ – внешнее силовое воздействие на якорь)

Fig. 9. Model of an electromechanical system (m – mass of an acceleration sensor; k – longitudinal rigidity of a spring; $L(x)$ – inductance of a coil; C – capacity of a condenser; R – resistance of a resistor; U – given voltage on the outer circuit; ИП – measuring gauge with $R = 0$; $F(t)$ – external forces exerted on an armature)

Введём энергии парциальных движений:

$$E_x = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{L(x)\dot{q}^2}{2}, \quad E_q = \frac{L(x)\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C}.$$

Индуктивность устройства $L(x)$ зависит от положения якоря x в зазоре магнитопровода. В результате этого возникает динамическая связь между степенями свободы по x и q . И, как следствие, появляется второе слагаемое в E_x , выполняющее роль потенциальной энергии для якоря датчика массы m . При этом ток i считается фиксированным. Заметим, что в сильно связанных динамических системах, например в ядрах атомов, разделение на кинетическую и потенциальную энергию вообще невозможно. В таких случаях говорят об энергии как единой мере. Это также имеет место и в выражении для E_x .

На якорь датчика ускорений или стол вибростенда массы m будут действовать возбуждающая сила $F(t)$, и потенциальные силы: тяжести $F_g = mg$ и упругая сила $F_{\text{упр}} = kx$, а также градиентная сила $F_{\text{grad}}(x)$, возникающая из-за зависимости E_x от x .

При выполнении (17) получим систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику электромеханической системы в ПВД.

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = mg + F(t) - \frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} \dot{q}^2, \\ L(x)\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = -\frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} \dot{x}\dot{q} + U. \end{cases} \quad (18)$$

Эти ПВД-уравнения динамически связанных механического и электрического движений получаются, например, из уравнений Лагранжа – Максвелла.

Пример № 4. Рассмотрим механическую систему типа «Вибростенд» с тремя степенями свободы. Её расчётная схема, состоящая из двух тел с массами m_1, m_2 (m_2 рассматривается как материальная точка) и моментом инерции для первого тела I_C , представлена на рис. 10. Будем считать, что вибростенд находится в состоянии невесомости как более простой вариант для вывода его уравнений движения. Элементы вибростенда закреплены на пружинах жёсткости k_i . Центр масс первого тела находится на расстоянии l_1 от начала координат.

Рассмотрим все действующие в системе силы инерции (рис. 11).

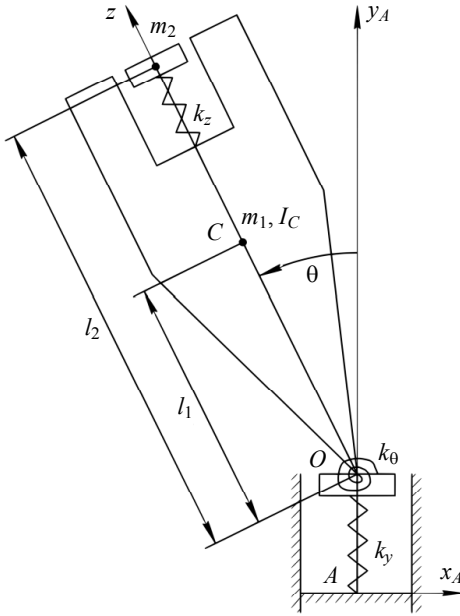


Рис. 10. Принципиальная расчётная схема модели вибростенда (m_1, m_2 – массы первого и второго тел; I_C – момент инерции первого тела; k_y, k_z – линейная жёсткость пружин; k_θ – круговая жёсткость пружины; y_A, x_A – система координат; y_A, z, θ – обобщённые координаты)

Fig. 10. Design model of a vibration table (m_1, m_2 – masses of the first and second bodies; I_C – moment of inertia of the first body; k_y, k_z – longitudinal rigidity of springs; k_θ – torsional rigidity of a spring; y_A, x_A – coordinate system; y_A, z, θ – generalized coordinates)

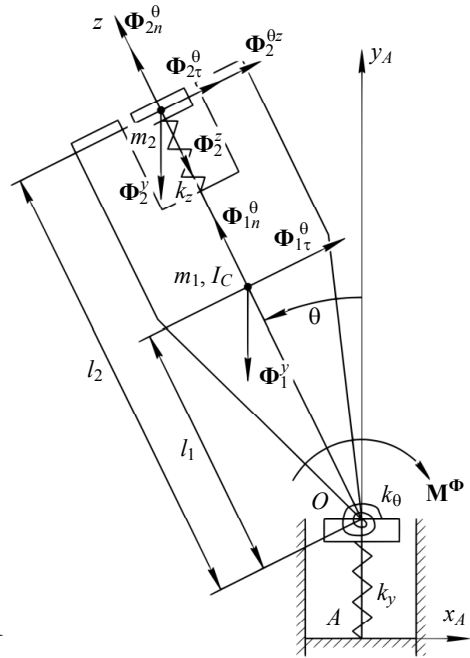


Рис. 11. Расчётная схема сил инерции тел системы

Fig. 11. Design model of inertial forces in the system

Согласно рис. 11, силы инерции примут вид

$$\begin{aligned} \Phi_{1y}^y &= m_1 \ddot{y}, \quad \Phi_{1n}^\theta = m_1 \dot{\theta}^2 l_1, \quad \Phi_{1\tau}^\theta = m_1 \ddot{\theta} l_1, \quad \Phi_2^y = m_2 \ddot{y}, \quad \Phi_2^z = m_2 \ddot{z}, \\ \Phi_{2n}^\theta &= m_2 \dot{\theta}^2 l_2, \quad \Phi_{2\tau}^\theta = m_2 \ddot{\theta} l_2, \quad \Phi_2^{\theta z} = 2m_2 \dot{\theta} \dot{z}, \quad M^\Phi = J_C \ddot{\theta}. \end{aligned}$$

Для каждого парциального движения введём энергию этого движения:

$$E_y = \frac{(m_1 + m_2)\dot{y}^2}{2} + \frac{k_y y^2}{2}, \quad E_z = \frac{m_2 \dot{z}^2}{2} + \frac{k_z z^2}{2}, \quad E_\theta = \frac{(m_1 l_1^2 + m_2 (l_2 + z)^2 + I_C) \dot{\theta}^2}{2} + \frac{k_\theta \theta^2}{2}.$$

Для каждой обобщённой координаты рассмотрим парциальные движения (рис. 12 – 14).

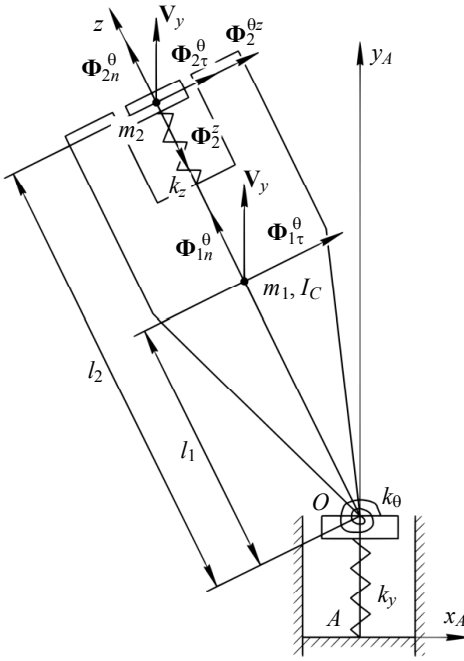


Рис. 12. Расчётная схема сторонних сил инерции на парциальном движении по координате y

Fig. 12. Design model of external inertial forces at partial motion of the system along y -coordinate

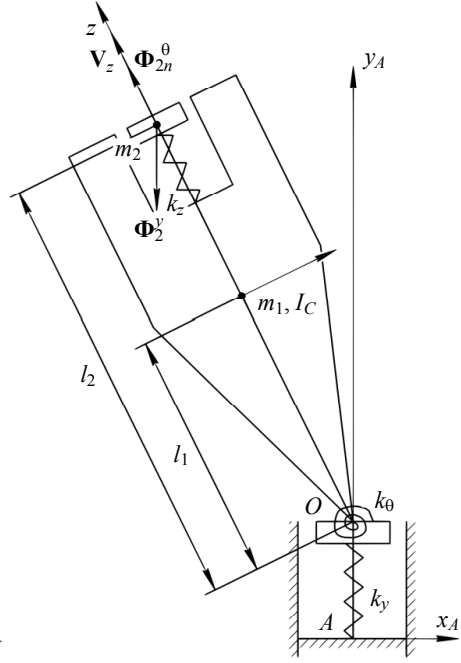


Рис. 13. Расчётная схема сторонних сил инерции на парциальном движении по координате z

Fig. 13. Design model of external inertial forces at partial motion of the system along z -coordinate

