

МОНОЛОГИ, ДИАЛОГИ, ДИСКУССИИ

УДК 168.5

DOI: 10.17223/1998863X/63/21

Ю.В. Ивлев

КВАЗИФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ В ЛОГИКЕ И ДРУГИХ ОБЛАСТЯХ ЗНАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-111-50323.

В статье дается обзор основных результатов исследований по применению принципа квазифункциональности (квазидетерминизма, ограниченного детерминизма, недетерминизма) в области логики, математики, гносеологии, естественнонаучного, технического и социального знания. Приведены способы построения квазифункциональных логик алетических онтологических и логических модальностей и деонтической логики. Формулируются задачи дальнейшего исследования квазифункциональной логики и методологической роли принципа квазидетерминизма. Ключевые слова: квазифункциональность, квазидетерминизм, недетерминистская логика

Введение

Классическая наука в основном исследовала причинно-следственные отношения между явлениями, которые подчиняются принципу детерминизма: *определенное явление при определенных условиях вызывает определенное следствие*. Эти отношения выразимы посредством функций. Под функцией можно понимать операцию, применяя которую к определенному объекту из области определения функции, получаем определенный объект из области значений функции.

В природе, социуме, познании существуют отношения другого типа. Они подчиняются принципу квазидетерминизма: *какое-то из нескольких явлений при каком-то из нескольких условий вызывает какое-то из нескольких следствий*. Эти отношения выразимы посредством квазифункций.

Будем понимать под квазифункцией операцию, применяя которую к какому-то объекту из подмножества области определения (теперь уже) квазифункции, получаем какой-то объект из подмножества области значений квазифункции. Поскольку подмножества областей определений и значений квазифункции могут состоять из одного объекта, то частным случаем квазифункции является функция. Частным случаем квазифункции является также полная неопределенность (хаотичность), если подмножества, из которых выбираются объекты, совпадают с областями определений и значений квазифункции.

Поскольку функция может быть вероятностной, многозначной и т.д., то и квазифункция может быть такой же.

А. Квазифункциональные отношения в логике

При обзоре исследований по применению принципа квазифункциональности в логике будем исходить из следующего понимания логики. Логика – наука о мышлении, т.е. мышление – объект науки логики. Поскольку мышление изучается рядом наук, нужно выделить предмет науки логики. Предметом логики являются особые структуры мыслей и процессов мышления, называемые логическими структурами или логическими формами. Элементарными мыслями по виду их логических форм являются мысли, выражаемые в языке без использования логических терминов. Предметы здесь выделяются на основе зрительных образов или интуитивных представлений. Неэлементарные мысли выражаются в языке с использованием логических терминов. Очевидно, что умозаключения не являются элементарными мыслями.

Логические термины могут быть эмпирическими и теоретическими, т.е., как и во многих других науках, в логике выделяются уровни исследования – эмпирический и теоретический. Теоретическое знание – модель эмпирического. Модель эмпирического объекта познания упрощает моделируемый объект для облегчения познания и, как правило, искажает его. Например, материальная импликация соответствует условной связи и отношению логического следования, когда при истинности антецедента и ложности консеквента принимает значение «ложь», но не соответствует в остальных случаях определения. Однако материальная импликация упрощает проверку умозаключений. При обзоре будем различать эмпирические и теоретические уровни исследования.

Кроме того, в качестве методологического средства будет использоваться выделение исследований по (собственно) логике и по «как-бы-логике». «Как-бы-логика» (“as-if-logic”) образуется путем реконструкции собственно логики и, по крайней мере в период ее создания, имеет лишь гипотетическое отношение к логическим формам мыслей и процессов мышления [1].

0. Квази-истинностно-функциональная логика Решера

В 1962 г. Н. Решер (Nicholas Rescher) опубликовал статью «Квази-истинностно-функциональные системы пропозициональной логики» [2]. Он обсуждает определение материальной импликации в классической логике. Считает, что случаи определения, когда антецедент и консеквент импликации принимают значение «истина», а также когда антецедент истинный, а консеквент ложный, сомнений не вызывают. В остальных двух случаях значение импликации не определено. Импликация либо истинна, либо ложна. Он отмечает, что неопределенность – это не особое значение.

Решер формулирует логическую систему **Q**, в которой остальные логические связки (отрицание, конъюнкция и дизъюнкция) определяются обычным образом. Он отмечает возможность считать выделенными значениями формул не только истину, но и неопределенность. Тогда теоремами являются только те формулы, которые при любом наборе значений переменных принимают значение «истина» или указанную неопределенность. Такие формулы называются квазитавтологиями.

Решер отмечает, что идея применения квази-истинностной функциональности в логике у него возникла в 1960 г. [2. Р. 10]. В этом же году, пишет Решер, выражение «квази-истинностно-функциональное» употребил Мей Аддед (Added May) [3]. Также это выражение до Решера употреблял Л. Годдард (L. Goddard) [Ibid.]. Последний дал квазифункциональное определение модальности «возможно». Если A истинно, то $\Diamond A$ тоже истинно. Если A ложно, то $\Diamond A$ либо истинно, либо ложно. ($\Diamond$ – знак возможности.)

Если посмотреть на исследование Решера с точки зрения эмпирического и теоретического уровней знания, то можно заметить, что случай в определении материальной импликации в классической логике высказываний, когда антецедент и консеквент имеют значение «истина», тоже не соответствует эмпирической условной связке «если..., то...». В этом случае квазифункциональной импликации тоже можно приписать неопределенность. Дальнейшее развитие эти идеи получили в других работах Решера [4]. Он вводит новые значения: «необходимая истина», «случайная истина», «необходимая ложь», «случайная ложь» (“necessarily true”, “contingently true”, “necessarily false”, “contingently false” соответственно).

1. Алетические модальности

Алетические модальности, т.е. выражения «необходимо», «случайно» и «возможно», могут быть онтологическими и логическими.

Логическая система, которая построена в 1969 г., позже была названа S_{min} , выражает логические свойства тех и других [5]. В ней логические термины классической логики определяются обычным образом. При значении t (истина) формулы A формула $\Box A$ принимает либо значение t , либо значения f (ложь), а при значении f формулы A формула $\Box A$ принимает значение f . ($\Box$ – знак необходимости.) Формула $\Diamond A$ при значении t формулы A имеет значение t , а при значении f формулы A – либо значение t , либо значение f . Выделенное значение – t . К исчислению классической логики высказываний добавляются две схемы аксиом: $\Box A \supset A$, $A \supset \Diamond A$. Доказана адекватность семантики исчислению обобщенным методом Хенкина, а позже обобщенным методом Кальмара.

Замечание. Работая в области модальной логики, автор данной статьи не был знаком с исследованиями Решера и его предшественников. С одной стороны, это является недостатком, а с другой стороны, это позволило выделить собственно модальный аспект проблемы, оставив неизменными логические термины классической логики высказываний. Кроме того, позволило отойти от стремления представить неопределенность в качестве отдельного значения, что во многих случаях, несмотря на заявления об обратном, наблюдается в работах предшественников.

В публикации 1973 г. [6] представлен квазифункциональный подход к пониманию онтологических и логических модальностей. Введены значения t^N , t^C , f^i , f^C для онтологических модальностей (соответственно понимаются «истинно и необходимо», «истинно и случайно», «ложно и невозможно», «ложно и случайно») и t^N , t^C , f^i , f^C для логических модальностей (понимаются аналогично, только модальности логические). Квазифункциональность заключается, в частности, в следующем: если высказывание истинно, то

выражаемая им ситуация необходима или случайна (онтологически или логически), если же оно ложно, то ситуация невозможна или случайна (тоже онтологически или логически).

1.1. Онтологические модальности

При построении логики онтологических алетических модальностей [6–20] использованы указанные выше значения высказываний t^n , t^c , f^i , f^c . При определении модальных операторов возникал вопрос, что если высказывание A имеет значение t^n , т.е. ситуация, выражаемая этим высказыванием, имеет место и она детерминирована какими-либо обстоятельствами, то, например, сами эти обстоятельства детерминированы какими-либо другими обстоятельствами или не детерминированы. Может быть и то, и другое, и третье. То есть если эти другие обстоятельства детерминируют (однозначно обуславливают) это обстоятельство, то формула $\Box A$ примет значение t^n . Если не детерминируют, то примет значение t^c . Допустима третья возможность – «то ли детерминируют, то ли нет», что может зависеть от каких-то условий. В последнем случае формула $\Box A$ принимает то ли значение t^n , то ли значение t^c . Пишется t^n/t^c . Аналогично происходит рассуждение при приписывании значений формуле $\Diamond A$. В конечном счете получаются девять возможных вариантов приписывания значений итерированным (повторяющимся) модальностям. Эти варианты обозначены буквами a, b, c, d, e, f, g, h, i.

Вариант a

A	t^n	t^c	f^i	f^c
$\Box A$	t^n/t^c	f^i/f^c	f^i/f^c	f^i/f^c
$\Diamond A$	t^n/t^c	t^n/t^c	f^i/f^c	t^n/t^c

Кроме этого, возникает неопределенность при приписывании значений другим логическим терминам. Пусть значения подформул A и B формулы $A \& B$ есть f^c . Каким может быть значение всей формулы?

Примеры. *Первый.* Петров в этом семестре изучает геологию и логику. Пусть то и другое неверно. Однако то и другое возможно. Поэтому значение приведенного высказывания f^c . *Второй.* Петров в настоящий момент времени находится в Москве и в Одессе. То и другое неверно, но то и другое возможно. Однако невозможно одновременно находиться в Москве и Одессе. То есть значение высказывания f^i .