Используя (4), Th данной задачи примет вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(E_y) = (\Phi_{1n}^\theta \cdot V_y) + (\Phi_{1\tau}^\theta \cdot V_y) + (\Phi_2^z \cdot V_y) + (\Phi_{2n}^\theta \cdot V_y) + \\ + (\Phi_{2\tau}^\theta \cdot V_y) + (\Phi_{2n}^{\theta z} \cdot V_y), \\ \frac{d}{dt}(E_z) = (\Phi_2^y \cdot B_z) + (\Phi_{2n}^\theta \cdot V_z), \\ \frac{d}{dt}(E_\theta) = (M_{1z}^y(\Phi_1^y) \cdot \dot{\theta}) + (M_{2z}^y(\Phi_2^y) \cdot \dot{\theta}) + (M_{2z}^{\theta z}(\Phi_2^{\theta z}) \cdot \dot{\theta}), \end{cases} \quad (19)$$

где $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$, $V_\theta = \dot{\theta} l_1$ для первого тела, $V_\theta = \dot{\theta} (l_2 + z)$ для второго тела,

$$M_{1z}^y(\Phi_1^y) = m_1 l_1 \dot{y} \sin \theta, \quad M_{2z}^y(\Phi_2^y) = m_2 (l_2 + z) \dot{y} \sin \theta, \quad M_{2z}^{\theta z}(\Phi_2^{\theta z}) = 2m_2 (l_2 + z) \dot{\theta} \dot{z}.$$

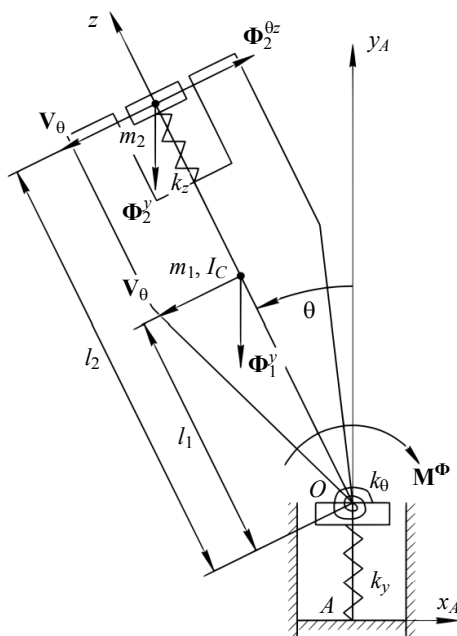


Рис. 14. Расчётная схема сторонних сил инерции на частичном движении по координате θ

Fig. 14. Design model of external inertial forces at partial motion of the system along θ -coordinate

В результате, сократив в системе Th (19) общие множители, уравнения движения системы в ПВД примут вид

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y} + m_2 \ddot{y} + k_y y = m_1 \dot{\theta}^2 l_1 \cos \theta + m_1 \ddot{\theta} l_1 \sin \theta - m_2 \ddot{z} \cos \theta + \\ + m_2 \dot{\theta}^2 (l_2 + z) \cos \theta + m_2 \ddot{\theta} (l_2 + z) \sin \theta + 2m_2 \dot{\theta} \dot{z} \sin \theta, \\ m_2 \ddot{z} + k_z z = -m_2 \ddot{y} \cos \theta + m_2 \dot{\theta}^2 (l_2 + z), \\ m_1 l_1^2 \ddot{\theta} + m_2 (l_2 + z)^2 \ddot{\theta} + I_C \ddot{\theta} + k_\theta \theta = m_1 l_1 \ddot{y} \sin \theta + \\ + m_2 (l_2 + z) \ddot{y} \sin \theta - 2m_2 (l_2 + z) \dot{\theta} \dot{z}. \end{cases} \quad (20)$$

Эта система уравнений получается и на основе уравнений Лагранжа или Нильсена.

Выводы

Сформулированы и представлены Th об изменении энергии динамически связанных парциальных движений механических, электрических и электромеханических систем с несколькими степенями свободы. Они позволяют рассмотреть потоки энергий, как между степенями свободы, так и телами системы. На основе Th предложен метод составления уравнений движения динамики таких систем с объёмом вычислений меньшим, чем в известных классических методах, основанных на уравнениях Лагранжа, Нильсена, Лагранжа – Максвелла. Следует отметить, что Th становятся весьма актуальными при преподавании укороченных сегодня

русских курсов теоретической механики, теоретических основ электротехники, электромеханики, в которых не изучаются ковариантные формы уравнений движения.

Рассмотрен ряд примеров механических, электрических и электромеханических систем с двумя и тремя степенями свободы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике: учеб. пособие для вузов / под ред. Е.С. Пятницкого. 3-е изд. М.: Физматлит, 2001. 264 с.
2. Бутенин Н.В., Фурфев Н.А. Введение в аналитическую механику. 2-е изд., пер. и доп. М.: Наука, 2014. 256 с.
3. Курс теоретической механики: учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др.; под общ. ред. К.С. Колесникова. М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 2000. 736 с.
4. Родионов А.И., Ким В.Ф. Теоретическая механика: конспект лекций с приложениями. Ч. 3. Динамика. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. 240 с.
5. Nolting W. Theoretical Physics. Vol. 2: Analytical Mechanics. Switzerland: Springer International Publishing, 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-40129-4.
6. Lemos N.A. Analytical Mechanics. United Kingdom: Cambridge University Printing House, 2018. DOI: 10.1017/9781108241489
7. Остроменский П.И., Родионов А.И. Составление и исследование дифференциальных уравнений движения механических систем методом обобщенных сил // Научный вестник НГТУ. 1997. № 1(3). С. 121–140.
8. Остроменский П.И. Исследование динамики машин методом динамических реакций // Вопросы динамики механических систем / Новосибирский электротехнический институт. Новосибирск, 1983. С. 36–44.
9. Усольцев А.А. Общая электротехника: учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. 301 с.
10. Жулован В.В. Основы электромеханического преобразования энергии: учебник. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. 427 с.
11. Zelenkov A.A. Theory of Electrical Engineering. Electric Circuits with the Distributed Parameters. Theory of Electromagnetic Field: a Textbook. Kyiv: NAU, 2012

Статья поступила 11.02.2020

Rodionov A.I., Kravtsov S.R. (2021) PRINCIPLE OF ENERGIES OF PARTIAL MOTIONS FOR MECHANICAL, ELECTRICAL, AND ELECTROMECHANICAL HOLONOMIC SYSTEMS WITH MULTIPLE DEGREES OF FREEDOM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 127–140

DOI 10.17223/19988621/74/13

Keywords: equations of motion for systems with multiple degrees of freedom, D'Alembert's principle, partial motions and their equations, power equations, partial and external inertial forces, Kirchhoff's second law, electromechanical analogy, principle of energies of partial motions for mechanical, electrical, and electromechanical systems, examples.

The purpose of this research is to formulate and prove the principle of energy of partial subsystems for mechanical, electrical, and electromechanical holonomic systems with time-independent constraints, as well as the development of a simple method to derive equations of motion for such systems. This principle is helpful in giving short courses of theoretical mechanics to students who know only the basic principle of energy and the D'Alembert principle.

Two issues are covered in this paper: firstly, the formulation of the principle of energies for interacting mechanical partial subsystems, including the proof of the theorem, and, finally, the application of the developed method for mechanical, electrical, and electromechanical systems.

The energy principle is developed using the D'Alembert principle for partial motions of the system when deriving kinetic and power balance equations. For electrical and electromechanical systems, the principle is based on the first electromechanical analogy of Maxwell's postulate and Kirchhoff's laws.

As examples, the principle allowed obtaining equations of motion of mechanical systems with three degrees of freedom: rotation of a disk on an elastic shaft, dynamics of a vibration table, an electrical system with two cyclic currents connected through a resistor, and an electromechanical system of the acceleration sensor.