В зависимости от типов моделирования высказываний возникают три способа определения логических связей. Эти способы определения отмечаются знаками +, – и отсутствием этих знаков. Каждое из определения модальных терминов порождает три логические системы. Например, на основе варианта a определения логических терминов образованы три логические системы: Sa^+ , Sa^- , Sa .

Язык первой из этих систем кроме модальных терминов $\Box$ и $\Diamond$ содержит знаки отрицания и материальной импликации.

Определения

A	t^n	t^c	f^i	f^c
$\neg A$	f^i	f^c	t^n	t^c

A	t^n	t^c	f^i	f^c	t^n	t^c	f^i	f^c	t^n	t^c	f^i	f^c	t^n	t^c	f^i	f^c
B	t^n	t^c	t^n	t^c	t^n	t^c	t^n	t^c	f^i	f^i	f^i	f^i	f^c	f^c	f^c	f^c
$A \supset B$	t^n	t^n	t^n	t^n	t^c	t^n/t^c	t^n	t^n/t^c	f^i	f^c	t^n	t^c	f^c	f^c	t^n	t^n/t^c

Все системы, заданные семантически, формализованы.

Оказалось, что ни одна из этих систем не совпадает с ранее построенными логическими системами.

Нерешенными остаются следующие проблемы:

- существуют ли конечные характеристические матрицы для квазиматричных логик онтологических модальностей;
- можно ли построить семантики возможных миров (реляционные или окрестностные) для квазиматричных логик;
- что представляет собой логика, полученная выделением общих для всех этих систем схем аксиом и правил вывода.

1.2. Логические модальности

Квазифункциональная семантика ограниченных множеств описаний состояний [7–9].

Пусть формула содержит две пропозициональные переменные – r и s . Интерпретируем эти переменные в качестве обозначающих истинные и ложные высказывания. Затем интерпретируем истинные в качестве логически истинных и логически случайных, а ложные – в качестве обозначающих логически ложные и логически случайные (логически недетерминированные) высказывания, в том числе одно из них в качестве логически истинного, второе в качестве логически случайного и т.д. В конечном счете интерпретируем каждое высказывание в качестве логически истинного, логически ложного и логически недетерминированного. Интерпретации элементарной формулы “ a ” будем обозначать формулами $\neg\Diamond a$ (значение T – логическая истина), $\neg\Diamond a$ (значение F – логическая ложь), $\Diamond a \& \Diamond \neg a$ (значение C – логическая случайность). ($\Diamond$ – теперь знак логической возможности.) Пусть R есть множество таких формул. Для формулы, содержащей указанные переменные, возможны следующие интерпретации переменных:

1. $(\{\neg\Diamond r, \neg\Diamond s\}; \{\{r, s\}\})$;
2. $(\{\neg\Diamond r, \neg\Diamond s\}; \{\{r, \neg s\}\})$;
3. $(\{\neg\Diamond r, \Diamond s, \Diamond \neg s\}; \{\{r, s\}, \{r, \neg s\}\})$;
4. $(\{\neg\Diamond r, \neg\Diamond s\}; \{\{\neg r, s\}\})$;
5. $(\{\neg\Diamond r, \neg\Diamond s\}; \{\{\neg r, \neg s\}\})$;
6. $(\{\neg\Diamond r, \Diamond s, \Diamond \neg s\}; \{\{\neg r, s\}, \{\neg r, \neg s\}\})$;
7. $(\{\Diamond r, \Diamond \neg r, \neg\Diamond s\}; \{\{r, s\}, \{\neg r, s\}\})$;
8. $(\{\Diamond r, \Diamond \neg r, \neg\Diamond q\}; \{\{r, \neg q\}, \{\neg r, \neg q\}\})$;
9. $(\{\Diamond r, \Diamond \neg r, \Diamond s, \Diamond \neg s\}; \{\{r, s\}, \{r, \neg s\}, \{\neg r, s\}, \{\neg r, \neg s\}\})$.

Если формула содержит n переменных, то число таких интерпретаций равно 3^n .

Например, пусть переменные r и s принимают значения T и I соответственно. Тогда R есть множество $\{\neg\Diamond r, \neg\Diamond s\}$.

Если два или более элементарных высказываний интерпретируются в качестве логически недетерминированных, то конъюнкция этих высказываний (некоторые из этих высказываний могут быть взяты с отрицаниями), в свою очередь, интерпретируется в качестве логически возможного высказывания или логически невозможного (логически ложного) высказывания. Ограничение R расширяется до R' . Полученное таким образом множество

называется ограниченным множеством описаний состояний (**ОМОС**) и обозначается W' .

Если элементарные высказывания $a_1, \dots, a_n$ интерпретируются как логически недетерминированные, то факт интерпретации конъюнкции $\underline{a_1} \& \dots \& \underline{a_n}$ ($\underline{a_k}$ есть переменная с отрицанием или без отрицания) в качестве логически невозможного высказывания обозначается так: $\neg \diamond(\underline{a_1} \& \dots \& \underline{a_n})$, а факт интерпретации в качестве логически возможного: $\diamond(\underline{a_1} \& \dots \& \underline{a_n})$.

Например, приведенное выше девятое ограниченное множество описаний состояний преобразуется в следующие множества:

1. $\{(\diamond r, \diamond \neg r, \diamond s, \neg \diamond s, \diamond(r \& s), \diamond(r \& \neg s), \diamond(\neg r \& s), \diamond(\neg r \& \neg s)); \{(r \& s), (r \& \neg s), (\neg r \& s), (\neg r \& \neg s)\}\};$
2. $\{(\diamond r, \diamond \neg r, \diamond s, \diamond \neg s, \neg \diamond(r \& s), \diamond(r \& \neg s), \diamond(\neg r \& s), \diamond(\neg r \& \neg s)); \}; \{\{r, \neg s\}, \{\neg r, s\}, \{\neg r, \neg s\}\}\}.$
3. $\{(\diamond r, \diamond \neg r, \diamond s, \diamond \neg s, \neg \diamond(r \& s), \diamond(r \& \neg s), \diamond(\neg r \& s), \neg \diamond(\neg r \& \neg s)); \{(r \& \neg s), (\neg r \& s)\}\};$
4. $\{(\diamond r, \diamond \neg r, \diamond s, \diamond \neg s, \diamond(r \& s), \diamond(r \& \neg s), \diamond(\neg r \& s), \neg \diamond(\neg r \& \neg s)); \{(r \& s), (r \& \neg s), (\neg r \& s)\}\};$
5. $\{(\diamond r, \diamond \neg r, \diamond s, \diamond \neg s, \diamond(r \& s), \neg \diamond(r \& \neg s), \diamond(\neg r \& s), \diamond(\neg r \& \neg s)); \{\{r, q\}, \{\neg r, q\}, \{\neg r, \neg q\}\}\};$
6. $\{(\diamond r, \diamond \neg r, \diamond q, \diamond \neg q, \diamond(r \& q), \neg \diamond(r \& \neg q), \neg \diamond(\neg r \& q), \diamond(\neg r \& \neg q)); \{\{r, q\}, \{\neg r, \neg q\}\}\};$
7. $\{(\diamond r, \diamond \neg r, \diamond q, \diamond \neg q, \diamond(r \& q), \diamond(r \& \neg q), \neg \diamond(\neg r \& q), \diamond(\neg r \& \neg q)); \{\{r, q\}, \{r, \neg q\}, \{\neg r, \neg q\}\}\}.$

Формулам приписываются значения в описаниях состояний, входящих в **ОМОС**ы. Элементарное высказывание является истинным в описании состояния, если и только если оно входит в это описание состояния не со знаком отрицания. Формула $A \& B$ является истинной в описании состояния, если и только если в этом описании состояния истинны формулы A и B , и т.д. для других немодальных логических терминов. Формула $\Box A$ является истинной в описании состояния **ОМОС**а (далее – **омос**а), если и только если формула A является истинной в каждом описании состояния этого **омос**а. Формула $\diamond A$ ($\diamond$ – оператор логической возможности, вводится посредством определения

$\diamond A =_{df} \neg \Box \neg A$) является истинной в описании состояния **омос**а, если и только если формула A является истинной в некотором описании состояния **омос**а.

Формула является выполнимой в **омосе**, если и только если она истинна в некотором описании состояния этого **омос**а. Формула является общезначимой в **омосе**, если и только если она истинна в каждом описании состояния этого **омос**а. Формула является выполнимой, если и только если она выполнима в некотором **омосе**. Формула является общезначимой, если и только если она общезначима в каждом **омосе**. Общезначимыми являются те и только те формулы, которые доказуемы в исчислении **S5**.

Теперь ясен смысл модельных структур реляционной семантики для этого исчисления. Модельная структура – это одна из интерпретаций пропозициональных переменных, входящих в формулу (формулы), посредством приписывания указанных выше значений, а также интерпретация конъюнкции пропозициональных переменных, проинтерпретированных в

качестве логически случайных (перед некоторыми из пропозициональных переменных может стоять знак отрицания) в качестве логически возможного или логически невозможного высказывания.

Метатеоремы.

Метатеорема 1. Каждая теорема исчисления S5 Льюиса является общезначимой формулой.

Метатеорема 2. Каждая общезначимая формула доказуема в S5.

Для доказательства метатеоремы 2 доказывается следующая лемма:

Лемма. Пусть D – формула, $\langle R', W' \rangle$ – ОМОС, $a_1, \dots, a_n$ – все различные переменные, входящие в D , $b_1, \dots, b_n$ – истинностные значения этих переменных (значения из множества $\{t, f\}$) в описании состояния α , A_i^α есть a_i , если b_i есть t ; A_i^α есть $\neg a_i$, если b_i есть f . Пусть D^α есть D , если D принимает значение t в α , и есть $\neg D$, если D принимает значение f в α .

Тогда $R', A_1^\alpha, \dots, A_n^\alpha \Rightarrow D^\alpha$.

Квазифункциональные семантики ограниченных множеств описаний состояний Архипереева [21–24]

Семантика для системы S4 Льюиса.

При построении семантики данного типа для S4 исходной остается идея последовательной интерпретации переменных формулы в терминах $\{N, C, I\}$ и дополнительного истолкования конъюнкций двух и более «случайных» переменных как возможных (случайных) или невозможных. Однако поскольку в модельной структуре для S4 уже не «каждый мир достижим из каждого», указанные интерпретации осуществляются относительно каждого отдельного о.с. для формулы. Кроме того, поскольку значимыми в S4 являются итерированные модальности, допустимы и итерированные метаистолкования переменных в терминах $\{N, C, I\}$. Получаемые в результате таких истолкований конечные множества о.с. и их множества различной степени $\langle OG_n; \alpha_i; W_n \rangle$ ($n \geq 1$) называются относительно ограниченными множествами о.с. (ОГОСами) и выполняют роль модельных структур семантик возможных миров для S4 [1].

Как и в семантике для S5, различаются оценки трех типов:

1) оценки формул к.л.в. в отдельных о.с. (двухзначные истинностно-функциональные или «чисто классические» оценки);

2) оценки формул, находящихся в области действия модальных операторов (двухзначные не-истинностно-функциональные оценки, которые приписываются в множествах о.с.); условия истинности / ложности формул с модальностями первой степени совпадают с аналогичными условиями для S5; при этом «собственные» для S4 итерированные модальности вида $\Box\Diamond, \Diamond\Box, \Diamond\Diamond, \Box\Diamond\Box$ рассматриваются как кванторы по множествам и множествам множеств о.с., и значения формулам с данными модальностями приписываются в множествах соответствующего «уровня», например:

$$|\Box\Diamond B|_{W_2} = t \Leftrightarrow \forall W_1 (W_1 \in W_2 \Rightarrow |\Diamond B|_{W_1} = t);$$

$$|\Diamond\Box\Diamond B|_{W_3} = t \Leftrightarrow \exists W_2 (W_2 \in W_3 \wedge |\Box\Diamond B|_{W_2} = t);$$

3) метаистолкования формул к.л.в. в терминах $\{N, C, I\}$, которые также осуществляются относительно множеств о.с. (трехзначные не-истинностно-функциональные оценки); наличие «существенных» итерированных модальностей в S4 предполагает возможность «вторичных» метаистолкований формул к.л.в. в терминах $\{N, C, I\}$. Метаоценки N, I могут повторно

истолковываться только как N, метаоценка C может истолковываться как N либо C,

т.е. для произвольной элементарной формулы p_i справедливы утверждения: $Np_i \vee Ip_i \Rightarrow NNp_i \vee NIp_i$; $Cp_i \Rightarrow NCp_i \vee CCp_i$. При этом если OG_2' некоторого $\langle OG_2'; \alpha_i; W_2'' \rangle$ содержит для некоторой переменной p_i истолкование NCp_i , то элементами W_2'' будут только такие множества о.с. W_1'' , в каждом из которых p_i по крайней мере однажды меняет значение. Если же в OG_2' содержится интерпретация CCp_i , то в W_2'' она будет представлена тройкой множеств о.с., соответствующей истолкованию $NCp_i \vee Np_i \vee Ip_i$.

Например, множество $\langle \{Np, Cq\}; \{p, q\}; \{\{p, q\}\{p, \neg q\}\} \rangle$ порождает два ОГОСа $\langle OG_2'; \alpha_i; W_2'' \rangle$ второй степени:

$$\langle \{NNp, NCq\}; \{p, q\}; \{\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\}\} \rangle;$$

$$\langle \{NNp, CCq\}; \{p, q\}; \{\{\{p, q\}\{p, \neg q\}\}; \{\{p, q\}\}; \{\{p, \neg q\}\}\} \rangle$$

Сказанное о способе порождения конструкций $\langle OG_n'; \alpha_i; W_n'' \rangle$, их общем числе, а также числе и типе их элементов можно обобщить следующим образом:

$$\langle OG_1'; \alpha_i; W_1'' \rangle: C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n;$$

$$\langle OG_2'; \alpha_i; W_2'' \rangle: C_n^0 \times 2^0 + C_n^1 \times 2^1 + C_n^2 \times 2^2 + \dots + C_n^k \times 2^k + \dots + C_n^n \times 2^n = 3^n;$$

$$\langle OG_3'; \alpha_i; W_3'' \rangle: C_n^0 \times 3^0 + C_n^1 \times 3^1 + C_n^2 \times 3^2 + \dots + C_n^k \times 3^k + \dots + C_n^n \times 3^n = 4^n.$$

Степень ОГОСа	Число «случайных» переменных в ОГ	Число элементов в W	Тип элементов W
$\langle OG_1'; \alpha_i; W_1'' \rangle$	$0 \leq i \leq n$ (n – число переменных в формуле)	2^i	о.с.
$\langle OG_2'; \alpha_i; W_2'' \rangle$	$0 \leq k \leq i$	3^k	Множества о.с.
$\langle OG_3'; \alpha_i; W_3'' \rangle$	$0 \leq m \leq k$	3^m	Множества множеств о.с.

Для кластеров произвольной конечной степени искомый алгоритм примет вид

$$\langle OG_R'; \alpha_i; W_R'' \rangle: C_n^0 \times R^0 + C_n^1 \times R^1 + C_n^2 \times R^2 + \dots + C_n^k \times R^k + \dots + C_n^n \times R^n = (R+1)^n.$$

Однако, как нетрудно убедиться, конструкции степени >3 не несут никакой новой информации о допустимых значениях переменных и их конъюнктивных сочетаниях. Таким образом, тот факт, что в S4 отсутствуют собственные итерированные модальности степени >3 , оказывается естественным следствием самого способа построения данной семантики [2].

Семантика Архиевеева для системы INT Гейтинга [22].

Семантика для интуиционистской системы Int может быть построена в указанных терминах на основе известного перевода формул языка системы Int в модальную систему S4, предложенного в 1948 г. Дж. Маккинси и А. Тарским.

Пусть ψ – функция перевода. Тогда, в зависимости от степени сложности интуиционистской формулы, ее перевод в S4 будет выглядеть следующим образом:

$$1) \psi(p) = \Box p, \text{ где } p \text{ – пропозициональная переменная;}$$

$$2) \psi(\neg A) = \Box \neg \psi(A), \text{ где } A \text{ – произвольная формула;}$$

$$3) \psi(A \wedge B) = \psi(A) \wedge \psi(B);$$

$$4) \psi(A \vee B) = \psi(A) \vee \psi(B);$$

$$5) \psi(A \supset B) = \Box(\psi(A) \supset \psi(B)).$$

«Произвольная формула A языка интуиционистской логики доказуема в исчислении Гейтинга тогда и только тогда, когда ее перевод $\psi(A)$ доказуем в модальной системе $S4$ ».

При данном переводе, таким образом, все формулы системы Int , включая элементарные, рассматриваются как модальные. Отрицание и импликация системы Int рассматриваются как модальные понятия второй степени [Там же].

Поскольку перевод формул Int в $S4$, предложенный Маккинси и Тарским, толкует как модальные *все* формулы, включая элементарные, значения им приписываются не в отдельных о.с., а в их множествах. Как и в семантике для $S4$, различаются 3 группы значений:

1) пара классических («слабых») значений $\{t, f\}$, которые приписываются элементарным формулам в отдельных о.с.; для обозначения классического значения f будем использовать символ *метаязыка* $\lceil$ («фактическое» или «слабое» отрицание); для обозначения «сильной» («интуиционистской») ложности будем использовать символ *объектного языка* $\sim$.

Интуиционистская («сильная») ложность, как и интуиционистская истинность, подчиняется принципу монотонности (сохранности): если высказывание оценено в некотором мире как истинное или ложное в сильном смысле, то оно сохраняет свое значение во всех мирах, достижимых из данного. Слабая («фактическая») ложность не подчиняется принципу сохранности. Однако оба типа ложности выполняют требование *обратной сохранности*: высказывание, оцененное как ложное в любом из указанных смыслов, не могло быть ранее истинным;

2) тройка «интуиционистских» (мета)значений $\{T, R, F\}$ («достоверно истинно», «опровержимо – refutable», «достоверно ложно»). F – «интуиционистская ложность», соответствующая операции $\sim$, «сильный напарник» T , подчиняющийся, как и T , принципу монотонности, R – «опровержимость», «слабая ложность» – аналог «фактического» отрицания, для которого выполняется только принцип обратной и не выполняется принцип прямой сохранности. Выделенным значением является T ;

3) тройка метаистолкований допустимых значений переменных в терминах $\{N, C, I\}$; в силу принципа монотонности переменная, входящая в исходное о.с. без символа $\lceil$, может иметь только метазначение N .