Andrey I. RODIONOV (Candidate of Physics and Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: rodionov@corp.nstu.ru

Sergey R. KRAVTSOV (Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: kravczov.2015@stud.nstu.ru

REFERENCES

1. Gantmakher F.R. (2001) *Leksii po analiticheskoy mekhanike: uchebnoe posobie dlya vuzov* [Lectures on analytical mechanics: a textbook for institutes of higher education]. Moscow: FIZMATLIT.
2. Butenin N.V., Fufaev N.A. (1991) *Vvedenie v analiticheskuyu mekhaniku* [Introduction to analytical mechanics]. Moscow: Nauka.
3. Drong V.I., Dubinin V.V., Il'in M.M. (2000) *Kurs teoreticheskoy mekhaniki: uchebnik dlya vuzov* [Course of theoretical mechanics: a textbook for institutes of higher education]. Moscow: BMSTU.
4. Rodionov A.I. (2010) *Teoreticheskaya mekhanika: konspekt lektsiy s prilozheniyami* [Theoretical mechanics: lecture notes with appendices]. Novosibirsk: NSTU.
5. Nolting W. (2016) *Theoretical Physics. Vol. 2. Analytical Mechanics*. Switzerland: Springer International Publishing. DOI: 10.1007/978-3-319-40129-4.
6. Lemos N.A. (2018) *Analytical Mechanics*. United Kingdom: Cambridge University Printing House. DOI: 10.1017/9781108241489.
7. Ostromenskiy P.I., Rodionov A.I. (1997) Sostavlenie i issledovanie differentsial'nykh uravneniy dvizheniya mekhanicheskikh system metodom obobshchennykh sil [Derivation and study of differential equations of motion of mechanical systems by the method of generalized forces]. *Nauchnyy vestnik NGTU – Scientific Bulletin of NSTU*. 1. pp. 121–140.
8. Ostromenskiy P.I. (1983) Issledovanie dinamiki mashin metodom dinamicheskikh reaktsiy [Study of machine dynamics by the dynamic reactions method]. *Voprosy dinamiki mekhanicheskikh sistem*. pp. 36–44.
9. Usol'tsev A.A. (2009) *Obshchaya elektromekhanika: Uchebnoe posobie* [General electromechanics: a textbook]. Saint Petersburg: ITMO.
10. Zhulovyan V.V. (2014) *Osnovy elektromekhanicheskogo preobrazovaniya energii: uchebnik* [Fundamentals of electromechanical energy conversion: a textbook]. Novosibirsk: NSTU.
11. Zelenkov A.A. (2012) *Theory of Electrical Engineering. Electric Circuits with the Distributed Parameters. Theory of Electromagnetic Field: a Textbook*. Kyiv: NAU.

Received: February 11, 2020

УДК 539.382.2: 669-1

DOI 10.17223/19988621/74/14

А.П. Хрусталёв, В.В. Платов, Н.И. Кахидзе, И.А. Жуков, А.Б. Ворожцов**ВЛИЯНИЕ НАНОЧАСТИЦ ВОЛЬФРАМА НА СТРУКТУРУ
И МЕХАНИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ АЛЮМИНИЕВОГО СПЛАВА 1550
В УСЛОВИЯХ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ¹**

Исследовано влияние наночастиц вольфрама на структуру и механические свойства сплава 1550. С использованием методов оптической и растровой электронной микроскопии изучена структура композита 1550-W и исходного сплава. Введение 0.5 мас.% наночастиц вольфрама не модифицирует структуру алюминиевого сплава, но за счёт дисперсного упрочнения позволяет повысить показатели твердости и значения предела текучести, предела прочности и максимальных деформаций до разрушения металлической матрицы.

Ключевые слова: дисперсно-упрочнённые сплавы, наноразмерные частицы, структура, механические свойства, пластичность.

Композиты с металлической матрицей на основе алюминия привлекательны для автомобильной и аэрокосмической промышленности благодаря сочетанию их физико-механических свойств и стойкости к окислению [1, 2]. Неметаллические материалы (оксиды, нитриды, карбиды, интерметаллиды) обычно используются в качестве упрочняющих частиц алюминиевых композитов. Упрочняющие частицы вводятся «ex-situ» методом [3], где упрочнитель синтезируется перед добавлением в матрицу, либо «in-situ» [4–6], где в матрицу вводятся материалы, реагирующие с матрицей для синтеза упрочняющих частиц. При использовании «ex-situ» метода возможно заранее задавать параметры дисперсности и фазового состава упрочняющих частиц, а для упрочнения как правило используются Al_2O_3 [7, 8], SiC [9, 10], B_4C [11, 12] и другие неметаллические частицы. Наиболее эффективное упрочнение достигается при введении наночастиц, при этом они должны быть равномерно распределены в объёме алюминиевой матрицы и иметь с ней хорошую связь, которая сохранится во время движения дислокации. Авторами [13] был получен композит Al/Al_3Ti , модуль Юнга которого увеличился на 57% и составил 110 ГПа. Изготовление таких материалов возможно различными способами, однако технологии литья представляют собой наиболее универсальный и эффективный способ [14, 15]. При этом получение композитных материалов с помощью литья связано с рядом проблем, обусловленных агломерацией и флотацией частиц из-за плохой смачиваемости жидким расплавом [16–19]. В результате этого наблюдается снижение плотности композита, неоднородность структуры, что приводит к снижению его механических характеристик. Решение этой проблемы возможно несколькими способами: нанесением покрытий на частицы, повышающих смачиваемость [20], применением лигатур и воздействием внешних полей на металлический расплав.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-79-00060).

Алюминиевый сплав 1550 используется в основном в виде листового проката. Наибольшие показатели свойств данного сплава достигаются за счёт дисперсионного твердения при введении таких элементов, как цирконий или скандий [21–23]. Основным недостатком данного метода, является высокая стоимость, которая приводит к значительному удорожанию изделий. В ряде работ сообщается об использовании вольфрама для получения композитов на основе алюминия. В процессе литья возможно взаимодействие [24–27] металлического вольфрама с алюминиевой матрицей и образование интерметаллических соединений Al_4W , Al_5W и Al_{12}W , а процесс будет совмещать «in-situ» и «ex-situ» методы в одной технологии. Механизм образования интерметаллического соединения во время обработки можно объяснить процессом диффузии [28].

В рамках данного исследования были использованы наночастицы вольфрама для изготовления алюминиевого композита. При этом известно, что вольфрам имеет высокую температуру плавления, высокую прочность и низкий коэффициент теплового расширения. Исследования таких материалов показывали значительное увеличение механических и электрических свойств алюминиевых сплавов [29]. Частицы вольфрама и интерметаллиды W-Al в алюминиевой матрице могут улучшить механические характеристики, такие, как прочность, стойкость к окислению и термическая стабильность по сравнению с исходным алюминием. Низкая растворимость вольфрама в алюминии и высокая реакционная способность позволяют получить алюминиевый композит, упрочнённый наночастицами.

Таким образом, цель работы: исследование влияния наночастиц вольфрама на структуру и механические свойства алюминиевого сплава Al-Mg после литья.

Материалы и методы исследований

В качестве исходного сплава использован алюминиевый сплав 1550 (91.9–94.68% Al , 4.8–5.8% Mg). 1 кг сплава 1550 помещали в тигель, расплавляли в муфельной печи (780 °C) и выдерживали в течение двух часов. Затем тигель с помощью захвата извлекали из печи и вводили порошок вольфрама при температуре расплава 730 °C с последующим воздействием механического смесителя, вращающегося со скоростью 500 об/мин в течение 30 с. При температуре 720 °C расплав заливался в стальной кокиль, установленный на вибростол, совершающем колебания с частотой 60 Гц и амплитудой 0.5 мм. Исходный сплав 1550 был получен при аналогичных условиях без введения наночастиц вольфрама.

Структура материалов исследована методом растровой электронной микроскопии (РЭМ) на микроскопе Quanta 200 3D и методом оптической микроскопии на микроскопе Olympus GX71. Дисперсность частиц исследована с использованием полученных изображений методом случайных секущих. Механические испытания проведены на универсальной испытательной машине Instron 3369 со скоростью движения traversы 0.2 мм/мин. Образцы вырезались из отливок при помощи электроэрозионной резки и представляли собой плоские лопатки, толщиной 2 мм с соотношением ширины рабочей части и места захвата ≥ 1.5 . Испытания проводились согласно ASTM B557–15.

Результаты и их обсуждение

На рис. 1 представлены РЭМ (рис. 1, а) и ПЭМ (рис. 1, б) изображения нанопорошка вольфрама, полученного методом электрического взрыва проводника. Частицы в порошке имеют правильную сферическую форму, а их средний размер

составляет 200 нм. В порошке наблюдаются крупные частицы, размер которых достигает 10 мкм, что связано с особенностями получения порошка в процессе электрического взрыва в камере.

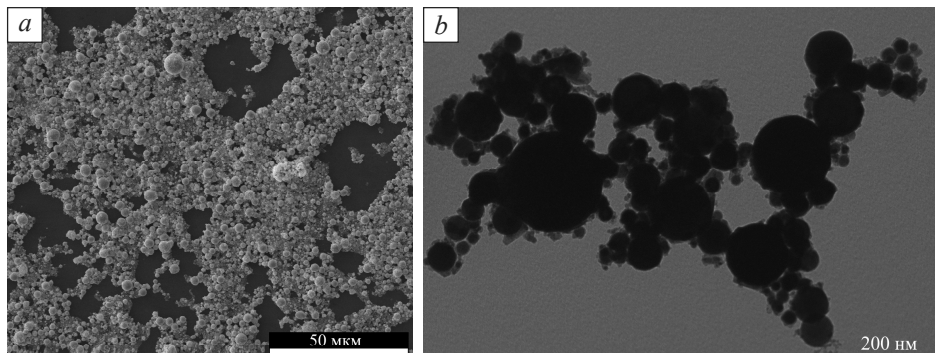


Рис. 1. РЭМ (a) и ПЭМ (b) изображения нанопорошка вольфрама

Fig. 1. SEM (a) and TEM (b) images of a tungsten nanopowder

На рис. 2 представлены оптические изображения микроструктуры полученных сплавов.