В результате всех последовательных метаистолкований допустимых значений переменных и их сочетаний в терминах $\{N, C, I\}$ относительно каждого о.с. для формулы получаем множество конструкций вида $\langle OG_n'; \alpha_i; W_n'' \rangle$, которые выполняют функцию модельных структур семантики возможных миров для системы Int . Очевидно при этом, что моделями Int будет ровно половина моделей $S4$.

Имеется в виду следующая формулировка Int : исходные символы $\sim, \rightarrow, \wedge, \vee, -$ сильное отрицание, импликация системы Int , конъюнкция и дизъюнкция системы Int ; символы $\lceil, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee, \forall, \exists, \in, \notin$ являются символами метаязыка, в котором формулируются условия истинности / ложности формул системы Int ; аксиомами системы будут все аксиомы к.и.в. за исключением $\sim\sim A \rightarrow A$, вместо которой вводится $\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$. Правилами вывода Int являются правила вывода классического исчисления высказываний.

• Формулам системы *Int* следующим образом приписываются значения в данной семантике:

$$\begin{aligned} &|p|_{\alpha} = t \Leftrightarrow p \in \alpha; \quad |p|_{\alpha} = f \Leftrightarrow p \notin \alpha \Leftrightarrow |p|_{\alpha} = t; \\ &|A|_{w_1} = T \Leftrightarrow \forall \alpha (\alpha \in W_1 \Rightarrow |A|_{\alpha} = t); \\ &|A|_{w_1} = R \Leftrightarrow \exists \alpha (\alpha \in W_1 \wedge |A|_{\alpha} = f); \\ &|A|_{w_2} = F \Leftrightarrow \sim |A|_{w_2} = T \Leftrightarrow \forall W_1 (W_1 \in W_2 \Rightarrow |A|_{w_1} = R); \\ &|A \wedge B|_{w_1} = T \Leftrightarrow (|A|_{w_1} = T \wedge |B|_{w_1} = T); \\ &|A \vee B|_{w_1} = T \Leftrightarrow (|A|_{w_1} = T \vee |B|_{w_1} = T); \\ &|A \rightarrow B|_{w_2} = T \Leftrightarrow \forall W_1 (W_1 \in W_2 \Rightarrow (|A|_{w_1} = T \Rightarrow |B|_{w_1} = T)); \\ &|A \rightarrow B|_{w_2} = R \Leftrightarrow \exists W_1 (W_1 \in W_2 \wedge (|A|_{w_1} = T \wedge |B|_{w_1} = R)); \\ &|A \rightarrow B|_{w_3} = F \Leftrightarrow \sim (|A \rightarrow B|_{w_3} = T) \Leftrightarrow \forall W_2 (W_2 \in W_3 \Rightarrow (|A \rightarrow B|_{w_2} = R)). \end{aligned}$$

Формула *B* выполнима в *Int*, е.т.е. *B* принимает значение *T* в некотором W_n ($n \geq 1$).

Формула *B* общезначима в *Int*, е.т.е. *B* принимает значение *T* в каждом W_n ($n \geq 1$) (подробнее см. в [22]).

Задача. Представить в одной системе логические и онтологические модальности.

2. Исследования школы логиков Израиля (Арнон Аврон и соавторы)

В XXI в. квазифункциональная логика стала активно разрабатываться Арноном Авроном и его соавторами под названием «недетерминистская логика» [25, 26]. В [25] отмечается, что принципом классической и многозначной логик является принцип истинностной функциональности, согласно которому значение сложной формулы однозначно определяется значениями ее подформул. В действительности же существует неопределенность, неполнота информации. По этой причине предлагается ввести в логику недетерминированные матрицы (Nматрицы) путем обобщения обычных матриц.

В недетерминированных матрицах значение сложной формулы выбирается из некоторого непустого «набора вариантов». В качестве примера приводится случай, когда не известен смысл дизъюнкции. Если каждому члену дизъюнкции приписано значение *t*, то значение всей формулы не определено, т.е. есть *t* или *f*. Обозначение: $\{t, f\}$.

Неопределенность может быть обусловлена вычислениями, результаты которых определены не полностью (недетерминированные вычисления), а также устройствами для сбора и обработки информации (автоматы). В последнем случае пусть есть источник информации и процессор. Возможны четыре ситуации. *Первая*. Источник передает процессору следующую информацию: высказывание истинно, но нет информации о том, что оно ложно. *Вторая*. Высказывание ложно, но нет информации о том, что оно истинно. *Третья*. Высказывание как истинно, так и ложно. Пусть источник состоит из двух составляющих. По одной составляющей пришло сообщение «истина», а по другой – «ложь». В первом и во втором случаях пришло сообщение только от одной составляющей. *Четвертая*. Никаких сообщений не поступило, т.е. информация отсутствует.

Таким образом, неопределенность может быть обусловлена неоднозначностью значений сложных высказываний, а также значений простых высказываний.

Сама неопределенность может быть представлена двумя способами: статистическим и динамическим. В первом случае описывается относительная частота признаков, а во втором – собственно недетерминированность.

На основе этих соображений строятся недетерминистские матрицы. Недетерминистская матрица – это упорядоченное множество, в котором есть множество элементов матрицы (множество возможных значений формул), множество выделенных значений, а также множество недетерминистских функций.

N -местная функция сопоставляет каждой n -ке значений из множества элементов матрицы какое-то подмножество из множества элементов матрицы, кроме пустого подмножества. Сопоставление динамическое (не статистическое), т.е. формула принимает какое-то значение из этого подмножества.

Замечу, что в общем случае можно допустить в качестве значения квазифункции пустое множество, а в качестве области, к которой применяется n – местная квазифункция, каждое подмножество n -ок значений, кроме пустого множества.

3. Исследования школы логиков Бразилии (Кониглио и соавторы)

Бразильские логики внесли значительный вклад в разработку квазифункциональной логики. Результаты исследований представлены в [27–29] и некоторых других публикациях. В качестве примера приведем логические системы, изложенные в статье Кониглио (Coniglio) и Голзио (Golzio) [28].

За основу берутся упомянутая выше логическая система Sa^+ и система Т Кёрнса (Kearns) [29, 30]. На содержательном уровне дизъюнкция ($\alpha \vee \beta$) понимается как $(\neg\alpha \rightarrow \beta)$, где $\rightarrow$ – знак материальной импликации, по определению обычным образом вводится знак возможности.

Определения

$\vee$	t^n	t^c	f^c	f^i
t^n	t^n	t^n	t^n	t^n
t^c	t^n	$\{t^n, t^c\}$	$\{t^n, t^c\}$	t^c
f^c	t^n	$\{t^n, t^c\}$	f^c	f^c
f^i	t^n	t^c	f^c	f^i

α	$\diamond\alpha$
t^n	$\{t^n, t^c\}$
t^c	$\{t^n, t^c\}$
f^c	$\{t^n, t^c\}$
f^i	$\{f^c, f^i\}$

Система названа **Tm** и формализована посредством следующих схем аксиом и правила вывода модус поненс. Схемы аксиом: $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$; $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \sigma))$; $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$; $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$; $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\neg\beta \rightarrow \Box\neg\alpha)$; $\neg\Box\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \neg\Box\neg\beta)$; $\Box\neg\alpha \rightarrow \Box(\alpha \rightarrow \beta)$; $\Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \rightarrow \beta)$; $\Box\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \Box\neg\beta$; $\Box\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \Box\alpha$; $\Box\alpha \rightarrow \alpha$ (Т); $\Box\alpha \rightarrow \Box\neg\neg\alpha$; $\Box\neg\neg\alpha \rightarrow \Box\alpha$.

Строятся системы **T4m**, **T45m**, **ТВm** путем добавления одной из следующих схем аксиом: $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$ (4); $\neg\Box\neg\Box\alpha \rightarrow \Box\alpha$ (5); $\neg\Box\neg\Box\alpha \rightarrow \alpha$ (В).

T4m = **Tm** + {4}. **T45m** = **T4m** + {5}. **ТВm** = **Tm** + {В}. Для этих систем построены квазифункциональные семантики.

4. Деонтическая логика

4.0. Трехзначная деонтическая логика [7. С. 162–167; 9. С. 102–109; 10. С. 72–82; 31]

Принцип квазифункциональности был мною сформулирован в конце шестидесятых годов прошлого века при построении логики норм, называемой, чаще всего, деонтической логикой. До этого, как правило, эта логика основывалась на логике высказываний. Операторы «обязательно» и «разрешено» применялись к высказываниям. При применении этих операторов к знакам деяний (знакам действий или бездействий) возникали неопределенности. Например, пусть действия А и В нормативно безразличны, т.е. не запрещены и не обязательны. Однако одновременное выполнение этих действий может быть нормативно безразлично, а может быть запрещено. В этом и в других случаях возникают неопределенности.

Символы языка:

1) $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \dots$ – переменные для деяний;
 2) $\cdot, \cup, ' -$ знаки одновременного выполнения двух деяний, одного или другого деяния, воздержания от выполнения деяния соответственно. Читаются «и», «или», «не» («воздержание от...»);

3) O, P – нормативные операторы «обязательно» и «разрешено»;

4) $\Box, \neg, \&, \vee, \supset$ – обычные знаки классической логики высказываний;

5) скобки.

Определения:

1) переменная для деяний есть субформула;

2) если А и В субформулы, то $A', (A \cdot B), (A \cup B)$ – субформулы;

3) ничто иное не есть субформула.