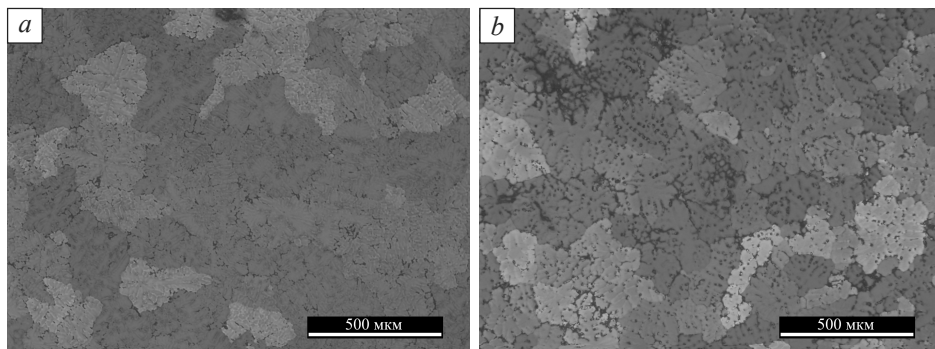


Рис. 2. Оптические изображения микроструктуры сплавов 1550 (a) и 1550-W (b)

Fig. 2. Optical images of a microstructure of (a) 1550 and (b) 1550-W alloys

Наночастицы вольфрама не оказывают модифицирующего воздействия на структуру сплава 1550, средний размер которого составил около 180 мкм. При этом видно, что структура сплавов достаточно однородная с равноосными зёрнами. В структуре сплавов присутствуют поры, однако пористость сплавов не превышает 5%. Известно, что вольфрам реагирует с алюминием и возможно образование интерметаллидов Al–W. На рис. 3 представлены РЭМ-изображения сплава 1550-W с результатами картирования по элементам.

В структуре сплава 1550-W видны включения пор размером не более 1 мкм. При этом структура сплава достаточно однородная, без видимого скопления пор и агломератов наночастиц вольфрама (рис. 3, a). При этом в некоторых порах наблюдаются микрочастицы вольфрама (рис. 3, b), которые появляются в них из-за влияния фронта кристаллизации, который вытесняет их в газовые полости сплава.

Картирование по элементам (рис. 3, *c, d*) показало, что вольфрам распределён равномерно в алюминиевой матрице.

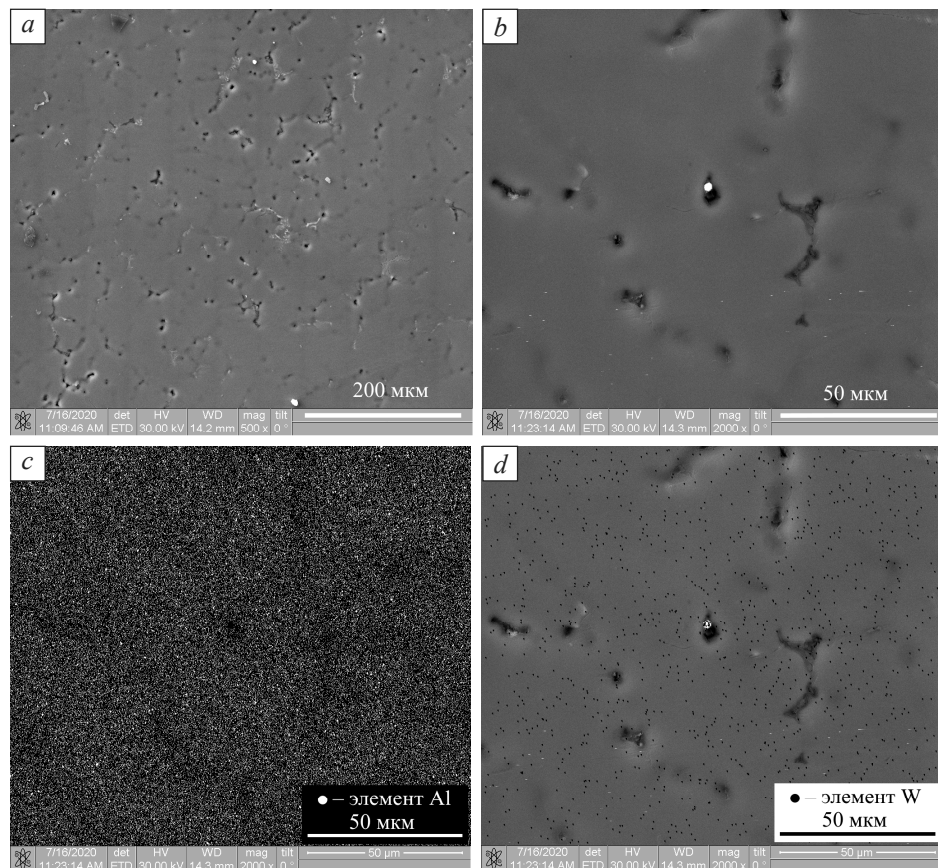


Рис. 3. РЭМ-изображения 1550-W (*a, b*) и результаты картирования по элементам (*c, d*)
Fig. 3. (*a, b*) SEM images of the 1550-W alloy and (*c, d*) elemental mapping results

Диаграммы нагружения и характеристики полученных сплавов представлены на рис. 4 и в таблице соответственно.

Из диаграммы нагружения полученных сплавов (рис. 4) видно, что введение в сплав наночастиц вольфрама приводит к увеличению значений предела текучести и максимальных деформаций до разрушения сплава 1550. Введение 0.5 мас.% наночастиц вольфрама приводит к увеличению значений предела текучести с 52 до 79 МПа и максимальных деформаций до разрушения с 1.9 до 5.5%. Также наблюдается незначительное увеличение значений предела прочности с 140 до 155 МПа. Авторы [30] наблюдали аналогичную зависимость для алюминиевого сплава, когда увеличиваются значения предела текучести, предела прочности и максимальных деформаций. Предполагается, что введение частиц в тело зерна может привести к отклонению потенциальной трещины от границы зерна в его объем, а также к большему вовлечению металлической матрицы в процесс деформации и разрушения [31, 32]. Кроме этого, введение наночастиц вольфрама приводит

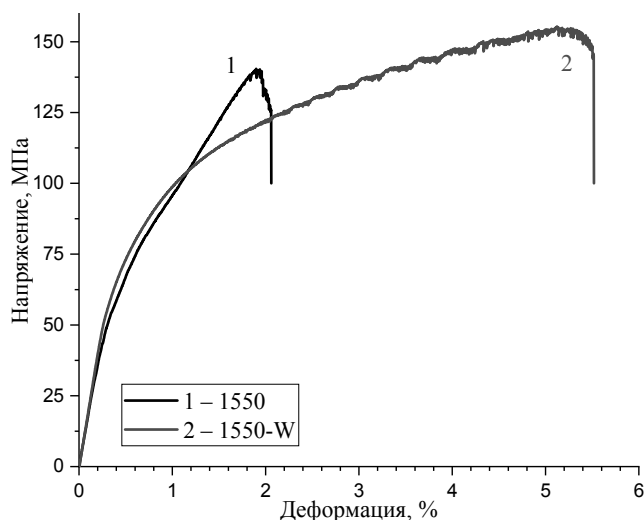


Рис. 4. Диаграммы растяжения алюминиевых сплавов: 1550 (1) и 1550-W (2)

Fig. 4. Tensile diagrams for aluminum alloys: (1) 1550 and (2) 1550-W

Структурные и механические характеристики полученных сплавов

Сплав	Размер зерна, мкм	Твёрдость, НВ	Микротвёрдость, НВ	$\sigma_{0.2}$, МПа	σ_B , МПа	$\epsilon_{\max}$, %
1550	250 ± 17	58.8 ± 3	67.4 ± 11.2	52.5 ± 3	140 ± 7.6	1.9 ± 0.8
1550-0.5 W	158 ± 26	63.7 ± 1.1	85.7 ± 14.4	79.4 ± 1.6	155.4 ± 6	5.5 ± 1.13

к увеличению твёрдости и микротвёрдости (таблица) сплава 1550 с 58 до 63 НВ и с 67 до 85 НВ соответственно. Основываясь на данных микроструктуры (рис. 2), можно предположить, что увеличение механических характеристик происходит за счёт механизмов Орована [33, 34], разности коэффициентов теплового расширения (КТР) матрицы и частиц [35] и передачи нагрузки от частиц к матрице [36]. Механизм передачи нагрузки от частиц к матрице можно оценить с использованием формулы

$$\sigma_{load} = 0.5V_p\sigma_m, \quad (1)$$

где V_p – объёмное содержание наночастиц вольфрама, а σ_m – предел текучести матрицы (52.5 МПа).

Вклад механизма передачи нагрузки от частиц к матрице в данном случае составил 1.83 МПа. Это обусловлено высокой плотностью вольфрама (19.25 г/см^3), объёмное содержание которого в сплаве не превышает 0.07 об. %. При этом такой массовый процент частиц в сплаве, как правило, используется при модифицировании алюминиевых сплавов, например микрочастицами TiB_2 [37], в результате чего происходит измельчение зерна сплава.

Вклад механизма Орована рассчитывается по формуле

$$\sigma_{OR} = \frac{0.13bG_m}{\lambda} \ln \frac{d_p}{2b}, \quad (2)$$

где λ – значение, учитывающее размер и объёмное содержание частиц, которое рассчитывается как

$$\lambda = d_p \left(\left(\frac{1}{2V_p} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right), \quad (3)$$

где b – вектор Бюргерса; G_m – модуль сдвига; d_p – диаметр наночастиц.

Рассчитанный вклад наночастиц вольфрама в механические свойства сплава 1550 по механизму Орована составил 30.5 МПа. Вклад механизма разности КТР матрицы и частиц рассчитывается по формуле

$$\Delta\sigma_{\text{СТЕ}} = \beta G b \left(\frac{12(a_m - a_p)\Delta T V_p}{b l_p (1 - V_p)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

где l_p – расстояние между частицами; β – константа (~ 1.25); a_m – КТР матрицы ($23 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$); a_p – КТР частиц; ΔT – разность между температурой синтеза (725°C) и комнатной температурой (25°C).

Несмотря на то, что вольфрам имеет более низкий КТР по сравнению с алюминиевой матрицей, расчёт вклада данного механизма невозможен из-за малого объёмного содержания наночастиц, что свидетельствует о доминирующем действии механизма Орована в увеличении механических свойств сплава. Исследования поверхности разрушения сплавов 1550-W (рис. 5) позволили выявить наночастицы вольфрама в структуре алюминиевого сплава.

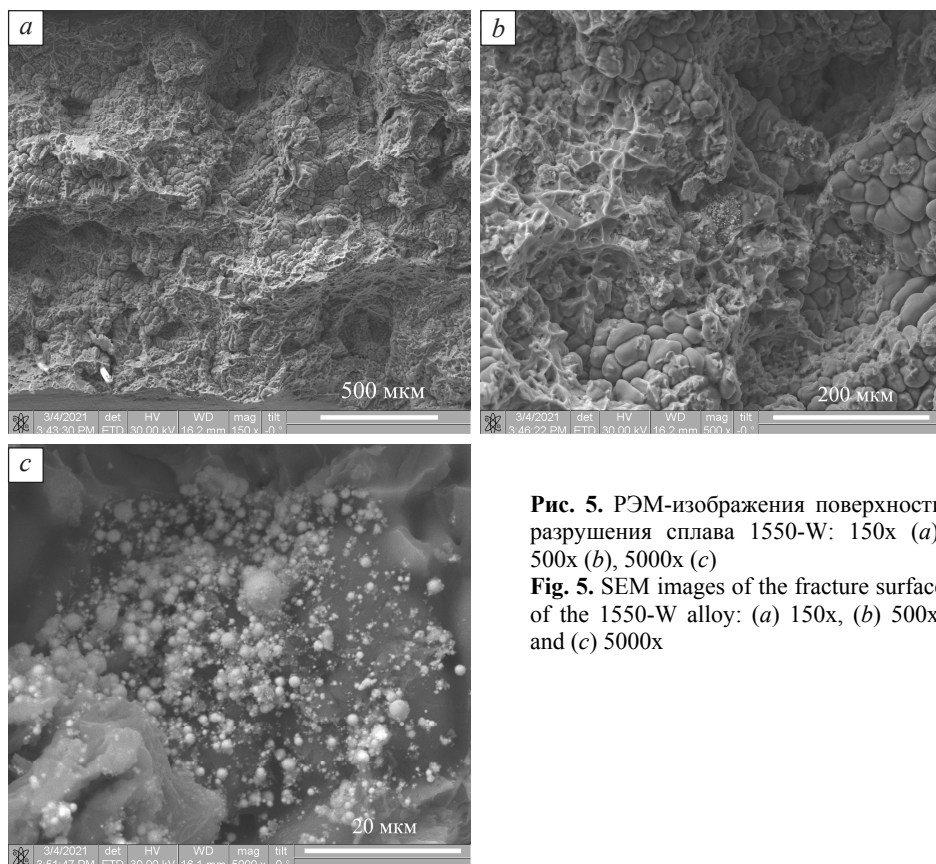


Рис. 5. РЭМ-изображения поверхности разрушения сплава 1550-W: 150х (а), 500х (б), 5000х (с)

Fig. 5. SEM images of the fracture surface of the 1550-W alloy: (a) 150x, (b) 500x, and (c) 5000x

В целом разрушение сплава 1550-W (рис. 5, *a*) имеет явно выраженное разрушение по вязкому транскристаллитному механизму. На поверхности дендритов (рис. 5, *b*) отсутствуют частицы вольфрама и их агломераты, что свидетельствует о малом количестве упрочнителей, находящихся в микропорах сплава, как было показано на рис. 3, *a*. Стоит отметить, что при исследовании структуры на оптическом микроскопе в сплаве 1550-W были определены участки с дефектами (рис. 2, *b*), которые, по всей видимости, результат не полностью однородного распределения наночастиц вольфрама в сплаве: в объёме слитка присутствуют скопления отдельных наночастиц и их агломератов (рис. 5, *c*).

Процесс получения алюминиевого сплава требует оптимизации для более равномерного распределения наночастиц. Кроме этого, важным является исследование влияния объёмного содержания «тяжёлых» наночастиц вольфрама на изменение механических свойств алюминиевого сплава 1550.

Заключение

Установлено, что наночастицы вольфрама не позволяют измельчать размер зерна алюминиевого сплава 1550, средний размер которого составил 180 мкм.

Введение наночастиц вольфрама позволило повысить показатели твёрдости и микротвёрдости сплава с 58 до 63 НВ и с 67 до 85 НВ соответственно, значения предела текучести с 52 до 79 МПа, предела прочности со 140 до 155 МПа и максимальных деформаций до разрушения с 1.9 до 5.5%. С использованием расчётных данных показано, что доминирующим механизмом увеличения механических свойств является механизм Орована. На основе фрактографических исследований установлено, что наночастицы вольфрама неравномерно распределены в объёме сплава, а дополнительная оптимизация процесса введения наночастиц и литья сплава должна позволить улучшить прочностные свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kawazoe M., Shibata T., Mukai T., Higashi K. Elevated temperature mechanical properties of A 5056 Al-Mg alloy processed by equal-channel-angular-extrusion // *Scripta Materialia*. 1997. V. 36(6). P. 699–705. DOI: 10.1016/S1359-6462(96)00446-0.
2. Jones R.H. The influence of hydrogen on the stress-corrosion cracking of low-strength Al-Mg alloys // *JOM*. 2003. V. 55(2). P. 42–46. DOI: 10.1007/s11837-003-0225-5.
3. Kannan C., Ramanujam R. Advanced liquid state processing techniques for ex-situ discontinuous particle reinforced nanocomposites: A review // *Science and Technology of Materials*. 2018. V. 30(2). P. 109–119. DOI: 10.1016/j.stmat.2018.05.005.
4. Meti V.K.V., Shirur S., Nampoothiri J., Ravi K.R., Siddhalingeswar I.G. Synthesis, characterization and mechanical properties of AA7075 based MMCs reinforced with TiB₂ particles processed through ultrasound assisted in-situ casting technique // *Transactions of the Indian Institute of Metals*. 2018. V. 71(4). P. 841–848. DOI: 10.1007/s12666-017-1216-5.
5. Basak A.K., Pramanik A., Prakash C. Deformation and strengthening of SiC reinforced Al-MMCs during in-situ micro-pillar compression // *Materials Science and Engineering: A*. 2019. V. 763. Article 138141. P. 1–9. DOI: 10.1016/j.msea.2019.138141.
6. Jafari H., Idris M.H., Ourdjini A., Abdul Kadir M.R. An investigation on interfacial reaction between in-situ melted AZ91D magnesium alloy and ceramic shell mold during investment casting process // *Materials Chemistry and Physics*. 2013. V. 138(2–3). P. 672–681. DOI: 10.1016/j.matchemphys.2012.12.037.
7. Tahamtan S., Halvaei A., Emamy M., Zabihi M.S. Fabrication of Al/A206–Al₂O₃ nano/micro composite by combining ball milling and stir casting technology // *Materials & Design*. 2013. V. 49. P. 347–359. DOI: 10.1016/j.matdes.2013.01.032.