Определение формулы:

1) если А – субформула, то OA, PA – формулы;

2) если В и С – формулы, то $\neg B, (B \& C), (B \vee C), (B \supset C)$ – формулы;

3) ничто иное не есть формула.

Определения

$(A \cdot B)$	о	б	з
о	о	б	з
б	б	з/б	з
з	з	з	з

$(A \cup B)$	о	б	з
о	о	о	о
б	о	о/б	б
з	о	б	з

А	А'
о	з
б	б
з	о

В таблицах значения «о», «б», и «з» соответственно понимаются так: «обязательно», «безразлично», «запрещено», а наклонная черта означает «либо..., либо...».

А	ОА	РА
о	t	t
б	f	t
з	f	f

Знаки $\neg, \&, \vee, \supset$ определяются обычным образом.

Семантически заданная логика формализована [9].

4.1. Пятизначная деонтическая логика Кузнецова [32]

Вместо символов О и Р вводятся символы Он, Ом, Рн, Рм (обязательно нормативно, обязательно морально, разрешено нормативно, разрешено морально).

Увеличивается число значений знаков деяний: о, о', б, з, з'. Значения о' и з' соответственно читаются: одобряемо, порицаемо. Предшествующие значения являются более сильными, чем последующие.

Определения

A	о	о'	б	з	з'
A'	з	з'	б	о	о'

$|A \cdot B| = \min(|A|, |B|)$, кроме случая, когда $|A| = |B| = б$. В этом случае $|A \cdot B| \in \{б, з, з'\}$. $|A \cup B| = \max(|A|, |B|)$, кроме случая, когда $|A| = |B| = б$. В этом случае $|A \cup B| \in \{б, о, о'\}$.

A	ОнА	ОмА	РнА	РмА
о	t	t	t	t
о'	f	t	t	t
б	f	f	t	t
з'	f	f	t	f
з	f	f	f	f

t – выделенное значение. Остальные логические термины определяются обычным образом.

Здесь дополнительными схемами аксиом являются следующие:

$ОнА \supset ОмА$, $ОнА \supset РнА$, $ОмА \supset РмА$, $ОнА \supset РмА$, $ОмА \supset РнА$, $\neg ОнА' \equiv \equiv РнА$, $\neg ОмА' \equiv РмА$, $РмА \supset РнА$,

$ОнА \& ОнВ \equiv Он(A \cdot B)$, $ОмА \& ОмВ \equiv Ом(A \cdot B)$,

$ОнА \& РнВ \supset Рн(A \cdot B)$, $ОнА \& ОмВ \supset Ом(A \cdot B)$, $ОмА \& РмВ \supset Рм(A \cdot B)$,

$Рн(A \cdot B) \supset РнА \& РнВ$, $Рм(A \cdot B) \supset РмА \& РмВ$,

$\neg РнА' \supset РнА$,

$ОнА \supset Он(A \cup B)$, $ОмА \supset Ом(A \cup B)$,

$РнА \vee РнВ \equiv Рн(A \cup B)$, $РмА \vee РмВ \equiv Рм(A \cup B)$,

$Он(A \cup B) \supset РнА \vee ОнВ$, $Ом(A \cup B) \supset РмА \vee ОмВ$,

$РнА \& РнВ' \supset Рн(A \cdot B)'$, $РмА \& РмВ' \supset Рм(A \cdot B)'$,

$РнА \supset Рн(A \cup B)$,

$РмА' \vee \neg РмВ \supset Рм(A \cup B)'$.

4.2. Шестизначная деонтическая логика Аркадской [7. С. 212, 213;

33]

Представленная выше трехзначная деонтическая логика – это логика юридических норм. Пятизначная логика Кузнецова предназначена для описания отношений по формам не только между нормами права, но и между нормами морали. Однако вне этой логики остаются нормы, в которых встречаются нравственно безразличные деяния. Этот пробел устранен Аркадской. В [33] изложена шестизначная логика норм. Вводится новое значение б', которое читается «безразлично морально».

Определение

A	о	о'	б	з	з'	б'
A'	з	з'	б	о	о'	б'

Определяются другие нормативные операторы и построено исчисление норм.

4.3. Деонтическая логика Кониглио (Coniglio) и Голзио (Golzio) [28]

Логика строится на основе логики высказываний. Деяние, разрешенное или запрещенное, представляется реализованным высказыванием. Например, разрешено Петрову поступать в университет выражается так: Петров поступил в университет, это разрешено.

Образовано исчисление норм **Dm** путем замены аксиомы **T** ($\Box\alpha \rightarrow \alpha$) на схему аксиом **D** ($\Box\alpha \rightarrow \neg\Box\neg\alpha$) в приведенном выше исчислении **Tm**. Знак $\Diamond$ вводится по определению: $\Diamond\alpha$ есть по определению $\neg\Box\neg\alpha$. Знаки $\Box$ и $\Diamond$ здесь читаются «обязательно, что», «разрешено, что» соответственно. В основе семантики лежат следующие интерпретации выражений:

р обязательно и оно совершено ($\Box p \& p$) ($\&$ – знак конъюнкции);

р обязательно и оно не совершено ($\Box p \& \neg p$);

р нормативно безразлично и оно выполнено $\neg(\Box p \& \Box \neg p) \& p$;

р нормативно безразлично и оно не выполнено $\neg(\Box p \& \Box \neg p) \& \neg p$.

За ограниченностью объема статьи полностью семантика не излагается.

5. Другие исследования по квазиматричной логике

В 2016 г. опубликована интересная статья двух авторов – Х. Омори (Hitoshi Omori), Япония, и Д. Скурт (Daniel Skurt), Германия [34]. В статье представлены новые системы недетерминистской логики. Ряд работ по квазифункциональной логике опубликовал ученый из Тувы Х.К. Кадыг-оол. Это статьи [39, 40] и монография [41].

Научная работа по квазифункциональной модальной логике продолжается как в России, так и в других странах [38]. В печати находится несколько статей по этой логике. В Бразилии международным коллективом подготовлено издание, которое намечено на март 2022 г. Принцип квазифункциональности использован при построении паранепротиворечивой логики и логики пропозициональных установок [27, 38]. Можно указать другие публикации по этой логике [33, 34, 35, 39–44].

В. Квазифункциональные отношения в других областях знания

1. Квазифункциональность в математике

В области логики работают как философы, так и математики. Философы называют логику, сходную с математикой, символической, а математики называют эту логику математической и считают ее частью математики. Чтобы выделить математическую часть в логике, нужно иметь понятие математики. У меня такого понятия нет, может быть потому, что я считаю себя философом. «Общее определение математики», данное в пятитомной Математической энциклопедии, вряд ли можно считать удовлетворительным: «Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира» [45. Т. 5. С. 559]. Во-первых, количественные отношения и пространственные формы изучает не только математика, а во-вторых, если под действительным миром понимать «этот свет», а под недействительным – «тот свет», то потребуются обоснование утверждения, что на «том свете» математика не работает.

Можно было бы дать индуктивное определение математики: математика – это алгебра, геометрия, математический анализ и т.д. Однако возможно возникновение новых разделов математики. Будем здесь рассматривать возможность применения принципа квазифункциональности в алгебре.

Если понимать под алгеброй некоторое множество объектов, множество операций над ними и множество равенств результатов применения этих операций над объектами, то под квазиалгеброй можно понимать результат замены операций квазиоперациями (квазифункциями), а равенства – другими отношениями. Например, алгебра деяний – это множество деяний, квазиоперации « $\cdot$ », « $\cap$ », « $'$ » и отношения, являющиеся не только равенствами. Так, равенство $A \cap B = B \cap A$ не имеет места, так как выполнение деяния A , а затем B не одно и то же, что и выполнение B , а потом A .

Можно ввести понятие квазиалгебры. Это множество объектов, множество квазиопераций над объектами, а также множество отношений между результатами применения квазиопераций. Отношения – не только равенства. Например, в приведенной выше трехзначной логике это множество отношений между высказываниями по формам – совместимость по необходимости, по невозможности и т.д.

Представляется возможным каждую алгебру расширить до квазиалгебры.

На основе принципа квазифункциональности можно обобщить неевклидовы и евклидовы геометрии. Для этого потребуется изменить понятия плоскости прямой и т.д. Плоскость может меняться от евклидовой до римановой через плоскость Евклида. Прямая может изменяться. Например, пусть поверхность ограничена столбами, которые не могут перемещаться, а расстояния между столбами – прямые, которые могут изгибаться до определенных пределов. Точно площадь одной фигуры не всегда можно вычислить, а площадь множества фигур может быть вычислима.

2. Квазифункциональность в биологии

В биологии есть явление, которое называется дрейфом генов. Оно заключается в следующем: небольшая часть большой популяции живых существ оказывается в изоляции, например в результате природного явления. Можно описать возможные изменения генофонда популяции на основе принципа квазидетерминизма [46].

На основе принципа квазидетерминизма можно объяснить функционирование нервных сетей [9. С. 117–118]. Представим нейрон в качестве устройства, имеющего вход и выход и находящегося в определенном состоянии. То есть делаем это по аналогии с квазиавтоматом. Пусть на вход поступает какой-то из двух сигналов, а на выходе возникает какая-то из двух реакций. Пусть имеются два нейрона, на выход которых поступает один и тот же сигнал s . Тогда на вход системы нейронов, состоящей из двух новых нейронов, поступит либо сигнал s , либо сигнал i , если предположить, что эти два последние нейрона описаны формулой, соответствующей конъюнкции.