8. Hosseini N., Karimzadeh F., Abbasi M.H., Enayati M.H. Tribological properties of Al6061–Al₂O₃ nanocomposite prepared by milling and hot pressing // *Materials & Design*. 2010. V. 31(10). P. 4777–4785. DOI: 10.1016/j.matdes.2010.05.001.
9. Adeosun S.O., Akpan E.I., Gbenezor O.P., Balogun S.A. Ductility and hardness of chloride cleaned AA6011/SiCp composites // *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*. 2016. V. 26(2). P. 339–347. DOI: 10.1016/S1003-6326(16)64124-9.
10. Goyal H., Mandal N., Roy H., Mitra S.K., Mondal B. Multi response optimization for processing Al–SiCp composites: An approach towards enhancement of mechanical properties // *Transactions of the Indian Institute of Metals*. 2015. V. 68(3). P. 453–463. DOI: 10.1007/s12666-014-0476-6.
11. Abdizadeh H., Baghchesara M.A. Optimized parameters for enhanced properties in Al–B₄C composite // *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2018. V. 43. P. 4475–4485. DOI: 10.1007/s13369-017-2929-9.
12. Khademian M., Alizadeh A., Abdollahi A. Fabrication and characterization of hot rolled and hot extruded boron carbide (B₄C) reinforced A356 aluminum alloy matrix composites produced by stir casting method // *Transactions of the Indian Institute of Metals*. 2017. V. 70(6). P. 1635–1646. DOI: 10.1007/s12666-016-0962-0.
13. Sun Z., Hashimoto H., Wang Q., Park Y., Abe T. Synthesis of Al–Al₃Ti composites using pulse discharge sintering process // *Materials Transactions, JIM*. 2000. V. 41(5). P. 597–600. DOI: 10.2320/matertrans1989.41.597.
14. Akbari M.K., Baharvandi H.R., Shirvanimoghaddam K. Tensile and fracture behavior of nano/micro TiB₂ particle reinforced casting A356 aluminum alloy composites // *Materials and Design*. 2015. V. 66. P. 150–161. DOI: 10.1016/j.matdes.2014.10.048.
15. Katsarou L., Mounib M., Lefebvre W., Vorozhtsov S., Pavese M., Badini C., Molina-Aldareguia J.M., Jimenez C.C., Pérez Prado M.T., Dieringa H. Microstructure, mechanical properties and creep of magnesium alloy Elektron21 reinforced with AlN nanoparticles by ultrasound-assisted stirring // *Materials Science and Engineering: A*. 2016. V. 659. P. 84–92. DOI: 10.1016/j.msea.2016.02.042.
16. Sreekumar V.M., Babu N.H., Eskin D.G. Prospects of in-situ α -Al₂O₃ as an inoculant in aluminum: A feasibility study // *Journal of Materials Engineering and Performance*. 2017. V. 26(9). P. 4166–4176. DOI: 10.1007/s11665-017-2853-x.
17. Dieringa H. Properties of magnesium alloys reinforced with nanoparticles and carbon nanotubes: A review // *Journal of Materials Science*. 2011. V. 46(2). pp. 289–306. DOI: 10.1007/s10853-010-5010-6.
18. Puga H., Costa S., Barbosa J., Ribeiro S., Prokic M. Influence of ultrasonic melt treatment on microstructure and mechanical properties of AlSi₉Cu₃ alloy // *Journal of Materials Processing Technology*. 2011. V. 211(11). P. 1729–1735. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2011.05.012.
19. Kudryashova O.B., Eskin D.G., Khrustalev A.P., Vorozhtsov S.A. Ultrasonic effect on the penetration of the metallic melt into submicron particles and their agglomerates // *Russian Journal of Non-Ferrous Metals*. 2017. V. 58(4). P. 427–433. DOI: 10.3103/S1067821217040101.
20. Zhang F., Jacobi A.M. Aluminum surface wettability changes by pool boiling of nanofluids // *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. 2016. V. 506. P. 438–444. DOI: 10.1016/j.colsurfa.2016.07.026.
21. Lee S., Utsunomiya A., Akamatsu H., Neishi K., Furukawa M., Horita Z., Langdon T.G. Influence of scandium and zirconium on grain stability and superplastic ductilities in ultrafine-grained Al–Mg alloys // *Acta Materialia*. 2002. V. 50(3). P. 553–564. DOI: 10.1016/S1359-6454(01)00368-8.
22. Filatov Y.A., Yelagin V.I., Zakharov V.V. New Al–Mg–Sc alloys // *Materials Science and Engineering: A*. 2000. V. 280(1). P. 97–101. DOI: 10.1016/S0921-5093(99)00673-5.
23. Ahmad Z. The properties and application of scandium-reinforced aluminum // *JOM*. 2003. V. 55(2). P. 35–39. DOI: 10.1007/s11837-003-0224-6.

24. Krishnan B.P., Surappa M.K., Rohatgi P.K. The UPAL process: A direct method of preparing cast aluminium alloy-graphite particle composites // *Journal of Materials Science*. 1981. V. 16. P. 1209–1216. DOI: 10.1007/BF01033834.
25. Javdani A., Pouyafar V., Ameli A., Volinsky A.A. Blended powder semisolid forming of Al7075/Al₂O₃ composites: Investigation of microstructure and mechanical properties // *Materials & Design*. 2016. V. 109. P. 57–67. DOI: 10.1016/j.matdes.2016.07.042.
26. Cao X., Shi Q., Liu D., Feng Z., Liu Q., Chen G. Fabrication of in situ carbon fiber/aluminum composites via friction stir processing: Evaluation of microstructural, mechanical and tribological behaviors // *Composites Part B*. 2018. V. 139. P. 97–105. DOI: 10.1016/j.compositesb.2017.12.001.
27. Singh R., Singh R., Dureja J.S., Farina I., Fabbrocino F. Investigations for dimensional accuracy of Al alloy/Al-MMC developed by combining stir casting and ABS replica based investment casting // *Composites Part B: Engineering*. 2017. V. 115. P. 203–208. DOI: 10.1016/j.compositesb.2016.10.008.
28. Philofsky E. Intermetallic formation in gold-aluminum systems // *Solid-State Electron*. 1970. V. 13(10). P. 1391–1394. DOI: 10.1016/0038-1101(70)90172-3.
29. Dixit S., Kashyap S., Kailas S.V., Chattopadhyaya K. Manufacturing of high strength aluminium composites reinforced with nano tungsten particles for electrical application and investigation on in-situ reaction during processing // *Journal of Alloys and Compounds*. 2018. V. 767. P. 1072–1082. DOI: 10.1016/j.jallcom.2018.07.110.
30. Promakhov V.V., Khmeleva M.G., Zhukov I.A., Platov V.V., Khrustalyov A.P., Vorozhtsov A.B. Influence of vibration treatment and modification of A356 aluminum alloy on its structure and mechanical properties // *Metals*. 2019. V. 9(1). Article 87. P. 1–9. DOI: 10.3390/met9010087.
31. Dieringa H., Katsarou L., Buzolin R., Szakács G., Horstmann M., Wolff M., Mendis C., Vorozhtsov S., StJohn D. Ultrasound assisted casting of an AM60 based metal matrix nanocomposite, its properties, and recyclability // *Metals*. 2017. V. 7(10). Article 388. P. 1–13. DOI: 10.3390/met7100388.
32. Belov N.A. Effect of eutectic phases on the fracture behavior of high-strength castable aluminum alloys // *Metal Science and Heat Treatment*. 1995. V. 37(5–6). P. 237–242. DOI: 10.1007/BF01152226.
33. Zhang Z., Chen D.L. Contribution of Orowan strengthening effect in particulate-reinforced metal matrix nanocomposites // *Materials Science and Engineering: A*. 2008. V. 483–484. P. 148–152. DOI: 10.1016/j.msea.2006.10.184.
34. Samal P., Vundavilli P.R., Meher A., Mahapatra M.M. Recent progress in aluminum metal matrix composites: A review on 1055 processing, mechanical and wear properties // *Journal of Manufacturing Processes*. 2020. V. 59. P. 131–152. DOI: 10.1016/j.jmapro.2020.09.010.
35. Sreekumar V.M., Babu N.H., Eskin D.G., Fan Z. Structure–property analysis of in-situ Al–MgAl₂O₄ metal matrix composites synthesized using ultrasonic cavitation // *Materials Science and Engineering: A*. 2015. V. 628. P. 30–40. DOI: 10.1016/j.msea.2015.01.029.
36. Ramakrishnan N. An analytical study on strengthening of particulate reinforced metal matrix composites // *Acta Materialia*. 1996. V. 44(1). P. 69–77. DOI: 10.1016/1359-6454(95)00150-9.
37. Khrustalyov A.P., Kozulin A.A., Zhukov I.A., Khmeleva M.G., Vorozhtsov A.B., Eskin D., Chankitmongk S., Platov V.V., Vasilyev S.V. Influence of titanium diboride particle size on structure and mechanical properties of an Al-Mg alloy // *Metals*. 2019. V. 9(10). Article 1030. P. 1–14. DOI: 10.3390/met9101030.