Таким образом, поведение нейронов может быть не определено, или определено лишь частично, а поведение нейронной сети может быть определено полностью, может быть определено частично, а может быть совсем не определено. Возможно, что в таком поведении нейронов заключается объяснение интуиции: мозг работает как машина, которая хотя и

является сложной, но все же конечной, ее работа не осознается и результаты получаются на выходе иногда правильные, а иногда нет, т.е. вариативные.

В [37] введены понятия однозначной и неоднозначной детерминации признаков организма. Например, одна и та же генная аномалия иногда приводит к заболеванию, а иногда нет. Эти явления тоже могут быть представлены посредством указанного принципа.

Важной областью знания, в которой применим принцип квазидетерминизма, является знание медицинское. В процессе диагностики и лечения устанавливаются не только причинно-следственные, т.е. функциональные, отношения между симптомами, заболеваниями и способами лечения, но и отношения квазифункциональные. Например, в одном случае симптом (будем считать совокупность признаков одним симптомом) позволяет сделать однозначный вывод об определенном заболевании. Это частный случай квазифункциональности – функциональность, или детерминизм. В другом случае симптом позволяет утверждать лишь об одном заболевании из нескольких заболеваний. Это собственно квазифункциональность. Еще одним частным случаем квазифункциональности является полная неопределенность, названная выше хаотичностью. Далее, каждое определенное заболевание может требовать единственного способа лечения, а может допускать один из нескольких способов лечения. Способ лечения может отсутствовать – полная неопределенность. Такие ситуации должны учитываться при отрицательных результатах лечения, например в процессе судебных разбирательств.

3. Приложения принципа квазифункциональности в технике

3.1. Автоматы

Одним из возможных технических приложений принципа квазифункциональности является создание конечных квазиавтоматов.

Квазиавтомат, как и автомат, имеет вход и выход и находится в каком-то состоянии. Есть возможное множество входных сигналов (аналог множества возможных значений квазиматрицы). Сигнал поступает из какого-то элемента какого-то непустого подмножества этого множества. В зависимости от состояния квазиавтомата этот квазиавтомат реагирует на сигнал одним из способов, включенных в подмножество множества возможных реакций. Если невозможно указать поведение каждого отдельного квазиавтомата, то поведение системы квазиавтоматов в некоторых случаях можно указать.

Примером таких возможных квазиавтоматов могут служить устройства для очистки кровеносных сосудов. Пусть в вену помещено конечное число таких устройств, большее числа кровеносных сосудов, исходящих из вены. В каждый кровеносный сосуд заходит только одно устройство. Доходя до кровеносного сосуда, исходящего из данного, устройство срабатывается, становится меньше. Оно направляется в какое-то ответвление кровеносного сосуда, меньшее по размеру. Какое-то из исходных устройств входит в этот же сосуд и направляется в другое ответвление и т.д. Какое устройство входит в какой сосуд и очищает его не известно, но может быть известно, что очищаются все сосуды, а устройства сначала срабатываются (уменьшаются), а затем самоуничтожаются.

В кандидатской диссертации [47] В.В. Шалопин изложил построенную им квазифункциональную нечеткую логику. Квазифункция в этой логике определяется так же, как и указано выше, но объект, к которому применяется квазифункция, и объект, который получается в результате применения квазифункции, являются нечеткими в смысле Л.А. Заде. Шалопин разработал концепцию абстрактных нечетких квазиавтоматов, основанную на этой логике. См. также [48, 49].

Если техническая реализация описанных в начале раздела квазиавтоматов представляется весьма возможной, то техническая реализация квазиавтоматов Шалопина остается проблематичной.

3.2. Электрические схемы

По аналогии с трехзначной квазифункциональной логикой можно рассмотреть создание трехтактных переключательных электрических схем [50]. Переключатель может иметь три положения. Первое: переключатель полностью замкнут – ток полностью проходит через него. Второе: переключатель полностью разомкнут – ток совсем не проходит. Третье: переключатель частично разомкнут, т.е. не полностью разомкнут и не полностью замкнут – ток частично проходит. При параллельном соединении двух переключателей возможны следующие реакции на выходе. Оба переключателя полностью не замкнуты – механизм не работает, по крайней мере один из переключателей полностью замкнут – механизм работает, оба переключателя не полностью не замкнуты и не полностью разомкнуты – механизм, работающий только при определенном поступлении тока, может работать, а может и не работать и т.д.

Очевидна возможность моделирования электрических схем посредством четырехзначных квазифункциональных логик.

4. Социальное знание и гносеология

Социальное познание часто является квазифункциональным. Например, об имеющемся состоянии экономики в какой-то отрасли хозяйства могут быть различные представления. Можно исходить из одного из этих представлений. Каким будет состояние этой отрасли через несколько лет? При учете основных условий развития состояние может быть одним из нескольких. Если исходить из другого представления, то через несколько лет состояние тоже может быть одним из нескольких. Очевидна квазифункциональная зависимость будущих состояний от исходных. В социальной сфере важную роль играет не только познавательный аспект проблемы, но и планирование человеческой деятельности для достижения наиболее приемлемого состояния.

Принцип квазифункциональности применен при описании методологии разработки управленческого решения. На каждом этапе этой деятельности могут возникать варианты, которые, в свою очередь, могут быть неоднозначными. См., например, [51. С. 240–253].

В качестве заключения ставим задачу продолжить применение принципа квазифункциональности в логике, математике, естествознании и других науках.

Литература

1. *Ивлев Ю.В.* Предмет и перспективы развития логики // *Логические исследования*. 2018. Т. 24, № 1. С. 115–128.
2. *Rescher N.* Quasi-truth-functional systems of propositional logic // *The Journal of Symbolic Logic*. 1962 March. Vol. 27, № 1. P. 1–10.
3. *Added May.* The exclusive “or” // *Analysis*. 1960. Vol. 20. P. 97–106.
4. *Rescher N.* Many-valued Logic. New-York, 1969.
5. *Ивлев Ю.В.* Логика норм : дис. ... канд. филос. наук. М. : МГУ им. М.В. Ломоносова, 1972.
6. *Ивлев Ю.В.* Табличное построение пропозициональной модальной логики // *Вестник Московского университета. Серия 7: Философия*. 1973. № 6. С. 51–61.
7. *Ивлев Ю.В.* Модальная логика. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 222 с.
8. *Ивлев Ю.В.* Содержательная семантика модальной логики. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1985. 170 с.
9. *Ивлев Ю.В.* Квазиматричная (квазифункциональная) логика. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2018. 126 с.
10. *Ивлев Ю.В.* Содержательная семантика модальной логики // *Логико-методологические исследования*. М. : Изд-во Моск ун-та, 1980. С. 356–374.
11. *Ивлев Ю.В.* Содержательный анализ модальных высказываний // *Вестник Московского университета. Серия 7: Философия*. 1982. № 5. С. 57–68.
12. *Ивлев Ю.В.* Интерпретация модальных исчислений // *Логические исследования: труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР*. М. : ИФ АН СССР, 1983. Т. 2. С. 59–70.
13. *Ивлев Ю.В.* Новые семантики модальной логики // *Современная логика и методология науки*. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1987. С. 71–86.
14. *Ivlev Yu.V.* A semantics for modal calculi // *Bulletin of the Section of Logic*. 1988. Vol. 17, № 3–4. P. 114–126.
15. *Ivlev Yu.V.* Quasi-matrix logic // *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*. Old City Publishing, Inc. (United States). 2005. Vol. 11, № 3–4. P. 239–252.
16. *Ивлев Ю.В.* Квазифункциональная логика // *Научно-техническая информация. Серия 2: Информационные процессы и системы*. 1992. № 6. С. 12–20.
17. *Ивлев В.Ю., Ивлев Ю.В.* Проблема построения теории фактических модальностей // *Логические исследования*. 2000. Т. 7. С. 269–276.
18. *Ивлев Ю.В.* Квазиматричная логика – основа теории фактических (онтологических) модальностей // *Логические исследования*. 2001. Т. 8. С. 50–64.
19. *Ivlev Yu.V.* Generalization of Kalmar's method for quasi-matrix logic // *Логические исследования*. 2013. Т. 19. С. 281–307.
20. *Ивлев Ю.В.* Четырехзначные матричные модальные логики // *Логико-философские исследования*. 2016. Вып. 7. С. 76–93.
21. *Архипереев Н.Л.* Принципы построения теоретико-множественных семантик для некоторых модальных и интуиционистских логик // *Логико-философские исследования. Научно-теоретический журнал*. 2016. Вып. 7. С. 30–50.
22. *Архипереев Н.Л.* Теоретико-множественная семантика для системы Гейтинга Int. // *Логические исследования. Научно-теоретический журнал*. 2016. Т. 22, № 2. С. 9–26.
23. *Архипереев Н.Л.* Естественные модели для итерированных модальностей в системе Льюиса S4 // *Гуманитарный вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Эл. № ФС77 – 51037 от 3 сентября 2012 г.* ISSN 2306-8477. DOI: 10. 18698/2306–8477–2017–2–413. 2017. № 2 (52). URL: <http://hmbul.ru/catalog/hum/phil/413.html> (дата обращения: 1. 03. 2018).
24. *Архипереев Н.Л.* Теория логических модальностей без «возможных миров» // *Гуманитарный вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Эл. № ФС77 – 51037 от 3 сентября 2012 г.* ISSN 2306–8477. DOI: 10. 18698/2306–8477–2016–7–373. 2016. № 7 (45). URL: <http://hmbul.ru/catalog/hum/phil/373.html> (дата обращения: 1. 03. 2018).
25. *Avron A., Zamansky A.* Non-deterministic semantics for logical systems // *Handbook of Philosophical logic*. 2011. Vol. 16. P. 227–304.
26. *Avron A., Lev I.* Nondeterministic multi-valued structures // *Journal of Logic and Computation*. 2005. Vol. 15. P. 241–261.
27. *Carnielli W., Coniglio M.E.* Paraconsistent logic: consistency, contradiction and negation // *Logic, Epistemology and the Unity of Science*. Springer. 2016. P. XXI–XXIV, 29–62.
28. *Marcelo E. Coniglio, Ana Claudia Golzio.* Swap structures semantics for Ivlev-like model logics // *Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature*. 2019. P. 1–14.

29. Marcelo E. Coniglio, Luis Farinas del Cerro, Newton Peron. Finite non-deterministic semantics for some modal systems // *Journal of Applied Non-Classical Logic*. 2015. Vol. 25(1). P. 20–45.
30. Kearns J. Modal semantics without possible worlds // *Journal of Symbolic Logic*. 1981. Vol. 46 (1). P. 77–86.
31. Ивлев Ю.В. Деонтическая квазиматричная логика. Логика норм // *Гуманитарный вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*. 2018. № 7 (69). С. 1–12.
32. Кузнецов А.М. Квазиматричная логика норм : дис. ... канд. филос. наук. 1998.
33. Аркадскова П.Э. Шестизначная квазиматричная логика норм // *Логико-философские исследования*. 2017. Вып. 7. С. 145–152.
34. Hitoshi Omori, Daniel Skurt. More Modal Semantics Without Possible Worlds // *IFCoLog Journal of Logics and their Applications*. 2016. Vol. 3, № 5. С. 815–846.
35. Ivlev Yu. V. Quasi-matrix logic as a paraconsistent logic for dubitable information // *Logic and Logical Philosophy*. 2000. Vol. 8. P. 91–97.
36. Avron A., Lev I. Non-Deterministic Multiple-valued Structures // *Journal of Logic and Computation*. 2005. Vol. 15 (3). P. 241–261.
37. Jean-Yves. A new four-valued approach to modal logic // *Logique et Analyse*. 2011. Vol. 54 (213). P. 109–121.
38. Ивлев В.Ю., Ивлева Ю.В. От детерминизма к квазидетерминизму в логике и вне логики // *Логические исследования*. 2018. Т. 24, № 2. С. 92–99.
39. Кадыг-оол Х.К. Истоки квазиматричной логики // *Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение общественных наук*. 2013. № 2. С. 71–74.
40. Кадыг-оол Х.К. Квазиматричная логика: Райхенбах, Решер, Ивлев // *Научные труды Тувинского государственного университета. Кызыл*, 2011. Вып. IX, т. 1. С. 346–348.
41. Кадыг-оол Х.К. Матричные и квазиматричные системы алетической модальной логики. Кызыл, 2017. 98 с.
42. Pavlovski P. Tree-Like Proof Systems For Finitely-Many Valued Non-deterministic Consequence Relations // *Log. Univers.* 14 (2020), 407–420. 1661-8297/20/040407-14, published online October, 16, 2020. <https://doi.org/10.1017/s11787-020-00263-0>
43. Pavlovski P., Urbaniak R. Many-valued logic of informal provability: a non-deterministic strategy // *Rev. Symb. Log.* 2018. Vol. 11 (2). P. 207–223.
44. Ивлев Ю.В. Сравнительный анализ квазифункциональных логик // *Гуманитарный вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*. 2017. № 11 (61). С. 1–8.
45. *Математическая энциклопедия*. М. : Советская энциклопедия, 1982.
46. Ивлев В.Ю. Категории необходимости, случайности и возможности: их смысл и методологическая роль в научном познании // *Философия и общество*. 1977. № 3. С. 108–125.
47. Шалопин В.В. Принцип квазифункциональности и нечеткие логики : дис. ... канд. филос. наук. М. : МГУ им. М.В. Ломоносова, 1999.
48. Шалопин В.В. Квазифункции и абстрактные квазиавтоматы // *Наука и философия на рубеже тысячелетий: перспективы и горизонты : тез. докл. и выступлений Всерос. науч. конф., Курск, 11–12 апреля 1995 г. Курск*, 1995. С. 66–67.
49. Шалопин В.В. Квазифункции, нечеткие отношения и теории абстрактных автоматов // *XI Междунар. конф. «Логика, методология, философия науки»*. II. Москва ; Обнинск, 1995. С. 80–84.
50. Ивлев Ю.В. Квазиматричные и матричные трехзначные логики // *Логико-философские исследования*. 2014. № 6. С. 128–131.
51. Ивлев Ю.В. Логика. М. : Изд-во Моск. у-та, 1992. 270 с.

Yuriy V. Ivlev, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russian Federation).

E-mail: ivlev.logic@yandex.ru

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologiya. Politologiya – Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science. 2021. 63. pp. 214–235.

DOI: 10.17223/1998863X/63/21

QUASI-FUNCTIONAL RELATIONS IN LOGIC AND OTHER FIELDS OF KNOWLEDGE

Keywords: logic; logic and “as-if-logic”; quasi-function; quasi-determinism; quasi-functional logic

The study is supported by the Russian Foundation for Basic Research, Project No. 20-111-50323.

Classical science was mainly focused on the investigation of the cause-effect relations between phenomena obeying the principle of determinism: a certain phenomenon under certain conditions causes a certain effect. These relationships are expressible via functions. A function can be understood as an operation that, when applied to a certain object from the function domain, obtains a certain object from the function range. In nature, society, and cognition, there are relations of a different type. They obey the principle of quasi-determinism: one of several phenomena under one of several conditions causes one of several consequences. These relations are expressed by means of quasi-functions. In the article, a quasi-function is understood as an operation that is applied to an object from a subset of the (now) quasi-function definition domain to obtain an object from a subset of the quasi-function range. Since subsets of the domains of definitions and values of a quasi-function can consist of a single object, a special case of a quasi-function is a function. A special case of a quasi-function is also complete uncertainty (randomness) if the subsets from which the objects are selected coincide with the domain and range of the quasi-function. Since the function can be probabilistic, multi-valued, etc., then the quasi-function can be the same. The article reviews the main results of research on the application of the principle of quasi-functionality (quasi-determinism, limited determinism, nondeterminism) in the field of logic, mathematics, epistemology, natural science, technical and social knowledge. The methods of constructing quasi-functional logics of alethic ontological and logical modalities, and deontic logic are given. Ontological alethic modal logics are based on quasi-matrices, and logical ones are based on the semantics of restricted sets of state descriptions. Since methods of constructing logical systems that express relations in forms between judgments containing logical modalities are less known than systems with ontological modalities, they are given more space. Some problems for further research of quasi-functional logic and the methodological role of the principle of quasi-determinism in scientific knowledge are formulated, for example, the task of constructing logical systems, statements in which contain both logical and ontological modalities. It is proposed to apply the principle of quasi-functionality in the development of management decisions, etc.

References

1. Ivlev, Yu.V. (2018) The subject and prospects of development of logic. *Logicheskie issledovaniya – Logical Investigations*. 24(1). pp. 115–128. (In Russian). DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-1-115-128
2. Rescher, N. (1962) Quasi-truth-functional systems of propositional logic. *The Journal of Symbolic Logic*. 27(1). pp. 1–10. DOI: 10.2307/2963674
3. Goddard, L. (1960) The exclusive “or”. *Analysis*. 20. pp. 97–106. DOI: 10.1093/analys/20.5.97
4. Rescher, N. (1969) *Many-valued Logic*. New-York: [s.n.].
5. Ivlev, Yu.V. (1972) *Logika norm* [The logic of norms]. Philosophy Cand. Diss. Moscow.
6. Ivlev, Yu.V. (1973) Tablichnoe postroenie propozitsional'noy modal'noy logiki [Tabular construction of propositional modal logic]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 7. Filosofiya*. 6. pp. 51–61.
7. Ivlev, Yu.V. (1991) *Modal'naya logika* [Modal logic]. Moscow: Moscow State University.
8. Ivlev, Yu.V. (1985) *Soderzhatel'naya semantika modal'noy logiki* [Substantial semantics of modal logic]. Moscow: Moscow State University.
9. Ivlev, Yu.V. (2018) *Kvazimatrichnaya (kvazifunksional'naya) logika* [Quasi-matrix (quasi-functional) logic]. Moscow: Moscow State University.
10. Ivlev, Yu.V. (1980) *Soderzhatel'naya semantika modal'noy logiki* [Substantial semantics of modal logic]. In: Starchenko, A.A. (ed.) *Logiko-metodologicheskie issledovaniya* [Logical and Methodological Studies]. Moscow: Moscow State University. pp. 356–374.
11. Ivlev, Yu.V. (1982) *Soderzhatel'nyy analiz modal'nykh vyskazyvaniy* [Content analysis of modal statements]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 7. Filosofiya*. 5. pp. 57–68.
12. Ivlev, Yu.V. (1983) Interpretatsiya modal'nykh ischisleniy [Interpretation of modal calculus]. *Logicheskie issledovaniya: trudy nauchno-issledovatel'skogo seminar po logike Instituta filosofii AN SSSR*. 2. pp. 59–70.
13. Ivlev, Yu.V. (1987) *Novye semantiki modal'noy logiki* [New semantics of modal logic]. In: Ivlev, Yu.V. (ed.) *Sovremennaya logika i metodologiya nauki* [Modern logic and methodology of science]. Moscow: Moscow State University. pp. 71–86.
14. Ivlev, Yu.V. (1988) A semantics for modal calculi. *Bulletin of the Section of Logic*. 17(3–4). pp. 114–126.
15. Ivlev, Yu.V. (2005) Quasi-matrix logic. *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*. 11(3–4). pp. 239–252.

16. Ivlev, Yu.V. (1992) Kvazifunktsional'naya logika [Quasi-functional logic]. *Nauchno-tekhnicheskaya informatsiya. Ser. 2: Informatsionnye protsessy i sistemy*. 6. pp. 12–20.
17. Ivlev, V.Yu. & Ivlev, Yu.V. (2000) Problema postroeniya teorii fakticheskikh modal'nostey [The problem of constructing the theory of actual modalities]. *Logicheskie issledovaniya – Logical Investigations*. 7. pp. 269–276.
18. Ivlev, Yu.V. (2001) Kvazimatrichnaya logika – osnova teorii fakticheskikh (ontologicheskikh) modal'nostey [Quasi-matrix logic – the basis of the theory of actual (ontological) modalities]. *Logicheskie issledovaniya – Logical Investigations*. 8. pp. 50–64.
19. Ivlev, Yu.V. (2013) Generalization of Kalmar's method for quasi-matrix logic. *Logicheskie issledovaniya – Logical Investigations*. 19. pp. 281–307.
20. Ivlev, Yu.V. (2016) Chetyrekhznachnye matrchnye modal'nye logiki [Four-digit matrix modal logics]. In: Ivlev, Yu.V. (ed.) *Logiko-filosofskie issledovaniya* [Logical and Philosophical Studies]. Vol. 7. pp. 76–93.
21. Arkhiereev, N.L. (2016a) Printsipy postroeniya teoretiko-mnozhestvennykh semantik dlya nekotorykh modal'nykh i intuitsionistskikh logic [Principles of constructing set-theoretic semantics for some modal and intuitionistic logics]. In: Ivlev, Yu.V. (ed.) *Logiko-filosofskie issledovaniya* [Logical and Philosophical Studies]. Vol. 7. pp. 30–50.
22. Arkhiereev, N.L. (2016b) Set-theoretic Semantics for Heyting's System Int. *Logicheskie issledovaniya – Logical Investigations*. 22(2). pp. 9–26. (In Russian). DOI: 10.21146/2074-1472-2016-22-2-9-26
23. Arkhiereev, N.L. (2017) Natural models for iterated modalities in the Lewis' s4 system. *Gumanitarnyy vestnik MGTU im. N.E. Bauman*. 2(52). (In Russian). DOI: 10.18698/2306-8477-2017-2-413
24. Arkhiereev, N.L. (2016) Theory of logical modalities without “possible worlds”. *Gumanitarnyy vestnik MGTU im. N.E. Bauman*. 7(45). (In Russian). DOI: 10.18698/2306-8477-2016-7-373
25. Avron, A. & Zamansky, A. (2011) Non-deterministic semantics for logical systems. *Handbook of Philosophical Logic*. 16. pp. 227–304.
26. Avron, A. & Lev, I. (2005) Nondeterministic multi-valued structures. *Journal of Logic and Computation*. 15. pp. 241–261.
27. Carnielli, W. & Coniglio, M.E. (2016) *Paraconsistent logic: consistency, contradiction and negation*. Springer. pp. XXI–XXIV, 29–62.
28. Coniglio, M.E. & Golzio, A.C. (2019) *Swap structures semantics for Ivlev-like model logics*. Springer-Verlag. pp. 1–14.
29. Coniglio, M.E., del Cerro, L.F. & Peron, N. (2015) Finite non-deterministic semantics for some modal systems. *Journal of Applied Non-Classical Logic*. 25(1). pp. 20–45.
30. Kearns, J. (1981) Modal semantics without possible worlds. *Journal of Symbolic Logic*. 46(1). pp. 77–86.
31. Ivlev, Yu.V. (2018) Deonticheskaya kvazimatrichnaya logika. Logika norm [Deontic quasi-matrix logic. The logic of norms]. *Gumanitarnyy vestnik MGTU im. N.E. Bauman*. 7(69). pp. 1–12.
32. Kuznetsov, A.M. (1998) *Kvazimatrichnaya logika norm* [Quasi-matrix logic of norms]. Philosophy Cand. Diss.
33. Arkadskova, P.E. (2017) Shestiznachnaya kvazimatrichnaya logika norm [Six-digit quasi-matrix logic of norms]. In: Ivlev, Yu.V. (ed.) *Logiko-filosofskie issledovaniya* [Logical and Philosophical Studies]. Vol. 7. Moscow: A.V. Vorobiev. pp. 145–152.
34. Omori, H. & Skurt, D. (2016) More Modal Semantics Without Possible Worlds. *IFCoLog Journal of Logics and their Applications*. 3(5). pp. 815–846.
35. Ivlev, Yu.V. (2000) Quasi-matrix logic as a paraconsistent logic for dubitable information. *Logic and Logical Philosophy*. 8. pp. 91–97.
36. Avron, A. & Lev, I. (2005) Non-Deterministic Multiple-valued Structures. *Journal of Logic and Computation*. 15(3). pp. 241–261.
37. Beziau, J.-Y. (2011) A new four-valued approach to modal logic. *Logique et Analyse*. 54(213). pp. 109–121.
38. Ivlev, V.Yu. & Ivleva, Yu.V. (2018) From determinism to quasideterminism in logic and beyond logic. *Logicheskie issledovaniya – Logical Investigations*. 24(2). pp. 92–99. (In Russian). DOI: 10.21146/2074-1472-2018-24-2-92-99
39. Kadyg-ool, Kh.K. (2013) Istoki kvazimatrichnoy logiki [The origins of quasi-matrix logic]. *Izvestiya Akademii nauk respubliki Tadzhikistan, Otdelenie obshchestvennykh nauk*. 2. pp. 71–74.

40. Kadyg-ool, Kh.K. (2011) Kvazimatrichnaya logika: Raykhenbakh, Resher, Ivlev [Quasi-matrix logic: Reichenbach, Resher, Ivlev]. *Nauchnye trudy Tuvinskogo gosudarstvennogo universiteta*. 9(1). pp. 346–348.
41. Kadyg-ool, Kh.K. (2017) *Matrichnye i kvazimatrichnye sistemy aleticheskoy modal'noy logiki* [Matrix and quasi-matrix systems of alethic modal logic]. Kyzyl: [s.n.].
42. Pavlovski, P. (2020) Tree-Like Proof Systems For Finitely-Many Valued Non-deterministic Consequence Relations. *Log. Univers.* 14. pp. 407–420. DOI: 10.1017/s11787-020-00263-0
43. Pavlovski, P. & Urbaniak, R. (2018) Many-valued logic of informal provability: a non-deterministic strategy. *The Review of Symbolic Logic*. 11(2). pp. 207–223. DOI: 10.1017/S1755020317000363
44. Ivlev, Yu.V. (2017) Sravnitel'nyy analiz kvazifunktional'nykh logik [Comparative analysis of quasi-functional logics]. *Gumanitarnyy vestnik MGTU im. N.E. Baumana*. 11(61). pp. 1–8.
45. Vinogradov, I.M. (ed.) (1982) *Matematicheskaya entsiklopediya* [Mathematical encyclopedia]. Vol. 3. Moscow: Sovetskaya entsiklopediya.
46. Ivlev, V.Yu. (1977) Kategorii neobkhodimosti, sluchaynosti i vozmozhnosti: ikh smysl i metodologicheskaya rol' v nauchnom poznanii [Categories of necessity, chance and possibility: their meaning and methodological role in scientific knowledge]. *Filosofiya i obshchestvo*. 3. pp. 108–125.
47. Shalopin, V.V. (1999) *Printsip kvazifunktional'nosti i nechetkie logiki* [The principle of quasi-functionality and fuzzy logics]. Philosophy Cand. Diss. Moscow.
48. Shalopin, V.V. (1995a) Kvazifunktsii i abstraktnye kvaziavtomaty [Quasi-functions and abstract quasi-automata]. *Nauka i filosofiya na rubezhe tysyacheletiy: perspektivy i gorizonty* [Science and philosophy at the turn of the millennium: perspectives and horizons]. Proc. of the Conference. Kursk, April 11–12, 1995. Kursk. pp. 66–67.
49. Shalopin, V.V. (1995b) Kvazifunktsii, nechetkie otnosheniya i teorii abstraktnykh avtomatov [Quasi-functions, fuzzy relations and theories of abstract automata]. *Logika, metodologiya, filosofiya nauki* [Logic, methodology, philosophy of science]. Proc. of the Conference. Moscow; Obninsk. pp. 80–84.
50. Ivlev, Yu.V. (2014) Kvazimatrichnye i matrighnye trekhznachnye logiki [Quasi-matrix and matrix three-valued logics]. In: Ivlev, Yu.V. (ed.) *Logiko-filosofskie issledovaniya* [Logical and Philosophical Studies]. Vol. 6. Moscow: Tsentr strategicheskoy kon'yunktury. pp. 128–131.
51. Ivlev, Yu.V. (1992) *Logika* [Logics]. Moscow: Moscow State University.