Khrustalyov A.P., Platon V.V., Kakhidze N.I., Zhukov I.A., Vorozhtsov A.B. (2021) INFLUENCE OF TUNGSTEN NANOPARTICLES ON THE STRUCTURE AND MECHANICAL BEHAVIOR OF THE 1550 ALUMINUM ALLOY UNDER QUASI-STATIC LOADING. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 141–153

DOI 10.17223/19988621/74/14

Keywords: dispersion-hardened alloys, nanosized particles, structure, mechanical properties, ductility.

Aluminum alloys are widely used in industry due to such parameters as low cost, high corrosion resistance, low density, and good weldability. In this regard, new aluminum alloys with improved strength and operational properties are needed. At present, it is important to increase strength properties of aluminum alloys by introducing into their melt high-melting high-modulus nano- and microparticles that can significantly refine the grain structure and contribute to the stress-strain state. As a rule, in works on the introduction of pre-synthesized refractory dispersed particles into aluminum melts, non-metallic materials, such as oxides, nitrides, carbides, and intermetallic compounds, are used. However, the effect of high-melting tungsten particles on the structure and physical and mechanical properties of aluminum alloys has been insufficiently studied.

The paper investigates the effect of tungsten nanoparticles on the structure and mechanical properties of an AA5056 alloy. The structures of the AA5056-W composite and initial alloy are studied by means of optical and scanning electron microscopy. Introduction of 0.5 wt% tungsten nanoparticles does not modify the structure of the aluminum alloy, but due to dispersed hardening, it increases the hardness, yield stress, ultimate strength, and maximum deformation before metal matrix destruction.

Financial support. This work was financially supported by the Russian Science Foundation (grant No. 20-79-00060).

Anton P. KHRUSTALYOV (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tofik0014@gmail.com

Vladimir V. PLATOV (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vova.platov.85@mail.ru

Nikolay I. KAKHIDZE (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kakhidze.n@yandex.ru

Il'ya A. ZHUKOV (Candidate of Technical Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gofra930@gmail.com

Aleksandr B. VOROZHTSOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: abv1953@mail.ru

REFERENCES

1. Kawazoe M., Shibata T., Mukai T., Higashi K. (1997) Elevated temperature mechanical properties of a 5056 Al-Mg alloy processed by equal-channel-angular-extrusion. *Scripta Materialia*. 36(6). pp. 699–705. DOI: 10.1016/S1359-6462(96)00446-0.
2. Jones R.H. (2003) The influence of hydrogen on the stress-corrosion cracking of low-strength Al-Mg alloys. *JOM*. 55(2). pp. 42–46. DOI: 10.1007/s11837-003-0225-5.
3. Kannan C., Ramanujam R. (2018) Advanced liquid state processing techniques for ex-situ discontinuous particle reinforced nanocomposites: a review. *Science and Technology of Materials*. 30(2). pp. 109–119. DOI: 10.1016/j.stmat.2018.05.005.

4. Meti V.K.V., Shirur S., Nampoothiri J., Ravi K.R., Siddhalingeswar I.G. (2018) Synthesis, characterization and mechanical properties of AA7075 based MMCs reinforced with TiB_2 particles processed through ultrasound assisted in-situ casting technique. *Transactions of the Indian Institute of Metals*. 71(4). pp. 841–848. DOI: 10.1007/s12666-017-1216-5.
5. Basak A.K., Pramanik A., Prakash C. (2019) Deformation and strengthening of SiC reinforced Al-MMCs during in-situ micro-pillar compression. *Materials Science and Engineering: A*. 763. Article 138141. pp. 1–9. DOI: 10.1016/j.msea.2019.138141.
6. Jafari H., Idris M.H., Ourdjini A., Abdul Kadir M.R. (2013) An investigation on interfacial reaction between in-situ melted AZ91D magnesium alloy and ceramic shell mold during investment casting process. *Materials Chemistry and Physics*. 138(2-3). pp. 672–681. DOI: 10.1016/j.matchemphys.2012.12.037.
7. Tahamtan S., Halvae A., Emamy M., Zabihi M.S. (2013) Fabrication of Al/A206– Al_2O_3 nano/micro composite by combining ball milling and stir casting technology. *Materials & Design*. 49. pp. 347–359. DOI: 10.1016/j.matdes.2013.01.032.
8. Hosseini N., Karimzadeh F., Abbasi M.H., Enayati M.H. (2010) Tribological properties of $Al6061-Al_2O_3$ nanocomposite prepared by milling and hot pressing. *Materials & Design*. 31(10). pp. 4777–4785. DOI: 10.1016/j.matdes.2010.05.001.
9. Adeosun S.O., Akpan E.I., Gbenebor O.P., Balogun S.A. (2016) Ductility and hardness of chloride cleaned AA6011/SiCp composites. *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*. 26(2). pp. 339–347. DOI: 10.1016/S1003-6326(16)64124-9.
10. Goyal H., Mandal N., Roy H., Mitra S.K., Mondal B. (2015) Multi response optimization for processing Al–SiCp composites: An approach towards enhancement of mechanical properties. *Transactions of the Indian Institute of Metals*. 68(3). pp. 453–463. DOI: 10.1007/s12666-014-0476-6.
11. Abdizadeh H., Baghchesara M.A. (2018) Optimized parameters for enhanced properties in Al– B_4C composite. *Arabian Journal for Science and Engineering*. 43. pp. 4475–4485. DOI: 10.1007/s13369-017-2929-9.
12. Khademian M., Alizadeh A., Abdollahi A. (2017) Fabrication and characterization of hot rolled and hot extruded boron carbide (B_4C) reinforced A356 aluminum alloy matrix composites produced by stir casting method. *Transactions of the Indian Institute of Metals*. 70(6). pp. 1635–1646. DOI: 10.1007/s12666-016-0962-0.
13. Sun Z., Hashimoto H., Wang Q., Park Y., Abe T. (2000) Synthesis of Al– Al_3Ti composites using pulse discharge sintering process. *Materials Transactions, JIM*. 41(5). pp. 597–600. DOI: 10.2320/matertrans1989.41.597.
14. Akbari M.K., Baharvandi H.R., Shirvanimoghaddam K. (2015) Tensile and fracture behavior of nano/micro TiB_2 particle reinforced casting A356 aluminum alloy composites. *Materials and Design*. 66. pp. 150–161. DOI: 10.1016/j.matdes.2014.10.048.
15. Katsarou L., Mounib M., Lefebvre W., Vorozhtsov S., Pavese M., Badini C., Molina-Aldareguia J.M., Jimenez C.C., Pérez Prado M.T., Dieringa H. (2016) Microstructure, mechanical properties and creep of magnesium alloy Elektron21 reinforced with AlN nanoparticles by ultrasound-assisted stirring. *Materials Science and Engineering: A*. 659. pp. 84–92. DOI: 10.1016/j.msea.2016.02.042.
16. Sreekumar V.M., Babu N.H., Eskin D.G. (2017) Prospects of in-situ $\alpha-Al_2O_3$ as an inoculant in aluminum: a feasibility study. *Journal of Materials Engineering and Performance*. 26(9). pp. 4166–4176. DOI: 10.1007/s11665-017-2853-x.
17. Dieringa H. (2011) Properties of magnesium alloys reinforced with nanoparticles and carbon nanotubes: a review. *Journal of Materials Science*. 46(2). pp. 289–306. DOI: 10.1007/s10853-010-5010-6.
18. Puga H., Costa S., Barbosa J., Ribeiro S., Prokic M. (2011) Influence of ultrasonic melt treatment on microstructure and mechanical properties of $AlSi_9Cu_3$ alloy. *Journal of Materials Processing Technology*. 211(11). pp. 1729–1735. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2011.05.012.
19. Kudryashova O.B., Eskin D.G., Khrestalev A.P., Vorozhtsov S.A. (2017) Ultrasonic effect on the penetration of the metallic melt into submicron particles and their agglomerates. *Rus-*

- sian Journal of Non-Ferrous Metals*. 58(4). pp. 427–433. DOI: 10.3103/S1067821217040101.
20. Zhang F., Jacobi A.M. (2016) Aluminum surface wettability changes by pool boiling of nano-fluids. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. 506. pp. 438–444. DOI: 10.1016/j.colsurfa.2016.07.026.
 21. Lee S., Utsunomiya A., Akamatsu H., Neishi K., Furukawa M., Horita Z., Langdon T.G. (2002) Influence of scandium and zirconium on grain stability and superplastic ductilities in ultrafine-grained Al–Mg alloys. *Acta Materialia*. 50(3). pp. 553–564. DOI: 10.1016/S1359-6454(01)00368-8.
 22. Filatov Y.A., Yelagin V.I., Zakharov V.V. (2000) New Al–Mg–Sc alloys. *Materials Science and Engineering: A*. 280(1). pp. 97–101. DOI: 10.1016/S0921-5093(99)00673-5.
 23. Ahmad Z. (2003) The properties and application of scandium-reinforced aluminum. *JOM*. 55(2). pp. 35–39. DOI: 10.1007/s11837-003-0224-6.
 24. Krishnan B.P., Surappa M.K., Rohatgi P.K. (1981) The UPAL process: A direct method of preparing cast aluminium alloy-graphite particle composites. *Journal of Materials Science*. 16. pp. 1209–1216. DOI: 10.1007/BF01033834.
 25. Javdani A., Pouyafar V., Ameli A., Volinsky A.A. (2016) Blended powder semisolid forming of Al7075/Al₂O₃ composites: Investigation of microstructure and mechanical properties. *Materials & Design*. 109. pp. 57–67. DOI: 10.1016/j.matdes.2016.07.042.
 26. Cao X., Shi Q., Liu D., Feng Z., Liu Q., Chen G. (2018) Fabrication of in situ carbon fiber/aluminum composites via friction stir processing: Evaluation of microstructural, mechanical and tribological behaviors. *Composites Part B*. 139. pp. 97–105. DOI: 10.1016/j.compositesb.2017.12.001.
 27. Singh R., Singh R., Dureja J.S., Farina I., Fabbrocino F. (2017) Investigations for dimensional accuracy of Al alloy/Al-MMC developed by combining stir casting and ABS replica based investment casting. *Composites Part B: Engineering*. 115. pp. 203–208. DOI: 10.1016/j.compositesb.2016.10.008.
 28. Philofsky E. (1970) Intermetallic formation in gold-aluminum systems. *Solid-State Electron*. 13(10). pp. 1391–1394 DOI: 10.1016/0038-1101(70)90172-3.
 29. Dixit S., Kashyap S., Kailas S.V., Chattopadhyay K. (2018) Manufacturing of high strength aluminium composites reinforced with nano tungsten particles for electrical application and investigation on in-situ reaction during processing. *Journal of Alloys and Compounds*. 767. pp. 1072–1082. DOI: 10.1016/j.jallcom.2018.07.110.
 30. Promakhov V.V., Khmeleva M.G., Zhukov I.A., Platov V.V., Khrustalyov A.P., Vorozhtsov A.B. (2019) Influence of vibration treatment and modification of A356 aluminum alloy on its structure and mechanical properties. *Metals*. 9(1). Article 87. pp. 1–9. DOI: 10.3390/met9010087.
 31. Dieringa H., Katsarou L., Buzolin R., Szakács G., Horstmann M., Wolff M., Mendis C., Vorozhtsov S., StJohn D. (2017) Ultrasound assisted casting of an AM60 based metal matrix nanocomposite, its properties, and recyclability. *Metals*. 7(10). Article 388. pp. 1–13. DOI: 10.3390/met7100388.
 32. Belov N.A. (1995) Effect of eutectic phases on the fracture behavior of high-strength castable aluminum alloys. *Metal Science and Heat Treatment*. 37(5-6). pp. 237–242. DOI: 10.1007/BF01152226.
 33. Zhang Z., Chen D.L. (2008) Contribution of Orowan strengthening effect in particulate-reinforced metal matrix nanocomposites. *Materials Science and Engineering: A*. 483–484. pp. 148–152. DOI: 10.1016/j.msea.2006.10.184.
 34. Samal P., Vundavilli P.R., Meher A., Mahapatra M.M. (2020) Recent progress in aluminum metal matrix composites: a review on 1055 processing, mechanical and wear properties. *Journal of Manufacturing Processes*. 59. pp. 131–152. DOI: 10.1016/j.jmapro.2020.09.010.
 35. Sreekumar V.M., Babu N.H., Eskin D.G., Fan Z. (2015) Structure–property analysis of in-situ Al–Mg/Al₂O₃ metal matrix composites synthesized using ultrasonic cavitation. *Materials Science and Engineering: A*. 628. pp. 30–40. DOI: 10.1016/j.msea.2015.01.029.

36. Ramakrishnan N. (1996) An analytical study on strengthening of particulate reinforced metal matrix composites. *Acta Materialia*. 44(1). pp. 69–77. DOI: 10.1016/1359-6454(95)00150-9.
37. Khrustalyov A.P., Kozulin A.A., Zhukov I.A., Khmeleva M.G., Vorozhtsov A.B., Eskin D., Chankitmunkong S., Platov V.V., Vasilyev S.V. (2019) Influence of titanium diboride particle size on structure and mechanical properties of an Al-Mg alloy. *Metals*. 9(10). Article 1030. pp. 1–14. DOI: 10.3390/met9101030.

Received: May 05, 2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

SARODE Abhijit P. – PhD, Associate Professor, Dr. Annasaheb G.D. Bendale Girl's College, Jalgaon, India. E-mail: abhijitsarode@yahoo.com

АНТОНОВ Егор Александрович – кандидат технических наук, инженер-конструктор I кат. ПАО «Туполев», г. Москва, Россия. E-mail: Ve.no.m@yandex.ru

БАДМАЕВ Олег Олегович – аспирант кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. badmaev1995@bk.ru

БУРКИН Виктор Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий сектором 71 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: rozaburkina@yandex.ru

БУРМАШЕВА Наталья Владимировна – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института машиноведения УрО РАН, доцент Уральского федерального университета, г. Екатеринбург, Россия. E-mail: nat_burm@mail.ru

ВОРОЖЦОВ Александр Борисович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий научно-исследовательской лабораторией высокоэнергетических и специальных материалов Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: abv1953@mail.ru

ДБЯЧКОВСКИЙ Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: lex_okha@mail.ru

ЖУКОВ Илья Александрович – кандидат технических наук, заведующий лабораторией нанотехнологий металлургии Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: gofra930@gmail.com

ИЩЕНКО Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, заместитель директора по НИР Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

КАНТАРБАЕВА Аружан – студентка физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

КАСИМОВ Владимир Зинатович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией 72 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ksm@niipmm.ru

КАХИДЗЕ Николай Иверьевич – аспирант, инженер-исследователь лаборатории нанотехнологий металлургии Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: kakhidze.n@yandex.ru

КРАВЦОВ Сергей Русланович – студент кафедры прочности летательных аппаратов Новосибирского государственного технического университета, г. Новосибирск, Россия. E-mail: kravcov.seryi@mail.ru

КУСЯКОВ Альфред Шамилевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Пермского государственного национального исследовательского университета, г. Пермь, Россия. E-mail: kusyakov@psu.ru

ЛАРИНА Екатерина Александровна – инженер Института машиноведения УрО РАН, студентка Уральского федерального университета, г. Екатеринбург, Россия. E-mail: larina@hotmail.com

МАМАЗОВА Дилара Абдурасуловна – магистрант Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: mamazova.dilara@mail.ru

МОИСЕЕВА Ксения Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математической физики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

МОЛЧАНОВА Евгения Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий и систем Инженерно-технологического института Хакасского государственного университета им. Н.Ф. Катанова. E-mail: mevgen2001@mail.ru

ПАНЬКО Сергей Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор Томского государственного университета.

ПЛАТОВ Владимир Владимирович – аспирант, младший научный сотрудник лаборатории нанотехнологий металлургии Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: vova.platov.85@mail.ru

ПРОСВИРЯКОВ Евгений Юрьевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института машиноведения УрО РАН, профессор Уральского федерального университета, г. Екатеринбург, Россия. E-mail: evgen_pros@mail.ru

РОГАЕВ Константин Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: rogaev@ftf.tsu.ru

РОДИОНОВ Андрей Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прочности летательных аппаратов Новосибирского государственного технического университета, г. Новосибирск, Россия. E-mail: rodionov@corp.nstu.ru

РЫЛЬЦЕВА Кира Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: kiraworkst@gmail.com

СИДОРОВ Алексей Дмитриевич – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: alex_sid92@mail.ru

СТАРЧЕНКО Александр Васильевич – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского государственного университета. Научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета. E-mail: starch@math.tsu.ru

СЕДНЕВ Максим Андреевич – магистрант кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского государственного университета. E-mail: sednev99@mail.ru

СТЕПАНОВ Евгений Юрьевич – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: stepanov_eu@mail.ru

СТЕПАНОВА Александра Юрьевна – аспирантка механико-математического факультета Томского государственного университета, инженер Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: stepanova.alexa@mail.ru

ТИМОШЕНКО Егор Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: tea471@mail.tsu.ru

ХАЛИЛОВ Эльнур Гасан оглы – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности, г. Баку, Азербайджан. E-mail: elnurkhalil@mail.ru

ХРУСТАЛЁВ Антон Павлович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории нанотехнологий металлургии Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: tofik0014@gmail.com

ШРАГЕР Геннадий Рафаилович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной газодинамики и горения Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: shg@ftf.tsu.ru

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634034, г. Томск, ул. Студенческая, 4

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 17.12.2021. Выпуск в свет 24.12.2021.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 12.58. Уч.-изд. л. 14.08. Тираж 250 экз. Заказ № 24. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 4891.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru