

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

---

---

*Научный журнал*

---

**2021**

**№ 57**

**Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере  
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия  
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)**

**Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031**

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций  
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,  
Высшей аттестационной комиссии

Founder – Tomsk State University

### EDITORIAL BOARD

**Alexander Gortsev** – Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599

**Valery Smagin** – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599

**Lyudmila Nezhelskaya** – Executive Editor, Doctor. of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

**Sergey Vorobeychikov** – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University

**Vladimir Vishnevsky** – Doctor of Sc., Prof. Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).

**Gennady Koshkin** – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University

**Yury Kostyuk** – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Informatics Department Tomsk State University

**Anjela Matrosova** – Doctor of Sc., Prof. of the Programming Department Tomsk State University

**Anatoly Nazarov** – Doctor of Sc., Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department Tomsk State University

**Konstantin Samouylov** – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Probability and Informatics Department RUDN University (Moscow, Russia)

**Eugene Semenk** – Doctor of Sc., Prof. System Analysis and Operations Research Department Reshetnev Siberian State University of Science and Technology (Krasnoyarsk, Russia)

**Sergey Sushchenko** – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied of Information Department Tomsk State University

**Mais Farkhadov** – Doctor of Sc., Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).

**Gurami Tsitsiashvili** – Doctor of Sc., Prof., Chief researcher Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Prof. Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russia)

#### Editorial address:

Institute of Applied Mathematics and Computer Science,  
unit of Applied Mathematics

National Research Tomsk State University

36 Lenina Avenue, Tomsk, 634050

Telephone / fax: +73822529599

E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

### EDITORIAL COUNCIL

**Ana Rosa Cavalli**

PhD, Prof.

University VII Paris, France

**Alexander Dudin**

Doctor of Sc., Prof.

Belarusian State University

Minsk, Republic Belorussia

**Reindert Nobel**

Doctor of Sc., Associate Prof.

Vrije University, Amsterdam,

Netherlands

**Enco Orzinger**

PhD, Prof.

University of Rome, Italy

**Paolo Prinetto**

Prof. Politechnic Institute,

Torino, Italy

**Gilbert Saporta**

PhD, Prof.

Pierre and Marie Curie

University, Paris, France

**Raimund Ubar**

Doctor of Sc., Prof.

University of Technology

Tallinn, Estonia

**Nina Yevtushenko**

Doctor of Sc., Prof.

Ivannikov V.P. ISP RAS

Moscow, Russia

**Yervant Zorian**

PhD, Fellow & Chief Architect,

Synopsys, Mountain View,

CA, USA

Учредитель – Томский государственный университет

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Горцев Александр Михайлович** – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599

**Смагин Валерий Иванович** – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599

**Нежелская Людмила Алексеевна** – ответственный секретарь, доц., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ  
E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

**Воробейчиков Сергей Эрикович** – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ

**Вишневецкий Владимир Миронович** – проф., д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)

**Кошкин Геннадий Михайлович** – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ

**Костюк Юрий Леонидович** – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теоретической информатики ТГУ

**Матросова Анжела Юрьевна** – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры программирования ТГУ

**Назаров Анатолий Андреевич** – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики ТГУ

**Самуйлов Константин Евгеньевич** – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (г. Москва)

**Семенкин Евгений Станиславович** – проф., д-р техн. наук, проф. каф. системного анализа и исследования операций, СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)

**Сушенко Сергей Петрович** – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики ТГУ

**Фархадов Маис Паша Оглы** – д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)

**Цициашвили Гурами Шалвович** – проф., д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН, проф. ДВФУ (г. Владивосток)

Адрес редакции и издателя: 634050, Томск, пр. Ленина, 36

Национальный исследовательский Томский государственный университет,  
Институт прикладной математики и компьютерных наук,

отделение прикладной математики

Телефон / факс: +73822529599

E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**Ана Роза Ковали**

д-р. философии, проф.

Университет VII Париж, Франция

**Александр Дудин**

д.ф.-м.н., проф.

БГУ, Минск,

Республика Беларусь

**Рейндерт Нобель**

д-р., доцент

Свободный университет, Амстердам,

Нидерланды

**Енцо Орзингер**

д-р. философии, проф.

Римский университет, Италия

**Паоло Принетто**

проф. Политехнический институт

Турин, Италия

**Жильберт Сапорта**

д-р. философии, проф.

Университет им. Пьера и Марии

Кюри, Париж, Франция

**Раймонд Убар**

д-р. проф.

Технологический университет,

Таллинн, Эстония

**Нина Евтушенко**

д-р. техн. наук, проф.

ИСП РАН им. Иваницкова В.П.,

Москва, Россия

**Ервант Зорян**

д-р. философии,

гл. научный сотр.

Фирмы «Синописис»,

США

### JOURNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031)

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- control of dynamical systems,
- mathematical modeling,
- data processing,
- informatics and programming,
- discrete function and automation,
- designing and diagnostics of computer systems.

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

### О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке

Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- управление динамическими системами,
- математическое моделирование,
- обработка информации,
- информатика и программирование,
- дискретные функции и автоматы,
- проектирование и диагностика вычислительных систем.

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).

Правила оформления статей приведены на сайте:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

**СОДЕРЖАНИЕ**

**CONTENTS**

**УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ**

**CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS**

**Параев Ю.И., Колесникова С.И., Цветницкая С.А.**  
Управление роботом-манипулятором  
в условиях неопределенности ..... 4

**Сочнев А.Н.**  
Реализация принципа управления по отклонению  
в моделях машиностроительного производства  
на основе сетей Петри ..... 13

**Paraev Yu.I., Kolesnikova S.I., Tsvetnitskaya S.A.**  
Control of a robot manipulator  
in conditions of uncertainty ..... 4

**Sochnev A.N.**  
Implementation of the deviation control principle  
in models of mechanical engineering production  
based on Petri nets ..... 13

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**MATHEMATICAL MODELING**

**Исаева О.С., Кулясов Н.В., Исаев С.В.**  
Инфографический метод поддержки испытаний  
бортовых систем космических аппаратов  
на основе базы знаний ..... 22

**Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г.,  
Патрушев И.И., Овчинникова А.С.**  
Применение процедуры группирования конечных  
элементов для повышения эффективности  
моделирования нестационарного многофазного потока  
в высоконеоднородных трехмерных пористых средах ..... 34

**Хайиткулов Б.Х.**  
Конечно-разностный метод решения нестационарных  
задач управления конвекцией-диффузией ..... 45

**Яблонский В.О.**  
Моделирование извлечения газа из реологически  
сложных сред в поле центробежных сил в гидроциклоне ..... 53

**Isaeva, O.S., Kulaysov, N.V., Isaev, S.V.**  
Infographic method to support testing  
of spacecraft onboard systems based  
on knowledge base ..... 22

**Persova M.G., Soloveichik Yu.G.,  
Patrushev I.I., Ovchinnikova A.S.**  
Application of the finite element grouping  
procedure to improve the efficiency  
of unsteady multiphase flow simulation  
in high-heterogeneous 3D porous media ..... 34

**Khayitkulov B.Kh.**  
Finite-difference method for solving non-stationary  
problems of convection-diffusion control ..... 45

**Yablonskii V.O.**  
Modeling of gas extraction from rheologically complex  
media in the field of centrifugal forces in a hydrocyclone ..... 53

**ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ**

**DATA PROCESSING**

**Кеба А.В., Нежелская Л.А.**  
Оценка параметров плотности вероятности значений  
длительности интервала между соседними событиями  
в обобщенном МАР-потоке событий с двумя состояниями ..... 62

**Назаров А.А., Пауль С.В., Лизюра О.Д., Шульгина К.С.**  
Исследование RQ-системы M|M|1 с разнотипными  
вызываемыми заявками и ненадежным прибором  
методом асимптотически-диффузионного анализа ..... 74

**Приступа П.В., Михеев П.А.,  
Поддубный В.В., Сущенко С.П.**  
Эффективность прямой коррекции ошибок  
в транспортном протоколе на внутрисегментном уровне ..... 84

**Rouban A.I.**  
The sensitivity coefficients for dynamic systems described  
by difference equations with the distributed memory  
on phase coordinates and variable parameters ..... 95

**Keba A.V., Nezhel'skaya L.A.**  
Estimation of the probability density parameters  
of the interval duration between events  
in generalized map with two states ..... 62

**Nazarov A.A., Paul S.V., Lizyura O.D., Shulgina K.S.**  
Asymptotic-diffusion analysis of retrial queue  
with two-way communication  
and unreliable server ..... 74

**Pristupa P.V., Mikheev P.A.,  
Poddubnyy V.V., Suschenko S.P.**  
The effectiveness of forward error correction  
in transport protocol at the intrasegment level ..... 84

**Rouban A.I.**  
The sensitivity coefficients for dynamic systems described  
by difference equations with the distributed memory  
on phase coordinates and variable parameters ..... 95

**ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

**INFORMATICS AND PROGRAMMING**

**Жуков И.А., Костюк Ю.Л.**  
Расширенный алгоритм контроля знаний для модели  
представления многовариантных заданий ..... 101

**Калашников С.Н., Мартусевич Е.А.,  
Мартусевич Е.В., Рыбенко И.А., Буинцев В.Н.**  
Проектирование и реализация комплекса программ  
для моделирования технологического процесса  
формирования алюминиевых сплавов на основе  
объектно-ориентированного подхода ..... 110

**Кривошеев Н.А., Иванова Ю.А., Спицын В.Г.**  
Автоматическая генерация коротких текстов на основе  
применения нейронных сетей LSTM и SeqGAN ..... 118

**Zhukov I.A., Kostyuk Yu.L.**  
An extended assessment algorithm for multivariate task  
presentation model ..... 101

**Kalashnikov S.N., Martusevich E.A.,  
Martusevich E.V., Rybenko I.A., Buintsev V.N.**  
Design and implementation of a set of programs  
for modeling the technological process  
of forming aluminum alloys based  
on an object-oriented approach ..... 110

**Krivosheev N.A., Ivanova Y.A., Spitsyn V.G.**  
Automatic generation of short texts based on the use  
of neural networks LSTM and SeqGAN ..... 118

**ХРОНИКИ: МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ,  
ПЕРСОНАЛИИ**

**CHRONICLE: MEMOIRS, MEMORABLE DATES,  
PERSONALITIES**

Памяти Юрия Ивановича Параева ..... 131

Сведения об авторах ..... 133

Memory Yury I. Paraev ..... 131

Brief information about the authors ..... 133

## УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 62-50

DOI: 10.17223/19988605/57/1

**Ю.И. Параев, С.И. Колесникова, С.А. Цветницкая**

### УПРАВЛЕНИЕ РОБОТОМ-МАНИПУЛЯТОРОМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 20-08-00747.*

Рассматривается проблема управления трехзвенным роботом-манипулятором в условиях неопределенности на примере управления движением ковша экскаватора. Задача состоит в переводе ковша из одного неподвижного положения в другое неподвижное положение. Неизвестным параметром здесь является масса зачерпнутого ковшем грунта. Решение задачи – управление, состоящее из суммы программного управления, получающегося в результате решения задачи при отсутствии неизвестного грунта, и выхода ПИД-регулятора. Приведены результаты численного моделирования.

**Ключевые слова:** трехзвенный робот; ПИД-регулятор; движение экскаватора.

В настоящее время существует большое количество различных типов подвижных роботов, или манипуляционных систем (экскаваторы, погрузчики, бурильные установки и пр.). Несмотря на возрастающее число работ в направлении создания систем управления для существующих моделей манипуляторов, имеется ряд не вполне решенных вопросов: невысокая точность следящего управления; сложность технической реализации системы управления с учетом вопросов устойчивости и т.п. Теоретические вопросы управления подобными устройствами наиболее подробно изложены в [1–4].

Среди подвижных роботов выделяются трехзвенные роботы-манипуляторы, состоящие из трех звеньев: стрела, рукоять и исполнительный механизм, соединенных между собой шарнирными механизмами. Наиболее подробно математическая теория управления подобными роботами изложена в [5–12]. В [5–8] для управления роботами предложено использовать так называемые скользящие режимы [13], что приводит к определенным вычислительным трудностям. В [14] авторами в предположении, что все координаты и параметры робота доступны измерениям или вычислениям, предложен новый и достаточно простой аналитический метод построения законов управления для рассматриваемых трехзвенных роботов-манипуляторов. Получено решение задачи перевода исполнительного механизма из одного неподвижного положения в другое неподвижное положение, и решена задача планировки – равномерного движения исполнительного механизма манипулятора вдоль заданной горизонтальной поверхности.

Настоящая работа является продолжением [14]. Здесь рассматривается задача, когда в математической модели робота имеются какие-то неизвестные параметры. Для определенности в качестве робота выступает экскаватор, а исполнительным механизмом является ковш. Неизвестный параметр – масса зачерпнутого ковшем грунта.

#### 1. Схема робота-манипулятора

Схема робота-манипулятора приведена на рис. 1. Здесь  $OA$  – стрела,  $AB$  – рукоять,  $BC$  – исполнительный механизм (ковш). В точках  $O$ ,  $A$  и  $B$  расположены шарнирные механизмы, которые выполняют поворот звеньев. Параметры робота:  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  – длины звеньев  $OA$ ,  $AB$ ,  $BC$  соответственно,  $m_1$ ,  $m_2$ ,

$m_3$  – массы звеньев. Конфигурация (состояние) робота однозначно определяется углами между звеньями  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  или координатами точек  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ . Между этими величинами есть однозначное соответствие (см. Приложение 1).

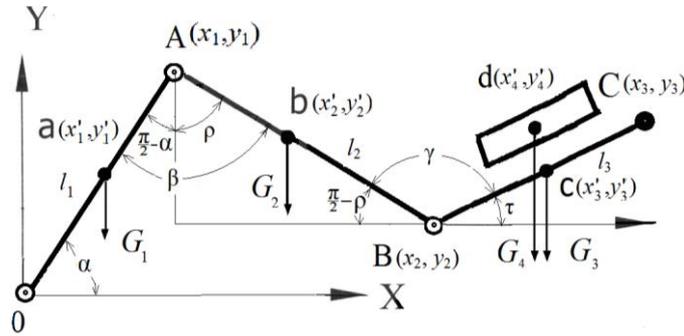


Рис. 1. Схема робота-манипулятора  
Fig. 1. Robot manipulator diagram

Массу зачерпнутого ковшом грунта обозначим через  $m_4$ . Она является неизвестной величиной. Представим ее в виде  $m_4 = qm_0$ , где  $m_0$  – максимальная масса грунта, которую может зачерпнуть ковш,  $q$  – неизвестная константа, лежащая в интервале  $0 \leq q \leq 1$ .

## 2. Уравнения движения

Для краткости введем обозначения:

$$\varphi^T = [\alpha, \beta, \gamma]^T, \quad z^T = [x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]^T.$$

Вращательное движение звеньев вокруг точек  $O$ ,  $A$  и  $B$  описывается уравнениями

$$J_i(z)\ddot{\varphi}_i = M_i - R_i(z), \quad i=1,2,3, \quad (1)$$

где  $M_k$  – управляющие моменты,  $J_k$  – моменты инерции,  $R_k$  – весовые моменты (произведение веса тела на плечо – проекцию центра тяжести звена на ось  $OX$ ). Конкретный вид этих величин с учетом массы грунта приведен в Приложении 2, здесь их удобно рассмотреть в виде:

$$R_i(z, q) = R_i(z) + q\Delta R_i(z), \quad J_i(z, q) = J_i(z) + q\Delta J_i(z), \quad i=1,2,3.$$

В результате уравнения (1) переписываются в виде:

$$(J_i(z) + q\Delta J_i(z))\ddot{\varphi}_i = M_i - R_i(z) - q\Delta R_i(z), \quad i=1,2,3,$$

или

$$\ddot{\varphi}_i = \frac{M_i - R_i(z) - q\Delta R_i(z)}{(J_i(z) + q\Delta J_i(z))}, \quad i=1,2,3. \quad (2)$$

Если  $q = 0$ , то получаем уравнения

$$\ddot{\varphi}_i = \frac{M_i - R_i(z)}{J_i(z)}, \quad i=1,2,3, \quad (3)$$

которые описывают движение экскаватора при отсутствии грунта.

**Задача 1.** Определенная задача. На интервале времени  $(0, t_k)$  найти такие управляющие моменты  $M_i$ , при которых система (3) из начального неподвижного состояния

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad (4)$$

переходит в другое неподвижное состояние

$$\varphi(t_k) = \varphi^*, \quad \dot{\varphi}(t_k) = 0. \quad (5)$$

Решение этой задачи получено в [14] и состоит в том, что в (3) делается замена

$$M_i = J_i u_i + R_i, \quad i=1,2,3, \quad (6)$$

где  $u = [u_1, u_2, u_3]^T$  – новые управления. Тогда из (3) получаем уравнения

$$\ddot{\varphi}_i = u_i, \quad i=1,2,3. \quad (7)$$

В (7) на интервале времени  $(0, t_k)$  программное управление  $u_1, u_2, u_3$  выбирается так, чтобы система (7) из начального неподвижного состояния (4) переходила в другое неподвижное состояние (5). Решение этой задачи приведено в Приложении 3.

Если  $q > 0$ , то получается неопределенная задача, когда в уравнения входит неизвестная константа. Кроме того, чтобы система оказалась в неподвижном состоянии, необходимо, как следует из (2), выполнение равенства

$$M_i = R_i(z) + q\Delta R_i(z), \quad i=1,2,3, \quad (8)$$

в которое входит неизвестная величина  $q$ .

**Задача 2.** Неопределенная задача. Для системы (2) на интервале времени  $(0, t_k)$  найти такие управляющие моменты  $M_i$ , при которых система из начального неподвижного состояния (4) переходит в другое неподвижное состояние (5) или в его некоторую окрестность.

### 3. Решение задачи 2

В (2) сделаем замену

$$M_i = J_i(z)(u_i + \Delta u_i) + R_i(z), \quad i=1,2,3, \quad (9)$$

где  $u_i$  – программное управление из определенной задачи,  $\Delta u_i$  – какая-то новая управляющая добавка. В результате получаем

$$\ddot{\phi}_i = \frac{J_i(z)(u_i + \Delta u_i) - q\Delta R_i(z)}{J_i(z) + q\Delta J_i(z)} = u_i + \Delta u_i - qh_i(z, q), \quad i=1,2,3, \quad (10)$$

где

$$h_i(z, q) = \frac{\Delta J_i(z)(u_i + \Delta u_i) + \Delta R_i(z)}{J_i(z) + q\Delta J_i(z)}, \quad i=1,2,3.$$

Решение уравнения (10) отличается от решения задачи 1. Введем отклонения

$$\Delta\phi_i(t) = \phi_i(t) - \phi_i^*(t), \quad i=1,2,3,$$

где  $\phi_i^*(t)$  – решение задачи 1, т.е.  $\phi_i^*(t)$  удовлетворяет уравнению (7), а также начальным и конечным условиям (4) и (5). Вычитая (7) из (10), получаем

$$\Delta\ddot{\phi}_i = \Delta u_i - qh_i(q, z), \quad i=1,2,3. \quad (11)$$

Здесь предполагается, что все координаты  $z(t)$  доступны измерению. Поэтому величины  $J_i(z)$ ,  $R_i(z)$ ,  $\Delta J_i(z)$  и  $\Delta R_i(z)$  могут быть вычислены по формулам из Приложения 2.

**Задача 3.** Для системы (11) на интервале времени  $(0, t_k)$  найти такие управляющие моменты  $\Delta u_i$ , при которых система из нулевого начального состояния  $\Delta\phi_i(0) = \Delta\dot{\phi}_i(0) = 0, i=1,2,3$ , переходит в нулевое конечное состояние  $\Delta\phi_i(t_k) = \Delta\dot{\phi}_i(t_k) = 0, i=1,2,3$ , или в его окрестность.

### 4. Решение задачи 3

Для решения этой задачи воспользуемся идеей адаптивного управления, схема которого представлена на рис. 2. Здесь модель задает некоторую эталонную (опорную) траекторию движения  $\phi^*(t)$ .

Регулятор строится так, чтобы минимизировать отклонение выхода объекта  $\phi(t)$  от опорной траектории  $\phi^*(t)$ . В нашем случае опорные траектория  $\phi^*(t)$  и  $\phi(t)$  задаются уравнениями (7) и (10) соответственно, а отклонение между ними - уравнением (11).

Поскольку в (10) все три уравнения одинаковые, то возьмем одно из них (уберем индекс  $i$ ). Обозначим через  $\eta(t) = \Delta\phi(t)$ . Согласно (11) эта переменная удовлетворяет уравнению

$$\dot{\eta} = \Delta u_i - qh_i(q, z), \quad i=1,2,3. \quad (12)$$

Введем новую переменную  $w(t)$  как решение уравнения

$$\dot{w} = -dw + \Delta\phi, \quad w(0) = 0, \quad (13)$$

где  $d$  - положительная постоянная. Управление в (12) возьмем в виде:

$$\Delta u(t) = k_1 \Delta \varphi(t) + k_2 w(t), \quad (14)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  – некоторые коэффициенты.

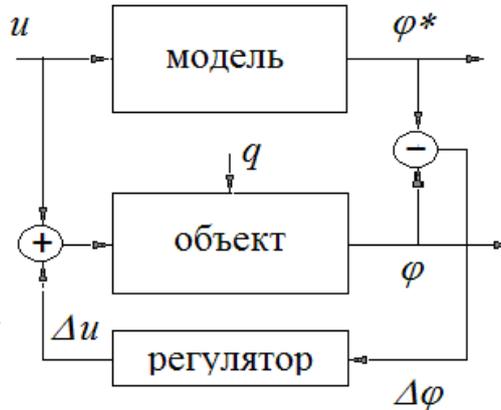


Рис. 2. Блок-схема адаптивного управления  
Fig. 2. Block diagram of adaptive control

Объединяя последние уравнения, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\varphi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 1 & 0 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \eta \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ qh \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что если система (15) устойчивая, то существует стационарное решение этого уравнения, которое находится из следующих соотношений:

$$\eta = 0, \quad k_1 \Delta \varphi + k_2 w - qh = 0, \quad \Delta \varphi - dw = 0.$$

Отсюда

$$\Delta \varphi_{ст} = \frac{qd}{k_1 d + k_2} h(t_k), \quad \eta_{ст} = 0, \quad w_{ст} = \frac{q}{k_1 d + k_2} h(t_k). \quad (16)$$

Из (16) видно, что при достаточно больших по модулю значениях коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  значение  $\Delta \varphi_{ст}$  можно сделать достаточно малым при любом конечном  $h$ , т.е. получим решение задачи 3.

Остается найти коэффициенты  $d$ ,  $k_1$  и  $k_2$ , при которых матрица коэффициентов в (15) устойчива. Данные коэффициенты можно определить, пользуясь методом модального управления [15], когда характеристический многочлен этой матрицы приравнивается к заведомо устойчивому многочлену.

Характеристический многочлен матрицы коэффициентов в (15) равен

$$\Delta(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -k_1 & \lambda & -k_2 \\ -1 & 0 & \lambda + d \end{bmatrix} = \lambda^3 + d\lambda^2 - k_1\lambda - (k_2 + dk_1).$$

Приравнивая коэффициенты этого многочлена к соответствующим коэффициентам заведомо устойчивого многочлена  $\Delta(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ , получаем

$$d = a_1, \quad k_1 = -a_2, \quad k_2 = a_1 a_2 - a_3.$$

Заметим, что для устойчивого многочлена  $\Delta(\lambda)$  все его коэффициенты и определители Гурвица должны быть положительными. Для многочлена  $\Delta(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$  определители Гурвица равны

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_3, \quad \Delta_3 = a_3 \Delta_2$$

и должны быть положительными, отсюда получаем условия

$$k_1 = -a_2 < 0, \quad k_2 = \Delta_2 > 0.$$

Если в качестве многочлена  $\Delta(\lambda)$  взять биномиальный многочлен  $\Delta(\lambda) = \lambda^3 + 3\omega\lambda^2 + 3\omega^2\lambda + \omega^3$ , где  $\omega$  – параметр, определяющий степень затухания, то получаем

$$d = 3\omega, \quad k_1 = -3\omega^2, \quad k_2 = 8\omega^3.$$

Отсюда

$$\Delta\varphi_{ст} = \frac{3}{\omega^2}qh, \eta_{ст} = 0.$$

При больших значениях  $\omega$  и при достаточно большом интервале времени  $(0, t_k)$  значение  $\Delta\varphi_{ст}$  становится достаточно малым, и скорость его изменения стремится к нулю.

Аналогичный результат получается, если в качестве многочлена  $\Delta(\lambda)$  взять многочлен Баттерворда [15]  $\Delta(\lambda) = \lambda^3 + 2\omega\lambda^2 + 2\omega^2\lambda + \omega^3$ , где  $\omega$  – параметр, определяющий степень затухания. В этом случае получаем

$$d = 2\omega, k_1 = -2\omega^2, k_2 = 3\omega^3.$$

Отсюда

$$\Delta\varphi_{ст} = \frac{2}{\omega^2}qh, \eta_{ст} = 0,$$

и при большом  $\omega$  значение  $\Delta\varphi_{ст}$  становится достаточно малым.

Окончательное решение задачи 2 состоит в том, что управляющие моменты  $M_i$  вычисляются согласно (9), где  $u_i$  – программное управление для определенной задачи (П2),  $\Delta u(t)$  определено в (14). При этом предполагается, что все координаты  $z(t)$  доступны измерению, поэтому величины  $J_i(z)$  и  $R_i(z)$  могут быть вычислены по формулам из Приложения 2.

### 5. Моделирование

Для простоты будем предполагать, что плотность звеньев постоянна и их центры тяжести совпадают с геометрическими центром. Это позволяет для вычисления моментов инерции и весовых моментов использовать формулы из Приложения 2.

Исходные данные: длины звеньев:  $l_1 = 5$  м,  $l_2 = 3$  м,  $l_3 = 1,5$  м; массы звеньев:  $m_1 = 500$  кг,  $m_2 = 300$  кг,  $m_3 = 100$  кг,  $m_0 = 200$  кг. Начальное состояние ковша определяется координатами

$$x_2 = 4; y_2 = 0,1; x_3 = 5,5; y_3 = 0,1. \tag{17}$$

Конечное состояние ковша определяется координатами

$$x_2 = 6; y_2 = 2,5; x_3 = 7,5; y_3 = 2,5. \tag{18}$$

С помощью формулы (П1) можно вычислить, что начальному состоянию (17) соответствуют значения  $x_1 = 3,924$ ,  $y_1 = 3,1$  и начальные значения углов  $\varphi(0) = [0,6685 \ 0,9277 \ 1,5962]$ . Аналогично конечному состоянию (18) соответствуют значения  $x_1 = 3,924$ ,  $y_1 = 3,1$  и конечные значения углов  $\varphi(t_k) = [0,8546 \ 1,8494 \ 2,7839]$ .

На рис. 3 приведены результаты моделирования перевода ковша из начального состояния в конечное. Кривые 4 и 1 соответствует начальному и заданному конечному положению робота, кривые 3 и 2 – траектории передвижения за счет программного управления и совместного применения программного управления и ПИД-регулятора соответственно. Из рис. 3 следует, что использование ПИД-регулятора существенно улучшает результат управления.

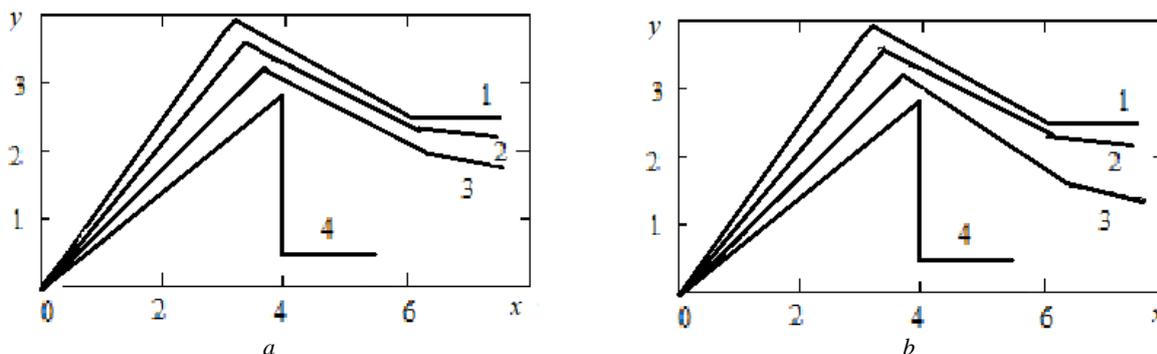


Рис. 3. Перевод ковша из начального состояния в конечное:  $a - q = 0,5$ ;  $b - q = 1$   
 Fig. 3. Transfer of the bucket from the initial state to the final state:  $a - q = 0,5$ ;  $b - q = 1$

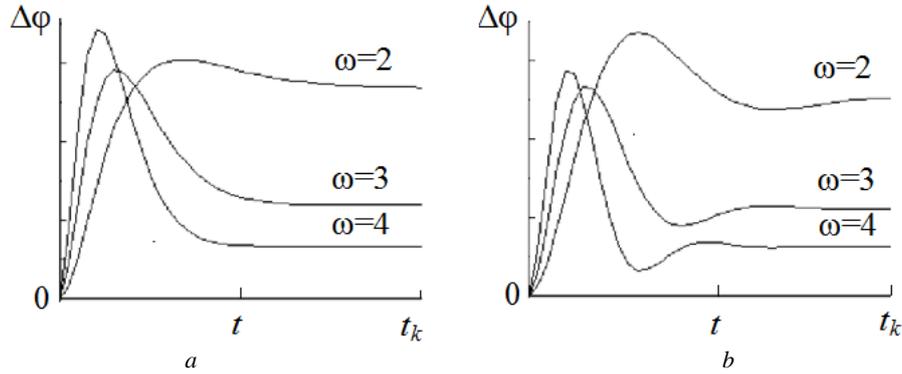


Рис. 4. Переходные процессы для отклонения  $\Delta\varphi(t)$   
 Fig. 4. Transients for deviation  $\Delta\varphi(t)$

На рис. 4 приведены переходные процессы для отклонения  $\Delta\varphi(t)$  для разных значений коэффициентов затухания  $\omega$ . На рис. 4, *a* коэффициенты регулятора (14) выбираются на основании биномиального многочлена, на рис. 4, *b* – на основании многочлена Баттерворда. В первом случае получаем апериодический процесс, во втором случае – колебательный процесс. Из рис. 4 следует, что с увеличением коэффициента затухания  $\omega$  конечное значение  $\Delta\varphi(t_k)$  убывает.

### Заключение

Решена задача перевода ковша экскаватора из одного неподвижного положения в другое неподвижное в условиях неопределенности. Неизвестным параметром здесь является масса зачерпнутого ковшом грунта. Решением задачи является управление, состоящее из суммы программного управления, получающегося в результате решения задачи при отсутствии неизвестного грунта, и выхода ПИД-регулятора. Приведены результаты численного моделирования. Предложенный подход к решению задач управления роботами-манипуляторами можно распространить на другие виды неопределенностей: неточное измерение текущих координат звеньев, воздействие внешних случайных воздействий.

### Приложение 1

#### Соотношения между углами и координатами

Если заданы углы  $\alpha, \beta, \gamma$ , то

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos(\alpha), \quad y_1 = l_1 \sin(\alpha), \\ x_2 &= x_1 - l_2 \cos(\alpha + \beta), \quad y_2 = y_1 - l_2 \sin(\alpha + \beta), \\ x_3 &= x_2 + l_3 \cos(\alpha + \beta - \gamma), \quad y_3 = y_2 + l_3 \sin(\alpha + \beta - \gamma). \end{aligned}$$

Если заданы координаты точек  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ , то

$$\begin{aligned} \alpha &= \arcsin(y_1 / l_1), \\ \beta &= \frac{1}{2}\pi - \alpha + \arccos((y_1 - y_2) / l_2), \\ \gamma &= \alpha + \beta - \arcsin((y_3 - y_2) / l_3). \end{aligned}$$

Если задано положение третьего звена, т.е. заданы координаты точек  $B(x_2, y_2)$  и  $C(x_3, y_3)$ , то для построения всей конфигурации робота нужно найти координаты точки  $A(x_1, y_1)$ . Она является точкой пересечения двух окружностей: одна с центром в точке  $O$  и радиусом  $l_1$ , другая с центром в точке  $B$  и радиусом  $l_2$ . Как показано в [14], координаты точки  $A(x_1, y_1)$  равны

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \left[ \frac{p}{2} - y_2 \left( a + \sqrt{a^2 - b} \right) \right], \quad y_1 = a + \sqrt{a^2 - b}, \quad (\text{П1})$$

где  $p = l_1^2 - l_2^2 + l_3^2$ ,  $l_4^2 = x_2^2 + y_2^2$ ,  $a = \frac{1}{l_4^2} \frac{p}{2} y_2$ ,  $b = \frac{1}{l_4^2} \left( \frac{p}{2} \right)^2 - \frac{1}{l_4^2} x_2^2 l_1^2$ .

### Моменты инерции и весовые моменты

Если центры масс звеньев и грунта расположены в точках  $a(x_1', y_1')$ ,  $b(x_2', y_2')$ ,  $c(x_3', y_3')$ ,  $d(x_4', y_4')$  (см. рис. 1), то

$$\begin{aligned} R_1(z) &= gm_1x_1' + gm_2x_2' + gm_3x_3' + gm_4x_4', \\ R_2(z) &= gm_2(x_2' - x_1') + gm_3(x_3' - x_1') + gm_4(x_4' - x_1'), \\ R_3(z) &= gm_3(x_3' - x_2') + gm_4(x_4' - x_2'), \end{aligned}$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести. Если допустить, что плотность звеньев постоянна, то моменты инерции – произведения массы тела на квадрат расстояния между осью вращения и центром тяжести тела – согласно теореме о среднем равны

$$\begin{aligned} J_1(z) &= m_1(x_1'^2 + y_1'^2) + m_2(x_2'^2 + y_2'^2) + m_3(x_3'^2 + y_3'^2) + m_4(x_4'^2 + y_4'^2), \\ J_2(z) &= m_2((x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2) + m_3((x_3' - x_1')^2 + (y_3' - y_1')^2) + m_4((x_4' - x_1')^2 + (y_4' - y_1')^2), \\ J_3(z) &= m_3((x_3' - x_2')^2 + (y_3' - y_2')^2) + m_4((x_4' - x_2')^2 + (y_4' - y_2')^2). \end{aligned}$$

Если представить  $m_4 = qm_0$ , то эти выражения удобно переписать в виде:

$$R_i(z, q) = R_i(z) + q\Delta R_i(z), \quad J_i(z, q) = J_i(z) + q\Delta J_i(z), \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$\begin{aligned} R_1(z) &= gm_1x_1' + gm_2x_2' + gm_3x_3', & \Delta R_1(z) &= gm_0x_4', \\ R_2(z) &= gm_2(x_2' - x_1') + gm_3(x_3' - x_1'), & \Delta R_2(z) &= gm_0(x_4' - x_1'), \\ R_3(z) &= gm_3(x_3' - x_2'), & \Delta R_3(z) &= gm_0(x_4' - x_2'), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} J_1(z) &= m_1(x_1'^2 + y_1'^2) + m_2(x_2'^2 + y_2'^2) + m_3(x_3'^2 + y_3'^2), \\ J_2(z) &= m_2((x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2) + m_3((x_3' - x_1')^2 + (y_3' - y_1')^2), \\ J_3(z) &= m_3((x_3' - x_2')^2 + (y_3' - y_2')^2), \\ \Delta J_1(z) &= m_0(x_4'^2 + y_4'^2), \\ \Delta J_2(z) &= m_0((x_4' - x_1')^2 + (y_4' - y_1')^2), \\ \Delta J_3(z) &= m_0((x_4' - x_2')^2 + (y_4' - y_2')^2). \end{aligned}$$

### Решение задачи 1

Чтобы перевести систему из одного неподвижного состояния в другое неподвижное состояние, необходимо, чтобы скорость движения сначала увеличивалась, а затем убывала до нуля. Поэтому ускорение должно быть сначала положительным, а затем отрицательным, или наоборот, в зависимости от того, в какую сторону происходит движение. В (7) ускорение равно управлению, поэтому управление можно взять в виде:

$$u_i(t) = \begin{cases} v_i & \text{для } 0 < t < t_1, \\ -v_i & \text{для } t_1 < t < t_k, \end{cases} \quad (\text{П2})$$

где  $v_i$  – искомая величина,  $t_1 = 1/2t_k$ . При таком управлении решение уравнения (7) равно

$$\dot{\phi}_i(t) = v_i \begin{cases} t & \text{для } 0 < t < t_1, \\ (t_k - t) & \text{для } t_1 < t < t_k, \end{cases}$$

и

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \varphi_{i0} + v_i \frac{t^2}{2} & \text{для } 0 < t < t_1, \\ \varphi_{i0} + v_i \left( 2t_1 t - \frac{t^2}{2} - t_1^2 \right) & \text{для } t_1 < t < t_k. \end{cases}$$

В последнем выражении положим  $\varphi(t_k) = \varphi^*(t)$ . В результате получаем величину управления

$$v_i = \frac{\varphi_i^* - \varphi_{i0}}{t_1^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Видно, что если  $\varphi^* - \varphi_0 > 0$ , то ускорение движения положительное и звено движется влево по часовой стрелке. Если  $\varphi^* - \varphi_0 < 0$ , то ускорение движения отрицательное и звено движется вправо против часовой стрелки.

Остается определить момент времени  $t_1 = 1/2t_k$ . Естественно потребовать, чтобы для всех звеньев этот момент был одинаковым (все звенья останавливаются одновременно) и минимальным. Такое значение для  $t_k$  можно найти из условия, чтобы угловая скорость движения была ограничена. Максимальная скорость достигается в точке  $t = t_1$  и равна  $v_i t_1$ . В результате можем записать систему неравенств

$$\left| \frac{\varphi_i^* - \varphi_{i0}}{t_1} \right| \leq \rho, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $\rho$  – ограничения на угловые скорости. Отсюда можно найти минимальное значение  $t_1$ , при котором все эти неравенства выполняются.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В. Блочный синтез систем управления роботами-манипуляторами в условиях неопределенности. М. : ЛЕНАНД, 2014. 208 с.
2. Krasnova S.A. Cascade Design of the State Observer for Nonlinear Systems in the Presence of External Perturbation // Autom. Remote Control. 2003. V. 64, № 1. P. 1–22.
3. Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В., Нгуен Тхань Тиен. Прямой метод синтеза системы управления рабочим органом манипулятора при неполных измерениях // Проблемы управления. 2008. № 1. С 10–18.
4. Краснова С.А., Антипов А.С. Иерархический синтез сигмоидальных обобщенных моментов манипулятора в условиях неопределенности // Проблемы управления. 2016. № 4. С. 10–17.
5. Матюхин В.И. Управление движением манипулятора. М. : Науч. изд. Ин-та проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2010. 95 с.
6. Матюхин В.И. Непрерывные универсальные законы управления манипуляционным роботом // Автоматика и телемеханика. 1997. № 4. С. 69–82.
7. Матюхин В.И. Стабилизация движений манипулятора вдоль заданной поверхности // Автоматика и телемеханика. 2011. № 4. С. 71–85.
8. Матюхин В.И., Пятницкий Е.С. Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 67–81.
9. Dwivedy S.K., Eberhard P. Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review // Mechanism and Machine Theory. 2006. № 41. P. 749–777.
10. Yu H., Liu Y., Hasan M.S. Review of modelling and remote control for excavators // Int. J. of Advanced Mechatronic Systems. 2009. V. 2, № 1. P. 68–80.
11. Макарова Т.А. Моделирование движения трехзвенного робота с безредукторным приводом с использованием робастных регуляторов // Известия вузов. Машиностроение. 2014. № 1. С. 4–8.
12. Перегудова О.А., Макаров Д.С. Синтез управления трехзвенным манипулятором // Автоматизация процессов управления. 2015. Т. 40, № 2 С. 109–113.
13. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М. : Наука, 1987. 368 с.
14. Параев Ю.И., Колесникова С.И., Цветницкая С.А. Новый подход к решению задачи управления роботом-манипулятором // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2021. № 55. С. 4–10.
15. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М. : Машиностроение, 1976. 184 с.

Поступила в редакцию 9 августа 2021 г.

Paraev Yu.I., Kolesnikova S.I., Tsvetnitskaya S.A. (2021) CONTROL OF A ROBOT MANIPULATOR IN CONDITIONS OF UNCERTAINTY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 57. pp. 4–12

The problem of controlling a three-link robot manipulator in conditions of uncertainty is considered on the example of controlling the movement of the excavator bucket. The task is to move the bucket from one stationary position to another stationary position. An unknown parameter here is the mass of soil scooped up by the bucket. The solution to the problem is a control consisting of the sum of the program control resulting from the solution of the problem in the absence of unknown soil, and the output of the PID controller. The results of numerical modeling are presented.

The proposed approach to solving problems of control of robotic manipulators can be extended to other types of uncertainties: inaccurate measurement of the current coordinates of links, the impact of external random influences, etc.

Keywords: three-link robot; PID-regulator; excavator movement.

*PARAEV Jury Ivanovich* (Doctor of Technical, Professor, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

*KOLESNIKOVA Svetlana Ivanovna* (Doctor of Technical, Professor of the Department of Computer Technologies and Software Engineering of the Institute of Computing Systems and Programming, St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, St. Petersburg, Russian Federation).

E-mail: skolesnikova@yandex.ru

*TSVETNITSKAYA Svetlana Aleksandrovna* (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: svetasa@sibmail.com

#### REFERENCES

1. Krasnova, S.A., Utkin, V.A. & Utkin, A.V. (2014) *Blochnyy sintez sistem upravleniya robotami-manipulyatorami v usloviyakh neop-redelemnost* [Block synthesis of control systems for robotic manipulators in conditions of uncertainty]. Moscow: LENAND.
2. Krasnova, S.A. (2003) Cascade Design of the State Observer for Nonlinear Systems in the Presence of External Perturbation. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 64(1), pp. 1–22.
3. Krasnova, S.A., Utkin, V.A., Utkin, A.V. & Nguyen Thanh Tien. (2008) A Direct Control System Synthesis Method for End Effector Arm Under Incomplete Measurements. *Problemy upravleniya – Control Sciences*. 1. pp.10–18.
4. Krasnova, S.A. & Antipov, A.S. (2016) Hierarchical Synthesis of Manipulator Sigmoidal Generalized Moments under Uncertainty. *Problemy upravleniya – Control Sciences*. 4. pp. 10–17.
5. Matyukhin, V.I. (2010) *Upravlenie dvizheniem manipulyatora* [Manipulator motion control]. Moscow: V.A. Trapeznikov Institute of Control Problems, RAS.
6. Matyukhin, V.I. (1997) Continuous universal laws of control of a manipulative robot. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 4. pp. 69–82.
7. Matyukhin, V.I. (2011) Stabilization of manipulator movements along a given surface. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 4. pp. 71–85.
8. Matyukhin, V.I. & Pyatnitskiy, E.S. (1989) Motion control of manipulation robots based on the principle of decomposition taking into account the dynamics of drives. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 9. pp. 67–81.
9. Dwivedy, S.K. & Eberhard, P. (2006) Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review. *Mechanism and Machine Theory*. 41. pp. 749–777. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2006.01.014
10. Yu, H., Liu, Y. & Hasan, M.S. (2009) Review of modelling and remote control for excavators. *International Journal of Advanced Mechatronic Systems*. 2(1). pp. 68–80. DOI: 10.1504/IJAMECHS.2010.030850
11. Makarova, T.A (2014) Simulation of motion of a three-link robot with a gearless drive using robust regulators. *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie – BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 1. pp. 4–8. DOI: 10.18698/0536-1044-2014-1-3-9
12. Peregudova, O.A. & Makarov, D.S. (2015) Control Synthesis for Three-link Manipulator. *Avtomatizatsiya protsessov upravleniya – Automation of Control Processes*. 40(2). pp. 109–113.
13. Utkin, V.I. (1987) *Skol'zyashchie rezhimy v zadachakh optimizatsii i upravleniya* [Sliding modes in optimization and control problems]. Moscow: Nauka.
14. Paraev, Yu.I., Kolesnikova, S.I. & Tsvetnitskaya, S.A. (2021) A new approach to solving the problem of robot manipulator control. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 55. pp. 4–10. DOI: 10.17223/19988605/55/1
15. Kuzovkov, N.T. (1976) *Modal'noe upravlenie i nablyudayushchie ustroystva* [Modal Control and Observing Devices]. Moscow: Mashinostroenie.

УДК 517.977.1

DOI: 10.17223/19988605/57/2

А.Н. Сочнев

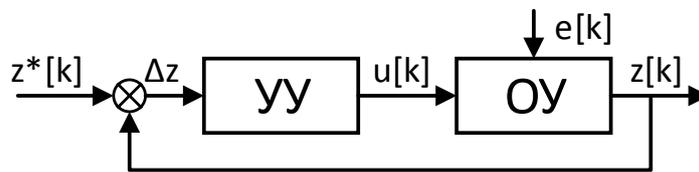
**РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА УПРАВЛЕНИЯ ПО ОТКЛОНЕНИЮ В МОДЕЛЯХ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА НА ОСНОВЕ СЕТЕЙ ПЕТРИ**

Основной идеей работы является использование базовых принципов теории автоматического управления в моделях на основе сетей Петри, в частности реализация обратной связи по состоянию в структуре имитационной модели. Разработан алгоритм совместного функционирования модели объекта управления и устройства управления для класса временных сетей Петри. Апробирован вариант формирования устройства управления на основе логических функций с экспертно сформулированными правилами.

**Ключевые слова:** сеть Петри; управление по отклонению; сетевой контроллер; логическая функция; переходный процесс.

Принято различать три фундаментальных принципа управления: принцип разомкнутого управления (программное управление), принцип компенсации (управление по возмущению), принцип обратной связи (управление по отклонению). Поиск функции, описывающей закон управления, для перечисленных видов осуществляется при решении задачи синтеза управления по заданному критерию качества [1, 2]. Выбор того или иного принципа управления должен основываться на анализе типа объекта и возможных возмущающих воздействий.

Сущность принципа разомкнутого управления состоит в том, что программа управления жестко определена задающим устройством; управление не учитывает влияние возмущений на параметры процесса. Если возмущающий фактор искажает выходную величину до недопустимых пределов, то применяют принцип компенсации, основное достоинство которого состоит в скорости реакции на возмущения. Он более точен, чем принцип разомкнутого управления. Наибольшее распространение в теории управления получил принцип обратной связи (рис. 1). Здесь управляющее воздействие корректируется в зависимости от выходной величины  $z(k)$ . Если значение  $z(k)$  отклоняется от требуемого, то происходит корректировка сигнала с целью уменьшения данного отклонения.



УУ – управляющее устройство, ОУ – объект управления

Рис. 1. Структура системы управления по отклонению

Fig. 1. Deviation control system structure

В опубликованных ранее работах некоторых исследователей формулируются методы, использующие описанный подход при структурировании не только систем управления, но и их модельных эквивалентов [3–6]. Далее для определенности под моделями систем будут пониматься имитационные модели на основе формализмов сетей Петри. Например, в работах [3, 4] определены механизмы доведения управляющих воздействий до сети Петри с использованием переходов. В работах [4, 5] решались некоторые задачи воздействия на сеть с применением модели управляющего устройства,

названного сетевым контроллером. Анализ этих работ выявил некоторую ограниченность предложенных в них подходов. В частности, ставилась и решалась задача обеспечения ограниченности маркировки сети Петри с использованием сетевого контроллера [3, 6]. Также рассматривалась и частично решалась задача обеспечения инвариантности систем к возмущениям. Обобщение и развитие этих подходов привело к идее применения механизма обратной связи внутри имитационной модели на основе сети Петри для решения более широкого круга задач.

Таким образом, основная научная задача, поставленная в начале исследования, состоит в реализации принципа управления по отклонению в структуре имитационных моделей на основе сетей Петри, а основная практическая задача – в апробации такого подхода и доказательстве его состоятельности на основе тестовой практической задачи.

### 1. Управление по отклонению в сетевых моделях

Основы теории сетей Петри были заложены в 60-х гг. XX в. немецким ученым Карлом Петри. С тех пор теория сильно разрослась и до сих пор продолжает активно развиваться. За время исследований сетей Петри было накоплено большое количество теоретических результатов и практического опыта в области спецификации и анализа параллельных и распределенных систем [7, 8].

Сети Петри позволяют с достаточной степенью детализации моделировать процессы управления в параллельных системах и протоколы взаимодействия. В них имеются простые конструкции для описания структур параллелизма: последовательная композиция, выбор, параллельное слияние. Различные модификации сети Петри позволяют вводить такие характеристики динамических процессов, как временная и пространственная упорядоченность, иерархичность.

Сеть Петри формально описывается набором вида:

$$PN = \{P, T, B, x_0\},$$

где  $P = \{p_i\}$  – непустое конечное множество позиций;  $T = \{t_j\}$  – непустое конечное множество переходов;  $B = B^+ - B^-$  – отношение инцидентности позиций и переходов;  $x_0 : P \rightarrow R^+$  – начальная маркировка сети;  $R^+$  – множество целых неотрицательных чисел.

Здесь и далее применены обозначения маркировки и матрицы инцидентности сети Петри, отличающиеся от типичных, представленных в литературе. Поскольку идеей статьи является использование основных положений теории автоматического управления к сетевому моделированию, то используются общепринятые для теории управления обозначения вектора состояния (маркировки), вектора управления и матриц инцидентности [1].

Матрица инцидентности позволяет определить уравнение, формирующее механизм изменения маркировки сети:

$$x[k+1] = x[k] - B^- u[k] + B^+ u[k], \quad (1)$$

где  $u[k]$  – вектор-столбец длины  $|T|$ , имеющий единственный ненулевой элемент в позиции  $j$ , равный 1 и, соответственно, определяющий какой из переходов срабатывает на текущем такте управления.

Для решения задачи управления производством модель должна отображать временные соотношения представляемого процесса, поэтому на практике используются временные сети Петри. Формальное определение временной сети:

$$TN = \{PN, \tau\},$$

где  $PN$  – сеть Петри;  $\tau : T \rightarrow R^+$  – функция времени срабатывания, сопоставляющая каждому переходу некоторое постоянное время срабатывания.

Структура модели, соответствующая уравнению (1) представлена на рис. 2.

Условие срабатывания переходов сети имеет вид:

$$B^- u[k] \leq x[k]. \quad (2)$$

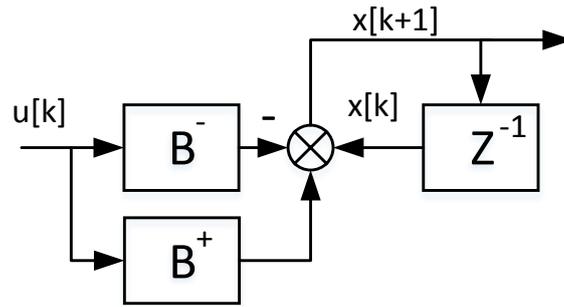


Рис. 2. Структура модельного объекта управления  
Fig. 2. The structure of the control object model

Реализация системы управления по отклонению предполагает определение объекта управления (ОУ). В случае с модельным представлением данный термин обозначает не сам объект, а его модель. Для реализации системы управления в структуру должны быть добавлены устройство управления (регулятор) (УУ (P)) и задающее устройство (ЗУ) (рис. 3). В случае использования сетей Петри для моделирования устройство управления функционирует на основе выражения (2).

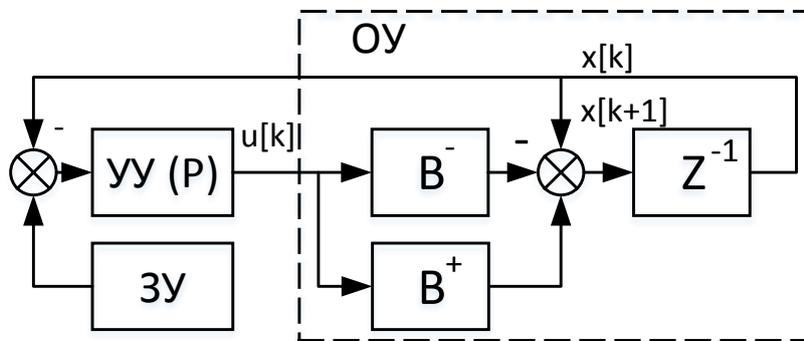


Рис. 3. Структура системы управления по отклонению в сетевых моделях  
Fig. 3. Deviation control system structure in network models

В представленной структуре не учитывается влияние возмущающих воздействий. В общем случае требуется дополнительно создать модель реализации возмущающих воздействий (рис. 4). На рисунке представлен один из возможных вариантов введения модели возмущения через дополнительную матрицу инцидентности возмущений и переходов  $E$ . Возможны и другие варианты создания моделей возмущений [3].

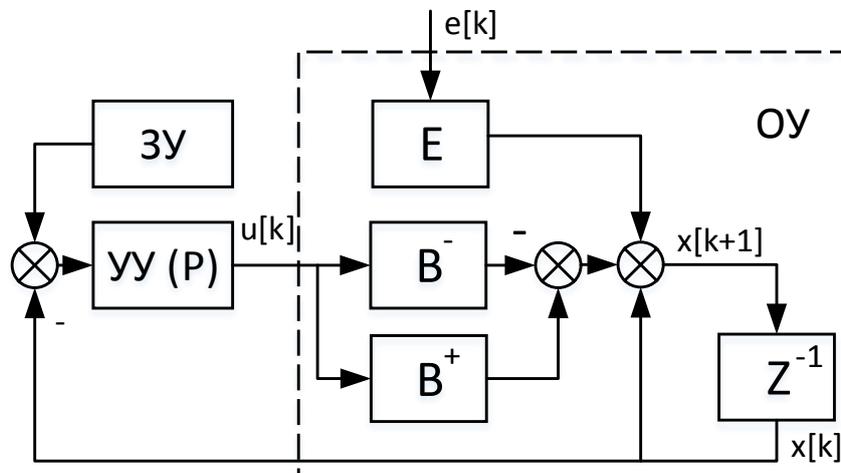


Рис. 4. Структура системы управления по отклонению в сетевых моделях (с возмущениями)  
Fig. 4. Deviation control system structure in network models (with perturbations)

Основными задачами реализации в сетевых моделях модели системы управления являются организация обратной связи по состоянию и формирование модельного описания устройства управления (УУ). Под состоянием сетевой модели понимаются количественные характеристики, определяющие текущее состояние объекта. В самом общем случае это может быть вектор срабатывания переходов, статистика их занятости или текущая маркировка сети Петри [9]. В представленной выше структуре и в примере далее в качестве вектора состояния используется маркировка позиций.

Устройство управления (УУ) должно содержать в структуре некоторую математическую базу, которая на основе отклонения выхода формирует текущее значение управляющего вектора. Указанная задача может быть реализована различными способами, например с использованием логических функций, искусственных нейронных сетей, нечеткой логики, экспертных систем и т.д. Выбор того или иного средства должен определяться сложностью решаемых задач управления и особенностями моделируемого и исследуемого объекта. В данной работе будет показано применение в качестве математической основы УУ набора логических функций. Такой выбор обусловлен их очевидной простотой и соответствием реализуемому в системе закону управления.

С точки зрения формализованного описания сети Петри с внедрением в модель УУ требуется изменить правила срабатывания переходов сети, добавив в них условия, формируемые на выходе УУ. Алгоритм функционирования модели устройства управления в сети Петри можно определить следующей последовательностью действий.

1. Определение активных переходов сети Петри. Проверка условия срабатывания на основе выражения (2).

2. Формирование выходного вектора УУ как некоторой функции от вектора состояния и вектора задающего воздействия

$$u[k] = f(x[k], g[k]).$$

3. Удаление маркеров из входных позиций активных переходов

$$x[k+1] = x[k] - B^- u[k].$$

4. Добавление в выходные позиции переходов маркеров в соответствии с временными задержками

$$x[k+1] = x[k] + B^+ u[k].$$

5. Пересчет модельного времени

$$\tau = \tau + \Delta\tau.$$

6. Если  $\tau < \tau_{\max}$ , то переход к пункту 1, в противном случае – прекращение имитационного эксперимента.

## 2. Имитационное моделирование производственного процесса

На машиностроительном заводе производственный процесс включает: подготовку материалов и заготовок для последующей обработки, хранение; различные виды обработки (механическая, термическая и т.д.); сборку изделий и их транспортирование, контроль качества обработки или сборки на всех этапах производства; транспортирование заготовок и изделий по цехам и участкам или всему заводу; отделку, окраску и упаковку; хранение готовой продукции.

Технологическим процессом называют часть производственного процесса, содержащую действия по изменению и последующему определению состояния предмета производства. Технологический процесс состоит из технологических и вспомогательных операций. Производственная программа машиностроительного завода содержит номенклатуру изделий, изготавливаемых с указанием их типов и размеров, количество изделий каждого наименования, подлежащих изготовлению в течение года, перечень и количество запасных частей к выпускаемым изделиям [10].

Общим для большинства производственных процессов машиностроения является наличие в структуре процесса сборочной операции. Для сборки необходимо обеспечивать требуемые запасы всех комплектующих на входе операции. Специфика этой операции состоит в том, что она требует согла-

сованной и синхронизированной работы предшествующих участков: заготовительного, механообработки и других, и поэтому является наиболее предпочтительной для использования обратных связей.

**Описание производственной системы.** Исследуется участок машиностроительного предприятия. Производятся детали четырех типов. Имеются следующие операции производственного процесса: токарная обработка, фрезерная обработка, сборка и контроль качества. Определены параметры технологических операций: длительности выполнения операций, объемы партий и потребность в деталях каждого типа для сборочной операции. На предпоследней стадии производственного процесса производится сборка готовых деталей в одну сборочную единицу. В конструкции определено количество каждого типа деталей, требуемых для сварки. Детализированная структура технологических процессов для изделий представлена на рис. 5.

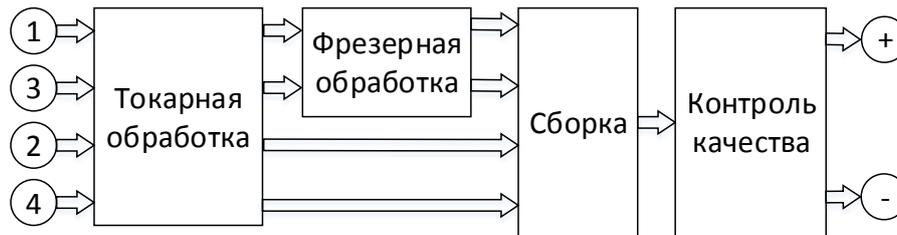


Рис. 5. Структура производственного процесса  
Fig. 5. Production process structure

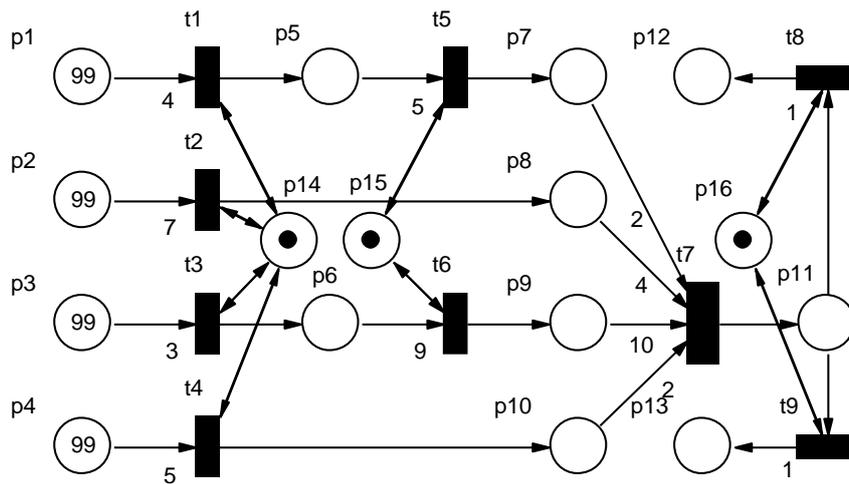


Рис. 6. Сетевая модель производственного процесса  
Fig. 6. Net model of a production process

Таблица 1

Функциональное назначение элементов модели

Позиции	
$p1...p4$	Заготовки изделий типа 1, 2, 3, 4
$p5, p6$	Детали 1, 3 после токарной обработки
$p7...p10$	Детали 1, 2, 3, 4 после фрезерной обработки
$p11$	Готовая сборка
$p12$	Сборка после контроля качества
$p13$	Сборка после контроля качества (брак)
$p14, p15, p16$	Занятость токарного, фрезерного станка и участка контроля
Переходы	
$t1...t4$	Токарная обработка деталей 1, 2, 3, 4
$t5...t6$	Фрезерная обработка деталей 1, 3
$t7$	Операция сборки деталей 1, 2, 3, 4
$t8$	Контроль качества
$t9$	Контроль качества (с отбраковкой)

Для представления имитационной модели используются временные сети Петри (рис. 6). На первой стадии исследования модель описывает структуру процессов производственной системы и не использует обратную связь. Описание элементов модели приведено в табл. 1.

**Имитационный эксперимент с сетевой моделью.** Выполняется имитационное моделирование сети на выбранном интервале времени и оценивается результат с точки зрения выбранного критерия качества. Постоянная времени (период) для моделирования выбрана  $\tau = 1$  мин.

В сети Петри, представленной выше, используется равновероятный механизм разрешения проблемы конфликта за ресурсы, которыми в данном случае являются три типа технологического оборудования: токарный станок, фрезерный станок и участок контроля качества. В случае случайного выбора перехода для выполнения можно прогнозировать случайные характеристики качества процессов. Если установить определенные правила срабатывания, например в порядке нумерации переходов, то можно получить некоторые детерминированные величины показателей качества процесса. Примем для определенности, что признаком завершения переходного процесса в представленной модели будем считать появление первого маркера в одной из выходных позиций  $p_{12}$  или  $p_{13}$ . По итогу эксперимента определено время переходного процесса  $T_{\Pi} = 1\ 393$  мин.

Определим условно два режима функционирования производственной системы: установившийся и переходный. Переходный режим предполагает переход от одного режима работы к другому, чаще всего из режима остановки к установившемуся режиму. Установившийся режим характеризуется постоянством всех количественных показателей функционирования. В теории управления принято качество переходного процесса характеризовать двумя основными характеристиками: временем переходного процесса и величиной перерегулирования. В приведенном ниже примере формулируется задача минимизации времени переходного процесса производственного участка машиностроительного производства. Приводится решение данной задачи на основе имитационного моделирования процесса сетью Петри с обратными связями по состоянию.

### 3. Реализация системы управления по отклонению

Ранее в качестве формальной основы устройства управления были выбраны логические функции. Для их реализации такой системы требуется синтез системы логических правил, по которым будет определяться управляющее воздействие на модель объекта управления [11, 12]. Экспертный анализ структуры процесса в исследуемой системе и характеристик операций позволяет сделать вывод, что для достижения поставленной цели нужно создать систему логических правил, обеспечивающих наличие заданного технологическими соотношениями количества деталей для выполнения сборки как можно быстрее и далее на каждом интервале управления. В терминологии сетей Петри это требование трансформируется в обеспечение требуемой маркировки позиций  $p_7, p_8, p_9, p_{10}$ . Очевидно, маркировка этих позиций должна использоваться создаваемыми логическими правилами.

Второе соображение, используемое при создании модели устройства управления, состоит в учете времени выполнения операций и относительного количества требуемых для сборки деталей каждого типа. В рассматриваемом примере целесообразно максимально повысить приоритет третьей детали, поскольку общий фонд времени для ее производства максимальный. Для более сложных процессов экспертные оценки приоритетов можно получить после экспериментов с моделью объекта управления, выявив существенные взаимосвязи элементов модели.

После выполненного анализа для рассматриваемой системы сформулировано несколько правил (табл. 2). Они определяют правила совместного функционирования переходов  $t_1, t_2, t_3, t_4$ .

В обозначениях:  $x(7), x(8), x(9), x(10)$  – маркировка позиций  $p_7, p_8, p_9, p_{10}$  соответственно;  $u(1), u(2), u(3), u(4)$  – элементы вектора управления переходами  $t_1, t_2, t_3, t_4$ . Дополнительно может быть введен коэффициент запаса, который позволяет накапливать большее количество деталей, чем нужно для сборки. Это позволит иметь запас, например при возникновении возмущающих воздействий. Эффект от внедрения описанной структуры устройства управления определен по результату имитационного эксперимента. По его завершении время переходного процесса сократилось до  $T_{\Pi} = 143$  мин.

Таблица 2

**Формальное описание устройства управления**

Математическое описание	Программное описание
$u(t1) = \overline{(x(p7) \geq 2) + (x(p9) < 10)}$	If $x(7) \geq 2$ Or $x(9) < 10$ Then $u(1) = \text{False}$
$u(t2) = \overline{(x(p8) \geq 4) + (x(p9) < 10)}$	If $x(8) \geq 4$ Or $x(9) < 10$ Then $u(2) = \text{False}$
$u(t3) = \overline{(x(p9) < 10)}$	If $x(9) \geq 10$ Then $u(3) = \text{False}$
$u(t4) = \overline{(x(p10) \geq 1) + (x(p9) < 10)}$	If $x(10) \geq 1$ Or $x(9) < 10$ Then $u(4) = \text{False}$

Дополнительный анализ процесса позволил сделать вывод о том, что возможно уменьшить требуемые запасы маркеров в позициях с целью выравнивания времени выполнения процессов производства всех деталей сборки. Изменение параметров устройства управления выполняется модификацией параметров правил логических функций, представленных выше (табл. 3).

Таблица 3

**Формальное описание устройства управления (измененное)**

Математическое описание	Программное описание
$u(t1) = \overline{(x(p7) \geq 1) + (x(p9) < 10)}$	If $x(7) \geq 1$ Or $x(9) < 10$ Then $u(1) = \text{False}$
$u(t2) = \overline{(x(p8) \geq 2) + (x(p9) < 10)}$	If $x(8) \geq 2$ Or $x(9) < 10$ Then $u(2) = \text{False}$
$u(t3) = \overline{(x(p9) < 10)}$	If $x(9) \geq 5$ Then $u(3) = \text{False}$
$u(t4) = \overline{(x(p10) \geq 1) + (x(p9) < 10)}$	If $x(10) \geq 1$ Or $x(9) < 10$ Then $u(4) = \text{False}$

Результат моделирования показал сокращение переходного процесса до величины  $T_{\Pi} = 127$  мин (рис. 7).

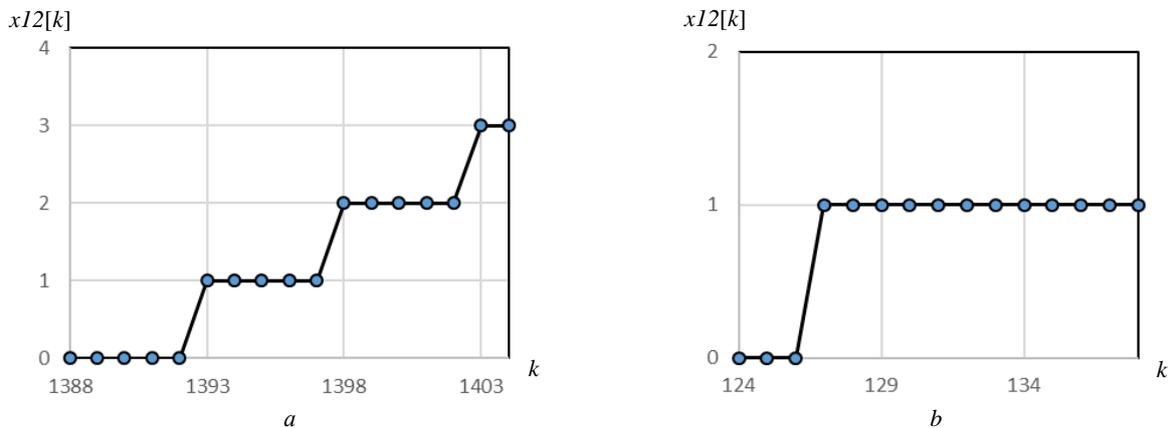


Рис. 7. Графики выпуска продукции при равновероятном выборе переходов (а) и при использовании логических правил (b)  
 Fig. 7. Schedules of production with an equally probable choice of transitions (a) and when using logical rules (b)

Для более сложных процессов можно отдельно рассмотреть вопрос применения более функционально развитых математических методов реализации устройства управления. Например, зависимость  $u = f(x)$  можно описать искусственной нейронной сетью или даже отдельной структурой на основе сети Петри. Возможно применение для этой задачи эволюционного алгоритма, например генетического. Однако принципиальная задача данной работы состоит в другом – в описании формального подхода к решению задач управления на основе реализации управления по отклонению внутри имитационной модели. Изложены теоретические положения подхода, рассмотренный пример подтверждает их применимость к решению практических задач. Получен эффект от применения, улучшено значение выбранного критерия оптимальности.

Отметим, что для реализации предложенного подхода синтеза системы управления необходимо выполнить смысловое выделение в имитационной модели входа и выхода. Это требует дополнительного структурирования модели и накладывает некоторые ограничения на конфигурацию сети.

## Заключение

Основные научные, научно-практические и прикладные результаты работы по теме статьи можно сформулировать следующим образом:

1. Обоснована целесообразность модификации механизма выбора переходов при имитации сети Петри для решения некоторых задач управления.
  2. Разработан подход к структурированию сетевой модели на объект управления и устройство управления.
  3. Разработан алгоритм функционирования модели с устройством управления.
  4. Определен механизм реализации обратных связей внутри сетевой модели.
- Предложенный подход с положительным результатом апробирован при решении практической задачи планирования производственного процесса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. СПб. : Профессия, 2003. 752 с.
2. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Наука, 1989. 301 с.
3. Moody J., Yamalidou K., Lemmon M., Antsaklis P. Feedback control of Petri Nets Based on Place Invariants : Technical Report of the ISIS Group at the University of Notre Dame. ISIS-94-002. 1994.
4. Iordache M.V., Moody J.O., Antsaklis P.J. Automated Synthesis of Deadlock Prevention Supervisors Using Petri Nets : Technical Report at the University of Notre Dame. ISIS-2000-003. 2000.
5. Basile F., Chiacchio P., Giua A. Optimal Petri Net Monitor Design // Synthesis and Control of Discrete Event Systems. Kluwer, 2001. P. 141–154.
6. Сочнев А.Н. Сетевые модели в системах управления производством. Красноярск : Сиб. фед. ун-т, 2014. 162 с.
7. Котов В.Е. Сети Петри. М. : Наука, 1984. 160 с.
8. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. М. : Мир, 1984. 264 с.
9. Сочнев А.Н., Рубан А.И. Модификация векторно-матричных моделей на основе сетей Петри // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2015. № 3 (47). С. 98–103.
10. Баранчикова С.Г. Управление машиностроительным предприятием. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. 252 с.
11. Мустафаева Д.Г., Мустафаев М.Г. Экспертные системы в организации и управлении производственных процессов // Организатор производства. 2013. № 3 (58). С. 20–23.
12. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов : учебник для вузов. 3-е изд. СПб. : Питер, 2009. 384 с.

Поступила в редакцию 31 марта 2021 г.

Sochnev A.N. (2021) IMPLEMENTATION OF THE DEVIATION CONTROL PRINCIPLE IN MODELS OF MECHANICAL ENGINEERING PRODUCTION BASED ON PETRI NETS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 57. pp. 13–21

DOI: 10.17223/19988605/57/2

The presented article describes an approach to solving control problems for discrete-type production systems based on preliminary simulation modeling with Petri nets. The main idea of the work is to use the basic principles of the theory of automatic control in models based on Petri nets, in particular, the implementation of state feedback in the simulation model.

The expediency and prospects of using the feedback mechanism for solving the problem of control of simulation experiments are substantiated. The problem of optimization of assembly production in the terminology of the theory of automatic control is formulated. The mechanism for creating feedback in the structure of the network model is determined. An algorithm for the joint functioning of the control object model and the control device for the class of temporary Petri nets has been developed.

Based on the developed theoretical provisions, a test example is presented that characterizes the positive effect of their application. A variant of forming a control device based on logical functions with expertly formulated rules has been tested. The presence of assembly production at most machine-building enterprises determines the high practical significance of the developed approach.

The developed approach to process optimization develops the theory of Petri nets, makes it more suitable for modeling complex systems with a branched structure and a large number of interconnections between system elements. The most universal approaches of control theory are used, which allows us to speak about the required degree of invariance to the features of specific systems and the maximum replicability of the approach.

The main disadvantage of the proposed approach is that it is impossible or at least difficult to propose a method for synthesizing a control device according to formal requirements, as is customary in the theory of automatic control. This is due to the need to interpret the elements of the simulation model, to analyze the mechanisms of mutual influence of the elements of the Petri net.

The direction of further research on the topic of the article can be to determine the effectiveness of the proposed approach for various classes of systems. Using the approach for more complex systems and processes will obviously require more advanced mathematical tools to implement control laws, for example, artificial neural networks, which have proven themselves well in the face of difficulties in formalizing the mathematical dependencies of factors.

Keywords: Petri net; deflection control; network controller; logic function; transient.

SOCHNEV Aleksey Nikolaevich (Associate Professor, Candidate of Technical Sciences, Head of the Department of Robotics and Technical Cybernetics of the Polytechnic Institute of the Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation).

E-mail: asochnev@sfu-kras.ru

#### REFERENCES

1. Besekerskiy, V.A. & Popov, E.P. (2003) *Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya* [Theory of Automatic Control Systems]. St. Petersburg: Professiya.
2. Popov, E.P. (1989) *Teoriya lineynykh sistem avtomaticheskogo regulirovaniya i upravleniya* [Theory of linear systems of automatic regulation and control]. 2nd edition. Moscow: Nauka.
3. Yamalidou, K., Moody, J., Lemmon, M. & Antsaklis, P. (1994) *Feedback control of Petri Nets Based on Place Invariants*. Technical Report of the ISIS Group at the University of Notre Dame.
4. Iordache, M.V., Moody, J.O. & Antsaklis, P.J. (2000) *Automated Synthesis of Deadlock Prevention Supervisors Using Petri Nets*. Technical Report at the University of Notre Dame.
5. Basile, F., Chiacchio, P. & Giua, A. (2001) Optimal Petri Net Monitor Design. In: Caillaud, B. Darondeau, P., Lavagno, L. & Xie, X. (eds) *Synthesis and Control of Discrete Event Systems*. Kluwer. pp. 141–154.
6. Sochnev, A.N. (2014) *Setevye modeli v sistemakh upravleniya proizvodstvom* [Network Models in Production Control Systems]. Krasnoyarsk: Siberian Federal University.
7. Kotov, V.E. (1984) *Seti Petri* [Petri nets]. Moscow: Nauka.
8. Peterson J. (1984) *Teoriya setey Petri i modelirovanie sistem* [Petri nets theory and systems modeling]. Translated from English by M.V. Gorbatova, V.L. Torkhov, V.N. Chetverikov. Moscow: Mir.
9. Sochnev, A.N. & Ruban, A.I. (2015) Vector-matrix models Petri nets based modification. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovanie – Modern Technologies. System Analysis. Modeling*. 3(47). pp. 98–103.
10. Baranchikova, S.G. (2015) *Upravlenie mashinostroitel'nyim predpriyatiem* [Management of a Machine-Building Enterprise]. Ekaterinburg: Ural State University.
11. Mustafaeva, D.G. & Mustafaev, M.G. (2013) Expert systems in the organization and management of production processes. *Organizator proizvodstva – Organizer of Production*. 3(58). pp. 20–23.
12. Novikov, F.A. (2009) *Diskretnaya matematika dlya programmistov* [Discrete Mathematics for Programmers]. 3rd ed. St. Petersburg: Piter.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 004.94

DOI: 10.17223/19988605/57/3

**О.С. Исаева, Н.В. Кулясов, С.В. Исаев**

### ИНФОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОДДЕРЖКИ ИСПЫТАНИЙ БОРТОВЫХ СИСТЕМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА ОСНОВЕ БАЗЫ ЗНАНИЙ

Предложен метод поддержки испытаний логики функционирования бортовых систем космических аппаратов на основе базы знаний интеллектуальной имитационной модели. Исследуемые физические устройства представляются цифровыми образами в элементах модели, которая содержит графические структуры и базы знаний, описывающие правила работы устройств. Создан метод формирования правил базы знаний из программ испытаний бортовых систем. Разработаны визуальные компоненты интерактивной инфографики, позволяющие выполнять сопоставление эталонной базы знаний, отражающей проектные решения, с базой знаний, построенной по испытаниям технических систем. Созданные программные инструменты применяются для исследования командно-измерительных систем космических аппаратов в составе программного обеспечения контрольно-проверочной аппаратуры. Новые инструменты позволяют конструктору бортовой аппаратуры оценивать полноту программ проводимых испытаний как в комплексе, так и для отдельных реализаций основных и резервных комплектов бортовой аппаратуры.

**Ключевые слова:** имитационное моделирование; интеллектуальная модель; базы знаний; инфографика; бортовые системы; космический аппарат; испытания.

В современном цифровом мире технологии имитационного моделирования обеспечили переход от традиционного проектирования и итерационной доработки технических систем на основе дорогостоящих многократных натурных испытаний к анализу критических состояний изделий на цифровых моделях. Модели позволяют исследовать разрабатываемые устройства, имитируя нештатные ситуации, определяя временные интервалы наблюдений, задавая контрольные точки, допустимые границы параметров, и решают проблемы, связанные с необходимостью рассматривать процессы, которые сложно многократно повторять в реальных условиях [1].

В случае, когда речь идет о создании сложной высокотехнологичной несерийной продукции, к какой относится, например, бортовая аппаратура космических аппаратов, применение существующих инструментов моделирования осложняется слабой структурированностью предметной области и неполнотой формализованных знаний о решаемых задачах. Особенностью бортовых систем является наличие в них внутренних программ, обеспечивающих сложную логику информационного взаимодействия бортовых и наземных сегментов на основе собственных протоколов и специализированных структур данных. Требуется проводить не только измерительный контроль, но и функциональное исследование бортовых систем, от качества которого во многом зависят срок службы космических аппаратов и их эксплуатационные характеристики [2]. Интуитивные, неструктурированные и формально не обоснованные последовательности действий при исследовании бортовых систем приводят к увеличению стоимости, времени и трудозатрат производства. Указанные проблемы решаются созданием программных инструментов, обеспечивающих построение и применение имитационных моделей, интегрированных с технологиями анализа и верификации устройств [3], для анализа функционирования бортовых систем, которые позволят снизить трудоемкость и повысить автоматизацию испытательных процессов.

В российских и зарубежных исследованиях накоплен широкий опыт применения готовых инструментов моделирования, а также создания программных систем для анализа функционирования технических объектов. Имитационные модели позволили выполнять контроль оперативности бортовых комплексов управления космическими аппаратами дистанционного зондирования Земли [4], интеллектуальные модели на основе правил, представляющих матрицы векторов состояний и последовательности управляющих действий, применяются для обнаружения и парирования возникающих на их борту отказов оборудования [5], модели служат основой для оценки пространственной доступности радиоизлучений в космической командно-ретрансляционной системе при решении задач планирования мониторинга радиолинии [6] и пр. На основе баз знаний и моделей предметной области решаются задачи автоматизированной поддержки проектирования космических аппаратов [7], а также выработки новых решений для улучшения эксплуатационных характеристик технических систем [8]. Для анализа и контроля бортовых систем создаются специализированные языки или программные комплексы [9, 10]. Применение программных имитаторов для испытания блоков управления системы наведения антенн позволило выявлять сбои выдачи команд управления, связанные с попаданием прихода команды на момент обработки прибором информации о местоположении антенны [11], исследование нечетких границ работоспособных состояний бортовой аппаратуры, функции принадлежности которых построены на основе экспертных знаний, обеспечило прогнозирование показателей качества бортовых систем и учет влияния факторов внешних воздействий [12]. Применение экспертных знаний позволяет имитировать динамическое поведение анализируемых объектов и используется на всех этапах жизненного цикла бортовых систем для их проектирования, проверки работоспособности, при эксплуатационном контроле и диагностике отказов оборудования [13]. Проведенный обзор показал, что, несмотря на актуальность и востребованность темы исследований, существующие в настоящее время решения не обеспечивают тесной интеграции имитационных моделей и инструментов поддержки испытаний.

Авторами данной работы предложен комплекс методов интеллектуального имитационного моделирования и анализа функционирования бортовых систем космических аппаратов, позволяющий строить модели, описывающие логику работы систем и их технические характеристики, и применять их для автоматизации формирования испытательных процедур, проведения испытаний бортовой аппаратуры и анализа их результатов по прецедентам имитационного моделирования [14]. Построенные модели выполняют роль имитаторов окружения объекта контроля при автономных испытаниях бортовых систем. Методы позволяют проводить исследование отдельных функций бортовых систем, выполнение последовательных или параллельных действий, но не обеспечивают контроль режимов работы устройств в целом. Для решения этой задачи авторами предложен инфографический метод, позволяющий из испытательных процедур и данных, полученных в результате испытаний объекта контроля, создавать правила функционирования имитационных моделей и графические представления, показывающие полноту испытательных процедур и корректность режимов работы исследуемых систем. Апробация метода выполнена для бортовой аппаратуры командно-измерительной системы космического аппарата. Схема командно-телеметрического взаимодействия бортовых и наземных систем для управления космическим аппаратом приведена на рис. 1.

Ключевую роль в управлении играет командно-измерительная система (КИС), которая представляет собой радиотехнические средства наземного автоматизированного комплекса управления в совокупности с бортовой аппаратурой космического аппарата, предназначенные для приема и передачи различных видов информации, формирования и передачи на космические аппараты команд и программ управления, стандартных частот и сигналов времени для синхронизации работы бортового комплекса управления [15]. В ее состав входят устройства приема данных, их передачи и интерфейсный модуль, предназначенный для анализа и выполнения команд. Команды на изменение конфигурации или настроек командно-измерительной системой выполняются ею самой, команды для осуществления внешнего командно-программного управления передаются в бортовые системы (БЦВК – бортовой цифровой вычислительный комплекс, или БУ БКУ – блок управления бортового комплекса управления). В соответствии с заданным временем ожидания квитанции интерфейсный

модуль формирует квитанцию о выполнении команды либо на основе собственной информации о прохождении команды, либо по данным, полученным от бортовых систем. За формирование телеметрической информации отвечает бортовая аппаратура телесигнализации (БАТС). Результаты обработки команд отражаются в телеметрии и в квитанции, передаваемой командно-измерительной системой в наземный сегмент.

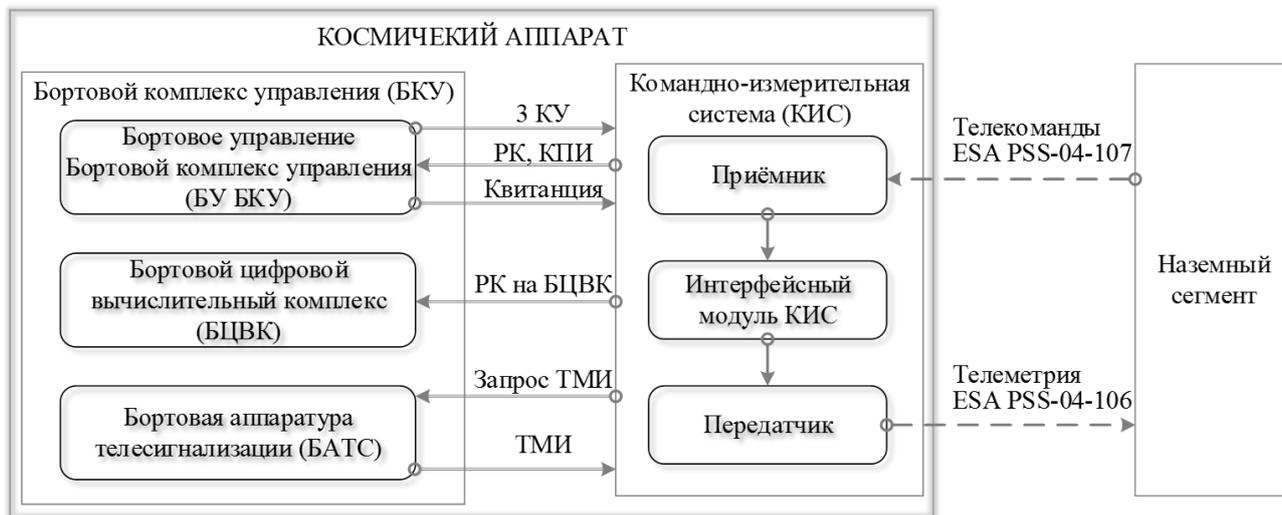


Рис. 1 Схема командно-телеметрического взаимодействия систем  
Fig. 1. Scheme of command-telemetric interaction of systems

Разработка способов организации взаимодействия бортовых подсистем и вариантов реализации их функционирования характеризуется большой вариативностью. Командно-телеметрическое взаимодействие выполняется на основе разных подходов, протоколов связи и структур данных. Современные требования к космическим аппаратам, сокращение сроков их разработки и увеличение периода активного существования обуславливают необходимость поиска новых подходов к проведению испытаний бортовых систем.

### 1. Постановка задачи испытаний бортовых систем

Задача испытаний заключается в формировании и передаче последовательности управляющих воздействий на объект контроля и обеспечении сбора, мониторинга и анализа данных, возникающих в результате его функционирования [16]. В процессе испытаний участвуют контрольно-проверочная аппаратура (КПА) и программное обеспечение (ПО КПА). Объект контроля формально представляется как функционал преобразования входных переменных в выходные с заданными граничными условиями и допустимыми изменениями параметров и измеряемых величин:  $O = \langle G^o, Y = F^o(X), T \rangle$ , где  $O$  – объект испытаний;  $G^o$  – структура объекта;  $F^o$  – функционал, устанавливающий соответствие между входными переменными  $X$  и выходными  $Y$  в моменты времени  $T$ ;  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_o\}$  – моменты измерений;  $X = \{x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_m(t_i), w_1(t_i), \dots, w_s(t_i), k_1(t_i), k_2(t_i), \dots, k_r(t_i)\}$  – множество входных воздействий;  $x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_m(t_i)$  – входные параметры (параметры влияния);  $w_1(t_i), \dots, w_s(t_i)$  – параметры функционирования измерительного оборудования;  $k_1(t_i), k_2(t_i), \dots, k_r(t_i)$  – команды управления из базы команд  $K$ ,  $m$  – число входных параметров,  $s$  – параметров функционирования,  $r$  – команд;  $Y = \{y_1(t_j), y_2(t_j), \dots, y_n(t_j), d_1(t_j), \dots, d_p(t_j)\}$  – выходные параметры;  $y_1(t_j), y_2(t_j), \dots, y_n(t_j)$  –  $n$  контролируемых измерений;  $d_1(t_j), \dots, d_p(t_j)$  –  $p$  неконтролируемых параметров;  $t_i, t_j \in T, t_j = t_i + \Delta t, \Delta t$  – таймаут ожидания данных. Входные параметры испытаний  $X$  описывают настройки приемо-передающего тракта, характеристики измерительного оборудования, команды управления и массивы контрольно-проверочной информации (КПИ). Выходные параметры  $Y$ : телеметрические данные (ТМ), квитанции, физические характеристики объекта контроля и параметры системы испытаний, описывающие ее состояние.

Задача испытаний объекта контроля ставится следующим образом: показать, что  $\forall x_i \exists y_k(t_j) \in \{y_j = F(x_i)\}$ . Причем  $y_k(t_j) \in [y_k^* - \Delta y, y_k^* + \Delta y]$ ,  $k = [1, \dots, n]$ ,  $n$  – количество наблюдаемых параметров,  $y_k^* \in Y^*$  – эталонное значение из технической документации,  $\Delta y$  – допуск измерений. Для некоторых параметров граница задается только с одной стороны (определяется физическими свойствами параметра). Если  $y_k(t_j) \notin [y_k^* - \Delta y, y_k^* + \Delta y]$ , то  $y_k(t_j)$  – недопустимое значение результатов испытаний.

Схема организации испытаний бортовой аппаратуры командно-измерительной системы приведена на рис. 2. В процессе испытаний программное обеспечение контрольно-проверочной аппаратуры выполняет преобразование сценариев испытаний в управляющие воздействия на объект контроля посредством контрольно-проверочной аппаратуры. Выполняется проверка и конструкционных деталей, и логики работы как самих устройств, так и комплексов, образующихся при взаимодействии объекта контроля со смежными системами и периферией. Такие испытания выполняются на основе интеллектуальной имитационной модели  $S = \langle G, F, T \rangle$ , которая имитирует поведение объекта контроля и сопряженных устройств. Описание модели и методов испытаний на ее основе приведено в [17].

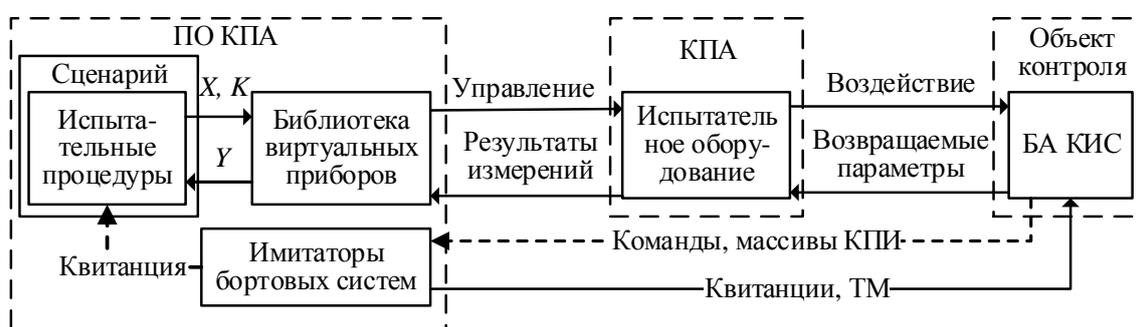


Рис. 2. Схема организации испытаний  
Fig. 2. Scheme of test organization

Структура объекта контроля  $G^o$  отображается в множество  $G$ , содержащее структурно-параметрическое представление модели  $S$ . В модели заданы методы функционирования  $F$ , которые позволяют на основе начальных данных  $X^0$  и входных параметров  $X^i$  получать выходные результаты  $Y^m$ . Структура модели:

$$G = \langle B, I, C, D, P \rangle,$$

где  $B = \cup B_i$  – множество элементов модели, представляющих свойства или функции отдельных устройств,  $I = (\cup I_q^i)$  – множество коммутационных интерфейсов элементов – точек входов и выходов для  $B_i$ ,  $C = \cup C_{nl}^{ij}$  – множество коммутационных соединений между элементами модели,  $C_{nm}^{ij} = \langle I_n^i, I_m^j \rangle$  – соединение элементов  $B_i$  и  $B_j$  по интерфейсам  $I_n^i$  и  $I_m^j$ ,  $D$  – множество структур данных,  $P = X \cup Y$  – множество входных параметров, команд управления и выходных параметров. Методы функционирования модели  $F$  объединяют логический и физический уровни моделирования:

$$F = \{R: A \rightarrow Z, Y = V(X)\},$$

где  $R: A \rightarrow Z$  – множество правил базы знаний,  $A = A_1 \& A_2 \& \dots \& A_r$  – логическое выражение, определяющее условие выполнения правила (антецедент),  $Z = Z_1, Z_2, \dots, Z_v$  – действия, изменяющее состояние модели (консеквент),  $Y = V(X)$  – множество виртуальных инструментов, представляющих собой программно-математические модели, построенные в среде технического моделирования.

Задача испытаний логики функционирования объекта контроля: результаты моделирования  $Y^m$  сравниваются с результатами испытаний  $Y^j$  и  $Y^* = Y^m$ . Проверяется выполнение условия:  $\forall y_k(t_j) \in Y^j$ ,  $y_k(t_j) \in [y_k^* - \Delta y, y_k^* + \Delta y]$ ,  $d_k(t_j) \in [d_k^* - \Delta d, d_k^* + \Delta d]$ ,  $y_k^*, d_k^* \in Y^*$ . Анализ проводится не только на контролируемых параметрах, а на всех, получаемых в результате имитационного моделирования, что расширяет возможности испытаний. При испытаниях логики функционирования бортовых систем рассматриваются методы командно-программного управления бортовой аппаратурой. Структура испытательных процедур, предназначенных для анализа передачи и отработки команд приведена в синтаксической диаграмме на рис. 3. Узлы синтаксической диаграммы описывают элементы испыта-

тельной процедуры, линии – последовательность их определения, дуги – возможность повторения. Синтаксические диаграммы позволили создавать инструменты автоматизации и синтаксического контроля испытательных процедур.

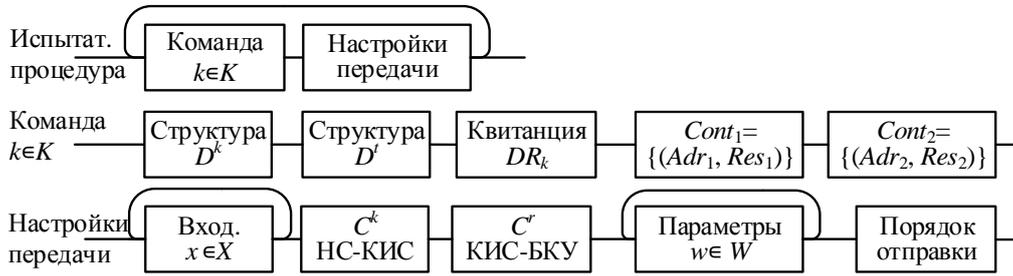


Рис. 3. Синтаксическая диаграмма структуры испытательных процедур  
 Fig. 3. Syntax diagram of the structure of test procedures

При создании испытательных процедур для каждой команды  $k \in K$  задаются параметры, которые определяют поведение объекта контроля и имитаторов сопряженных систем в соответствии с выбранным вариантом командно-программного управления. Состав испытательных процедур: структура пакетов команд  $D^k$ , структура пакетов телеметрической информации  $D^r$ , ответы имитаторов бортовых систем  $DR_k$ , критерии контроля прохождения команд  $Cont(k_i) = Cont_1(k_i) \cup Cont_2(k_i)$ , настройки передачи – интерфейсы, по которым будут передаваться команды от имитатора наземного сегмента в командно-измерительную систему  $C^k$  и интерфейсы для взаимодействия КИС с имитаторами бортового комплекса управления  $C^r$ , порядок отправки команд (автоматически, циклически с заданным числом повторений, время ожидания реакции на команду  $T$ , количество попыток отправки). Анализ отработки команд выполняется по поступающей от объекта контроля телеметрической информации, для этого множество критериев  $Cont(k)$  задается в виде пар  $(Adr, Res)$ , где  $Adr$  – адрес параметра в телеметрии,  $Res$  – значение для сравнения. Множество критериев разбито на два подмножества:  $Cont_1(k)$  задает контроль квитанции по телеметрической информации,  $Cont_2(k)$  – реакции на поступившую команду (изменение состояния бортовых систем после выполнения команды, например переключение активного комплекта оборудования).

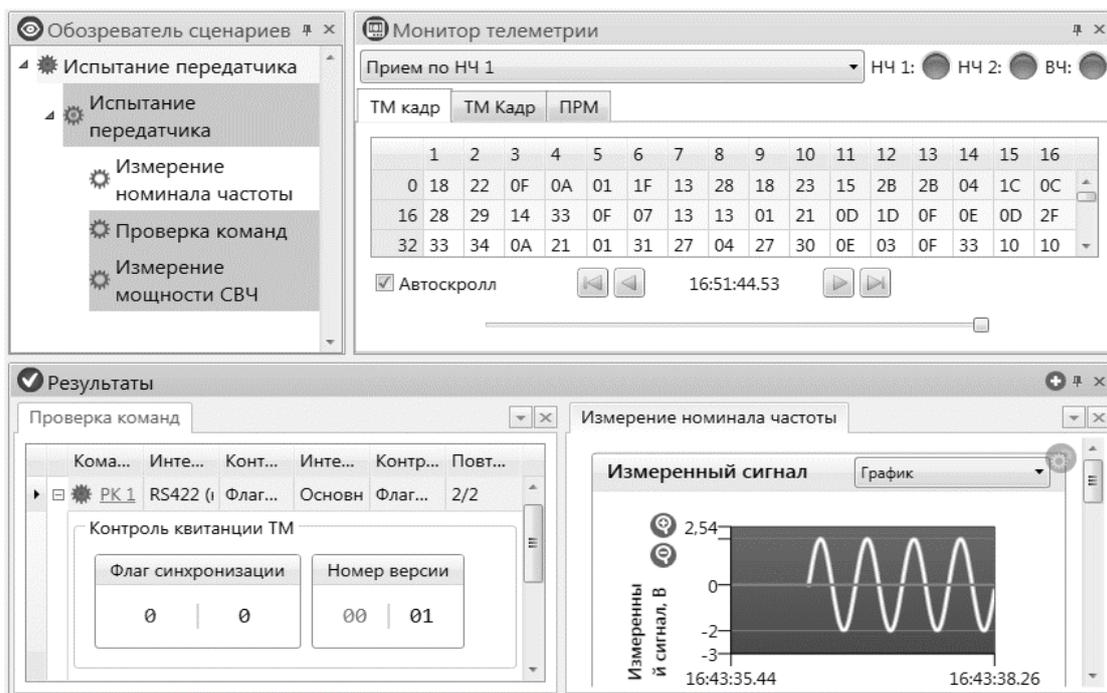


Рис. 4. Визуализация испытаний бортовых систем  
 Fig. 4. Visualization of tests of onboard systems

В процессе проведения испытаний выполняется настройка программных имитаторов и виртуальных приборов, входящих в состав программно-аппаратного комплекса контрольно-проверочной аппаратуры. Программное обеспечение взаимодействует с объектом контроля, передает команды и данные для телеметрии, выполняет анализ получаемых результатов испытаний в соответствии с алгоритмами работы оборудования. Ход проведения испытаний отображается в окнах мониторинга в графической и табличной форме и сохраняется в хранилище данных. На рис. 4 приведен пример визуализации испытаний.

Испытания проходят при непрерывном мониторинге данных и телеметрии, получаемых от оборудования. Выполняется визуализация, которая позволяет наблюдать за корректностью контрольных точек, выделять несовпадения или выходы за граничные значения. Выполняется сравнение результатов испытаний с прецедентами имитационного моделирования. Метод анализа результатов испытаний по прецедентам представлен в [18]. По данным, полученным в процессе испытаний, формируются технические отчеты.

Для анализа полноты методик испытаний предлагается автоматически формировать имитационную модель из построенных испытательных процедур и результатов испытаний объекта контроля и рассматривать логические цепочки построенной модели для анализа режимов работы бортовых систем.

## 2. Формирование правил базы знаний на основе программ испытаний

Для формирования базы знаний интеллектуальной имитационной модели предлагается на основе параметров, заданных в испытательных процедурах, определенных в них путей передачи данных, критериев контроля и результатов испытаний создавать правила  $R: A \rightarrow Z$ , где  $A \subseteq \langle I, X, T \rangle$ ,  $Z \subseteq \langle I, Y, T \rangle$ . Алгоритм формирования правил для базы знаний имитационной модели приведен на рис. 4.

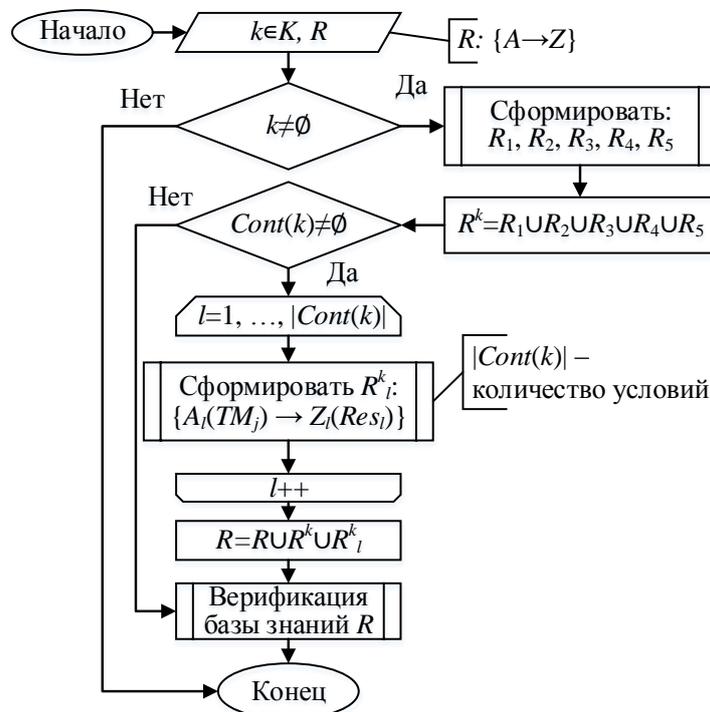


Рис. 5. Алгоритм формирования правил на основе испытаний

Fig. 5. Algorithm for forming rules based on tests

Для каждой команды  $k \in K$ , для которых определены испытательные процедуры строятся правила, описывающие функции бортовых систем при приёме и передаче команд, а также результаты их обработки. Состав правил и их семантическая интерпретация:

1) Правило передачи команды  $R_1: A_1(k) \rightarrow Z_1(I_1, k, T)$ , где  $A_1 = \langle k \neq \emptyset \rangle$ ,  $Z_1 = \langle \text{на интерфейс } I_1 \in C^k \text{ передать } k \text{ и установить } T = \langle \text{время ожидания} \rangle$ , где  $I_1$  – интерфейс, указанный в испытательной процедуре для передачи выбранной команды (интерфейсы могут быть различные, определяется возможностью тестируемого устройства), «время ожидания» задано в блоке «Порядок отправок».

2) Правило приема команды  $R_2: A_{21}(I_2, x_1) \cup A_{22}(x_1) \rightarrow Z_2(k)$ , где  $A_2 = \langle \text{на интерфейс } I_2 \in C^k \text{ поступил массив байт } x_1 \rangle$ ,  $A_{22} = \langle \text{структура } x_1 = D^k \rangle$ ,  $Z_2 = \langle k = \text{массив байт } x_1 \rangle$ , где  $I_2$  – интерфейс, указанный в испытательной процедуре в качестве принимающего для объекта контроля,  $D^k$  – структура пакетов команд (формируются при описании испытательных процедур, различаются для разных устройств).

3) Правило передачи команд в бортовой комплекс управления  $R_3: A_3(k) \rightarrow Z_3(I_3, k)$ , где  $A_3 = \langle \text{Тип } k \rangle$ ,  $Z_3 = \langle \text{на интерфейс } I_3 \in C^r \text{ передать } k \rangle$ , где тип  $k$  возвращает тип команды РК<sub>КИС</sub> или РК<sub>БКУ</sub>, по которому определяется обрабатывающее устройство.

4) Правило квитирования команды  $R_4: A_{41}(I_3, x_2) \cup A_{42}(k) \rightarrow Z_4(I_4, k)$ , где  $A_{41} = \langle \text{на интерфейс } I_3 \in C^r \text{ поступил массив байт } x_2 \rangle$ ,  $A_{42} = \langle \text{структура массива } x_2 = D^k \rangle$ ,  $Z_4 = \langle \text{на интерфейс } I_4 \in C^r \text{ передать данные } DR_k \rangle$ , где  $C^r$  – интерфейсы обмена данными между бортовыми системами.

5) Правило передачи телеметрии  $R_5: A_{51}(I_5, x_3) \cup A_{52}(x_3) \rightarrow Z_5(I_5, TM_j)$ , где  $A_5 = \langle \text{на интерфейс } I_5 \in C^r \text{ поступил массив байт } x_3 \rangle$ ,  $A_{52} = \langle \text{структура массива } x_3 = D^j \rangle$ ,  $Z_5 = \langle TM_j = x_3 \rangle$ ,  $TM_j \in TM$  – телеметрия,  $j$  – номер параметра в телеметрическом кадре.

6) Множество правил обработки команд и контроля по телеметрии:  $R_l^k: A_l(TM_j) \rightarrow Z_l(Res_l)$  ( $l = 1, \dots, |Cont(k)|$ ), где  $|Cont(k)|$  – количество условий для контроля обработки команды  $k$ , заданных в испытательных процедурах,  $j$  – номер параметра в телеметрическом кадре,  $A_l(TM_j) = \langle \text{параметр } TM_j \text{ по адресу } Adr_l = Res_l \rangle$ ,  $Z_l = \langle \text{контроль } TM_j \rangle$ .

База знаний дополняется построенными правилами. Сложность метода линейно зависит от числа критериев анализа обработки команд  $Cont(k)$ , заданных в испытательных процедурах:  $C = \sum_{i=1}^K (|Cont(k_i)| + |R^k|)$ .

Построенная база знаний отражает особенности функционирования испытываемого оборудования, пример визуализации имитационных экспериментов [19] приведен на рис. 5.

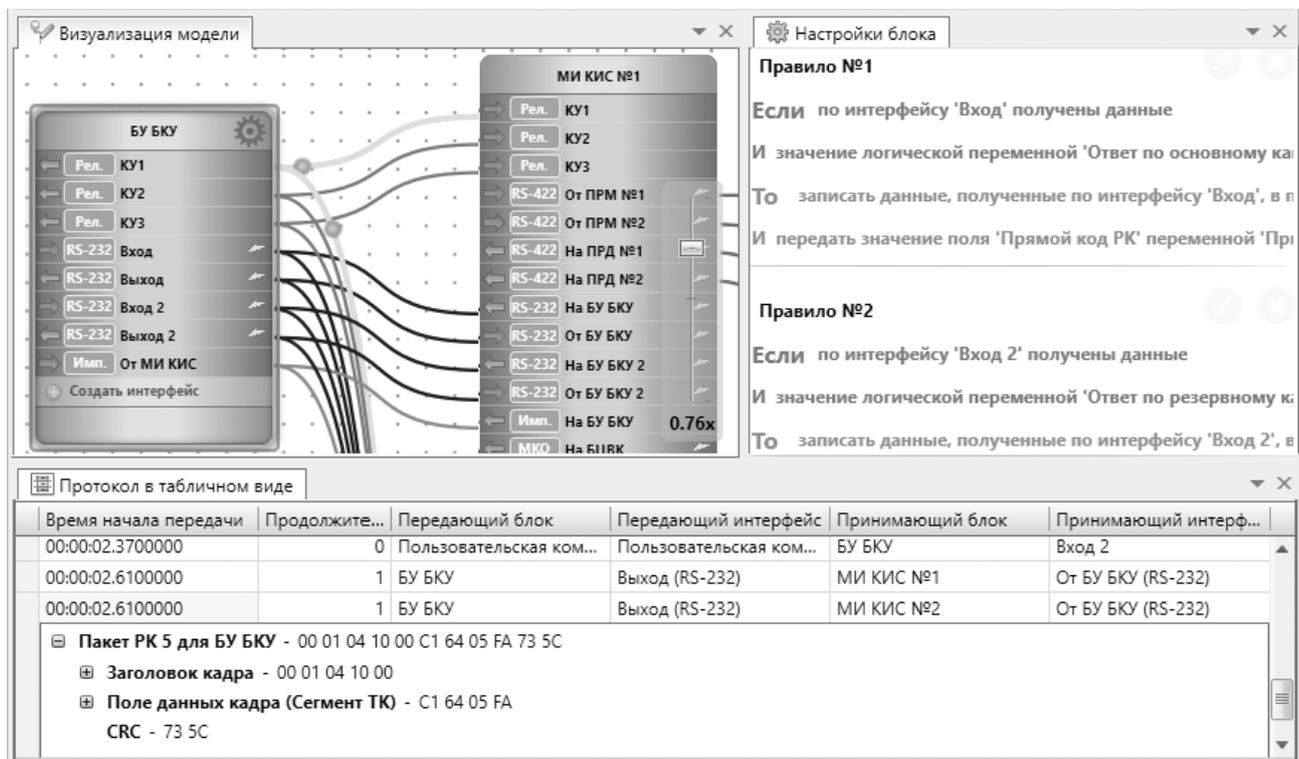


Рис. 6. Визуализация графической структуры и базы знаний модели  
 Fig. 6. Visualization of the model's graphical structure and knowledge base

Авторами предложены критерии анализа и верификации структуры и свойств базы знаний, разработаны визуальные компоненты интерактивной инфографики, выполняющие интерпретацию формального описания модели в интерактивные графические образы для графического исследования базы знаний [20]. Помимо автоматического контроля инструменты могут быть использованы для ручной проверки непротиворечивости знаний, а также соответствия моделей техническим описаниям, заданным в конструкторской документации.

Применение инфографических инструментов для исследования построенной по программам испытаний базы знаний обеспечит анализ процессов, происходящих при испытаниях объекта контроля и позволит делать выводы о полноте состава испытательных процедур.

### 3. Анализ программ испытаний по базе знаний интеллектуальной модели

Для анализа полноты применяемых программ испытаний объекта контроля предлагается выполнять сравнение базы знаний, построенной на основе испытательных процедур, с эталонной базой знаний, созданной при проектировании бортовых систем и отражающей поведение устройств, заложенное в технической документации. Введены формальные операции, позволяющие автоматизировать сопоставление методов функционирования моделей в базах знаний и строить инфографические представления цепочек логического вывода на графовых структурах.

*Проекция*  $Pr(Q, M^i) = M_i$  –  $i$ -я компонента кортежа  $\langle M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_p \rangle$ , где  $M_1 \subseteq M^1, M_2 \subseteq M^2, \dots, M_i \subseteq M^i, \dots, M_p \subseteq M^p$ . Например, для того чтобы выбрать все команды, для которых есть правила их приема, нужно выполнить проекцию антецедентов правил  $A = \langle I^A, X^A, K^A, T^A \rangle$  на множество команд  $K$ :  $Pr(A_k, K) = \{k_i \in K^A\}$ .

*Выборка*  $Sel(Q, \theta)$  – множество элементов из  $Q$ , удовлетворяющих условию  $\theta$ . Например,  $Sel(R, K = k_i)$  задает множество правил, моделирующих функции отработки команды  $k_i$ . Заметим, что если  $A^i \subseteq A$ , то  $Sel(A^i, \theta) \subseteq A^i \subseteq A$ , т.е. операция выборки не выходит за пределы исходного множества.

*Цепочка правил*  $Rch^i \subseteq R^i$  – это последовательность правил, выполняемых в процессе логического вывода для элемента модели  $B_i$ . Пусть для правил, описывающих поведение элемента модели  $B_i$ , существует цепочка правил  $Rch^i$ , а для  $B_j$  –  $Rch^j$ . Будем говорить, что цепочки правил  $Rch^i$  и  $Rch^j$  находятся в *отношении зависимости*, обозначим его –  $Dep(Rch^i, Rch^j)$ , если выполнение  $Rch^i$  влечет выполнение  $Rch^j$  (логический вывод). Отношение зависимости несимметрично, т.е.  $Dep(Rch^i, Rch^j) \neq Dep(Rch^j, Rch^i)$ .

*Метод взаимодействия* элементов модели  $B_i$  и  $B_j$  задается как  $FMod(B_i, B_j) = Rch^i \cup Rch^j$ , для которых выполняется  $Dep(Rch^i, Rch^j)$ .  $FMod(B_1, \dots, B_p) = Rch^1 \cup Rch^2 \cup \dots \cup Rch^p$ , такое что  $\forall i \exists j \mid Dep(Rch^i, Rch^j)$  или  $Dep(Rch^j, Rch^i)$ ,  $i, j \in [1, \dots, p]$ .  $FMod(B_1, \dots, B_p)$  описывает один из режимов взаимодействия множества элементов модели  $B_1, \dots, B_p$ .

*Путь передачи данных* между элементами  $B_i$  и  $B_j$   $L(B_i, B_j) = I_n^i \cup I_m^j$ , где  $I_n^i \in Pr(Rch^i, I)$ ,  $I_m^j \in Pr(Rch^j, I)$ ,  $Rch^i$  – цепочка правил для  $B_i$ ,  $Rch^j$  – для  $B_j$ , и выполняется  $Dep(Rch^i, Rch^j)$ .

Применяя введенную формализацию, предложен метод анализа базы знаний; обозначим построенную базу знаний  $R_N$  и эталонную базу знаний  $R_E$ .

1. Определить команды, моделирование которых выполняется в построенной базе знаний:  $K_N = Pr(R_N, K)$  и эталонной  $K_E = Pr(R_E, K)$ .

2. Выделить правила, в которых заданы методы отработки команд  $R_N' = Sel(R_N, k \in K_N)$ ,  $R_E' = Sel(R_E, k \in K_E)$ .

3. Построить цепочки правил  $Rch_N^i \subseteq R_N'$  и  $Rch_E^i \subseteq R_E'$ , выполняемые в процессе логического вывода для каждого элемента модели  $B_i$ .

4. Найти зависимые цепочки правил, т.е. для каждой цепочки  $Rch_N^i \subseteq R_N'$  найти цепочки  $Rch_N^j \subseteq R_N$ , для которых выполняется  $Dep(Rch_N^i, Rch_N^j)$ , и  $Rch_E^j \subseteq R_E$ , для которых  $Dep(Rch_E^i, Rch_E^j)$ .

5. Выполнить объединение зависимых цепочек правил по построенной и эталонной базам правил для всех элементов модели  $B_1, \dots, B_p$ , т.е. множество  $FMod_N(B_1, \dots, B_p) = Rch_N^1 \cup \dots \cup Rch_N^p$  такое, что выполняется  $Dep(Rch_N^i, Rch_N^j), i, j, p \in [1, |B|]$ , и аналогичным образом  $FMod_E(B_1, \dots, B_p)$ .
6. Найти пути  $L_N(B_i, B_j)$  и  $L_E(B_i, B_j)$  для всех  $FMod_N(B_i, B_j) \neq \emptyset$  и  $FMod_E(B_i, B_j) \neq \emptyset$ .
7. Выполнить сопоставление полученных множеств, сформировать список ошибок.

Пример визуализации метода приведен на рис. 7, перечень выявленных в результате работы метода ошибок – на рис. 8.

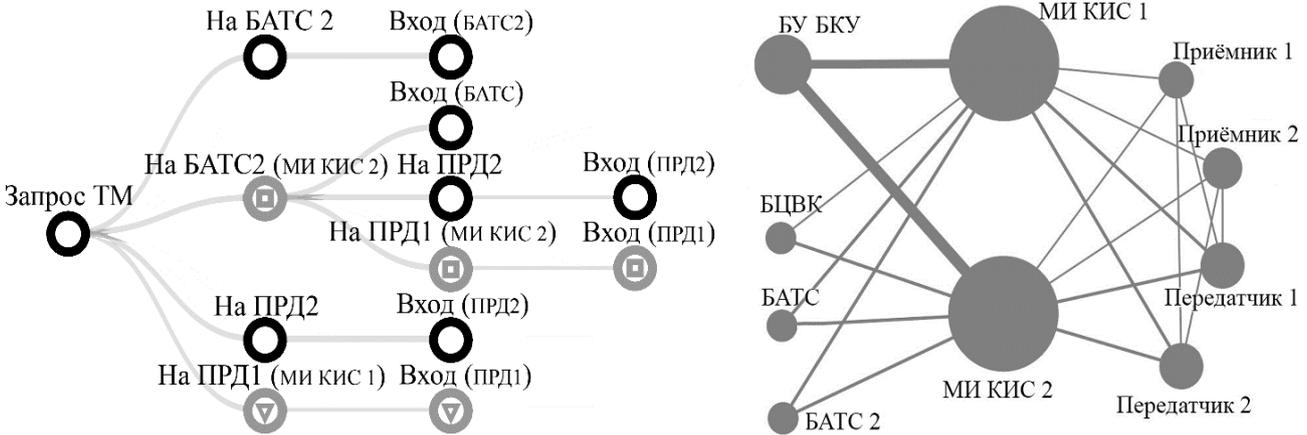


Рис. 7. Графическая визуализация результатов анализа программ испытаний  
 Fig. 7. Graphic visualization of test program analysis results

Графическая визуализация показывает совпадающие элементы в базах знаний – узлы обозначены пиктограммой , наличие правил в эталонной базе при отсутствии в базе, построенной по программам испытаний – , избыточные действия в методиках испытаний – . Результатом анализа является список ошибок, который отражает команды и методы испытаний, не соответствующие эталонной базе знаний.

Сравнение логических структур

Цепочка 1 (Стартовый блок)		Цепочка 2 (Стартовый блок)	
МИ КИС 1 (Запрос ТМ)		МИ КИС 2 (Запрос ТМ)	
На БАТС2	Отсутствует правило передачи	На ПРД1	Отсутствует правило передачи
На ПРД1	Отсутствует правило передачи	Вход (ПРД1)	Отсутствует правило приёма
Вход (ПРД1)	Отсутствует правило приёма		

Рис. 8. Список ошибок базы знаний, построенной по программе испытаний  
 Fig. 8. Errors in the knowledge base built according to the test program

Помимо сравнения базы знаний, построенной из испытательных процедур с эталонной базой знаний, метод позволяет выполнять анализ полноты испытаний для однотипных устройств основного и резервного комплектов оборудования. В этом случае в качестве эталонной базы выбирается подмножество правил функционирования основного комплекта оборудования.

Разработаны инструменты мониторинга испытаний, результаты которых сохраняются в хранилище данных, выполняющие их автоматическое сопоставление с имитационными экспериментами в выбранных контрольных точках. Предложенная формализация позволила автоматизировать процесс анализа испытательных процедур и получаемых результатов испытаний для обеспечения полноты исследования не только физических характеристик устройств, но и логики их взаимодействия с бортовыми и наземными системами окружения.

## Заключение

Предложен новый подход, обеспечивающий интеграцию методов построения и применения интеллектуальных имитационных моделей для поддержки испытаний бортовых систем. Исследуемые физические устройства представляются цифровыми образами в элементах интеллектуальной имитационной модели. Созданы интерактивные графические инструменты, позволяющие формировать правила работы модели на основе программ испытаний и выполнять анализ как построенных моделей относительно эталонных, отражающих проектные решения, так и результатов испытаний по прецедентам имитационного моделирования. Разработанные программные и технологические решения предоставляют конструкторам бортовой аппаратуры инструменты подготовки испытаний при различных вариантах использования и режимах функционирования бортовых систем, что упрощает подготовку испытательных процедур. Использование экспертных знаний, заложенных в имитационных моделях, предоставляет наглядные критерии оценки полноты и достоверности проводимых испытаний и способствует повышению их качества.

Созданные программные инструменты применяются для исследования командно-измерительных систем космических аппаратов в составе программного обеспечения контрольно-проверочной аппаратуры. Программное обеспечение позволяет проводить автономные и комплексные испытания, рассматривать штатные и нештатные условия эксплуатации командно-измерительных систем, имитировать аварийные ситуации, отказы отдельных резервируемых устройств и каналов связи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Koo C. Development of simulation infrastructure compatible with ESA SMP for validation of flight software and verification of mission operation // Proc. of Simulation and EGSE for Space Programmes. 2012. P. 1–8.
2. Saleh J.H., Lamassoure E., Hastings D.E. Space systems flexibility provided by onorbit servicing // J. of Spacecraft and Rockets. 2002. V. 39 (4). P. 551–560.
3. Brouwer M., Casteleijn A., Schenau I., Oving B., Timmermans L., Zwartbol T. Developments in Test and Verification Equipment for Spacecraft. Noordwijk : National Aerospace Laboratory, 2000. 20 p.
4. Хомоненко А.Д., Старобинец Д.Ю., Лохвицкий В.А. Модель оценки оперативности функционирования бортового комплекса управления космическими аппаратами дистанционного зондирования Земли // Труды СПИИРАН. 2016. Вып. 3 (46). С. 49–64.
5. Тюгашев А.А. Подход к обеспечению отказоустойчивости космических аппаратов на основе автоматизации проектирования интеллектуальных бортовых программных средств // Надежность и качество сложных систем. 2016. № 2 (14). С. 9–16.
6. Андреев А.М., Хацаюк В.О. Алгоритм оценивания пространственной доступности радиоизлучений космических аппаратов командно-ретрансляционных систем с использованием имитационного моделирования // Труды военно-космической академии им. А.Ф. Можайского. 2016. № 650. С. 57–61.
7. Стратилатов Н.Р., Куренков В.И., Кучеров А.С., Якишик А.А. Методические основы разработки проблемно-ориентированной системы выбора основных проектных параметров космических аппаратов // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2016. Т. 15 (2). С. 68–79.
8. Горелов Ю.К., Киселёв С.К. Использование онтологического подхода при проектировании многофункционального авиационного индикатора // Онтология проектирования. 2018. Т. 8, № 3 (29). С. 400–411.
9. Real-Time Telemetry and Command Processing. URL: <https://www.kratosdefense.com/~media/kisi/pdf/epoch-tc-server-datasheet.pdf> (accessed: 03.09.2020).
10. Pereiral T.D., Ferreira M.G., Kucinski F.N. Using the PLUTO language on functional tests of a Brazilian Satellite's On-Board Data Handling Computer // Proc. SpaceOps Conference. Stockholm : Sweden, 2012. V. 1. P. 206–213.
11. Кудряшова Г.В. Применение программных имитаторов при наземной экспериментальной отработке бортовой аппаратуры космических аппаратов // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2016. Т. 1. С. 627–628.
12. Миронов А.Н., Миронов Е.А., Шестопалова О.Л. Прогнозирование качества функционирования бортовой аппаратуры космических аппаратов в условиях нечёткой информации о границах области работоспособных состояний // Информационно-экономические аспекты стандартизации и технического регулирования. М. : Рос. науч.-техн. центр информации по стандартизации, метрологии и оценке соответствия, 2016. № 4 (32). С. 1–10.
13. Литвинов В.В., Марьянович Т.П. Методы построения имитационных систем. Киев : Наукова думка, 1991. 120 с.
14. Isaeva O.S. Technology of spacecraft onboard equipment design support // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2021. V. 1047. Art. 012115.
15. ГОСТ Р 53802–2010. Системы и комплексы космические. Термины и определения. М. : Стандартинформ, 2011. 28 с.
16. Раннев Г.Г. Измерительные информационные системы. М. : Академия, 2010. 336 с.

17. Nozhenkova L.F., Isaeva O.S., Vogorovskiy R.V. Command and Software Management Simulation for the Spacecraft Equipment Testing // 3rd Russian-Pacific Conf. on Computer Technology and Applications. 2018. P. 1–4.
18. Nozhenkova L.F., Isaeva O.S., Koldyrev A.Yu. Creation of the base of a simulation model's precedents for analysis of the spacecraft onboard equipment testing results equipment // Advances in Intelligent Systems Research. 2018. V. 151. P. 78–81.
19. Nozhenkova L.F., Isaeva O.S., Gruzenko E.A. Computer simulation of spacecraft onboard equipment // ACSR-Advances in Computer Science Research. 2015. № 18. P. 943–945.
20. Исаева О.С., Кулясов Н.В., Исаев С.В. Метод структурно-графического анализа и верификации интеллектуальной имитационной модели // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. № 50. С. 79–88.

Поступила в редакцию 9 апреля 2021 г.

Isaeva, O.S., Kulaysov, N.V., Isaev, S.V. (2021) INFOGRAPHIC METHOD TO SUPPORT TESTING OF SPACECRAFT ONBOARD SYSTEMS BASED ON KNOWLEDGE BASE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 57. pp. 22–33

DOI: 10.17223/19988605/57/3

The paper proposes a method for testing the logic of functioning of spacecraft's onboard systems based on the intelligent simulation model knowledge base. The relevance of the study is due to modern approaches to digitalization of the production of onboard equipment. This requires the replacement of traditional design methods and iterative refinement of technical systems based on costly multiple tests on digital twins for analyzing critical states of products.

The authors have completed the formulation of the problem of testing the methods of command-telemetric interaction of spacecraft's onboard systems. The complexity of the tests is associated with the variability of communication protocols and data structures, as well as the need to ensure continuous monitoring of incoming telemetry information. The investigated physical devices are represented by digital images in the elements of the model. Such a model contains graphical structures and knowledge bases and describes the technical characteristics and rules for the operation of systems. The authors proposed methods for constructing models, automating the formation of test procedures, conducting tests of onboard equipment and analyzing their results according to the precedents of simulation. We have proposed a method for creating a knowledge base of a simulation model – digital twins from the constructed test procedures and test results of the controlled object. Our method made it possible to formulate the composition of the rules and introduce their semantic interpretation. The built knowledge base of the model simulates the functions of onboard systems when receiving and transmitting commands, as well as the results of their processing. To analyze the completeness of test programs, we introduced formal operations that allow automating the comparison of the functioning methods of the investigated and reference models. The investigated model is built on the basis of test procedures. The reference model was created in the design of onboard systems. It reflects the behavior of devices specified in the technical documentation.

Software tools have been created, which are included in the software of the control and testing equipment. The software allows conducting autonomous and complex tests. It simulates normal and abnormal operating conditions, emergency situations. It simulates failures of redundant devices and communication channels. New tools allow the designer of on-board equipment to evaluate the completeness of the test's programs with being carried out in the complex, as well as for individual implementations of the main and backup sets of onboard equipment. Expert knowledge in simulation models provides visual criteria for assessing the completeness and reliability of tests and contributes to improving the quality of decisions made by the designer at the stages of production of spacecraft's onboard systems.

Keywords: simulation modeling; intelligent model; knowledge base; infographics; onboard equipment; spacecraft; tests.

*ISAEVA Olga Sergeevna* (Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Institute of Computational Modelling of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, Russian Federation).

E-mail: isaeva@icm.krasn.ru

*KULYASOV Nikita Vladimirovich* (Engineer, Institute of Computational Modelling of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, Russian Federation).

E-mail: razor@icm.krasn.ru

*ISAEV Sergey Vladislavovich* (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Deputy Director, Institute of Computational Modelling of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, Russian Federation).

E-mail: si@icm.krasn.ru

## REFERENCES

1. Koo, C. (2012) Development of simulation infrastructure compatible with ESA SMP for validation of flight software and verification of mission operation. *Proceedings of Simulation and EGSE for Space Programmes*. pp. 1–8.

2. Saleh, J.H., Lamassoure, E. & Hastings, D.E. (2002) Space systems flexibility provided by onorbit servicing. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 39(4). pp. 551–560.
3. Brouwer, M., Casteleijn, A., Schenau, I., Oving, B., Timmermans L. & Zwartbol T. (2000) *Developments in Test and Verification Equipment for Spacecraft*. Noordwijk: National Aerospace Laboratory.
4. Khomonenko, A.D., Starobinets, D.Yu. & Lokhvitskiy, V.A. (2016) A Model of Estimating Quickness of Functioning of Onboard Control Systems of Spacecraft Remote Sensing of the Earth. *Trudy SPIIRAN – Informatics and Automation (SPIIRAS Proceedings)*. 3(46). pp. 49–64. DOI: 10.15622/sp.46.5
5. Tyugashev, A.A. (2016) Podkhod k obespecheniyu otkazoustoychivosti kosmicheskikh apparatov na osnove avtomatizatsii proektirovaniya intellektual'nykh bortovykh programmnykh sredstv [An approach to ensuring fault tolerance of spacecraft based on design automation of intelligent onboard software]. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem*. 2(14). pp. 9–16.
6. Andreev, A.M. & Khatsyuk, V.O. (2016) Space availability of data relay system signals evaluation using the simulation modeling. *Trudy voenno-kosmicheskoy akademii im. A.F. Mozhayskogo – Proceedings of the Mozhaisky Military Space Academy*. 650. pp. 57–61.
7. Stratilatov, N.R., Kurenkov, V.I., Kucherov, A.S. & Yakishchik, A.A. (2016) Metodological basis of the development of a problem-oriented system for selecting design parameters of space vehicles. *Vestnik Samarskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika, tekhnologii i mashinostroenie – Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 15(2). pp. 68–79.
8. Gorelov, Yu.K. & Kiselev, S.K. (2018) The use of ontology approach for aircraft display design. *Ontologiya proektirovaniya – Ontology of Designing*. 3(29). pp. 400–411. DOI: 10.18287/2223-9537-2018-8-3-400-411
9. Kratosdefense.com. (n.d.) *Real-Time Telemetry and Command Processing*. [Online] Available from: <https://www.kratosdefense.com/~media/kisi/pdf/epoch-tc-server-datasheet.pdf> (Accessed: 3rd September 2020).
10. Pereiral, T.D., Ferreira, M.G. & Kucinski, F.N. (2012) Using the PLUTO language on functional tests of a Brazilian Satellite's OnBoard Data Handling Computer. *Proc. SpaceOps Conference*. Vol. 1. Stockholm: Sweden. pp. 206–213.
11. Kudryashova, G.V. (2016) Application of simulators software during spacecraft on board equipment ground experimental testing. *Aktual'nye problemy aviatsii i kosmonavtiki*. 1(12). pp. 627–628.
12. Mironov, A.N., Mironov, E.A. & Shestopalova, O.L. (2016) Functioning quality prediction of the spacecrafts onboard equipment in the conditions of fuzzy information on operability area boundaries. *Informatsionno-ekonomicheskie aspekty standartizatsii i tekhnicheskogo regulirovaniya – Information and Economic Aspects of Standardization and Technical Regulation*. 4(32). pp. 1–10.
13. Litvinov, V.V. & Maryanovich, T.P. (1991) *Metody postroeniya imitatsionnykh sistem* [Methods of constructing imitation systems]. Kyiv: Naukova Dumka.
14. Isaeva, O.S. (2021) Technology of spacecraft onboard equipment design support. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 1047. Art. 012115. DOI: 10.1088/1757-899X/1047/1/012115.
15. GOST R 53802–2010. (2011) *Sistemy i kompleksy kosmicheskije. Terminy i opredeleniya* [Space Systems and Complexes. Terms and Definitions]. Moscow: Standartinform.
16. Rannev, G.G. (2010) *Izmeritel'nye informatsionnye sistemy* [Measuring Information Systems]. Moscow: Akademiya.
17. Nozhenkova, L.F., Isaeva, O.S. & Vogorovskiy, R.V. (2018) Command and Software Management Simulation for the Spacecraft Equipment Testing. *3rd Russian-Pacific Conf. on Computer Technology and Applications*. pp. 1–4. DOI: 10.1109/RPC.2018.8482182
18. Nozhenkova, L.F., Isaeva, O.S. & Koldyrev, A.Yu. (2018) Creation of the base of a simulation model's precedents for analysis of the spacecraft onboard equipment testing results equipment. *Advances in Intelligent Systems Research*. 151. pp. 78–81. DOI: 10.2991/cmsa-18.2018.18
19. Nozhenkova, L.F., Isaeva, O.S. & Gruzenko, E.A. (2015) Computer simulation of spacecraft onboard equipment. *ACSR-Advances in Computer Science Research*. 18. pp. 943–945. DOI: 10.2991/cisia-15.2015.255
20. Isaeva, O.S., Kulaysov, N.V. & Isaev, S.V. (2020) Method of structural and graphical analysis and verification of intellectual simulation model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 50. pp. 79–88. DOI: 10.17223/19988605/50/10

УДК 004.94 + 517.95  
DOI: 10.17223/19988605/57/4

**М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, И.И. Патрушев, А.С. Овчинникова**

**ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЦЕДУРЫ ГРУППИРОВАНИЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО  
МНОГОФАЗНОГО ПОТОКА В ВЫСОКОНЕОДНОРОДНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ  
ПОРИСТЫХ СРЕДАХ**

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках проекта FSUN-2020-0012 (разработка общей вычислительной схемы моделирования трехмерного многофазного потока) и РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90049 (построение и исследование процедуры группирования).*

Рассматривается проблема численного моделирования трехмерных многофазных нестационарных потоков в пористых средах применительно к задачам добычи углеводородов. Предлагается подход с неявным расчетом давления и явным переносом фаз и пересчетом насыщенных на конечных элементах. Для повышения эффективности конечные элементы разбиваются на группы, в которых производится пересчет их состояния с допустимым и наиболее близким к требуемому шагом по времени.

**Ключевые слова:** многофазная фильтрация в пористых средах; моделирование нефтегазовых месторождений; метод конечных элементов.

Современные программные комплексы численного 3D-моделирования процессов многофазной фильтрации в пористой среде широко используются при разработке нефтегазовых месторождений. Сложное строение коллекторов требует создания эффективных вычислительных схем, позволяющих проводить расчеты для моделей реальных месторождений с большим числом слоев, сильной неоднородностью среды и с большим количеством работающих скважин и зон перфораций. Успешность, а иногда и сама возможность решения таких важных для практики задач, как построение гидродинамических моделей месторождений путем решения обратных задач [1, 2] и синтез оптимального управления разработкой [3, 4], во многом зависит от эффективности вычислительных схем, применяемых при решении прямых задач.

Часто для решения задач фильтрации используют конечно-разностные численные схемы. В частности, подобные подходы используются в широко распространенных коммерческих симуляторах нефтедобычи, таких как Eclipse, Tempest и др. Однако многие авторы отмечают, что методы конечных разностей и конечных объемов обладают недостаточной геометрической гибкостью и недостаточной точностью при моделировании многофазных течений в высоконеоднородных средах [5, 6]. Публикуется довольно много работ, в которых для решения задач в сложных высоконеоднородных средах предлагается использовать различные модификации метода конечных элементов (МКЭ), например совместное использованием МКЭ и метода конечных объемов (FEFVM) [7, 8], mixed FEM и его специальные модификации (mixed hybrid FEM) [9–11]. Однако при использовании таких методов вычислительные затраты при решении ориентированных на практику задач нефтедобычи со сложной (многослойной латерально неоднородной) структурой среды и большим числом действующих скважин могут быть очень велики. Проблема снижения вычислительных затрат особенно актуальна при решении обратных задач, когда в процессе восстановления модели сложного месторождения требуется решать большое число соответствующих прямых задач.

В данной работе будет использован вариант МКЭ с непрерывными базисными функциями Гильбертова пространства функций с производными, суммируемыми с квадратом (Continuous Ga-

lerkin [2, 12]). Необходимая точность выполнения законов сохранения масс достигается за счет специальной процедуры балансировки потоков [13]. Данная вычислительная схема была верифицирована на тесте SPE-10 [14] и применялась при моделировании реальных месторождений высоковязкой нефти Республики Татарстан [2]. Повышение вычислительной эффективности для задач такого класса достигается в том числе и за счет использования специальных некомформных сеток [15], которые позволяют существенно сократить число степеней свободы в конечноэлементных аппроксимациях без увеличения погрешности численного решения. Свою эффективность предложенный подход показал при решении обратных задач [2] и при синтезе оптимального управления разработкой месторождения [4].

Принцип построения предлагаемой вычислительной схемы аналогичен принципу известных схем IMPES [16] и IMPES [10, 11] с конечноэлементным (неявным) расчетом давления и явным переносом фаз между ячейками конечноэлементной сетки на каждом временном шаге. Вычислительные затраты напрямую зависят от величины временного шага, дробление которого может потребоваться при большой неоднородности среды и сильно изменяющейся в пространстве скорости потока.

В данной работе будут представлены схема группирования конечных элементов по временному шагу и алгоритм моделирования перетоков фаз с учетом разбиения ячеек сетки на группы, позволяющие минимизировать количество вычислений поля давления, не понижая качества аппроксимации многофазного потока. В качестве теста использовалась задача сравнительного проекта SPE-10. Показана сходимость данного метода, проведены сравнение с данными участников проекта SPE-10, анализ затрат машинного времени и точности получаемых решений при разных временных шагах.

## 1. Математическая модель

В задачах моделирования месторождений расчет движения многофазной смеси выполняется в неоднородной пористой среде, которая характеризуется зависящими от пространственных координат тензором структурной проницаемости  $\mathbf{K}$  и пористостью  $\Phi$ . Скорость  $\vec{v}^m$  движения в пористой среде каждой фазы фильтрующейся смеси подчиняется закону Дарси:

$$\vec{v}^m = -\frac{\kappa^m}{\eta^m} \mathbf{K} \left( \text{grad}(P + P_c^m) + (0, 0, \rho^m g)^T \right),$$

где  $m$  – номер фазы,  $\vec{v}^m$  – скорость потока фазы,  $P$  – давление,  $P_c^m$  – капиллярное давление,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\kappa^m$  – коэффициент относительной фазовой проницаемости,  $\eta^m$  – динамическая вязкость,  $\rho^m$  – плотность фазы.

Распределение давления в расчетной области  $\Omega$  описывается краевой задачей [2]:

$$-\text{div} \left( \sum_{m=1}^{NP} \frac{\kappa^m}{\eta^m} \mathbf{K} \left( \text{grad}(P + P_c^m) + (0, 0, \rho^m g)^T \right) \right) = \sum_{m=1}^{NP} f^{m,\Omega}, \quad (1)$$

$$P|_{\Gamma^1} = P^\Gamma, \quad (2)$$

$$\sum_{m=1}^{NP} \frac{\kappa^m}{\eta^m} \mathbf{K} \left( \text{grad}(P + P_c^m) + (0, 0, \rho^m g)^T \right) \Big|_{\Gamma^2} \cdot \vec{n} = \sum_{m=1}^{NP} f^{m,\Gamma}. \quad (3)$$

Здесь  $NP$  – количество фаз. Функции  $f^{m,\Omega}$  соответствуют объемным источникам (стокам) фаз в расчетной области  $\Omega$ , возникающим, например, вследствие выделения / поглощения газа жидкими фазами, химических процессов или сжатия / расширения фаз при изменении давления.  $\Gamma^1$  – объединение тех границ расчетной области  $\Omega$ , где задано давление  $P^\Gamma$ , а  $\Gamma^2$  – объединение границ  $\Omega$ , где задан поток смеси  $f^\Gamma = \sum_{m=1}^{NP} f^{m,\Gamma}$ . Функция  $f^\Gamma$  не равна нулю на тех границах из  $\Gamma^2$ , которые соответствуют активным (в интервале времени  $\Delta t$ ) зонам перфорации. Остальные границы из  $\Gamma^2$  являются непроницаемыми (на них  $f^\Gamma = 0$ ).

Краевая задача (1)–(3) решается методом конечных элементов на шестигранных неконформных сетках [15]. По полученным значениям давления вычисляются объемы смеси, перетекающие через грани  $\Gamma_i$  конечных элементов  $\Omega_e$  за единицу времени:

$$Q_{\Gamma_i, \Omega_e} = - \int_{\Gamma_i} \left[ \sum_{m=1}^{NP} \frac{\kappa^m}{\eta^m} \mathbf{K} \left( \text{grad}(P + P_c^m) + (0, 0, \rho^m g)^T \right) \right] \cdot \vec{n}_{\Gamma_i, \Omega_e} d\Gamma,$$

где  $\vec{n}_{\Gamma_i, \Omega_e}$  – внешняя (по отношению к  $\Omega_e$ ) нормаль к  $\Gamma_i$ . Для внутренних граней  $\Gamma_i$  объем смеси, перетекающий за единицу времени из конечного элемента (ячейки)  $\Omega_e$  в смежную с ним по грани  $\Gamma_i$  ячейку  $\Omega_k$  ( $\Gamma_i = \Omega_e \cap \Omega_k$ ) определяется как взвешенное среднее объемов, перетекающих через эту границу на конечных элементах  $\Omega_e$  и  $\Omega_k$ :

$$Q_{\Gamma_i} = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_e} Q_{\Gamma_i, \Omega_e} + \frac{\lambda_e}{\lambda_k + \lambda_e} Q_{\Gamma_i, \Omega_k}. \quad (4)$$

Коэффициенты  $\lambda$  в (4) ( $\lambda_k$  для  $\Omega_k$  и  $\lambda_e$  для  $\Omega_e$ ) определяются как  $\lambda = \tilde{K} \sum_{m=1}^{NP} \frac{\kappa^m}{\eta^m}$ , где  $\tilde{K} = \vec{n}_{\Gamma_i}^T \mathbf{K} \vec{n}_{\Gamma_i}$ ,

т.е.  $\tilde{K}$  определяется по значению тензора  $\mathbf{K}$  на соответствующем конечном элементе.

Если для решения краевой задачи (1)–(3) применяется МКЭ с базисными функциями из  $\mathbf{H}^1$  (так называемый CG [12]), то получается численное решение, не гарантирующее сохранения масс веществ в фильтрующейся смеси [7, 17] (закон сохранения в этом случае лишь аппроксимируется с той или иной точностью в зависимости от подробности сетки). Поэтому мы используем специальный метод балансировки потоков [13], который корректирует перетекающие объемы  $Q_{\Gamma_i}$  таким образом, чтобы законы сохранения масс отдельных фаз (и их компонент) были выполнены с необходимой точностью. По сбалансированным потокам смеси  $\tilde{Q}_{\Gamma_i}$  осуществляются перетоки фаз через  $\Gamma_i$  и вычисляется новый фазовый состав в конечных элементах. Для этого определяются объемы фаз  $Q_{\Gamma_i}^m$ , перетекающих через грань  $\Gamma_i$  в единицу времени. В условиях, когда эффект гравитации или капиллярного давления является существенным, разные фазы могут перетекать через грань  $\Gamma_i$  в противоположных направлениях. С учетом этого алгоритм выполнения перетоков между конечными элементами выглядит следующим образом.

Для всех конечных элементов  $\Omega_e$  и принадлежащих им граней  $\Gamma_i$  вычисляются численные потоки фаз  $Q_{\Gamma_i, \Omega_e}^m$  по формуле

$$Q_{\Gamma_i, \Omega_e}^m = - \int_{\Gamma_i} \frac{\kappa^m}{\eta^m} \mathbf{K} \left( \text{grad}(P + P_c^m) + (0, 0, \rho^m g)^T \right) \cdot \vec{n}_{\Gamma_i, \Omega_e} d\Gamma. \quad (5)$$

Уравнение (5) определяет не только величину потока  $m$ -й фазы через грань  $\Gamma_i$ , но и его направление по отношению к конечному элементу  $\Omega_e$ . Фаза  $m$  вытекает из конечного элемента  $\Omega_e$ , если значение  $Q_{\Gamma_i, \Omega_e}^m$  положительное, и втекает при отрицательном значении. Численный поток фазы  $Q_{\Gamma_i}^m$  через грань  $\Gamma_i$  берется с подветренной стороны:

$$Q_{\Gamma_i}^m = \begin{cases} Q_{\Gamma_i, \Omega_e}^m & \text{если } Q_{\Gamma_i, \Omega_e}^m > 0, \\ Q_{\Gamma_i, \Omega_k}^m & \text{если } Q_{\Gamma_i, \Omega_e}^m < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Затем для граней  $\Gamma_i$  для каждой фазы вычисляются величины  $D_{\Gamma_i}^m$ , которые фактически определяют долю  $m$ -й фазы в потоке смеси через грань  $\Gamma_i$ :

$$D_{\Gamma_i}^m = \left| Q_{\Gamma_i}^m \right| / \sum_{n=1}^{NP} \left| Q_{\Gamma_i}^n \right|. \quad (7)$$

Далее мы корректируем численные потоки фаз  $Q_{\Gamma_i}^m$  таким образом, чтобы сумма потоков всех фаз была строго равна сбалансированному потоку смеси  $\tilde{Q}_{\Gamma_i}$ , перетекающему через грань  $\Gamma_i$ . Для этого вычислим разницу между численным и сбалансированным потоками смеси и распределим ее между потоками фаз пропорционально величинам  $D_{\Gamma_i}^m$ , т.е. перевычислим  $Q_{\Gamma_i}^m$  по формуле

$$Q_{\Gamma_i}^m = Q_{\Gamma_i}^m + \left( \tilde{Q}_{\Gamma_i} - \sum_{n=1}^{NP} Q_{\Gamma_i}^n \right) \cdot D_{\Gamma_i}^m. \quad (8)$$

Таким образом, объем  $m$ -й фазы  $V_{\Gamma_i}^m$ , который за время  $\Delta t$  перетекает через грань  $\Gamma_i$ , вычисляется с использованием по формуле

$$V_{\Gamma_i}^m = Q_{\Gamma_i}^m \cdot \Delta t, \quad (9)$$

и новые значения насыщенных на каждом элементе  $\Omega_e$  на конец шага по времени  $\Delta t$

$$\tilde{S}_{\Omega_e}^m = \left( S_{\Omega_e}^m \text{mes}(\Omega_e) \Phi + \Delta V_{\Omega_e}^m + \sum_{i \in I_{\Omega_e}^{\text{in},m}} V_{\Gamma_i}^m - \sum_{i \in I_{\Omega_e}^{\text{out},m}} V_{\Gamma_i}^m \right) / (\text{mes}(\Omega_e) \Phi), \quad (10)$$

где  $\text{mes}(\Omega_e)$  – объем ячейки  $\Omega_e$ ;  $\Delta V_{\Omega_e}^m$  – дефицит / профицит объема  $m$ -й фазы в конечном элементе  $\Omega_e$ , который может образоваться, например, в результате химических процессов или сжатия / расширения фаз при изменении давления;  $I_{\Omega_e}^{\text{out},m}$ ,  $I_{\Omega_e}^{\text{in},m}$  – множества номеров граней элемента  $\Omega_e$ , через которые  $m$ -я фаза вытекает из  $\Omega_e$  и, соответственно, втекает в  $\Omega_e$ .

На основе полученных значений  $\tilde{S}_{\Omega_e}^m$  вычисляются новые значения фазовых проницаемостей  $k_{\Omega_e}^m$  согласно заданным зависимостям  $k^m$  от насыщенных фаз. Затем осуществляется переход к следующему шагу по времени, на котором процедура повторяется, начиная с расчета давления.

Теперь более подробно остановимся на выборе временного шага  $\Delta t$ . Кроме того, что он непосредственно влияет на точность аппроксимации по времени, его значение должно быть ограничено величиной объема фаз в ячейках, из которых эти фазы вытекают. Шаг  $\Delta t$  должен быть таким, чтобы в каждой ячейке суммарный вытекающий объем фазы  $m$  не превышал имеющийся объем подвижной фазы в ней. Это естественное условие определяет его предельное (максимальное) значение:

$$\Delta t \leq \left( (S_{\Omega_e}^m - S_{\Omega_e}^{m,\text{res}}) \text{mes}(\Omega_e) \Phi + \Delta V_{\Omega_e}^m \right) / \sum_{i \in I_{\Omega_e}^{\text{out},m}} |Q_{\Gamma_i}^m|, \quad \forall \Omega_e, \quad \forall m, \quad (11)$$

где  $S_{\Omega_e}^{m,\text{res}}$  – остаточная насыщенность фазы  $m$  в ячейке  $\Omega_e$ .

Таким образом, временной шаг  $\Delta t$  зависит от размеров конечных элементов, пористости, величин  $S_{\Omega_e}^m$  и потоков фаз  $V_{\Gamma_i}^m$ , перетекающих через грани конечных элементов, и для тех элементов, размеры которых невелики и / или через которые перетекают большие потоки, шаг  $\Delta t$  может быть очень маленьким. И если такой шаг использовать для обработки всех ячеек, затраты машинного времени на осуществление перетоков фаз могут быть очень большими.

## 2. Группирование конечных элементов и алгоритм расчета перетоков фаз

В данной работе при выполнении процедуры перетока фаз между ячейками мы будем распределять ячейки конечноэлементной сетки по группам, в каждой из которых может быть использован свой временной шаг, удовлетворяющий критерию (11). Данная процедура позволит выбрать некоторый глобальный временной шаг  $\Delta t^{\text{main}}$ , определяемый требованиями к качеству аппроксимации по времени и не зависящий от объемов фаз в отдельных ячейках.

Обозначим через  $I_g$  множество номеров конечных элементов, определяющих группу ячеек  $G_g = \{\Omega_e, e \in I_g\}$ , для которых величина временного шага  $\Delta t_{G_g}$  определяется соотношением  $\Delta t_{G_g} = \Delta t^{main} / 2^{g-1}$ , т.е. шаг по времени для первой группы ( $G_1$ ) равен  $\Delta t^{main}$ , а шаг по времени каждой группы  $G_g$  для  $g > 1$  в  $2^{g-1}$  раза меньше  $\Delta t^{main}$ . Количество таких групп обозначим  $N^G$ .

Для того, чтобы распределить ячейки  $\Omega_e$  по группам, для каждой  $m$ -й фазы в ячейке  $\Omega_e$  согласно условию (11) определяем временной шаг, являющийся допустимым для этой фазы:

$$\Delta t_{m,\Omega_e} = \left( (S_{\Omega_e}^m - S_{\Omega_e}^{m,res}) \text{mes}(\Omega_e) \Phi + \Delta V_{\Omega_e}^m \right) / \sum_{i \in I_{\Omega_e}^{out,m}} |Q_{\Gamma_i}^m|. \quad (12)$$

Номер группы для конечного элемента  $\Omega_e$  выбирается из условия

$$\min \left\{ g : \Delta t_{G_g} \leq \min_m \Delta t_{m,\Omega_e} \right\}. \quad (13)$$

Перенос фаз между ячейками осуществляется следующим образом. Обработка ячеек начинается с группы с самым большим номером  $g = N^G$  (т.е. с самым маленьким шагом по времени). Делается два шага по времени  $\Delta t_{G_g}$  для всех ячеек этой группы. Затем делается один шаг по времени для ячеек группы с номером  $g = N^G - 1$ , после чего опять делается два шага по времени для ячеек группы с номером  $N^G$ . Далее делается еще один шаг по времени для ячеек с номером группы  $g = N^G - 1$ . После этой второй обработки данной группы делается первый шаг обработки группы с номером  $g = N^G - 2$  и опять осуществляется возврат к обработке группы с номером  $g = N^G$ .

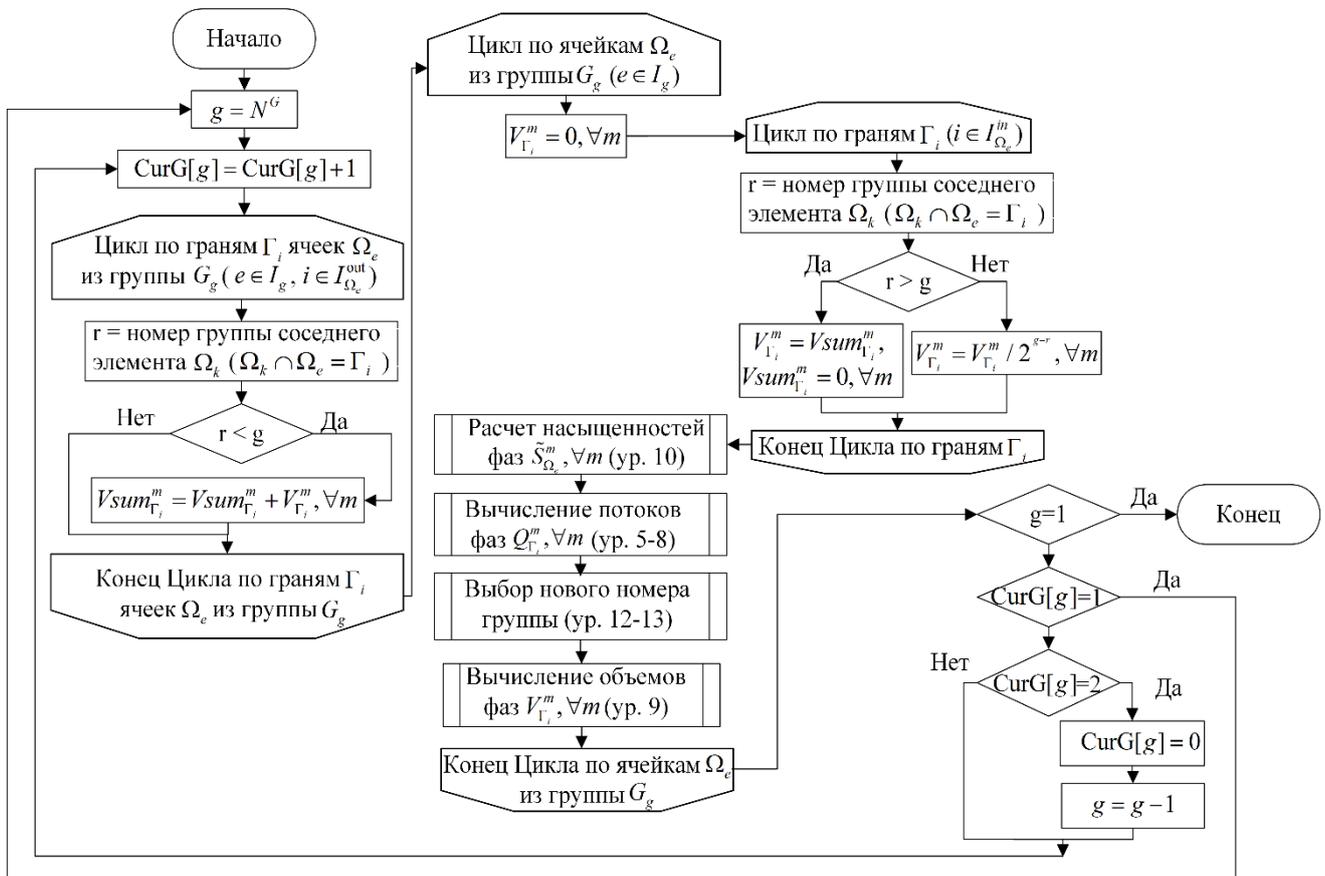


Рис. 1. Алгоритм, реализующий расчет перетоков фаз  
Fig. 1. Algorithm of phase transport

Таким образом, после первой обработки каждой группы с номером  $g$  осуществляется возврат к обработке ячеек группы с номером  $N^G$  (и далее до группы  $g$ ), а после второй обработки группы с номером  $g$  осуществляется переход к группе  $g-1$  (с обнулением счетчиков  $CurG$  обработки групп с большими номерами). Алгоритм завершается после обработки группы с номером 1 (т.е. группы с самым большим шагом  $\Delta t_{G_g}$ ). Обработка ситуации, когда фазы перетекают между ячейками из разных групп, осуществляется следующим образом. Прежде всего отметим, что при вычислении перетекающих объемов фаз  $V_{\Gamma_i}^m$  по формуле (9) всегда используется шаг  $\Delta t_{G_g}$  группы того элемента, из которого вытекает поток  $Q_{\Gamma_i}^m$ . При пересчете насыщенностей в ячейках это позволяет использовать вытекающие из них объемы фаз  $V_{\Gamma_i}^m$  без изменений. А втекающие объемы вычисляются в зависимости от того, какой группе принадлежит соседний элемент, из которого фазы перетекают в обрабатываемую ячейку. Таким образом, если при обработке некоторого конечного элемента из группы  $G_g$  через одну из его граней втекала фаза из ячейки группы с меньшим или равным номером  $r$ , то перетекающий объем  $V_{\Gamma_i}^m$  делится на  $2^{g-r}$ , чтобы учесть разницу во временных шагах. Если же в элемент из группы  $G_g$  втекает фаза из ячейки группы с большим номером  $r$ , то используется ранее накопленное значение перетекающего объема  $Vsum_{\Gamma_i}^m$ , которое было получено в ходе предыдущих обработок ячейки группы с номером  $r$ .

Алгоритм, реализующий процедуру перетоков смеси для расчета нового состояния ячеек с учетом группирования, изображен на рис. 1.

### 3. Численные эксперименты

Продемонстрируем работоспособность и эффективность процедуры группирования на примере десятой тестовой задачи из сравнительного проекта SPE, рассмотренной в [14]. Модель представляет собой куб с размерами  $1200 \times 2200 \times 170$  фут<sup>3</sup> ( $365,76 \times 670,56 \times 51,816$  м<sup>3</sup>), в углах которого расположены четыре добывающие скважины (P1–P4), а в центре находится нагнетательная скважина. Добывающие скважины работают при заданном в них давлении 272 атмосферы, а нагнетательная скважина закачивает 5 000 баррелей воды в сутки. Исходная модель содержит 85 слоев и характеризуется высокой неоднородностью структурной проницаемости и пористости. Значения параметров задачи заданы на регулярной сетке, содержащей 1 122 000 ячеек ( $60 \times 220 \times 85$  ячеек), и варьируют в диапазоне от  $6,65 \cdot 10^{-4}$  до 20 000 мД для коэффициентов тензора проницаемости и в диапазоне от  $1,4 \cdot 10^{-6}$  до 0 для пористости.

Для этой модели была выполнена предварительная обработка с укрупнением ячеек сетки по вертикали (upscaling). В результате расчет проводился на сетке из 244 052 ячеек. Время жизни «месторождения» – 2 000 суток.

Для оценки эффективности предлагаемого нами подхода с группированием ячеек была проведена серия расчетов с разными временными шагами  $\Delta t^{main}$ , равными 100, 50, 20, 10, 5, и 1 сут. Также был проведен расчет без использования процедуры группирования. В нем расчет давления выполнялся с шагом  $\Delta t = 20$  суток, а перетоки фаз – с одинаковым для всех ячеек временным шагом, удовлетворяющим условию (11). На рис. 2 представлены соответствующие результаты для скважин P1 и P3 (рис. 3): дебит нефти в баррелях (см. рис. 2, а) и обводненность (см. рис. 2, б) для шагов  $\Delta t^{main}$ , равных 100, 50, 20 и 1 сут. Очевидно, с дроблением шага по времени наблюдается сходимость. Данные дебита нефти на скважине P3 при шаге  $\Delta t^{main}$  на шагах 20, 10 и 5 сут отличаются от значений при  $\Delta t^{main} = 1$  сутки в среднем на 2, 1 и 0,5% соответственно, а на скважине P1 – 1, 0,5 и 0,2%. Также от-

метим, что дебит нефти при расчете с шагом  $\Delta t^{main}=1$  сут очень хорошо совпадал с результатами, полученными без применения процедуры группирования. Аналогичная картина сходимости наблюдается и для обводненности добываемой смеси.

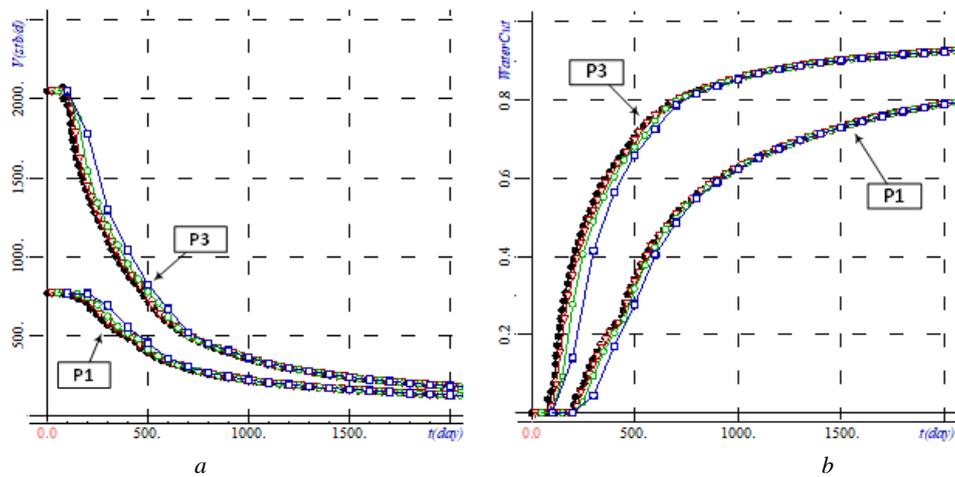


Рис. 2. Графики дебита нефти (а) и обводненности (б) для расчетов с различными  $\Delta t^{main}$ : квадрат – 100 сут, незакрашенный круг – 50 суток, треугольник – 20 суток, закрашенный круг – 1 сутки

Fig. 2. Oil rate (a) and water cut (b) curves for calculation with different  $\Delta t^{main}$ : square – 100 days, open circle – 50 days, triangle – 20 days, filled circle – 1 day

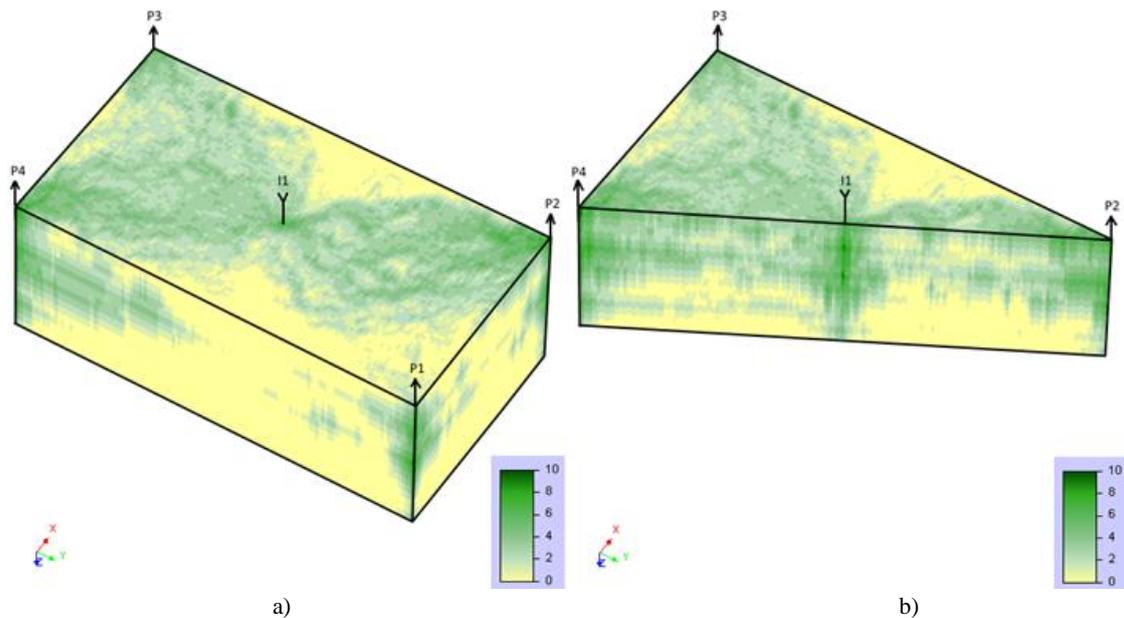


Рис. 3. Распределение ячеек по группам (зеленый цвет – группа с большим номером, желтый цвет – с меньшим)  
 Fig. 3. Distribution of cells into groups (green is the group with a higher number, yellow is the group with a lower number)

**Временные затраты для расчетов с различным шагом  $\Delta t^{main}$**

$\Delta t^{main}$ , сут	Количество групп	Расчет давления	Расчет потоков	Расчет перетоков	Общее время расчета
1	8	13 ч 56 мин	1 ч 55 мин	1 ч 14 мин	17 ч 37 мин
5	10	2 ч 40 мин	24 мин	31 мин	3 ч 42 мин
10	11	1 ч 25 мин	13 мин	29 мин	2 ч 12 мин
20	12	43 мин	7 мин	27 мин	1 ч 20 мин
50	14	17 мин	3 мин	26 мин	48 мин
100	15	8 мин	2 мин	26 мин	38 мин
Без группирования		43 мин	6 мин	66 ч 46 мин	84 ч 31 мин

В таблице приведены вычислительные затраты основных процедур описанной вычислительной схемы. На каждом временном шаге  $\Delta t^{main}$  производится решение двух СЛАУ: первой – при решении краевой задачи (1)–(3) методом конечных элементов (размер СЛАУ определяется количеством узлов сетки), второй – в ходе выполнения процедуры балансировки для расчета потоков смеси (размер этой СЛАУ определяется количеством граней [13]). Для решения обоих СЛАУ применялся прямой решатель PARDISO из библиотеки Intel MKL.

Сопоставляя погрешность по времени с вычислительными затратами при различных значениях  $\Delta t^{main}$ , можно считать оптимальным значение  $\Delta t^{main} = 20$  суток. Для этого расчета на рис. 3 приведено распределение ячеек по группам на конец расчета, где желтый цвет соответствует группе с наименьшим номером (шаг по времени  $\Delta t_{G_g} = 20$  сут), а темно-зеленый цвет соответствует ячейкам из группы с наибольшим номером (шаг по времени  $\Delta t_{G_g} = 28$  мин). Из рисунка видно, что ячейки, расположенные вдоль основных направлений течения (от нагнетательной скважины П к добывающим Р1, Р2, Р3, Р4) и в зонах повышенной проницаемости, попадают в группы с большими номерами, и основные вычислительные затраты при расчете перетоков приходятся на них. Если же не использовать процедуру группирования, то затраты машинного времени составляют порядка 85 час из-за условия Куранта–Фридрихса–Леви (CFL) и связанной с ним необходимости задания довольно мелкого шага по времени для выполнения процедуры перетоков фаз ( $\Delta t$  примерно 20–30 мин).

### Заключение

Рассмотрена вычислительная схема моделирования многофазных потоков в пористых средах при решении задач нефтедобычи. Схема основана на неявном расчете давления с использованием МКЭ, балансировке численных потоков смеси и явном переносе фаз между конечными элементами. Предложена процедура группирования и основанный на ней алгоритм переноса фаз, позволяющие выполнять пересчет насыщенностей в ячейках с разными шагами по времени в зависимости от скорости течения и объема фаз в них. Тем самым устраняется необходимость использования слишком мелких шагов по времени из-за возможного нарушения условия CFL на отдельных ячейках, и резко снижаются вычислительные затраты без ущерба точности получаемого решения.

Эффективность предложенной процедуры группирования и алгоритма переноса фаз продемонстрирована на тесте SPE-10, в котором нефтедобыча моделируется в высоконеоднородной среде. Для этой задачи проведенные вычислительные эксперименты показали, что за счет использования предложенной процедуры группирования время счета сокращается примерно на полтора порядка без снижения точности получаемого решения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Bukshtynov V., Volkov V., Durlofsky O., Aziz K. Comprehensive framework for gradient-based optimization in closed-loop reservoir management // *Comput. Geosci.* 2015. V. 19, № 4. P. 877–897.
2. Persova M.G., Soloveichik Yu.G., Vagin D.V., Grif A.M., Kiselev D.S., Patrushev I.I., Nasybullin A.V., Ganiev B.G. The design of high-viscosity oil reservoir model based on the inverse problem solution // *J. Pet. Sci. Eng.* 2021. V. 199. Art. 108245.
3. Ni H.M., Liu Y.J., Fan Y.C. Optimization of injection scheme to maximizing cumulative oil steam ratio based on improved artificial bee colony algorithm // *J. Pet. Sci. Eng.* 2019. V. 173. P. 371–380.
4. Persova M.G., Soloveichik Yu.G., Vagin D.V., Grif A.M., Patrushev I.I., Ovchinnikova A.S. Oil production optimization based on the finite-element simulation of the multi-phase flow in porous media and inverse problem solution // *Irkutsk: GeoBaikal 2020 (EAGE)*. 2020. V. 2020, № 1. P. 1–6.
5. Doyle B., Riviere B., Sekachev M. A multinumercs scheme for incompressible two-phase flow // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2020. V. 370. Art. 113213.
6. Abd A.S., Abushaikh A. Velocity dependent up-winding scheme for node control volume finite element method for fluid flow in porous media // *Sci. Rep.* 2020. V. 10. Art. 4427.
7. Schmid K.S., Geiger S., Sorbie K.S. Higher order FE-FV method on unstructured grids for transport and two-phase flow with variable viscosity in heterogeneous porous media // *J. Comput. Phys.* 2013. V. 241. P. 416–444.

8. Abushaikh A.S., Blunt M.J., Gosselin O.R., Pain C.C., Jackson M.D. Interface control volume finite element method for modelling multi-phase fluid flow in highly heterogeneous and fractured reservoirs // *J. Comput. Phys.* 2015. V. 298. P. 41–61.
9. Zhang N., Yan B., Sun Q., Wang Y. Improving multiscale mixed finite element method for flow simulation in highly heterogeneous reservoir using adaptivity // *J. Pet. Sci. Eng.* 2017. V. 154. P. 382–388.
10. Moortgat J., Firoozabadi A. Higher-order compositional modeling of three-phase flow in 3D fractured porous media based on cross-flow equilibrium // *J. Comput. Phys.* 2013. V. 250. P. 425–445.
11. Amooie M.A., Moortgat J. Higher-order black-oil and compositional modeling of multiphase compressible flow in porous media // *Int. J. Multiph. Flow.* 2018. V. 105. P. 45–59.
12. Scovazzi G., Wheeler M.F., Mikelić A., Lee S. Analytical and variational numerical methods for unstable miscible displacement flows in porous media // *J. Comput. Phys.* 2017. V. 335. P. 444–496.
13. Persova M.G., Soloveichik Yu.G., Grif A.M., Patrushev I.I. Flow Balancing in FEM Modelling of Multi-Phase Flow in Porous Media // *Novosibirsk: 2018 XIV Int. Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE)*. 2018. P. 205–211.
14. Christie M.A., Blunt M.J. Tenth SPE comparative solution project: A comparison of upscaling techniques // *SPE Reservoir Evaluation and Engineering*. 2001. V. 4, № 4. P. 308–316.
15. Persova M.G., Soloveichik Y.G., Vagin D.V., Kiselev D.S., Koshkina Yu.I. Finite element solution to 3-D airborne time-domain electromagnetic problems in complex geological media using non-conforming hexahedral meshes // *J. Appl. Geophys.* 2020. V. 172. Art. 103911.
16. Chen H., Kou J., Sun S., Zhang T. Fully mass-conservative IMPES schemes for incompressible two-phase flow in porous media // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2019. V. 350. P. 641–663.
17. Zhang R.H., Zhang L.H., Luo J.X., Yang Z.D., Xu M.Y. Numerical simulation of water flooding in natural fractured reservoirs based on control volume finite element method // *J. Pet. Sci. Eng.* 2016. V. 146. P. 1211–1225.

Поступила в редакцию 21 мая 2021 г.

Persova M.G., Soloveichik Yu.G., Patrushev I.I., Ovchinnikova A.S. (2021) APPLICATION OF THE FINITE ELEMENT GROUPING PROCEDURE TO IMPROVE THE EFFICIENCY OF UNSTEADY MULTIPHASE FLOW SIMULATION IN HIGH-HETEROGENEOUS 3D POROUS MEDIA. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 57. pp. 34–44

DOI: 10.17223/19988605/57/4

The problem of three-dimensional modeling of oil production in highly heterogeneous reservoirs is considered. A semi-implicit scheme similar to IMPES or IMPEC is used for modeling. The proposed approach is based on implicit calculation of pressure using finite element method (Continuous Galerkin with flow balancing), and explicit phase transport and recalculation of their saturations on finite elements. High computational efficiency is achieved due to the division of finite elements into groups, in which an explicit recalculation of their state (new saturation values after phase transport) is performed with its own (for each group) allowable time step closest to the required.

The cells  $\Omega_e$  of the finite element mesh are divided into groups as follows. Let  $\Delta t^{main}$  be the time step determined only by the requirements of the approximation quality and not depending on the volume of the phases flowing between the finite elements.

Let us denote by  $I_g$  the set of numbers of finite elements defining a group  $G_g = \{\Omega_e, e \in I_g\}$  of cells for which the value of the time step  $\Delta t_{G_g}$  is determined by the ratio  $\Delta t_{G_g} = \Delta t^{main} / 2^{g-1}$ , i.e. the time step of each group  $G_g$  is  $2^{g-1}$  times less than the “global” step  $\Delta t^{main}$ . The number of groups will be denoted as  $N^G$ .

We divide the finite elements into groups so that there is enough of each  $m$ -th phase in  $\Omega_e$  for its transport. To do this, for each finite element and all phases present in it, the time step is determined as:

$$\Delta t_{m,\Omega_e} = \left( (S_{\Omega_e}^m - S_{\Omega_e}^{m,res}) \text{mes}(\Omega_e) \Phi + \Delta V_{\Omega_e}^m \right) / \sum_{i \in I_{\Omega_e}^{out,m}} |Q_{\Gamma_i}^m|,$$

where  $S_{\Omega_e}^m$  and  $S_{\Omega_e}^{m,res}$  are the saturation and residual saturation of the  $m$ -th phase in the cell  $\Omega_e$ , respectively;  $\text{mes}(\Omega_e)$  is the volume of  $\Omega_e$ ;  $\Phi$  is the porosity;  $\Delta V_{\Omega_e}^m$  is deficit/surplus of the  $m$ -th phase in the cell  $\Omega_e$ , which appears, for example, due to gas dissolution/evolution, compression/expansion of phases caused by pressure changes, or as a result of chemical processes;  $I_{\Omega_e}^{out,m}$  is the set of numbers of element faces through which the  $m$ -th phase flows out of  $\Omega_e$ ,  $Q_{\Gamma_i}^m$  is the flow of the  $m$ -th phase through the face  $\Gamma_i$ .

The group number for the finite element  $\Omega_e$  is chosen from the condition

$$\min \left\{ g : \Delta t_{G_g} \leq \min_m \Delta t_{m,\Omega_e} \right\}.$$

Phase flows from one cell to another in accordance with step  $\Delta t_{G_g}$  increase. First the cells from the groups with larger numbers  $g$  are processed. The transition to the group with a lower number  $g$  is carried out when such a number of steps have been passed in the groups with higher numbers that their sum has reached the values  $\Delta t_{G_g}$ . For this, after processing each group with the number  $g$ , the transition is made either to the group with the number  $g - 1$ , if the accumulated time step has reached the value  $\Delta t_{G_{g-1}}$ , or to the group with the number  $g = N^G$ .

The situations in which the phases flow between cells from different groups are processed as follows. First of all+ we note that when calculating the flowing phase volumes  $V_{\Gamma_i}^m$  we use the group step  $\Delta t_{G_g}$  of the element the phase flows out from. This makes it possible to use the phase volumes  $V_{\Gamma_i}^m$  flow out of these cells without changes when recalculating the saturations in the cells. And the inflowing volumes are calculated depending on the group number of the neighboring element the phases flow into the processed cell from.

Thus, when processing some finite element from the  $g$ -th group, if a phase inflows through one of its faces from a cell of the group with a smaller or equal number  $r$ , then the flowing volume  $V_{\Gamma_i}^m$  is divided by  $2^{g-r}$  to take into account the difference between the time steps. On the other hand, if a phase flows into an element of the  $g$ -th group from the cell of the group with a larger number  $r$ , then we use the previously accumulated value  $Vsum_{\Gamma_i}^m$  of the flowing volume, which has been obtained as the result of the previous processing of the cell from the group with the number  $r$ .

Computational experiments were carried out using the SPE-10 model. The obtained results indicated that for this problem the computational costs can be reduced by one and half orders due to the grouping of finite elements and the use of own allowable steps in groups.

Keywords: multiphase flow in porous media; modeling of oil and gas fields; finite element method.

*PERSOVA Marina Gennadievna* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation).

E-mail: persova@ami.nstu.ru

*SOLOVEICHIK Yuri Grigorievich* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation).

E-mail: soloveychik@ami.nstu.ru

*PATRUSHEV Ilya Igorevich* (Post-graduate Student, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation).

E-mail: patrushev@ami.nstu.ru

*OVCHINNIKOVA Anastasia Sergeevna* (Post-graduate Student, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation).

E-mail: ovchinnikova.2014@stud.nstu.ru

## REFERENCES

1. Bukshtynov, V., Volkov, V., Durlafsky, O. & Aziz, K. (2015) Comprehensive framework for gradient-based optimization in closed-loop reservoir management. *Computer & Geosciences*. 19(4). pp. 877–897. DOI: 10.1007/s10596-015-9496-5
2. Persova, M.G., Soloveichik, Yu.G., Vagin, D.V., Grif, A.M., Kiselev, D.S., Patrushev, I.I., Nasybullin, A.V. & Ganiev, B.G. (2021) The design of high-viscosity oil reservoir model based on the inverse problem solution. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 199. Art. 108245. DOI: 10.1016/j.petrol.2020.108245
3. Ni, H.M., Liu, Y.J. & Fan, Y.C. (2019) Optimization of injection scheme to maximizing cumulative oil steam ratio based on improved artificial bee colony algorithm. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 173. pp. 371–380. DOI: 10.1016/j.petrol.2018.10.032
4. Persova M.G., Soloveichik Yu.G., Vagin D.V., Grif A.M., Patrushev I.I. & Ovchinnikova A.S. (2020) Oil production optimization based on the finite-element simulation of the multi-phase flow in porous media and inverse problem solution. *Irkutsk: GeoBaikal 2020 (EAGE)*. 2020 (1). pp. 1–6. DOI: 10.3997/2214-4609.202052021
5. Doyle, B., Riviere, B. & Sekachev, M. (2020) A multinumerics scheme for incompressible two-phase flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 370. Art.113213. DOI: 10.1016/j.cma.2020.113213
6. Abd, A.S. & Abushaikh, A. (2020) Velocity dependent up-winding scheme for node control volume finite element method for fluid flow in porous media. *Scientific Reports*. 10. Art. 4427. DOI: 10.1038/s41598-020-61324-4
7. Schmid, K.S., Geiger, S. & Sorbie, K.S. (2013) Higher order FE-FV method on unstructured grids for transport and two-phase flow with variable viscosity in heterogeneous porous media. *Journal of Computational Physics*. 241. pp. 416–444. DOI: 10.1016/j.jcp.2012.12.017

8. Abushaikha, A.S., Blunt, M.J., Gosselin, O.R., Pain, C.C. & Jackson, M.D. (2015) Interface control volume finite element method for modelling multi-phase fluid flow in highly heterogeneous and fractured reservoirs. *Journal of Computational Physics*. 298. pp. 41–61. DOI: 10.1016/j.jcp.2015.05.024
9. Zhang, N., Yan, B., Sun, Q. & Wang, Y. (2017) Improving multiscale mixed finite element method for flow simulation in highly heterogeneous reservoir using adaptivity. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 154. pp. 382–388. DOI: 10.1016/j.petrol.2017.04.012
10. Moortgat, J. & Firoozabadi, A. (2013) Higher-order compositional modeling of three-phase flow in 3D fractured porous media based on cross-flow equilibrium. *Journal of Computational Physics*. 250. pp. 425–445. DOI: 10.1016/j.jcp.2013.05.009
11. Amooie, M.A. & Moortgat, J. (2018) Higher-order black-oil and compositional modeling of multiphase compressible flow in porous media. *International Journal of Multiphase Flow*. 105. pp. 45–59. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.03.016
12. Scovazzi, G., Wheeler, M.F., Mikelić, A. & Lee, S. (2017) Analytical and variational numerical methods for unstable miscible displacement flows in porous media. *Journal of Computational Physics*. 335. pp. 444–496. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.01.021
13. Persova, M.G., Soloveichik, Yu.G., Grif, A.M. & Patrushev, I.I. (2018) Flow Balancing in FEM Modelling of Multi-Phase Flow in Porous Media. *Novosibirsk: 2018 XIV Int. Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE)*, pp. 205–211. DOI: 10.1109/APEIE.2018.8545457
14. Christie, M.A. & Blunt, M.J. (2001) Tenth SPE comparative solution project: A comparison of upscaling techniques. *SPE Reservoir Evaluation and Engineering*. 4(4). pp. 308–316. DOI: 10.2118/66599-MS
15. Persova, M.G., Soloveichik, Y.G., Vagin, D.V., Kiselev, D.S. & Koshkina, Yu.I. (2020) Finite element solution to 3-D airborne time-domain electromagnetic problems in complex geological media using non-conforming hexahedral meshes. *Journal of Applied Geophysics*. 172. Art. 103911. DOI: 10.1016/j.jappgeo.2019.103911
16. Chen, H., Kou, J., Sun, S. & Zhang, T. (2019) Fully mass-conservative IMPES schemes for incompressible two-phase flow in porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 350. pp. 641–663. DOI: 10.1016/j.cma.2019.03.023
17. Zhang, R.H., Zhang, L.H., Luo, J.X., Yang, Z.D. & Xu, M.Y. (2016) Numerical simulation of water flooding in natural fractured reservoirs based on control volume finite element method. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 146. pp. 1211–1225. DOI: 10.1016/j.petrol.2016.08.024

УДК 519.6

DOI: 10.17223/19988605/57/5

**Б.Х. Хайиткулов****КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ  
УПРАВЛЕНИЯ КОНВЕКЦИЕЙ-ДИФФУЗИЕЙ***Работа выполнена при финансовой поддержке фонда УзФФИ № ОТ-Ф4-33.*

Рассмотрена задача поддержания температуры в стержне в определенных пределах за счет оптимального расположения источников тепла. В качестве модели используется уравнение конвекции-диффузии, для которого построены неявные конечно-разностные схемы решения. Для решения задачи управления конвекцией-диффузией используется задача линейного программирования. Разработаны алгоритмы и программное обеспечение для численного моделирования. Представлены результаты вычислительного эксперимента.

**Ключевые слова:** нестационарные задачи; оптимальный выбор; плотность источников тепла; уравнения конвекции-диффузии; моделирование.

Задача оптимального размещения источников тепла в отапливаемых помещениях всегда была актуальной в строительстве, металлургии, проектировании теплиц и других областях техники и технологий.

В работе [1] предложено решение задачи оптимального размещения источников в неоднородных средах, скалярные стационарные поля в которых описываются эллиптическими уравнениями. В основу алгоритмов решения задачи положены способы оценки значений функционала на множестве возможных мест размещения источников, что дает возможность выбора оптимального варианта путем реализации метода ветвей и границ. В [2] рассмотрены задачи оптимального нагрева помещения на основе принципа максимума Понтрягина. Работа [3] посвящена задаче энергоэффективного теплоснабжения здания в системе центрального отопления. В [4] исследована дифференциально-разностная задача управления процессом диффузии, получен аналог принципа максимума, позволяющий определить моменты включения и выключения источника максимальной мощности.

В работах [5, 6] разработаны метод и алгоритм решения нестационарной задачи об оптимальном выборе плотности источников тепла на простых геометрических областях так, чтобы температура внутри рассматриваемой области находилась в заданных пределах. При этом источники тепла обеспечивали заданный температурный режим минимальной суммарной мощности и температуру в заданном коридоре, заполненном однородной или неоднородной средой. В работе [7] рассмотрена краевая задача параболического типа. Распределение тепла в рассматриваемом теле контролируется функцией, которая находится на границе тела.

В работе [8] численно решается уравнение конвекции-диффузии в двумерной геометрии для моделирования теплопередачи. Проведено тестирование и получены результаты для случаев граничных условий трех типов. Отметим, также, что в [9–11] рассмотрены численные схемы с явным конвективным и неявным диффузионным переносом.

В данной работе исследуется задача управления конвекцией-диффузией на основе оптимизации линейного целевого функционала с учетом ограничений, которая решается на основе аппроксимации и сведения к задаче линейного программирования. Предлагаются методика и алгоритм решения нестационарной задачи поддержания температуры внутри области в заданных пределах путем оптимального размещения источников тепла в стержне. Для проведения вычислительных экспериментов разработано программное обеспечение.

### 1. Постановка задачи и ее конечномерная аппроксимация

Пусть  $D = \{a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\}$  – прямоугольник. Требуется определить функцию  $f(x, t) \geq 0$ , доставляющую при каждом  $t \in [0, T]$  минимум линейному функционалу

$$J\{f\} = \int_a^b f(x, t) dx \rightarrow \min \quad (1)$$

при следующих условиях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \chi(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v(x) \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \quad a < x < b, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad a \leq x \leq b, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u(a, t) &= \mu_1(t), \quad u(b, t) = \mu_2(t), \quad 0 < t \leq T, \\ m(x, t) &\leq u(x, t) \leq M(x, t), \quad (x, t) \in D. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $u = u(x, t)$  – температура стержня в точке  $x$  в момент времени  $t$ ;  $\chi(x) > 0$  – коэффициент теплопроводности диффузии;  $v(x)$  – компоненты скорости конвекции;  $f(x, t)$  – плотность источников тепла;  $u_0(x)$ ,  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$ ,  $m(x, t)$ ,  $M(x, t)$  – заданные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям сопряжения  $\mu_1(0) = u_0(a)$ ,  $\mu_2(0) = u_0(b)$ . Функции  $m(x, t)$ ,  $M(x, t)$  имеют смысл функций минимального и максимального профиля температуры в области  $D$  соответственно. Плотность источников тепла описывается квадратично интегрируемой функцией  $f(x, t)$  в пространстве  $L_2(D)$ .

В такой математической постановке данная задача на равномерной сетке решается методом конечных разностей. Далее условия (2) заменяются на конечно-разностные аналоги, при этом используется неявная схема.

Введем в  $D$  равномерную по обеим переменным разностную сетку  $\bar{\omega}_{ht} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j)\}$ :  $x_i = ih$ ,  $t_j = j\tau$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_1$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_2$  с шагами  $h = (b - a) / N_1$ ,  $\tau = T / N_2$ .

Неявная разностная схема для задачи (2) имеет вид [10]:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \chi_i \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + v_i \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2h} + f_i^{j+1}, \\ i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \\ u_0^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \\ u_{N_1}^{j+1} = \mu_2(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $\chi_i = \chi(x_i)$ ,  $v_i = v(x_i)$ ,  $f_i^{j+1} = f(x_i, t_{j+1})$ . Оператор  $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \chi(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v(x) \frac{\partial u}{\partial x}$  с начальными и краевыми условиями будет самосопряженным положительно определенным в  $L_2(D)$ . Это означает, что он имеет ограниченный обратный оператор  $G = L^{-1}$ . Тогда можно переформулировать задачу (1)–(3) как задачу минимизации функционала (1) при следующих условиях на плотность источников:

$$f(\cdot, \cdot) \in L_2(D), \quad f(x, t) \geq 0, \quad m(x, t) \leq (Gf)(x, t) \leq M(x, t). \quad (5)$$

Введем обозначения

$$X = \left( \frac{1}{\tau} + \frac{2\chi_i}{h^2} \right), \quad X^+ = \left( -\frac{\chi_i}{h^2} + \frac{v_i}{2h} \right), \quad X^- = \left( -\frac{\chi_i}{h^2} - \frac{v_i}{2h} \right).$$

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} X & X^+ & \dots & \dots & 0 \\ X^- & X & X^+ & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & X^- & X & X^+ \\ 0 & \dots & \dots & X^- & X \end{bmatrix}.$$

Получаем

$$G = A^{-1}.$$

Построим конечномерную аппроксимацию (1)–(5) в виде задачи линейного программирования.

Разобьем область  $D$  по  $x$  на  $N_1$  и по  $t$  на  $N_2$  равных частей:  $D = \bigcup_{j=1}^{N_2} \bigcup_{i=1}^{N_1} D_i^j$ , где

$D_i^j = \{(x, t), x_{i-1} \leq x \leq x_i, t_{j-1} \leq t \leq t_j\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_1$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_2$ . Обозначим через  $S_{N_1}^{N_2}(D)$  подпространство пространства  $L_2(D)$ , в котором определены кусочно-постоянные функции вида  $f(x, t) = f_i^j$ ,  $(x, t) \in D_i^j$  ( $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_2$ ). Введем в  $S_{N_1}^{N_2}(D)$  базис, состоящий из функций  $e_i^j(x, t) = 1$ ,  $(x, t) \in D_i^j$  и  $e_i^j(x, t) = 0$ ,  $(x, t) \notin D_i^j$ . Тогда  $f(x, t) \approx \sum_{i=1}^{N_1-1} f_i^j e_i^j(x, t)$ . Пусть  $g_{ik} = (Ge_k^j, e_i^j)$ ,  $(m(x, t), e_i^j(x, t)) = m_i^j$ ,  $(M(x, t), e_i^j(x, t)) = M_i^j$ ,  $i = \overline{1, N_1 - 1}$ ,  $k = \overline{1, N_1 - 1}$ ,  $j = \overline{1, N_2}$ , где  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение в  $L_2(D)$ . Подставим выражение для  $f(x, t)$  в (1) и скалярно умножим неравенства (5) на  $e_i^j(x, t)$  в  $L_2(D)$ . В результате получим задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} J_j\{f\} &= \sum_{i=1}^{N_1-1} (mes D_i^j) f_i^j \rightarrow \min, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \\ m_i^j &\leq \sum_{k=1}^{N_1-1} g_{ik} f_k^j \leq M_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \\ f_k^j &\geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Решением задачи (6) численными методами находится функция  $u_i^j = \sum_{k=1}^{N_1-1} g_{ik} f_k^j$ , которая является решением краевой задачи (2) с  $f_k^j$ . При этом задача (6) решается симплекс-методом [12].

## 2. Описание алгоритма и результатов моделирования

Для приближенного решения задачи (1)–(6) разработано программное обеспечение на языке С#. Оно позволяет представлять все необходимые входные данные: константы, коэффициенты, параметры сеток, а также функции температуры, начальные и краевые условия, в виде скриптов. Для представления результатов разработаны графические модули.

На блок-схеме (рис. 1) приведен общий алгоритм решения задачи с использованием численного метода для вычисления  $J_{\min}$ . Для одно-, двух- и трехмерного случая проведено большое количество вычислительных экспериментов с различными значениями входных данных.

**Пример 1.** Найти плотность распределения источников на отрезке. В качестве расчетной области используется отрезок  $(0 \leq x \leq 1)$  с функциями теплопроводности  $\chi(x) = x^2$  м<sup>2</sup>/с и компонентами скорости  $v(x) = x$  м/с. Начальное и граничные условия определяются функциями  $u_0(x) = 2 + x^2$  м/с,  $\mu_1(t) = 2 + t^2$  м/с,  $\mu_2(t) = 3 + t^2$  м/с. Ограничивающие температурные кривые задаются функциями

$m(x,t) = 1 + x^2 + t^2$  К,  $M(x,t) = 4 + x^2 + t^2$  К, а окончание времени  $T = 1$  (здесь К – градус Кельвина). Расчетная сетка с числом источников  $N_2 \times (N_1 - 1) = 50 \times 49$ . На рис. 2 представлены результаты численного решения задачи (6). Минимум значения функционала при численном решении составляет  $J_{\min} = 2982,17$  К·м/с. Представлены результаты с минимальным (синий), максимальным (красный) и приближенным (зеленый) значениями температуры.

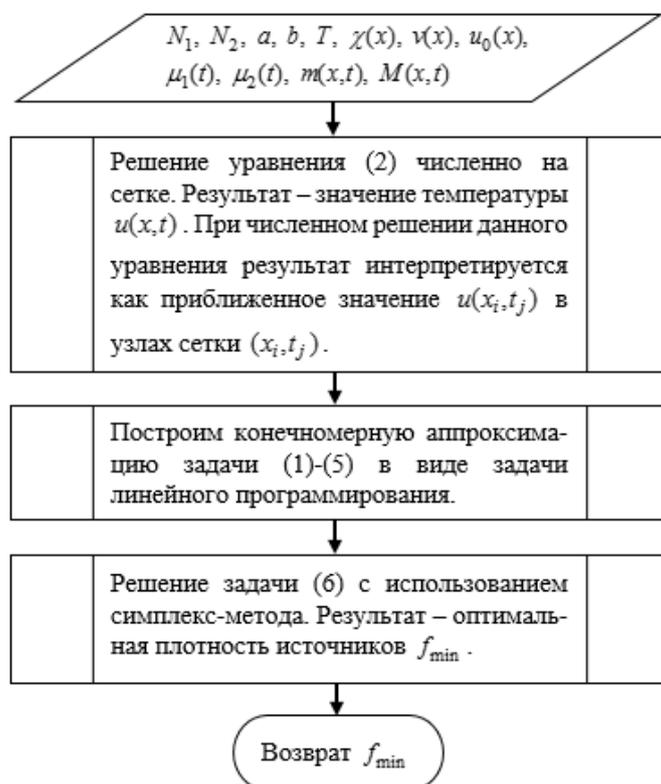


Рис. 1. Блок-схема общего алгоритма решения задачи  
 Fig. 1. Block diagram of the general algorithm for solving the problem

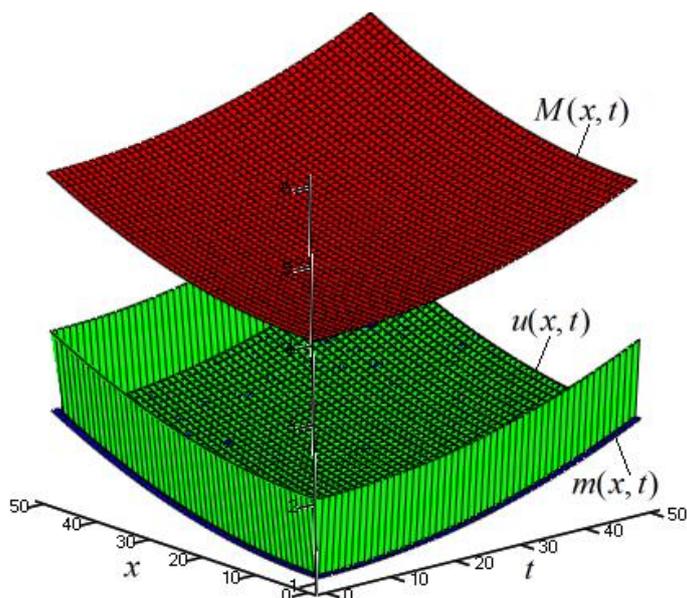


Рис. 2. Графическое отображение решения задачи (6) для примера 1  
 Fig. 2. Graphic display of the solution to problem (6) for example 1

На рис. 3 приведено оптимальное расположение источников тепла с минимальной мощностью. Максимальная температура показана красным цветом, решение краевой задачи – зеленым, минимальная температура – синим. Из графика видно, что решение задачи лежит в заданном пределе, т.е. решение удовлетворяет неравенству (3). Видно, что значение  $u(x,t)$  практически равно минимальной температуре. Это означает, что функционал  $J_j\{f\}$  достигает минимума.

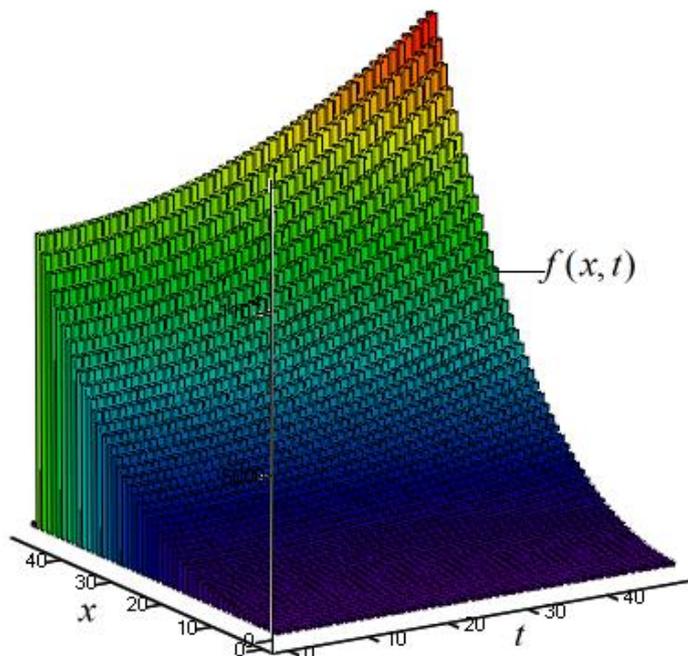


Рис. 3. Распределение оптимальной плотности источников тепла  $f(x,t)$   
 Fig. 3. Distribution of the optimal density of heat sources  $f(x,t)$

**Пример 2.** Определить оптимальную плотность распределения источников на стержне. В качестве расчетной области используется отрезок  $(0 \leq x \leq 1)$  с функциями теплопроводности  $\chi(x) = x$  м<sup>2</sup>/с и компонентами скорости  $v(x) = x^2$  м/с. Начальные и граничные условия задаются функциями  $u_0(x) = 4 + \sin(x)$  м/с,  $\mu_1(t) = 3 + \cos(t)$  м/с,  $\mu_2(t) = 3,841 + \cos(t)$  м/с.

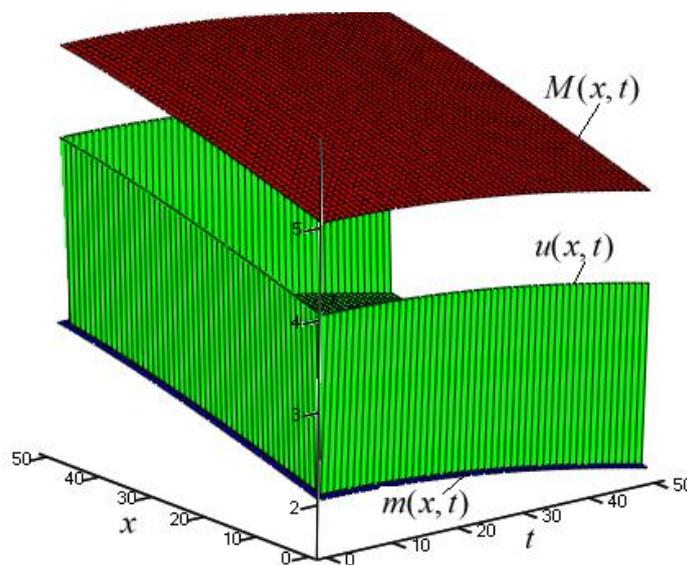


Рис. 4. Графическое отображение решения задачи (6) для примера 2  
 Fig. 4. Graphic display of the solution to problem (6) for example 2

Ограничивающие температурные кривые задаются функциями  $m(x,t)=1+\sin(x)+\cos(t)$  К,  $M(x,t)=4+\sin(x)+\cos(t)$  К, а окончание времени  $T=1$ . Расчетная сетка с числом источников  $N_2 \times (N_1 - 1) = 50 \times 49$ . На рис. 4 представлены результаты численного решения задачи (6). Минимум значения функционала равен  $J_{\min} = 5600,2$  К·м/с. Показаны результаты с минимальным (синий), максимальным (красный) и приближенным (зеленый) значениями температуры.

На рис. 5 показано оптимальное расположение источников тепла с минимальной мощностью. Видно, что решение краевой задачи находится в пределах максимальных и минимальных температур. Отображение температуры цветом такое же, как на рис. 3. Решение краевой задачи и во втором примере практически соответствует пределу минимальной температуры (синий цвет). Это означает, что функционал  $J_j\{f\}$  достигает минимума.

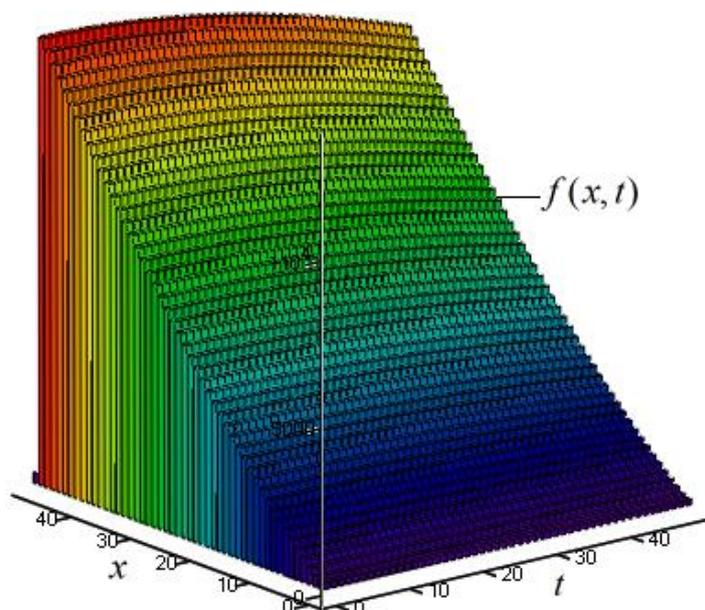


Рис. 5. Распределение оптимальной плотности источников тепла  $f(x,t)$

Fig. 5. Distribution of the optimal density of heat sources  $f(x,t)$

Источники тепла изображены разными цветами в зависимости от мощности. Мощность источников увеличивалась снизу вверх. Самый высокий источник мощности показан красным цветом.

### Заключение

Предложены методика и алгоритм решения нестационарной задачи поддержания температуры внутри области в заданных пределах путем оптимального размещения источников тепла в стержне. Задача решена на основе численного моделирования процесса конвекции-диффузии и последовательного решения задач линейного программирования.

Результаты вычислительного эксперимента подтверждают достижение функционалом минимума и решение основной задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ахметзянов А.В., Кулибанов В.Н. Оптимальное размещение источников для стационарных скалярных полей // Автоматика и телемеханика. 1999. № 6. С. 50–58.
2. Мирская С.Ю., Сидельников В.И. Экономичный обогрев помещения как задача оптимального управления // Технические проблемы сервиса. 2014. № 4 (30). С. 75–78.

3. Сабденов К.О., Байтасов Т.М. Оптимальное (энергоэффективное) теплоснабжение здания в системе центрального отопления // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2015. Т. 326, № 8. С. 53–60.
4. Исламов Г.Г., Коган Ю.В. Дифференциально-разностная задача управления процессом диффузии // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 1. С. 121–126.
5. Хайиткулов Б.Х. Численное решение нестационарной задачи об оптимальном выборе источников тепла в стержне // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2020. № 5 (29). С. 141–146.
6. Khaitkulov B.Kh. Homogeneous different schemes of the problem for optimum selection of the location of heat sources in a rectangular body // Solid State Technology. 2020. V. 63, is. 4. P. 583–592.
7. Тухтасинов М.Т., Абдулимова Г.М., Хайиткулов Б.Х. Граничное управление распространением тепла в ограниченном теле // Бюллетень Института математики. 2019. № 1. С. 1–10.
8. Лебо И.Г., Симаков А.И. Решение уравнения конвекция-диффузия для моделирования теплопередачи в высокотемпературных газах и плазме // Вестник МГТУ МИРЭА. 2014. № 3 (4). С. 195–205.
9. Вабищевич П.Н., Самарский А.А. Разностные схемы для нестационарных задач конвекции-диффузии // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 2. С. 207–219.
10. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М. : ЛИБРОКОМ, 2015. 248 с.
11. Вабищевич П.Н., Васильева М.В. Явно-неявные схемы для задач конвекции-диффузии-реакции // Сибирский журнал вычислительной математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 359–369.
12. To'xtasinov M. Jarayonlar tadqiqoti. Toshkent : Barkamol Fayz media nashriyoti, 2017. 572 bet.

Поступила в редакцию 6 января 2021 г.

Khayitkulov B.Kh. (2021) FINITE-DIFFERENCE METHOD FOR SOLVING NON-STATIONARY PROBLEMS OF CONVECTION-DIFFUSION CONTROL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 57. pp. 45–52

DOI: 10.17223/19988605/57/5

The work is related to the study of the control of heat propagation on the rod. The magnitude of the power and the location of the heat sources are controlled in such a way that, at a given time interval, the temperature of the rod is within predetermined limits, and the total power of the heat sources is minimal. After approximation by the finite-difference method, this control problem passes to the linear programming problem and is solved by the M-method of linear programming.

The objective functional is linear and due to the absence of the coercively property, significant difficulties arise in establishing the existence of a continuous exact solution.

One of the distinctive features of this work is that the non-stationary problem is considered, i.e. the change in temperature depends not only on spatial variables, but also on time.

It should be noted that in this case, we consider a separate problem of optimizing the linear functional at each layer in time. Although it is easy to get similar results for a set of time layers.

By moving to the numerical implementation and solving the resulting system of linear algebraic equations, in fact, we actually have the numerical value of the Green's function in the form of a matrix. Then, by the M-method of linear programming, a numerical solution of the problem is constructed.

The description of the algorithms based and the results of numerical experiments is given. To illustrate the result, a numerical example is considered. Software has been created for carrying out numerical experiments to solve the problem.

Keywords: non-stationary problems; optimal choice; density of heat sources; convection-diffusion equations; modeling.

*KHAYITKULOV Bobomurod Khayitovich* (Post-graduate Student, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan).  
E-mail: b.hayitkulov@mail.ru

#### REFERENCES

1. Akhmetzyanov, A.V. & Kulibanov, V.N. (1999) Optimal placement of sources for stationary scalar fields. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Telemechanics*. 6. pp. 50–58.
2. Mirskaya, S.Y. & Sidelnikov, V.I. (2014) Efficient heating of the room as the optimal control problem. *Tekhniko-tekhnologicheskie problemy servisa*. 4(30). pp. 75–78.
3. Sabdenov, K.O. & Baitasov, T.M. (2015) Optimal (energy efficient) heat supply to buildings in central heating system. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georresursov – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*. 326(8). pp. 53–60.

4. Islamov, G.G. & Kogan, Y.V. (2008) The difference-differential problem of control by diffusion process. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science.* 1. pp. 121–126.
5. Khaitkulov, B.Kh. (2020) Numerical solution of the problem of the optimal choice of heat sources in a homogeneous stationary medium. *Problemy vychislitel'noy i prikladnoy matematiki – Problems of Computational and Applied Mathematics.* 5(29). pp. 141–146.
6. Khaitkulov, B.Kh. (2020) Homogeneous different schemes of the problem for optimum selection of the location of heat sources in a rectangular body. *Solid State Technology.* 63(4). pp. 583–592.
7. Tukhtasinov, M., Abduolimova, G.M. & Khayitkulov, B.Kh. (2019) Boundary control of heat propagation in a bounded body. *Bulletin of the Institute of Mathematics.* 1. pp. 1–10.
8. Lebo, I.G. & Simakov, A.I. (2014) Solution of the equation convection-diffusion for modelling of heat transfer in high temperature gases and plasma. *Bulletin of MSTU MIREA.* 3(4). pp. 195–205.
9. Vabishchevich, P.N. & Samarskii, A.A. (1998) Finite-difference schemes for time-dependent diffusion-convection problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 38(2). pp. 199–210.
10. Samarskii, A.A. & Vabishchevich, P.N. (2015) *Numerical methods for solving convection-diffusion problems.* Moscow: LIBROCOM. 248 p.
11. Vabishchevich, P.N. & Vasileva, M.V. (2012) Explicit-implicit schemes for convection-diffusion-reaction problems. *Numerical Analysis and Applications.* 5(4). pp. 297–306.
12. Tukhtasinov, M. (2017) *Operations research.* Tashkent: Barkamol Fayz media nashriyoti. 572 p. (In Uzbekistan)

УДК 621.928.37  
DOI: 10.17223/19988605/57/6

**В.О. Яблонский**

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ГАЗА ИЗ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ СРЕД В ПОЛЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ В ГИДРОЦИКЛОНЕ**

Математическая модель разделения неоднородных жидких систем в поле центробежных сил адаптирована к процессу дегазации вязкопластических жидкостей в цилиндрическом гидроциклоне. Модель учитывает действие сил инерции, Кориолиса и присоединенную массу жидкости. Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая процесс дегазации, сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и решена численным методом. На основе разработанной математической модели проанализировано влияние числа пластичности при различных значениях фактора разделения и показателя нелинейности кривой течения на степень извлечения пузырьков газа. Приведено физическое обоснование полученных результатов. Полученные результаты могут использоваться при разработке оборудования для очистки буровых растворов.

**Ключевые слова:** вязкопластическая жидкость; предел текучести; дегазация; цилиндрический гидроциклон; число пластичности; фактор разделения; показатель нелинейности; индекс консистентности; степень извлечения.

Бурение скважин в нефтедобывающей промышленности сопровождается обогащением промысловочной жидкости воздухом или газом, что приводит к резкому изменению ее плотности, реологических и структурно-механических свойств. При этом ухудшается работа насосов и уменьшается их подача, поэтому своевременная и эффективная дегазация промысловочных жидкостей является важным условием обеспечения нормального процесса бурения.

Основным показателем, на значения которого следует ориентироваться при выборе сепаратора для промысловочных жидкостей, – это остаточный объем газа: чем меньше газа содержится в жидкости, тем лучше справляется сепаратор со своей задачей.

Применяемые в настоящее время гравитационные сепараторы [1] не обеспечивают высокой степени дегазации из-за низкой скорости движения газа, что в сочетании с высокой металлоемкостью и потребностью в значительных производственных площадях делает их применение во многих случаях нерациональным. Поэтому разработка новых конструкций сепараторов и теоретическое изучение процесса дегазации с целью повышения его эффективности является актуальной задачей, представляет научный интерес и направлено на решение важной практической проблемы.

В работах [2, 3] на основе математической модели численно исследован процесс дегазации в гидроциклоне. Показана возможность применения метода гидроциклонирования для удаления воздушной фазы из жидкости, однако полученные результаты применимы лишь для дегазации турбулентного потока ньютоновской жидкости в цилиндрическом гидроциклоне, имеющем невысокую эффективность в процессах дегазации.

В работе [4] рассмотрен процесс дегазации аэрированной жидкости с неньютоновской дисперсионной средой и отмечается, что наиболее перспективным путем интенсификации процессов дегазации аэрированных жидкостей является соединение двух известных факторов – реализации процесса в тонкой пленке и наложения центробежного поля. Разработка методики моделирования и расчета аппаратов для осуществления таких процессов позволит расширить сферу их внедрения в промышленность и представляет значительный теоретический и прикладной интерес.

Как отмечается в [5], наиболее экономичные методы дегазации – механические. Одним из перспективных механических методов является дегазация в центробежном поле, а именно в центрифугах и гидроциклонах. В статье [6] выполнено численное моделирование гидродинамики цилиндрического гидро-

циклона с вязкопластической разделяемой средой. Полученные результаты показали, что одним из аппаратов, позволяющих интенсифицировать процесс дегазации за счет использования центробежного поля в сочетании с пленочным режимом течения, является цилиндрический гидроциклон, обеспечивающий минимальную толщину пленки жидкости и имеющий сравнительно небольшие габаритные размеры.

В связи с этим актуальной задачей является разработка конструкции гидроциклонного сепаратора, использующего интенсификацию процесса выделения пузырьков газа из жидкости в центробежном поле и обеспечивающего пленочный режим течения. Для эффективного использования цилиндрического гидроциклона в процессе дегазации бурового раствора необходимо определить его конструктивные параметры и оптимальные режимы работы при дегазации среды с различными реологическими свойствами.

В настоящей работе математическая модель разделения неоднородных жидких систем в поле центробежных сил [7] адаптирована к процессу дегазации вязкопластических жидкостей в цилиндрическом гидроциклоне с учетом действия на пузырек газа и присоединенную массу жидкости центроостремительной силы Архимеда. Цель работы – моделирование дегазации вязкопластической жидкости в цилиндрическом гидроциклоне и выявление влияния пластических свойств среды на эффективность процесса дегазации при различных значениях числа Фруда (фактора разделения) и различных реологических свойствах разделяемой среды.

### 1. Математическая модель процесса дегазации вязкопластических жидкостей в цилиндрическом гидроциклоне

Гидроциклон (рис. 1) состоит из цилиндрического корпуса 1, в который через входной патрубок 2, установленный в его верхней части, тангенциально подается исследуемая жидкость, содержащая выделившиеся из нее пузырьки газа. Поступившая в корпус гидроциклона жидкость стекает, образуя вращающуюся пленку 3 толщиной  $\delta$ , по его стенкам вниз, обладая радиальной  $V_r$ , окружной  $V_\varphi$  и осевой  $V_z$  составляющими скорости. Пузырьки газа извлекаются из жидкости под действием центроостремительной силы Архимеда на поверхность пленки. Очищенная от пузырьков газа жидкость удаляется через нижний слив гидроциклона 4, установленный на днище 5, а газ – через верхний отводящий патрубок 6.

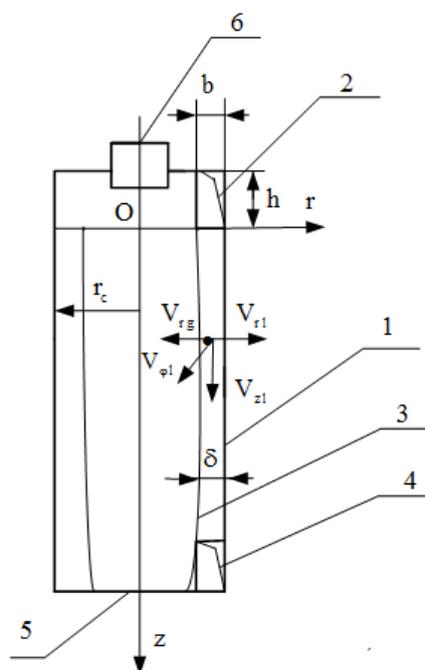


Рис. 1. Схема дегазации жидкости в цилиндрическом гидроциклоне: 1 – корпус гидроциклона; 2 – входной патрубок; 3 – вращающаяся пленка жидкости; 4 – патрубок для отвода жидкой фазы; 5 – днище гидроциклона; 6 – патрубок для отвода газа  
 Fig. 1. Scheme of degasation of fluid in cylindrical hydrocyclone: 1 – the case of hydrocyclone; 2 – entering fitting; 3 – rotating film of fluid; 4 – fitting for liquid outlet; 5 – the bottom of hydrocyclone; 6 – fitting for liquid outlet

Эффективность дегазации в гидроциклоне определяется гидродинамическими параметрами предварительно закрученной пленки жидкости, стекающей по стенкам корпуса под действием силы тяжести и давления, создаваемого центробежной силой.

Перерабатываемые в нефтедобывающей промышленности жидкости, в частности буровые растворы, во многих случаях обладают нелинейно-вязкопластическими свойствами. Такие жидкости имеют предел текучести, и их эффективная вязкость уменьшается с увеличением интенсивности скоростей деформаций, что оказывает влияние на гидродинамику аппаратов.

В работе [8] сделано заключение, что к многофазным гетерогенным системам применимо реологическое уравнение состояния неньютоновской жидкости, которое для процессов очистки буровых растворов записывают в виде закона Гершеля–Балкли. Полагаем, что этим законом [9] описываются свойства нелинейно-вязкопластической жидкости:

$$\tau_{ij} = \left( \frac{\tau_0}{A} + kA^{n-1} \right) \gamma_{ij}, \quad (1)$$

где  $A$  – интенсивность скоростей деформаций ( $c^{-1}$ ) – определяется по формуле

$$A = \sqrt{2 \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{V_r}{r} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_\phi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right)^2},$$

$\tau_{ij}$  – компоненты тензора напряжений (Па),  $\tau_0$  – предельное напряжение сдвига (Па),  $\gamma_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформаций ( $c^{-1}$ ),  $n$  – показатель нелинейности кривой течения,  $k$  – индекс consistency (Па·с <sup>$n$</sup> ),  $r, z$  – радиальная и осевая координаты (м);  $\phi$  – окружная координата (рад).

При  $n = 1$  уравнение (1) переходит в уравнение Шведова–Бингама для вязкопластической среды, при  $\tau_0 = 0$  – в уравнение Оствальда де Виля для псевдопластической жидкости, при  $n = 1$  и  $\tau_0 = 0$  – в уравнение Ньютона–Петрова для ньютоновской жидкости.

Математическая постановка задачи производится при следующих допущениях: в корпус гидроциклона подается вязкопластическая жидкость, насыщенная равномерно распределенными в ней пузырьками выделившегося газа, объемная доля которых на входе в гидроциклон равна  $c_{g0}$ ; для пленочного течения вязкопластической жидкости, обладающей высокой эффективной вязкостью, режим течения ламинарный и режим всплывания пузырьков газа ламинарный [10], ростом пузырька газа за счет изменения давления в пленке жидкости и массопередачи можно пренебречь. Полагаем, что пузырьки являются монодисперсными, что при моделировании процесса дегазации для пузырьков наиболее мелкой фракции позволит добиться заданной степени их извлечения.

При разработке модели дегазации вязкопластической жидкости в гидроциклоне необходимо учитывать действующие на пузырек газа и присоединенную массу жидкости в радиальном направлении силы инерции, которые являются существенными при высоких значениях числа Фруда. При условии действия на пузырек газа и присоединенную массу жидкости центробежной силы Архимеда, силы сопротивления и Кориолисовой силы с учетом того, что масса газа в объеме пузырька пренебрежимо мала, уравнение движения пузырька газа в проекциях на оси  $r, \phi$  имеет вид:

$$\begin{aligned} V_{rg} \frac{\partial V_{rg}}{\partial r} + V_{zg} \frac{\partial V_{rg}}{\partial z} &= -\frac{2V_{\phi g}^2}{r} - \frac{3}{2} \frac{K_{fr} (V_{rg} - V_{rl}) |V_{rg} - V_{rl}|}{d_g \Phi(c)}, \\ V_{rg} \frac{\partial V_{rg}}{\partial r} + V_{zg} \frac{\partial V_{rg}}{\partial z} &= -\frac{2V_{\phi g}^2}{r} - \frac{3}{2} \frac{K_{fr} (V_{rg} - V_{rl}) |V_{rg} - V_{rl}|}{d_g \Phi(c)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $V_{rg}(r, z)$ ,  $V_{zg}(r, z)$ ,  $V_{\phi g}(r, z)$  – радиальная, осевая и окружная составляющие скорости пузырька газа, м/с;  $V_{rl}(r, z)$  и  $V_{\phi l}(r, z)$  – радиальная и окружная составляющие скорости жидкости, м/с;  $d_g$  – диаметр пузырька газа, м;  $K_{fr}, K_{f\phi}$  – коэффициенты сопротивления движению пузырька газа в неньютоновской жидкости в радиальном и окружном направлениях, определяемые как для твердой сферы

согласно [11], при условии полной заторможенности адсорбционным слоем ПАВ (поверхностно-активных веществ) поверхности пузырька [12] и всплывании пузырька при малых значениях числа Рейнольдса  $Re_{ng} < 1$  по следующим зависимостям:

$$K_{fr} = \frac{24 f_1(n)}{Re_{ng}} + \frac{f_2(n)}{(Re_{ng})^{f_3(n)}}, \quad (3)$$

где  $Re_{ng} = \frac{\rho_l (d_g)^n (V_{rg} - V_{rl})^{2-n}}{k}$  – локальное число Рейнольдса, характеризующее режим всплывания

пузырька газа;  $f_1(n) = 3^{1,5(n-1)} \frac{2+29n-22n^2}{n(n+2)(2n+1)}$ ;  $f_2(n) = 10,5n - 3,5$ ;  $f_3(n) = 0,32n + 0,13$ ;  $n$  – показатель нелинейности кривой течения;  $k$  – индекс консистентности (Па·с<sup>*n*</sup>);  $\rho_l$  – плотность жидкости (кг/м<sup>3</sup>).

Индекс консистентности  $k$  рассчитывался как эффективная вязкость псевдопластической жидкости согласно реологическому уравнению (1) с учетом наличия у разделяемой среды предельного напряжения сдвига  $\tau_0$ .

Коэффициент сопротивления при окружном движении пузырька газ  $K_{f\phi}$  вычислялся по аналогичным зависимостям, но в качестве характерной разности скоростей берется соответствующая разность скоростей пузырька газа и жидкости в окружном направлении.

Коэффициент, учитывающий стесненность движения пузырьков газа ( $\Phi(c)$ ), определяемый по формуле Бреннера [13], имеет вид:

$$\Phi(c) = \frac{3 - \frac{9}{2}c_g^{\frac{1}{3}} + \frac{9}{2}c_g^{\frac{5}{3}} - 3c_g^2}{3 + 2c_g^{\frac{5}{3}}}, \quad (4)$$

где  $c_g$  – объемная доля пузырьков газа.

Для математического моделирования поля концентраций при дегазации вязкопластической жидкости в цилиндрическом гидроциклоне использовалось дифференциальное уравнение конвективной диффузии в цилиндрических координатах [Там же], которое при отсутствии молекулярной диффузии может быть записано для объемной доли пузырьков газа следующим образом:

$$\text{div}(\bar{V}_g c_g) = 0, \quad (5)$$

где  $\bar{V}_g$  – вектор скорости пузырьков газа.

Уравнение (5) может быть преобразовано к виду:

$$\bar{V}_g \text{grad} c_g + c_g \text{div} \bar{V}_g = 0. \quad (6)$$

Поскольку скорость пузырьков газа отлична от скорости неразрывного потока дисперсионной среды:

$$\text{div} \bar{V}_g = \frac{1}{r} \frac{\partial [r(V_{rg} - V_{rl})]}{\partial r},$$

уравнение (6) примет вид:

$$V_{rg} \frac{\partial c_g}{\partial r} + V_{zg} \frac{\partial c_g}{\partial z} = -\frac{c_g}{r} \frac{\partial [r(V_{rg} - V_{rl})]}{\partial r}. \quad (7)$$

Уравнение (7) решалось совместно с уравнениями (2), описывающими движение пузырька газа. Дифференциальные уравнения в частных производных (2) и (7) сводятся в соответствии с методом характеристик [14] к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, одно из которых описывает траекторию пузырька газа, а другое – изменение объемной доли пузырьков газа на траектории. В результате была получена система уравнений в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dZ} &= \frac{G_g}{H_g}, \\ \frac{dG_g}{dZ} &= -\frac{2\Theta_g^2}{H_g R} - \frac{3K_{fr}(G_g - G_l)|G_g - G_l|}{2H_g D_g \Phi(c_g)}, \\ \frac{d\Theta_g}{dZ} &= \frac{\Theta_g G_g}{H_g R} - \frac{3K_{f\varphi}(\Theta_g - \Theta_l)|\Theta_g - \Theta_l|}{2H_g D_g \Phi(c_g)}, \\ \frac{dC_g}{dZ} &= -\frac{C_g}{H_g} \left[ \frac{d(G_g - G_l)}{dR} + \frac{G_g - G_l}{R} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где  $G_g(R, Z) = \frac{V_{rg}(r, z)}{U_0}$ ,  $H_g(R, Z) = \frac{V_{zg}(r, z)}{U_0}$ ,  $\Theta_g(R, Z) = \frac{V_{\varphi g}(r, z)}{U_0}$  – безразмерные радиальная, осевая и окружная составляющие скорости пузырьков газа;  $G_l(R, Z) = \frac{V_{rl}(r, z)}{U_0}$ ,  $H_l(R, Z) = \frac{V_{zl}(r, z)}{U_0}$ ,  $\Theta_l(R, Z) = \frac{V_{\varphi l}(r, z)}{U_0}$  – безразмерные радиальная, осевая и окружная составляющие скорости жидкости;  $C_g = \frac{c_g}{c_{g0}}$  – безразмерная объемная доля пузырьков газа;  $D_g = \frac{d_g}{r_c}$  – безразмерный диаметр пузырька газа;  $R = \frac{r}{r_c}$ ;  $Z = \frac{z}{r_c}$  – безразмерные радиальная и осевая координаты;  $U_0$  – средняя скорость жидкости во входном патрубке гидроциклона (м/с);  $c_{g0}$  – объемная доля пузырьков газа во входном патрубке гидроциклона (м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>);  $r_c$  – радиус корпуса гидроциклона (м).

## 2. Численное моделирование

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (8) решалась в проекциях на оси координат по методу Рунге–Кутты с фиксированным шагом по программе, составленной на языке CompaqVizual Fortran, применительно к геометрии рабочего пространства цилиндрического гидроциклона при граничном условии

$$Z = 0, \quad R_c - B \leq R \leq R_c, \quad C_g = C_{g0}, \quad (9)$$

где  $R_c$  – безразмерный радиус корпуса гидроциклона;  $B = \frac{b}{r_c}$  – безразмерная ширина входного патрубка,  $b$  – ширина входного патрубка (м).

На основании результатов моделирования полей составляющих скорости и давления при течении нелинейно-вязкопластической жидкости в цилиндрическом гидроциклоне [6] и последующей аппроксимации расчетных данных было выполнено моделирование процесса дегазации нелинейно-вязкопластической жидкости в гидроциклоне, которое заключалось в численном решении полученной системы дифференциальных уравнений при граничном условии (9) для различных значений определяющих чисел подобия и реологических констант дисперсионной среды при изменении их в широком диапазоне.

Течение нелинейно-вязкопластической жидкости в цилиндрическом гидроциклоне характеризуется [6] числом пластичности  $Pl$ , определяющим отношение сил пластичности к силам инерции, центробежным числом Фруда  $Fr$  (фактором разделения), модифицированным числом Рейнольдса  $Re_n$  и параметром безразмерного расхода  $Q_0$ . Числа подобия определялись следующим образом:

$$Pl = \frac{\tau_0}{\rho U_0^2}, \quad Fr = \frac{U_0^2}{g r_c}, \quad Re_n = \frac{\rho r_c^n U_0^{2-n}}{k}, \quad Q = \frac{hb}{\pi r_c^2},$$

где  $h$  – высота входного патрубка гидроциклона (м).

Реологические свойства среды характеризуются предельным напряжением сдвига  $\tau_0$  (которое входит в число пластичности  $Pl$ ), показателем нелинейности кривой течения  $n$  и индексом консистентности  $k$ . Всплывание пузырька газа в поле центростремительной силы Архимеда в нелинейно-вязкопластической дисперсионной среде характеризуется локальным числом  $Re_{ng}$  [15], изменяющимся вдоль траектории пузырька.

Показателем эффективности протекания процесса дегазации в гидроциклоне является среднеинтегральная степень извлечения пузырьков газа  $S$  [Там же], представляющая собой для процесса дегазации среднюю безразмерную объемную долю пузырьков газа, извлеченных из жидкости в данном сечении пленки (при  $Z = \text{const}$ ), вычисляемая по следующей формуле:

$$S = 1 - \frac{\int_0^1 C_g H_g(R, Z) R dR}{\int_0^1 C_{g0} H_{g0}(R, Z) R dR}, \quad (10)$$

где  $C_{g0}$  – безразмерная объемная доля пузырьков газа во входном патрубке гидроциклона;

$\Delta(Z) = \frac{\delta(z)}{r_c}$  – безразмерная толщина пленки жидкости;  $\delta(z)$  – толщина пленки жидкости (м).

Результаты численного моделирования приведены на рис. 2, 3.

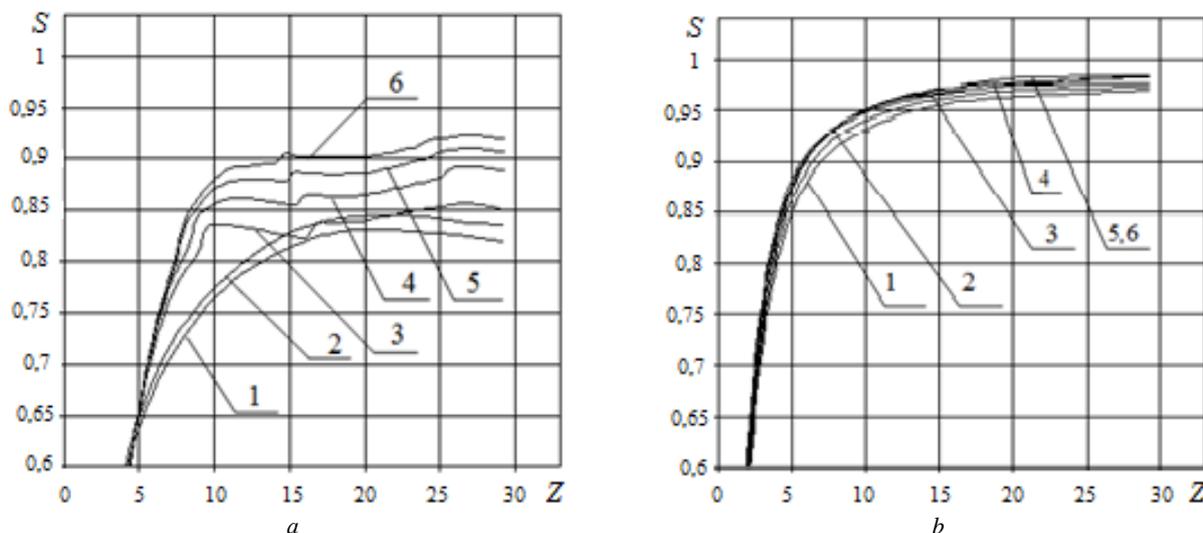


Рис. 2. Зависимости степени извлечения  $S$  пузырьков газа в цилиндрическом гидроциклоне от осевой координаты  $Z$  при различных значениях числа  $Pl$  для значений  $Fr = 20, k = 0,3132 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$  (a);  $Fr = 30, k = 0,3836 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$  (b);  $Re_n = 4 \cdot 10^3, Q_0 = 2,0 \cdot 10^{-2}, n = 1,0$ ; 1 –  $Pl = 0$ , 2 –  $Pl = 2,548 \cdot 10^{-3}$ , 3 –  $Pl = 5,097 \cdot 10^{-3}$ , 4 –  $Pl = 7,645 \cdot 10^{-3}$ , 5 –  $Pl = 1,019 \cdot 10^{-2}$ , 6 –  $Pl = 1,274 \cdot 10^{-2}$

Fig. 2. Dependences of the degree of extraction of gas bubbles  $S$  in a cylindrical hydrocyclone from the axial coordinate  $Z$  at different values of the number  $Pl$  for the values  $Fr = 20, k = 0,3132 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$  (a);  $Fr = 30, k = 0,3836 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$  (b);  $Re_n = 4 \cdot 10^3, Q_0 = 2,0 \cdot 10^{-2}, n = 1,0$ ; 1 –  $Pl = 0$ , 2 –  $Pl = 2,548 \cdot 10^{-3}$ , 3 –  $Pl = 5,097 \cdot 10^{-3}$ , 4 –  $Pl = 7,645 \cdot 10^{-3}$ , 5 –  $Pl = 1,019 \cdot 10^{-2}$ , 6 –  $Pl = 1,274 \cdot 10^{-2}$

На рис. 2 приведены зависимости степени извлечения  $S$  пузырьков газа в цилиндрическом гидроциклоне от безразмерной осевой координаты  $Z$  при различных числах  $Pl$  для значений  $Fr = 20, k = 0,3132 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$  (a) и  $Fr = 30, k = 0,3836 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$  (b);  $Re_n = 4 \cdot 10^3, Q_0 = 2,0 \cdot 10^{-2}, n = 1,0$  (ньютоновская жидкость при  $Pl = 0$  и бингамовская вязкопластическая среда при  $Pl > 0$ ). Из представленных зависимостей следует, что степень извлечения пузырьков газа возрастает с увеличением осевой координаты  $Z$ , что обусловлено выходом пузырьков газа на поверхность пленки жидкости.

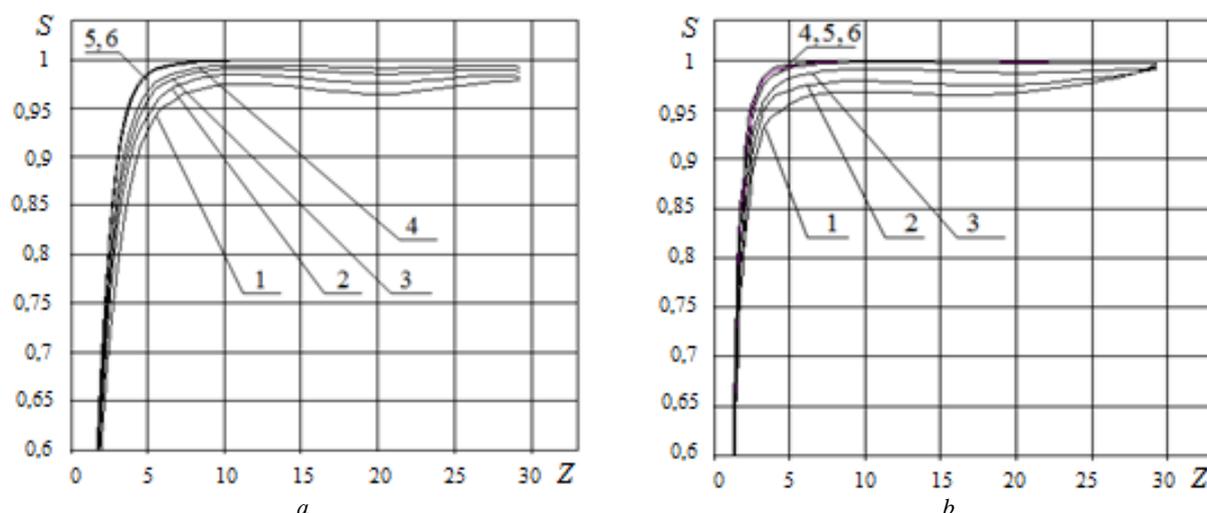


Рис. 3. Зависимости степени извлечения  $S$  пузырьков газа в цилиндрическом гидроциклоне от осевой координаты  $Z$  при различных значениях числа  $Pl$  для значений  $Fr = 20$ ,  $k = 1,242 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$  (а);  $Fr = 30$ ,  $k = 1,650 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$  (б);  $Re_n = 4 \cdot 10^3$ ,  $Q_0 = 2,0 \cdot 10^{-2}$ ,  $n = 0,6$ ; 1 –  $Pl = 0$ , 2 –  $Pl = 2,548 \cdot 10^{-3}$ , 3 –  $Pl = 5,097 \cdot 10^{-3}$ , 4 –  $Pl = 7,645 \cdot 10^{-3}$ , 5 –  $Pl = 1,019 \cdot 10^{-2}$ , 6 –  $Pl = 1,274 \cdot 10^{-2}$

Fig. 3. Dependences of the degree of extraction of gas bubbles  $S$  in a cylindrical hydrocyclone from the axial coordinate  $Z$  for different values of the number  $Pl$  for the values  $Fr = 20$ ,  $k = 1,242 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$  (а);  $Fr = 30$ ,  $k = 1,650 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$  (б);  $Re_n = 4 \cdot 10^3$ ,  $Q_0 = 2,0 \cdot 10^{-2}$ ,  $n = 0,6$ ; 1 –  $Pl = 0$ , 2 –  $Pl = 2,548 \cdot 10^{-3}$ , 3 –  $Pl = 5,097 \cdot 10^{-3}$ , 4 –  $Pl = 7,645 \cdot 10^{-3}$ , 5 –  $Pl = 1,019 \cdot 10^{-2}$ , 6 –  $Pl = 1,274 \cdot 10^{-2}$

С увеличением числа  $Pl$  (что соответствует повышению предельного напряжения сдвига  $\tau_0$ ) степень извлечения пузырьков газа существенно увеличивается. Это объясняется уменьшением толщины пленки жидкости, увеличением окружной составляющей скорости пузырьков газа и, как следствие, возрастанием действующей на них центростремительной силы Архимеда [6]. Сравнивая рис. 2, а и рис. 2, б, можно установить, что увеличение числа  $Fr$  также сопровождается ростом степени извлечения пузырьков газа  $S$  вследствие роста их окружной составляющей скорости. Таким образом, наибольшая эффективность процесса дегазации наблюдается для высоких значений чисел  $Pl$  и  $Fr$ .

На рис. 3 приведены те же зависимости, что и на рис. 2, для значений  $Fr = 20$  и  $n = 0,6$ ;  $Fr = 30$  и  $n = 0,6$  (нелинейно-вязкопластическая среда Гершеля–Балкли) для тех же значений определяющих параметров. Из представленных зависимостей следует, что степень извлечения пузырьков газа  $S$  возрастает с увеличением осевой координаты  $Z$  при  $n = 0,6$  более интенсивно, чем при  $n = 1,0$ , особенно при высоких значениях числа  $Pl$ , когда толщина пленки жидкости минимальна [5]. С ростом числа  $Pl$  степень извлечения пузырьков газа возрастает до более высоких значений, чем для жидкости Шведова–Бингама (см. рис. 2), и влияние числа  $Pl$  для среды Гершеля–Балкли при меньшей толщине пленки жидкости [6] сильнее. Из сравнения зависимостей на рис. 3, а и рис. 3, б следует, что степень извлечения пузырьков газа  $S$  возрастает с увеличением числа пластичности  $Pl$  вследствие уменьшения толщины пленки жидкости [Там же], особенно при высоких значениях числа  $Fr$ . Это является следствием возрастания степени выраженности аномалии неньютоновских свойств разделяемой среды с увеличением числа пластичности  $Pl$ , уменьшения толщины пленки жидкости и повышения степени наполненности радиального распределения окружной составляющей скорости  $V_\phi(r, z)$  [5].

С ростом числа  $Fr$  степень извлечения пузырьков газа также возрастает вследствие увеличения действующей на них центростремительной силы Архимеда [Там же]. Следовательно, при дегазации нелинейно-вязкопластических сред и высоких значениях фактора разделения высота корпуса цилиндрического гидроциклона может быть уменьшена.

### Заключение

1. С использованием разработанной математической модели дегазации вязкопластических жидкостей в цилиндрическом гидроциклоне установлено влияние числа пластичности, фактора разделения и реологических свойств среды на процесс дегазации.

2. Показано, что наибольшая эффективность процесса дегазации наблюдается для нелинейно-вязкопластических жидкостей при высоких значениях чисел  $Pl$  и  $Fr$ . Эффективность процесса дегазации возрастает с увеличением аномалии неньютоновских свойств среды, что соответствует уменьшению показателя нелинейности кривой течения  $n$ . Влияние чисел  $Pl$  и  $Fr$  с увеличением аномалии неньютоновских свойств среды усиливается.

3. Полученные результаты могут быть использованы для разработки методики инженерного расчета гидроциклонов для дегазации вязкопластических сред, в частности при разработке оборудования для дегазации буровых растворов в нефтедобывающей промышленности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенова Н.А., Рожкова О.В. Буровые промывочные жидкости и промывка скважин : в 3 т. Тюмень : Издательство ТИУ, 2016. Т. 3. 120 с.
2. Варавва А.И., Вершинин В.Е., Трапезников Д.В. Численное моделирование процесса дегазации газожидкостной смеси в гидроциклоне // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2019. Т. 5, № 3. С. 213–229.
3. Матвиенко О.В., Агафонцева М.В. Численное исследование процесса дегазации в гидроциклонах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 4 (20). С.107–118.
4. Щукина А.Г. Математическое моделирование процессов разделения неоднородных систем с неньютоновской дисперсионной средой : автореф. дис. ... канд. техн. наук. Волгоград, 1996. 16 с.
5. Терновский И.Г., Кутепов А.М. Гидроциклонирование. М. : Наука, 1994. 350 с.
6. Яблонский В.О. Гидродинамика нелинейно-вязкопластической жидкости в цилиндрическом гидроциклоне // Журнал прикладной химии. 2013. Т. 86, вып. 8. С. 1236–1243.
7. Яблонский В.О. Моделирование сепарации частиц твердой фазы из вязкопластической среды в гидроциклоне // Энергоресурсосбережение, промышленность и транспорт. 2020. № 3. С. 6–11.
8. Вайнштейн И.А. Об уравнениях кинетики разделения суспензий // Инженерно-физический журнал. 1983. Т. 45, № 4. С. 602–608.
9. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. 3-е изд., доп. и перераб. М. ; Ижевск : Ин-т компьютерных исслед., 2016. 687 с.
10. Dyakowski T., Hornung G., Williams R.A. Simulation of non-newtonian flow in a hydrocyclone // Chem. Eng. Res. a. Des. A. 1994. V. 72, № 4. P. 513–520.
11. Acharya A., Mashelkar R.A., Ulbrecht J. Flow of inelastic and viscoelastic fluids past a sphere // Rheol. Acta. 1976. V. 15, № 9. P. 454–463.
12. Дерягин Б.В., Духин С.С., Рулев Н.Н. Микрофлотация: водоочистка, обогащение. М. : Химия, 1986. 112 с.
13. Берд Р.Б., Стьюарт В.Е., Лайтфут Е.Н. Явления переноса. М. : Химия, 1974. 687 с.
14. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. М. : Просвещение, 1988. 261 с.
15. Яблонский В.О. Влияние конструктивных параметров гидроциклона на извлечение твердых частиц суспензии напорной флотацией // Химическое и нефтегазовое машиностроение. 2006. № 3. С. 3–7.

Поступила в редакцию 12 июня 2021 г.

Yablonskii V.O. (2021) MODELING OF GAS EXTRACTION FROM RHEOLOGICALLY COMPLEX MEDIA IN THE FIELD OF CENTRIFUGAL FORCES IN A HYDROCYCLONE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 57. pp. 53–61

DOI: 10.17223/19988605/57/6

Liquids processed in the oil industry, in particular drilling fluids, in many cases have nonlinear viscoplastic properties. Such liquids have a yield strength, and their effective viscosity decreases with an increase in the intensity of the deformation rates, which affects the hydrodynamics of the devices.

In the published works, it is concluded that the rheological equation of state of a non-Newtonian fluid is applicable to multiphase heterogeneous systems, which is written in the form of the Herschel-Bulkley law for drilling mud purification processes. We believe that this law describes the properties of a nonlinear viscoplastic fluid.

The mathematical model of separation of inhomogeneous liquid systems in the field of centrifugal forces is adapted to the process of degassing of viscoplastic liquids in a cylindrical hydrocyclone. The model takes into account the action of inertia, Coriolis forces and the attached mass of the liquid. The system of partial differential equations describing the degassing process is reduced to a system of ordinary differential equations and solved numerically. The system of ordinary differential equations was solved in projections on the coordinate axis using the Runge-Kutta method with a fixed step according to a program compiled in the Compaq Vizual Fortran language, applied to the geometry of the working space of a cylindrical hydrocyclone.

Based on the results of modeling the fields of velocity and pressure components during the flow of a nonlinear viscoplastic fluid in a cylindrical hydrocyclone and subsequent approximation of the calculated data, a simulation of the degassing process of a nonlinear viscoplastic fluid in a hydrocyclone was performed, which consisted in the numerical solution of the obtained system of differential equations for various values of the determining similarity numbers and rheological constants of the dispersion medium when they change in a wide range.

Based on the results of numerical modeling, the influence of the plasticity number at different values of the separation factor and the nonlinearity index of the flow curve on the degree of extraction of gas bubbles is analyzed. The physical justification of the obtained results is given. The obtained results can be used in the development of equipment for cleaning drilling fluids.

Keywords: viscoplastic fluid; yield strength; degassing; cylindrical hydrocyclone; plasticity number; separation factor; nonlinearity index; consistency index; degree of extraction.

YABLONSKII Vladimir Olegovich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Processes and Devices of Chemical Production, Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation).

E-mail: V.yablonsky@mail.ru

#### REFERENCES

1. Aksenova, N.A. & Rozhkova, O.V. (2016) *Burovye promyvochnye zhidkosti i promyvka skvazhin : v 3 t.* [Drilling flushing fluids and well flushing: in 3 vols]. Vol. 3. Tyumen: TIU.
2. Varavva, A.I., Vershinin, V.E. & Trapeznikov D.V. (2019) Numerical modeling of the degassing process of a gas-liquid mixture in hydrocyclone. *Vestnik Tyumenskogo gosudarstvennogo universiteta. Fiziko-matematicheskoe modelirovanie. Neft', gaz, energetika – Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy.* 5(3). pp. 213–229.
3. Matvienko, O.V. & Agafontseva, M.V. (2012) Numerical simulation of the degassing process in hydrocyclones. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 4(20). pp. 107–118.
4. Shchukina, A.G. (1996) *Matematicheskoe modelirovanie protsessov razdeleniya neodnorodnykh sistem s nen'yutonovskoy disperсионной средой* [Mathematical modeling of separation processes of inhomogeneous systems with a non-Newtonian dispersion medium]. Abstract of Technical Sciences Cand. Diss. Volgograd.
5. Ternovsky, I.G. & Kutepov, A.M. (1994) *Gidrotsiklonirovanie* [Hydrocycloning]. Moscow: Nauka.
6. Yablonskii, V.O. (2013) Hydrodynamics of nonlinear viscoplastic fluid in cylindrical hydrocyclone. *Zhurnal prikladnoy khimii – Russian Journal of Applied Chemistry.* 86(8). pp. 1212–1219. DOI: 10.1134/S1070427213080107
7. Yablonskii, V.O. (2020) Modelling of separation of hard phase particles from viscoplastic media in hydrocyclone. *Energoresursosberezhenie, promyshlennost' i transport – Energy and Resource Saving: Industry and Transport.* 3. pp. 6–11.
8. Weinstein, I.A. (1983) Ob uravneniyakh kinetiki razdeleniya suspenziy [On the equations of the kinetics of separation of suspensions]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal.* 45(4). pp. 602–608.
9. Levich, V.G. (2016) *Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika* [Physico-chemical hydrodynamics]. 3rd ed. Moscow; Izhevsk: IKI. pp. 66–69.
10. Dyakowski, T., Hornung, G. & Williams, R.A. (1994). Simulation of non-newtonian flow in a hydrocyclone. *Chemical Engineering Research and Design.* A. 72(4). pp. 513–520.
11. Acharya, A., Mashelkar, R.A. & Ulbrecht, J. (1976) Flow of inelastic and viscoelastic fluids past a sphere. *Rheologica Acta.* 15(9). pp. 454–463.
12. Deryagin, B.V., Dukhin, S.S. & Rulev, N.N. (1986) *Mikroflotatsiya: vodoочистка, obogashchenie* [Microflotation: Water Treatment, Enrichment]. Moscow: Khimiya.
13. Bird, R.B., Stewart, W.E. & Lightfoot, E.N. (1965) *Yavleniya perenosa* [Transport Phenomena]. 2nd ed. New York; London: J. Wiley.
14. Matveev, N.M. (1988) *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations]. Moscow: Prosveshchenie.
15. Yablonskii, V.O. (2006) Vliyaniye konstruktivnykh parametrov gidrotsyklona na izvlechenie tverdykh chastits suspenzii napornoy flotatsiyey [Effect of structural parameters of hydrocyclones on the extraction of solid suspension particles by pressurized flotation]. *Khimicheskoe i neftegazovoe mashinostroenie – Chemical and Petroleum Engineering.* 42. pp. 119–127.

## ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/57/7

А.В. Кеба, Л.А. Нежелская

### ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛА МЕЖДУ СОСЕДНИМИ СОБЫТИЯМИ В ОБОБЩЕННОМ МАР-ПОТОКЕ СОБЫТИЙ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ

Рассматривается задача оценки параметров плотности вероятности значений длительности интервала между моментами наступления событий обобщенного МАР-потока событий (Markovian Arrival Process) с произвольным числом состояний методом моментов в условиях его полной наблюдаемости. Находится явный вид плотности вероятности значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока. Формулируется алгоритм вычисления оценок параметров  $\hat{z}_1$ ,  $\hat{z}_2$ ,  $\hat{\gamma}$  плотности  $p(\tau)$ . Приводятся численные результаты расчетов оценок параметров плотности и их анализ.

**Ключевые слова:** обобщенный МАР-поток событий с произвольным числом состояний; плотность вероятности значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий; метод моментов; оценка параметров.

Рассматривается обобщенный МАР-поток событий с  $n$  состояниями, относящийся к классу дважды стохастических потоков событий [1–3]. Изучаемый поток представляет собой адекватную математическую модель реальных потоков случайных событий в телекоммуникационных системах, спутниковых сетях связи и глобальных компьютерных сетях; сопровождающий процесс исследуемого потока есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний [4–7].

При анализе дважды стохастических потоков событий выделяют два основных раздела задач, базой для которых служат моменты времени наступления событий в потоке: 1) оценивание состояний потока событий [8–11]; 2) оценивание параметров потока [12–15]. Задача, решаемая в настоящей статье, относится ко второму классу задач.

В данной работе исследуется обобщенный МАР-поток событий с произвольным числом состояний. Находится явный вид плотности вероятности значений длительности интервала между моментами наступления событий потока [16]. Приводятся численные результаты оценивания параметров плотности вероятности значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий исследуемого потока. Статья является непосредственным развитием работ [17, 18].

#### 1. Постановка задачи

Исследуется обобщенный МАР-поток событий с произвольным числом состояний (далее – поток), функционирующий в установившемся стационарном режиме. Сопровождающий случайный процесс  $\lambda(t)$  изучаемого потока представляет собой кусочно-постоянный принципиально ненаблюдаемый процесс с  $n$  состояниями:  $S_1, \dots, S_n$ . Полагается, что при  $\lambda(t) = \lambda_i$  имеет место  $i$ -е состояние ( $S_i$ ),  $i = \overline{1, n}$ , процесса  $\lambda(t)$ . При этом  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$ .

Функция распределения случайной величины – длительности пребывания процесса  $\lambda(t)$  в состоянии  $S_i$  – является экспоненциальной:  $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . В момент окончания

состояния  $S_i$  процесс  $\lambda(t)$  переходит из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  с вероятностью  $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$  с наступлением события потока или с вероятностью  $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$  без наступления события потока,  $i, j = \overline{1, n}$ .

Отметим, что для введенных вероятностей справедливо  $\sum_{j=1}^n P_0(\lambda_j|\lambda_i) + \sum_{j=1}^n P_1(\lambda_j|\lambda_i) = 1, i = \overline{1, n}$ .

**Замечание 1.** Введение вероятности  $P_0(\lambda_i|\lambda_i) \neq 0, i = \overline{1, n}$ , перехода процесса  $\lambda(t)$  из состояния  $S_i$  в состояние  $S_i$  без наступления события приводит к обобщению классического МАР-потока с произвольным числом состояний.

**Утверждение.** Для обобщенного МАР-потока событий с  $n$  состояниями процесс  $\lambda(t)$  является скрытым марковским процессом.

Блочная матрица инфинитезимальных характеристик [19] процесса  $\lambda(t)$  имеет вид  $\mathbf{D} = \|\mathbf{D}_0|\mathbf{D}_1\|$ , где

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} -\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) & \lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_0(\lambda_n|\lambda_1) \\ \lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2) & -\lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) & \dots & \lambda_2 P_0(\lambda_n|\lambda_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_0(\lambda_1|\lambda_n) & \lambda_n P_0(\lambda_2|\lambda_n) & \dots & -\lambda_n(1 - P_0(\lambda_n|\lambda_n)) \end{pmatrix}_{n \times n},$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_1(\lambda_n|\lambda_1) \\ \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2) & \dots & \lambda_2 P_1(\lambda_n|\lambda_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_1(\lambda_1|\lambda_n) & \lambda_n P_1(\lambda_2|\lambda_n) & \dots & \lambda_n P_1(\lambda_n|\lambda_n) \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

В качестве иллюстрации на рис. 1 приведена одна из реализаций процесса  $\lambda(t)$  и наблюдаемого потока, где  $\lambda_i$  – значение процесса  $\lambda(t)$  в состоянии  $S_i, i = \overline{1, n}$ ;  $t_1, t_2, \dots$  – моменты времени наступления событий в наблюдаемом потоке.

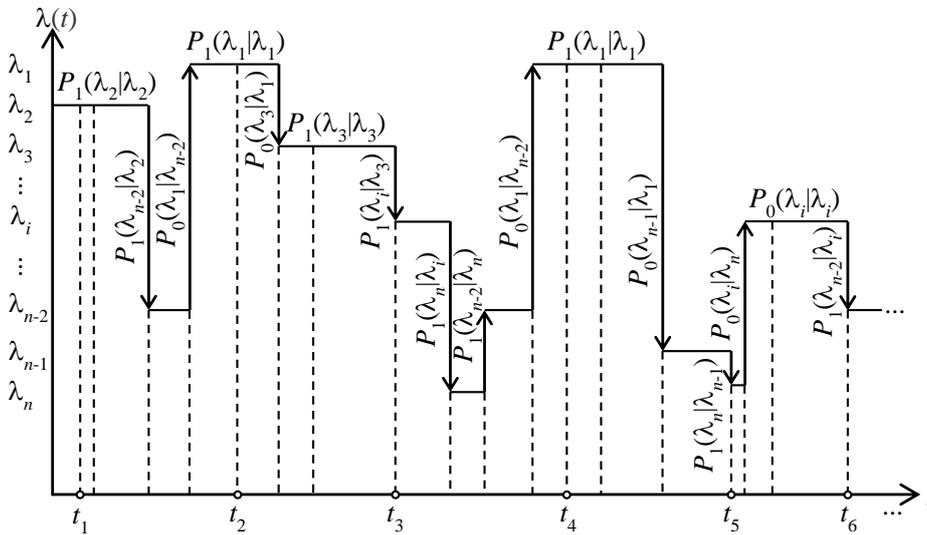


Рис. 1. Реализация обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний  
 Fig. 1. Implementation of Generalized MAP with an arbitrary number of states

Обозначим  $\tau_k = t_{k+1} - t_k, \tau_k \geq 0$ , – значение длительности  $k$ -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока  $t_k$  и  $t_{k+1}, k = 1, 2, \dots$ . Для плотности вероятности значений  $\tau_k$  вследствие функционирования потока в стационарном режиме справедливо  $p(\tau_k) = p(\tau), \tau_k \geq 0$ , при любом  $k \geq 1$ , что позволяет без ограничения общности положить момент наступления события  $t_k$  равным нулю или, что то же самое, момент наступления события есть  $\tau = 0$ .

Задача заключается в нахождении явного вида плотности распределения вероятностей длительности интервала между моментами наступления соседних событий в обобщенном МАР-потоке событий с двумя состояниями ( $n = 2$ ).

## 2. Вид плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в обобщенном МАР-потоке событий

Последовательность  $t_1, t_2, \dots$  образует вложенную по моментам времени наступления событий цепь Маркова  $\{\lambda(t_k)\}$ , поэтому плотность  $p(\tau)$  имеет вид:

$$p(\tau) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (1)$$

где  $\pi_i(0)$  – условная стационарная вероятность того, что процесс  $\lambda(t)$  в момент времени  $\tau = 0$  находится в состоянии  $S_i$  при условии, что в момент времени  $\tau = 0$  событие потока наступило,  $i = 1, 2$ ;  $\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$ ; пусть  $p_{ij}(\tau)$  – условная вероятность того, что на интервале  $(0, \tau)$  нет событий потока и в момент времени  $\tau$  значение процесса  $\lambda(\tau) = \lambda_j$  при условии, что в момент времени  $\tau = 0$  значение процесса  $\lambda(0) = \lambda_i$ , и событие потока в момент времени  $\tau = 0$  наступило,  $i, j = 1, 2$ ;  $\tilde{p}_{ij}(\tau)$  – соответствующая вероятности  $p_{ij}(\tau)$  плотность вероятности,  $i, j = 1, 2$ .

Для введенных величин справедливы следующие леммы.

**Лемма 1.** Условные вероятности  $p_{ij}(\tau)$ ,  $i, j = 1, 2$ , в обобщенном МАР-потоке событий имеют вид:

$$\begin{aligned} p_{11}(\tau) &= \frac{1}{z_2 - z_1} \left\{ [\lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) - z_1] e^{-z_1\tau} - [\lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) - z_2] e^{-z_2\tau} \right\}, \\ p_{12}(\tau) &= \frac{\lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1)}{z_2 - z_1} \left\{ e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau} \right\}, \\ p_{22}(\tau) &= \frac{1}{z_2 - z_1} \left\{ [\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) - z_1] e^{-z_1\tau} - [\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) - z_2] e^{-z_2\tau} \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$p_{21}(\tau) = \frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2)}{z_2 - z_1} \left\{ e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau} \right\},$$

$$\text{где } z_{1,2} = \frac{\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) + \lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) \mp \sqrt{D}}{2},$$

$$D = [\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) - \lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2))]^2 + 4\lambda_1\lambda_2 P_0(\lambda_2|\lambda_1)P_0(\lambda_1|\lambda_2), \quad 0 < z_1 < z_2.$$

**Доказательство.** Пусть процесс  $\lambda(\tau)$  в момент времени  $\tau + \Delta\tau$  принимает значение  $\lambda(\tau + \Delta\tau) = \lambda_j, j = 1, 2$ . Опишем возможные ситуации на интервале  $(0, \tau + \Delta\tau)$ .

1. Процесс  $\lambda(\tau)$  в момент времени  $\tau = 0$  принимает значение  $\lambda(0) = \lambda_i, i = 1, 2$ , и на интервале  $(0, \tau)$  осуществляется переход из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j, i \neq j$ , не сопровождающийся наступлением события, вероятность этого есть  $p_{ij}(\tau), i, j = 1, 2, i \neq j$ , и на полуинтервале  $[\tau, \tau + \Delta\tau)$  состояние  $S_j$  процесса  $\lambda(\tau)$  не заканчивается с вероятностью  $e^{-\lambda_j\Delta\tau}$ ; вероятность этой ситуации равна  $e^{-\lambda_j\Delta\tau} p_{ij}(\tau), i, j = 1, 2, i \neq j$ ;

2. Процесс  $\lambda(\tau)$  в момент времени  $\tau = 0$  принимает значение  $\lambda(0) = \lambda_i, i = 1, 2$ , и на интервале  $(0, \tau)$  осуществляется переход из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j, i \neq j$ , не сопровождающийся наступлением события, вероятность этого есть  $p_{ij}(\tau), i, j = 1, 2, i \neq j$ , и на полуинтервале  $[\tau, \tau + \Delta\tau)$  состояние  $S_j$  процесса  $\lambda(\tau)$  заканчивается с вероятностью  $1 - e^{-\lambda_j\Delta\tau}$ , и процесс  $\lambda(\tau)$  переходит из состояния  $S_j$  в состояние  $S_j$  без наступления события, вероятность этого есть  $P_0(\lambda_j|\lambda_j)$ ; вероятность этой ситуации выписется в виде  $P_0(\lambda_j|\lambda_j)(1 - e^{-\lambda_j\Delta\tau})p_{ij}(\tau), i, j = 1, 2, i \neq j$ ;

3. Аналогично рассматриваются другие ситуации перехода процесса  $\lambda(\tau)$  на интервале  $(0, \tau + \Delta\tau)$ .

Учитывая всевозможные переходы процесса  $\lambda(\tau)$  на интервале  $(0, \tau + \Delta\tau)$  и проделывая необходимые преобразования, получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} p'_{11}(\tau) &= -\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1))p_{11}(\tau) + \lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2)p_{12}(\tau), \\ p'_{12}(\tau) &= \lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1)p_{11}(\tau) - \lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2))p_{12}(\tau), \\ p'_{21}(\tau) &= -\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1))p_{21}(\tau) + \lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2)p_{22}(\tau), \\ p'_{22}(\tau) &= \lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1)p_{21}(\tau) - \lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2))p_{22}(\tau) \end{aligned} \quad (3)$$

с начальными условиями  $p_{11}(0) = p_{22}(0) = 1, p_{12}(0) = p_{21}(0) = 0$ .

Решая систему уравнений (3) методом исключения или методом Эйлера, определяя при этом неизвестные постоянные из начальных условий, получим (2). Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** Плотности вероятностей  $\tilde{p}_{ij}(\tau), i, j = 1, 2$ , в обобщенном МАР-потоке событий определяются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{11}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)p_{11}(\tau) + \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)p_{12}(\tau), \\ \tilde{p}_{12}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)p_{11}(\tau) + \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)p_{12}(\tau), \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)p_{21}(\tau) + \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)p_{22}(\tau), \\ \tilde{p}_{22}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)p_{21}(\tau) + \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)p_{22}(\tau), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $p_{ij}(\tau), i, j = 1, 2$ , определены в (2).

**Доказательство.** Определим совместные вероятности  $p_{ij}(\tau)\lambda_j P_1(\lambda_d|\lambda_j)\Delta\tau + o(\Delta\tau)$  того, что без наступления события на интервале  $(0, \tau)$  процесс  $\lambda(\tau)$  на этом интервале переходит из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j, i, j = 1, 2$ , на полуинтервале  $[\tau, \tau + \Delta\tau)$  происходит окончание состояния  $S_j$  процесса  $\lambda(\tau)$ , и в момент наступления события потока процесс  $\lambda(\tau)$  переходит из состояния  $S_j$  в состояние  $S_d, d, j = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} p_{11}(\tau)\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)\Delta\tau + o(\Delta\tau), p_{11}(\tau)\lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)\Delta\tau + o(\Delta\tau), \\ p_{12}(\tau)\lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)\Delta\tau + o(\Delta\tau), p_{12}(\tau)\lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)\Delta\tau + o(\Delta\tau), \\ p_{21}(\tau)\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)\Delta\tau + o(\Delta\tau), p_{21}(\tau)\lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)\Delta\tau + o(\Delta\tau), \\ p_{22}(\tau)\lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)\Delta\tau + o(\Delta\tau), p_{22}(\tau)\lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)\Delta\tau + o(\Delta\tau). \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что каждая из совместных вероятностей (5) представима в виде:

$$p_{ij}(\tau)\lambda_j P_1(\lambda_d|\lambda_j)\Delta\tau + o(\Delta\tau) = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \tilde{p}_{ij}^{(d)}(u)du = \tilde{p}_{ij}^{(d)}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau), \quad i, j = 1, 2, d = 1, 2,$$

где  $\tilde{p}_{ij}^{(d)}(\tau)$  – соответствующая вероятности  $p_{ij}(\tau)\lambda_j P_1(\lambda_d|\lambda_j)$  плотность вероятности,  $i, j = 1, 2, d = 1, 2$ .

Запишем последнее равенство в виде:

$$p_{ij}(\tau)\lambda_j P_1(\lambda_d|\lambda_j) + \frac{o(\Delta\tau)}{\Delta\tau} = \tilde{p}_{ij}^{(d)}(\tau) + \frac{o(\Delta\tau)}{\Delta\tau}, \quad i, j = 1, 2, d = 1, 2.$$

Устремляя здесь  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , находим

$$\tilde{p}_{ij}^{(d)}(\tau) = p_{ij}(\tau)\lambda_j P_1(\lambda_d|\lambda_j), \quad i, j = 1, 2, d = 1, 2.$$

Тогда плотность вероятности  $\tilde{p}_{ij}^{(d)}(\tau)$  того, что без наступления события потока на интервале  $(0, \tau)$  и наступления события в момент  $\tau$  процесс  $\lambda(\tau)$  переходит из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j, i, j = 1, 2$ , согласно вышеприведенному равенству запишется в виде (4). Лемма 2 доказана.

**Лемма 3.** Условные финальные вероятности  $\pi_i(0), i = 1, 2$ , в обобщенном МАР-потоке событий задаются выражениями

$$\pi_1(0) = \frac{A}{A+B}, \quad \pi_2(0) = \frac{B}{A+B}, \quad \pi_1(0) + \pi_2(0) = 1,$$

$$\text{где } A = P_1(\lambda_1|\lambda_2)(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) + P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_1|\lambda_1), \quad (6)$$

$$B = P_1(\lambda_2|\lambda_1)(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) + P_0(\lambda_2|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2).$$

**Доказательство.** Последовательность  $t_1, t_2, \dots$  образует вложенную по моментам времени наступления событий цепь Маркова  $\{\lambda(t_k)\}$ , поэтому для вероятностей  $\pi_i(0), i = 1, 2$ , справедливы следующие уравнения:

$$\pi_1(0) = p_{11}\pi_1(0) + p_{21}\pi_2(0), \quad (7)$$

$$\pi_2(0) = p_{12}\pi_1(0) + p_{22}\pi_2(0),$$

где вероятности  $p_{ij}$  – вероятности перехода процесса  $\lambda(\tau)$  из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j, i, j = 1, 2$ , за время, которое пройдет от момента  $\tau = 0$  до момента наступления очередного события потока.

Поскольку  $\tau$  есть произвольный момент времени,  $\tau \geq 0$ , то  $p_{ij}$  определяются в виде:

$$p_{ij} = \int_0^{\infty} \tilde{p}_{ij}(\tau) d\tau, \quad i, j = 1, 2. \quad (8)$$

Подставляя (4) в (8), находим

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{P_1(\lambda_1|\lambda_1)(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) + P_0(\lambda_2|\lambda_1)P_1(\lambda_1|\lambda_2)}{(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1))(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)}, \\ P_{12} &= \frac{P_1(\lambda_2|\lambda_1)(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) + P_0(\lambda_2|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2)}{(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1))(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)}, \\ P_{21} &= \frac{P_1(\lambda_1|\lambda_2)(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) + P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_1|\lambda_1)}{(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1))(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)}, \\ P_{22} &= \frac{P_1(\lambda_2|\lambda_2)(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) + P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1)}{(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1))(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

В результате подстановки (9) в (7) и с учетом условия нормировки  $\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$ , приходим к (6). *Лемма 3 доказана.*

Леммы 2 и 3 позволяют сформулировать следующую теорему.

**Теорема.** В обобщенном МАР-потоке плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями имеет вид:

$$\begin{aligned} p(\tau) &= \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \quad \tau \geq 0, \\ \gamma &= \frac{z_2 - \lambda_1 \pi_1(0) [P_1(\lambda_1|\lambda_1) + P_1(\lambda_2|\lambda_1)] - \lambda_2 \pi_2(0) [P_1(\lambda_1|\lambda_2) + P_1(\lambda_2|\lambda_2)]}{z_2 - z_1}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $z_i$  определены в (2),  $\pi_i(0)$  – в (6),  $i = 1, 2$ .

**Доказательство.** Подставляя в (1) сначала (4), а затем явные выражения (6) для  $\pi_i(0), i = 1, 2$ , осуществляя необходимые преобразования, приходим к (10). *Теорема доказана.*

**Замечание 2.** Полагая в (10) вероятности  $P_0(\lambda_j|\lambda_i) = 0, i, j = \overline{1, n}, P_1(\lambda_2|\lambda_1) = p, P_1(\lambda_1|\lambda_2) = q$ , приходим к виду плотности распределения для синхронного потока [18], являющегося частным случаем рассматриваемого обобщенного МАР-потока событий:

$$\begin{aligned} p(\tau) &= \gamma \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} + (1 - \gamma) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau}, \quad \tau \geq 0, \\ \gamma &= \frac{q}{p + q}, \quad \lambda_1 > \lambda_2, \quad 0 < p \leq 1, \quad 0 < q \leq 1. \end{aligned}$$

### 3. Оценка параметров методом моментов

Оценить методом моментов десять параметров обобщенного МАР-потока событий  $\lambda_i$ ,  $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$ ,  $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$ ,  $i, j = 1, 2$ , или с учетом нормировки – восемь, располагая лишь информацией о виде плотности  $p(\tau)$ , не представляется возможным [20]. Потому будем оценивать неизвестные параметры  $z_1, z_2, \gamma$  плотности  $p(\tau)$ .

**Замечание 3.** Обобщенный МАР-поток событий является коррелированным потоком, поэтому говорить о состоятельности получаемых методом моментов оценок не представляется возможным [21, 22].

Введем в рассмотрение выборку  $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$  из распределения  $p(\tau|z_1, z_2, \gamma) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}$ ,  $\tau \geq 0$ , зависящего от трех неизвестных параметров  $z_1, z_2, \gamma$ . В силу близости теоретической и эмпирической функций распределения, т.е. неограниченного сближения их значений при  $n \rightarrow \infty$ , следует ожидать близости их числовых характеристик – моментов одного и того же порядка. Теоретический начальный момент  $l$ -го порядка  $M\tau^l = \int_0^{\infty} \tau^l p(\tau|z_1, z_2, \gamma) d\tau$  близок к соответствующему выборочному

моменту – статистике  $C_l = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \tau_k^l$ , где  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$  – значение длительности между моментами  $t_k$  и  $t_{k+1}$  наступления событий в обобщенном МАР-потоке событий. Таким образом, для оценки параметров  $z_1, z_2, \gamma$  необходимо иметь три уравнения моментов вида:

$$M\tau^l = C_l, \quad l = \overline{1,3}. \quad (11)$$

Выполняя интегрирование левой части (11), находим

$$M\tau^l = \int_0^{\infty} \tau^l (\gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}) d\tau = \frac{l! \gamma}{z_1^l} + \frac{l!(1-\gamma)}{z_2^l}, \quad l = \overline{1,3}.$$

На основании вышеприведенного вида начального момента  $l$ -го порядка запишем систему трех уравнений моментов относительно оценок  $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}$  с учетом преобразований в виде:

$$\gamma z_2 + (1-\gamma) z_1 - C_1 z_1 z_2 = 0, \quad C_1(z_1 + z_2) - \frac{1}{2} C_2 z_1 z_2 = 1, \quad C_2(z_1 + z_2) - \frac{1}{3} C_3 z_1 z_2 = 2C_1. \quad (12)$$

Замены  $x_1 = z_1 + z_2, x_2 = z_1 z_2$  позволяют свести систему (12) к неоднородной системе двух линейных уравнений относительно неизвестных  $x_1, x_2$ :

$$C_1 x_1 - \frac{1}{2} C_2 x_2 = 1, \quad C_2 x_1 - \frac{1}{3} C_3 x_2 = 2C_1,$$

решение которой запишется в виде:  $x_1 = \frac{2(3C_1 C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3}, \quad x_2 = \frac{6(2C_1^2 - C_2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3}$ .

Оценки  $\hat{z}_1, \hat{z}_2$  согласно обратной теореме Виета есть корни уравнения

$$z^2 - x_1 z + x_2 = 0 \quad (13)$$

при известных значениях коэффициентов  $x_1$  и  $x_2$ .

Из (2) следует, что  $z_1 < z_2$ , тогда

$$\hat{z}_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2(3C_1 C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} \mp \sqrt{\left( \frac{2(3C_1 C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} \right)^2 - 4 \frac{6(2C_1^2 - C_2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3}} \right]. \quad (14)$$

**Замечание 4.** Оценки  $\hat{z}_1, \hat{z}_2$  как действительные положительные корни (13) существуют тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$1. \left( \frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} \right)^2 - 4 \frac{6(2C_1^2 - C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} > 0; \text{ отметим, что } \hat{z}_1 \neq \hat{z}_2, \text{ и действительные положитель-$$

ные корни, получаемые при равном нулю дискриминанте, исключаются из рассмотрения;

$$2. \frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} > 0 \text{ как необходимое и достаточное условие положительности } \hat{z}_1 \text{ и, кроме то-}$$

го, необходимое, но недостаточное для  $\hat{z}_2 > 0$ ;

$$3. \frac{6(2C_1^2 - C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} > 0 \text{ как достаточное условие для } \hat{z}_2 > 0.$$

Оценка  $\hat{\gamma}$  определяется однозначно из первого уравнения системы (12):

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{z}_1(1 - C_1\hat{z}_2)}{\hat{z}_1 - \hat{z}_2}. \quad (15)$$

Итак, система (12) имеет единственное решение  $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}$ .

### 5. Результаты численных расчетов

С целью получения численных результатов разработан алгоритм вычисления оценок  $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}$  и построена имитационная модель обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний. Основой имитационной модели являются датчики псевдослучайных чисел и метод обратных функций [23]. На первом этапе расчета осуществляется имитационное моделирование обобщенного МАР-потока события с двумя состояниями с тем, чтобы получить статистики  $C_l, l = \overline{1,3}$ , на основе выборки моментов времени наступления событий  $t_1, \dots, t_m$ . На втором этапе расчета вычисляются оценки  $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}$  по формулам (14), (15).

Для каждой реализации определены оценки  $\hat{\theta}^{(v)}, v = \overline{1, N}$ , соответствующих параметров  $\theta$ , на основании которых вычислены выборочное среднее значение  $\hat{M}(\hat{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \hat{\theta}^{(v)}$ , оценка смещения  $|\hat{M}(\hat{\theta}) - \theta|$ , где  $\theta = \{z_1, z_2, \gamma\}; \hat{\theta} = \{\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}\}$ .

**Эксперимент 1.** Фиксируются число состояний  $n = 2$ , количество опытов  $N = 100$ , значения  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$  процесса  $\lambda(t)$  и переходные вероятности, представленные в табл. 1.

Целью данного эксперимента является нахождение временного интервала установления стационарного режима функционирования обобщенного МАР-потока события с двумя состояниями, или, иными словами, установление зависимости  $\hat{M}(\hat{\theta}), |\hat{M}(\hat{\theta}) - \theta|$  от длительности времени моделирования  $T_{mod}$ , где  $T_{mod} \in \{100, 200, \dots, 1\,000\}$ . Результаты 1-го статистического эксперимента представлены в табл. 2.

Таблица 1

Значения переходных вероятностей обобщенного МАР-потока событий с двумя состояниями в рамках 1-го статистического эксперимента

$P_0(\lambda_1 \lambda_1) = 0,10$	$P_0(\lambda_1 \lambda_2) = 0,05$
$P_0(\lambda_2 \lambda_1) = 0,05$	$P_0(\lambda_2 \lambda_2) = 0,10$
$P_1(\lambda_1 \lambda_1) = 0,80$	$P_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0,05$
$P_1(\lambda_2 \lambda_1) = 0,05$	$P_1(\lambda_2 \lambda_2) = 0,80$

Таблица 2

Результаты 1-го статистического эксперимента

$T_{mod}$	$\theta$					
	$z_1 = 0,8944$		$z_2 = 1,8055$		$\gamma = 0,5823$	
	$\hat{M}(\hat{z}_1)$	$ \hat{M}(\hat{z}_1) - z_1 $	$\hat{M}(\hat{z}_2)$	$ \hat{M}(\hat{z}_2) - z_2 $	$\hat{M}(\hat{\gamma})$	$ \hat{M}(\hat{\gamma}) - \gamma $
100	1,5079	0,6134	4,2102	2,4047	0,3737	0,2085
200	1,4024	0,5080	5,8124	4,0069	0,2741	0,3081
300	1,3175	0,4231	2,9713	1,1658	0,1935	0,3887
400	1,2660	0,3715	2,8707	1,0652	0,1521	0,4301
500	1,3086	0,4142	2,7482	0,9427	0,1414	0,4408
600	1,2721	0,3776	2,7447	0,9391	0,1406	0,4416
700	1,3001	0,4056	2,7207	0,9152	0,1301	0,4522
800	1,3325	0,4380	2,7008	0,8953	0,1267	0,4555
900	1,3076	0,4131	2,6872	0,8817	0,1116	0,4707
1000	1,3355	0,4411	2,6806	0,8751	0,1117	0,4706

Из анализа численных результатов, приведенных в табл. 2, следует, что имеет место смещение оценок относительно исходных значений оцениваемых параметров. Анализ представленных в табл. 2 результатов эксперимента приводит к утверждению о зависимости получаемых оценок от времени моделирования, а именно: с увеличением значения  $T_{mod}$  выборочные средние и оценки смещения стабилизируются при  $T_{mod} \geq 500$ , что объясняется концепцией метода моментов.

**Эксперимент 2.** Фиксируются число состояний  $n = 2$ , количество опытов  $N = 100$ , значение времени моделирования  $T_{mod} = 1\,000$ , значение  $\lambda_2 = 1$  процесса  $\lambda(t)$  и переходные вероятности  $P_0(\lambda_j|\lambda_i) = P_1(\lambda_j|\lambda_i) = 0,25, i, j = 1, 2$ .

В рамках эксперимента исследуются зависимости  $\hat{M}(\hat{\theta}), |\hat{M}(\hat{\theta}) - \theta|$  от изменения параметра  $\lambda_1$  процесса  $\lambda(t)$ , где  $\lambda_1 \in \{2, 3, \dots, 10\}$ . Результаты 2-го статистического эксперимента представлены в табл. 3 и на рис. 2–4.

Таблица 3

Результаты 2-го статистического эксперимента

$\lambda_1$	2	3	4	5	...	9	10
$z_1$	0,6096	0,6339	0,6438	0,6492	...	0,6576	0,6586
$\hat{M}(\hat{z}_1)$	2,1788	1,8743	1,8143	1,3173	...	0,6718	0,5882
$ \hat{M}(\hat{z}_1) - z_1 $	1,5692	1,2403	1,1704	0,668	...	0,0142	0,0703
$z_2$	1,6503	2,366	3,1061	3,8507	...	6,8423	7,5913
$\hat{M}(\hat{z}_2)$	3,6762	4,5476	5,6904	2,5113	...	1,4661	1,4914
$ \hat{M}(\hat{z}_2) - z_2 $	2,0358	2,1816	2,5843	1,3394	...	5,3762	6,0999
$\gamma$	0,8638	0,7886	0,7538	0,7342	...	0,7021	0,6983
$\hat{M}(\hat{\gamma})$	3,7406	2,1419	1,9095	0,6146	...	-0,0821	-0,0434
$ \hat{M}(\hat{\gamma}) - \gamma $	2,8768	1,3533	1,1557	1,3489	...	0,7842	0,7418

Результаты табл. 3 указывают на то, что увеличение значений параметра  $\lambda_1$  при выбранном наборе параметров влечет за собой улучшение качества оценок  $\hat{z}_1, \hat{\gamma}$  в смысле уменьшения значений оценок смещения. Последнее объясняется тем, что при увеличении разности  $\lambda_1 - \lambda_2$  состояния процесса  $\lambda(t)$  более различимы, что влечет за собой улучшение качества оценивания параметров  $z_1, \gamma$ ; соответственно, при сближении  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  состояния процесса  $\lambda(t)$  менее различимы, поэтому оценивание параметров  $z_1, \gamma$  в этом случае хуже.

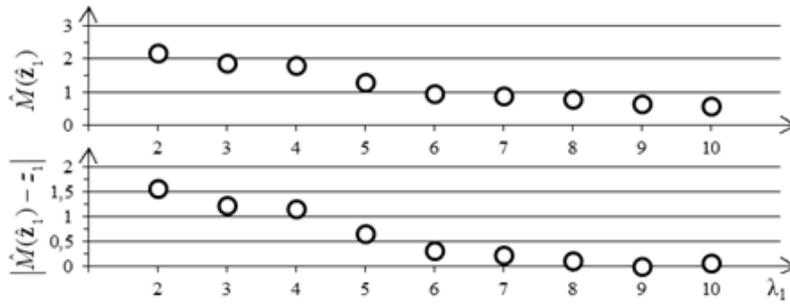


Рис. 2. График зависимости  $\hat{M}(\hat{z}_1)$ ,  $|\hat{M}(\hat{z}_1) - z_1|$  от значения  $\lambda_1$

Fig. 2.  $\hat{M}(\hat{z}_1)$ ,  $|\hat{M}(\hat{z}_1) - z_1|$  as functions of  $\lambda_1$

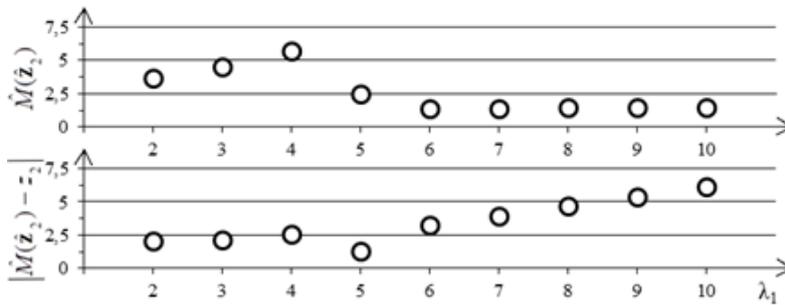


Рис. 3. График зависимости  $\hat{M}(\hat{z}_2)$ ,  $|\hat{M}(\hat{z}_2) - z_2|$  от значения  $\lambda_1$

Fig. 3.  $\hat{M}(\hat{z}_2)$ ,  $|\hat{M}(\hat{z}_2) - z_2|$  as functions of  $\lambda_1$

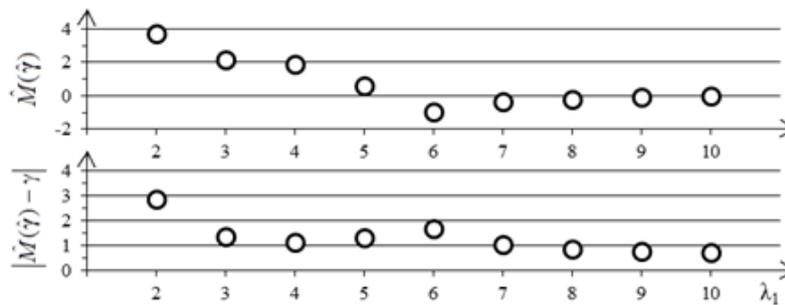


Рис. 4. График зависимости  $\hat{M}(\hat{\gamma})$ ,  $|\hat{M}(\hat{\gamma}) - \gamma|$  от значения  $\lambda_1$

Fig. 4.  $\hat{M}(\hat{\gamma})$ ,  $|\hat{M}(\hat{\gamma}) - \gamma|$  as functions of  $\lambda_1$

Как следует из табл. 3, параметр  $z_2$  оценивается хуже, чем параметры  $z_1$  и  $\gamma$  в смысле значений оценок смещения. Увеличение параметра  $\lambda_1$  влечет за собой частую смену состояния  $S_1$  процесса  $\lambda(t)$  с наступлением события либо без наступления события. В свою очередь, частая смена состояния  $S_1$  ведет к тому, что состояния  $S_1$  и  $S_2$  становятся менее различимыми и оценивание параметра  $z_2$  ухудшается.

### Заключение

В данной статье приведен явный вид плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями обобщенного МАР-потока событий с  $n$  состояниями (10). Методом моментов найдены оценки параметров плотности  $p(\tau)$ :  $\hat{z}_1$ ,  $\hat{z}_2$  вида (14),  $\hat{\gamma}$  вида (15). Алгоритм вычисления оценок реализован на языке программирования C# в среде Visual Studio 2015. Проведены статистические эксперименты, указывающие на работоспособность алгоритма оценки параметров  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $\gamma$ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1964. V. 60, is. 4. P. 923–930.
2. Cox D.R., Miller H.D. The theory of stochastic processes // New York : Wiley. 1965. 398 p.
3. Grandell J. Doubly stochastic Poisson processes // Berlin Heidelberg : Springer-Verlag. 1976. 240 p.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*. 1979. № 6. С. 92–99.
5. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*. 1980. № 1. С. 55–61.
6. Neuts M.F. A versatile Markov point process // *Journal of Applied Probability*. 1979. V. 16. P. 764–779.
7. Вишневецкий В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применения в телекоммуникационных сетях. М.: Техносфера, 2018. 564 с.
8. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2012. № 2(19). С. 88–101.
9. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // *Вестник Томского государственного университета*. 2000. № 269. С. 95–98.
10. Горцев А.М., Леонова М.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2010. № 1(10). С. 33–47.
11. Nezhelskaya L., Tumashkina D. Optimal state estimation of semi-synchronous event of flow of the second order under its complete observability // *Communications in Computer and Information Science*. 2018. V. 912. P. 93–105.
12. Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А. Оценка параметров мультипликативных распределений сетей массового обслуживания // *Проблемы передачи информации*. 2009. Т. 45, № 4. С. 115–120.
13. Okamura H., Dohi T., Trivedi K.S. Markovian arrival process parameter estimation with group data // *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*. 2009. 17(4). P. 1326–1339.
14. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events // *Telecommunications and Radio Engineering*. 1993. V. 48, No. 10. P. 40–45.
15. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable // *Telecommunications and Radio Engineering*. 1992. V. 47, No. 1. P. 33–38.
16. Nezhelskaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // *Communications in Computer and Information Science*. 2015. V. 564. P. 141–151.
17. Кеба А.В., Нежелская Л.А. Статистические эксперименты на имитационной модели обобщенного MAP-потока событий с произвольным числом состояний // *Труды Томского государственного университета. Сер. физико-математическая*. Томск: Изд. Дом ТГУ, 2018. Т. 302. С. 157–164.
18. Нежелская Л.А., Кеба А.В. Оптимальная оценка состояний обобщенного MAP-потока событий с произвольным числом состояний // *Автоматика и телемеханика*. 2021. №5. С. 68–85.
19. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
20. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // *Вестник Томского государственного университета*. 2002. №S1-1. С. 24–29.
21. Шуленин В.П. Математическая статистика. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. Ч. 1. 540 с.
22. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель: ГТУ им. Ф. Скорина, 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.
23. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.

Поступила в редакцию 20 июля 2021 г.

Keba A.V., Nezhel'skaya L.A. (2021) ESTIMATION OF THE PROBABILITY DENSITY PARAMETERS OF THE INTERVAL DURATION BETWEEN EVENTS IN GENERALIZED MAP WITH TWO STATES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 57. pp. 62–73

DOI: 10.17223/19988605/57/7

The paper deals with a generalized MAP with an arbitrary number of states under conditions of full observability. The accompanying random process  $\lambda(t)$  of the flow is an unobservable piecewise constant process with  $n$  states:  $S_1, \dots, S_n$ . The process  $\lambda(t)$  is unobservable in principle, the moments of occurrence of events  $t_1, t_2, \dots$  are observable.

We denote by  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $\tau_k \geq 0$ , the value of the  $k$ -th interval duration between events of the observed flow  $t_k$  and  $t_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Due to the fact that the flow operates in a stationary mode, then for the probability density of values  $\tau_k$  it is true  $p(\tau_k) = p(\tau)$ ,  $\tau_k \geq 0$ ,

for any  $k \geq 1$ . This allows, without loss of generality, to set the moment of occurrence of the event  $t_k$  equal to zero or, which is the same, the moment the event occurs is  $\tau = 0$ .

It is necessary to use the method of moments to estimate the parameters  $z_1, z_2$ , and  $\gamma$  of the probability density distribution of the interval duration between events in generalized MAP with two states (we assume  $n = 2$ ) at an arbitrary time instant  $\tau$ , provided that the realization of the time intervals between events  $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$  is known of the observed flow on the interval  $(0, \tau)$ , where  $\tau = 0$  is the moment of occurrence of the event,  $\tau$  is the end of observation,  $m$  is the number of observed events over the time interval  $(0, \tau)$ . It is assumed that  $\lambda(t)$  is stationary.

In the paper we present an explicit form of the probability density parameters of the interval duration between events in generalized MAP with  $n$  states. The method of moments is used to find estimates of the density parameters  $p(\tau)$ :  $z_1, z_2$ , and  $\gamma$  at an arbitrary time moment  $\tau$ . The algorithm was implemented by C # programming language in the Visual Studio 2015. Statistical experiments were conducted on the simulation model of the flow in order to establish the quality of the results obtained by evaluating the parameters of the probability distribution. The numerical results of these experiments are given in the paper and illustrate an acceptable estimate that does not contradict the physical interpretation.

Keywords: generalized MAP with an arbitrary number of states; probability density of the values of the interval duration between the moments of the events occurrence; method of moments; estimation of the parameters.

*KEBA Anastasia Vladimirovna* (PhD Student, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).  
E-mail: mir.na.mig7@mail.ru

*NEZHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna* (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Applied Mathematics Department, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).  
E-mail: ludne@mail.ru

## REFERENCES

1. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
2. Cox, D.R. & Miller, H.D. (1965) *The Theory of Stochastic Processes*. New York: Wiley.
3. Grandell, J. (1976) *Doubly Stochastic Poisson Processes*. BerlinHeidelberg: Springer-Verlag.
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. CH. 1 [On the Equivalent Substitutions Method for Computing Fragments of Communication Networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
5. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. CH. 2 [On the Equivalent Substitutions Method for Computing Fragments of Communication Networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
6. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
7. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primeneniye v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic systems with correlated flows. Theory and application in telecommunication networks]. Moscow: Tekhnosfera.
8. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88–101.
9. Nezhelskaya, L.A. (2000) Optimal state estimation of the semi-synchronous event flow under conditions of its partial observability. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95–98.
10. Gortsev, A.M. & Leonova, M.A. (2010). The optimal evaluation of states of the integrated asynchronous doubly stochastic event flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 33–47.
11. Nezhelskaya, L. & Tumashkina, D. (2018) Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability. *Communications in Computer and Information Science*. 912. pp. 93–105. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5\_8
12. Tsitsiashvili, G.Sh. & Osipova, M.A. (2009) Parameter estimation for product-form distributions of queueing networks. *Problemy peredachi informatsii – Problems of Information Transmission*. 45(4). pp. 115–120.
13. Okamura, H., Dohi, T. & Trivedi, K.S. (2009) Markovian arrival process parameter estimation with group data. *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*. 17(4). pp. 1326–1339. DOI: 10.1109/TNET.2008.2008750
14. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1993) Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events. *Telecommunications and Radio Engineering*. 48(10). pp. 40–45.

15. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1992) Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable. *Telecommunications and Radio Engineering*. 47(1). pp. 33–38.
16. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4\_12
17. Keba, A.V. & Nezhelskaya, L.A. (2018) Statisticheskie eksperimenty na imitatsionnoy modeli obobshchennogo MAP-potoka sobyitij s proizvolnym chislom sostoyaniy [Statistical experiments on a simulation model of generalized MAP with an arbitrary number of states] In: Smyrin, I.S. (ed.) *Matematicheskie i programmnoe obespechenie informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and software informational, technical and economic systems]. Tomsk: Tomsk State University. pp. 157–164.
18. Nezhelskaya, L.A. & Keba, A.V. (2021) Optimal state estimation of a generalized MAP event flow with an arbitrary number of states observability. *Automation and Remote Control*. 82(5). pp. 798–811. DOI: 10.31857/S0005231021050056
19. Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (2006) *Teoriya veroyatnostey i sluchaynykh protsessov* [Theory of Probabilities and Random Processes]. Tomsk: NTL.
20. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Estimation of parameters of a synchronous doubly stochastic flow by the method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S1-1. pp. 24–29.
21. Shulenin, V.P. (2012) *Matematicheskaya statistika* [Math Statistics]. Tomsk: NTL.
22. Malinkovsky, Yu.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Theory of Probability and Mathematical Statistics]. Gomel: GTU.
23. Sobol, I.M. (1973) *Chislennyye metody Monte-Karlo* [Numerical Methods of Monte Carlo]. Moscow: Nauka.

УДК 519.872

DOI: 10.17223/19988605/57/8

А.А. Назаров, С.В. Пауль, О.Д. Лизюра, К.С. Шульгина

**ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ M|M|1 С РАЗНОТИПНЫМИ ВЫЗЫВАЕМЫМИ ЗАЯВКАМИ И НЕНАДЕЖНЫМ ПРИБОРОМ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКИ-ДИФФУЗИОННОГО АНАЛИЗА**

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Томской области в рамках научного проекта № 19-41-703002.*

Рассматривается применение метода асимптотически-диффузионного анализа для марковской модели RQ-системы с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором. Суть метода состоит в построении диффузионного процесса, аппроксимирующего число заявок на орбите в исследуемой системе. На основе функции плотности диффузионного процесса строится аппроксимация стационарного дискретного распределения вероятностей числа заявок на орбите.

**Ключевые слова:** RQ-система; ненадежный прибор; вызываемые заявки; метод асимптотически-диффузионного анализа; диффузионная аппроксимация.

В настоящее время системы массового обслуживания с повторными обращениями к прибору (RQ-системы) являются очень популярными математическими моделями различных реальных телекоммуникационных и сервисных систем. Такие системы характеризуются тем, что поступившая в систему заявка в случае занятости сервера обслуживанием другой заявки не теряется, а отправляется на орбиту и после случайной задержки пытается вновь занять прибор. С ранними исследованиями RQ-систем можно ознакомиться в монографиях [1, 2].

Оригинальные СМО с орбитой пришли на смену системам с ожиданием и описывали поведение телефонных систем, а впоследствии применялись для моделирования сетей случайного доступа. Вклад повторных обращений к прибору в моделировании call-центров обсуждается в работах [3–5].

В последнее время с развитием так называемых смешанных call-центров RQ-системы стали рассматриваться как модели систем связи с двумя типами занятости прибора, а именно поступающими и вызываемыми заявками. Последние присутствуют в системе всегда, прибор может обратиться к таким заявкам во время простоя, чтобы увеличить производительность системы. Идея вызываемых заявок, которые получают обслуживание по инициативе прибора, принадлежит Туану Фунг-Дуку [6–8]. Он и его соавторы исследуют свойства систем с вызываемыми заявками с помощью оригинальных численных методов.

В статьях [9, 10] рассматриваются RQ-системы с вызываемыми заявками и ненадежным прибором. Такие системы применяются для моделирования радиосетей, в которых узел связи подвержен поломкам и может выходить из строя, что существенно влияет на производительность сети.

Надежности систем с вызываемыми заявками также посвящены работы [11–13]. В них авторы исследуют системы с различными дополнительными свойствами вышеописанных моделей, такими как ограниченное число входящих источников, поиск заявок на орбите и произвольное распределение длительности восстановления прибора. В качестве метода исследования используется имитационное моделирование.

В RQ-системах с поломками прибора ненадежность обычно понимается как физическое свойство узла связи [14–17]. В моделях call-центров под прибором может пониматься не только само устройство (телефон), но и оператор, совершающий звонки. В таких случаях под поломкой прибора понимается прекращение работы системы по инициативе оператора. В статьях [18, 19], мы предлага-

ем исследование марковской RQ-системы с вызываемыми заявками и ненадежным прибором с помощью методов асимптотического анализа. Интенсивность поломок имеет различные значения для разных состояний прибора. В частности, мы полагаем, что прибор не подвержен поломкам, когда обслуживает вызываемые заявки, так как вызываются они самим прибором.

В данной работе к исследованию модели, описанной в статьях [18, 19], применяется метод асимптотически-диффузионного анализа, представленный в работе [20] для исследования RQ-системы с групповым поступлением заявок. Этот метод существенно расширяет область применимости предельных характеристик системы, на основе которых мы строим диффузионную аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на орбите. Результаты получены в предельном условии большой задержки заявок на орбите, что означает, что параметр экспоненциального распределения длительности задержки на орбите должен быть достаточно мал. Однако мы покажем, что диффузионная аппроксимация применима и в случаях, когда значения параметра далеки от предельных.

## 1. Математическая модель

Рассмотрим RQ-систему, описанную в работах [18, 19]. На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Заявка входящего потока, поступившая в систему и обнаружившая прибор свободным, занимает его и обслуживается в течение экспоненциально распределенного времени с параметром  $\mu_1$ . Если же в момент поступления заявка застаёт прибор занятым, она мгновенно уходит на орбиту и повторяет попытку занять прибор по истечении случайного времени, распределенного экспоненциально с параметром  $\sigma$ .

Когда прибор свободен, он вызывает заявки различных типов. От типа вызываемой заявки  $n$  зависят интенсивность вызывания  $\alpha_n$  и интенсивность обслуживания  $\mu_n$ . Для удобства пронумеруем типы вызываемых заявок от 2 до  $N$ .

Поломки прибора имеют интенсивность  $\gamma_0$ , когда он свободен, или интенсивность  $\gamma_1$ , когда обслуживает заявку входящего потока. Длительность периода восстановления имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\gamma_2$ . В момент поломки (выхода из строя) прибора обслуживаемая заявка переходит на орбиту. Будем считать, что прибор не может выйти из строя при обслуживании вызываемых заявок, так как обслуживание инициировано самим прибором.

Обозначим процесс  $k(t)$  – состояние прибора в момент времени  $t$ . Этот процесс может принимать следующие значения: 0, если прибор свободен; 1, если прибор обслуживает заявку из потока или орбиты;  $n$ , если обслуживается вызываемая заявка типа  $n$ ,  $n = 2, 3, \dots, N$ ;  $N + 1$ , если прибор находится в состоянии восстановления. Также введем случайный процесс  $i(t)$  – число заявок на орбите в момент времени  $t$ .

## 2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Ставится задача нахождения стационарного распределения числа заявок на орбите. Рассмотрим двумерный марковский процесс  $\{k(t), i(t)\}$ . Для распределения вероятностей

$$P\{k(t) = k, i(t) = i\} = P_k(i, t)$$

составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0(i, t)}{\partial t} &= -\left(\lambda + \sum_{n=2}^N \alpha_n + i\sigma + \gamma_0\right) P_0(i, t) + \sum_{k=1}^N \mu_k P_k(i, t) + \gamma_2 P_{N+1}(i, t), \\ \frac{\partial P_1(i, t)}{\partial t} &= -(\lambda + \mu_1 + \gamma_1) P_1(i, t) + \lambda P_0(i, t) + \sigma(i+1) P_0(i+1, t) + \lambda P_1(i-1, t), \\ \frac{\partial P_n(i, t)}{\partial t} &= -(\lambda + \mu_n) P_n(i, t) + \lambda P_n(i-1, t) + \alpha_n P_0(i, t), \quad n = \overline{2, N}, \\ \frac{\partial P_{N+1}(i, t)}{\partial t} &= -(\lambda + \gamma_2) P_{N+1}(i, t) + \lambda P_{N+1}(i-1, t) + \gamma_0 P_0(i, t) + \gamma_1 P_1(i-1, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив  $j = \sqrt{-1}$ ,  $H_k(u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P_k(i, t)$ ,  $k = \overline{0, N+1}$ . Преобразуя систему уравнений (1), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0(u, t)}{\partial t} &= -\left(\lambda + \sum_{n=2}^N \alpha_n + \gamma_0\right) H_0(u, t) + j\sigma \frac{\partial H_0(u, t)}{\partial u} + \sum_{k=1}^N \mu_k H_k(u, t) + \gamma_2 H_{N+1}(u, t), \\ \frac{\partial H_1(u, t)}{\partial t} &= (\lambda(e^{ju} - 1) - \mu_1 - \gamma_1) H_1(u, t) + \lambda H_0(u, t) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0(u, t)}{\partial u}, \\ \frac{\partial H_n(u, t)}{\partial t} &= (\lambda(e^{ju} - 1) - \mu_n) H_n(u, t) + \alpha_n H_0(u, t), \quad n = \overline{2, N}, \\ \frac{\partial H_{N+1}(u, t)}{\partial t} &= (\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma_2) H_{N+1}(u, t) + \gamma_0 H_0(u, t) + \gamma_1 e^{ju} H_1(u, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Суммируя уравнения системы (2), запишем дополнительное уравнение

$$\frac{\partial H(u, t)}{\partial t} = (e^{ju} - 1) \left\{ j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0(u, t)}{\partial u} + \gamma_1 H_1(u, t) + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} H_n(u, t) \right\}, \quad (3)$$

которое нам понадобится для дальнейшего анализа. Систему (2), (3) будем решать методом асимптотически-диффузионного анализа в предельном условии  $\sigma \rightarrow 0$ .

### 3. Первый этап асимптотически-диффузионного анализа

Обозначим  $\sigma = \varepsilon$  и введем следующие замены в системе (2) и уравнении (3):

$$\tau = t\varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad H_k(u, t) = F_k(w, \tau, \varepsilon).$$

Получим систему

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial F_0(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= -\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n\right) F_0(w, \tau, \varepsilon) + j \frac{\partial F_0(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \sum_{k=1}^N \mu_k F_k(w, \tau, \varepsilon) + \gamma_2 F_{N+1}(w, \tau, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{\partial F_1(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= (\lambda(e^{j\varepsilon w} - 1) - \mu_1 - \gamma_1) F_1(w, \tau, \varepsilon) + \lambda F_0(w, \tau, \varepsilon) - j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w}, \\ \varepsilon \frac{\partial F_n(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= (\lambda(e^{j\varepsilon w} - 1) - \mu_n) F_n(w, \tau, \varepsilon) + \alpha_n F_0(w, \tau, \varepsilon), \quad n = \overline{2, N}, \\ \varepsilon \frac{\partial F_{N+1}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= (\lambda(e^{j\varepsilon w} - 1) - \gamma_2) F_{N+1}(w, \tau, \varepsilon) + \gamma_0 F_0(w, \tau, \varepsilon) + \gamma_1 e^{j\varepsilon w} F_1(w, \tau, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{\partial F(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= (e^{j\varepsilon w} - 1) \left\{ j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \gamma_1 F_1(w, \tau, \varepsilon) + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} F_n(w, \tau, \varepsilon) \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Решая систему (4) в предельном условии  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\sigma \rightarrow 0$ ), докажем следующее утверждение.

**Теорема 1.** В предельном условии  $\sigma \rightarrow 0$  выполняется равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{jw\sigma i \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)} = e^{jwx(\tau)}, \quad (5)$$

где скалярная функция  $x = x(\tau)$  является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$x'(\tau) = -x(\tau)r_0 + \gamma_1 r_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} r_n.$$

Здесь  $r_k = r_k(x)$  удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{k=0}^{N+1} r_k = 1,$$

и являются решением системы уравнений

$$\begin{aligned} -\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n + x\right) r_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k r_k + \gamma_2 r_{N+1} &= 0, \\ -(\mu_1 + \gamma_1) r_1 + (\lambda + x) r_0 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\mu_n r_n + \alpha_n r_0 &= 0, \quad n = \overline{2, N}, \\ -\gamma_2 r_{N+1} + \gamma_0 r_0 + \gamma_1 r_1 &= 0. \end{aligned}$$

**Доказательство.** В системе (4) устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$ , обозначив  $F_n(w, \tau, \varepsilon) = F_n(w, \tau)$ , получим

$$\begin{aligned} -\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n\right) F_0(w, \tau) + j \frac{\partial F_0(w, \tau)}{\partial w} + \sum_{k=1}^N \mu_k F_k(w, \tau) + \gamma_2 F_{N+1}(w, \tau) &= 0, \\ -(\mu_1 + \gamma_1) F_1(w, \tau) + \lambda F_0(w, \tau) - j \frac{\partial F_0(w, \tau)}{\partial w} &= 0, \\ -\mu_n F_n(w, \tau) + \alpha_n F_0(w, \tau) &= 0, \quad n = \overline{2, N}, \\ -\gamma_2 F_{N+1}(w, \tau) + \gamma_0 F_0(w, \tau) + \gamma_1 F_1(w, \tau) &= 0, \\ \frac{\partial F(w, \tau)}{\partial \tau} = jw \left\{ j \frac{\partial F_0(w, \tau)}{\partial w} + \gamma_1 F_1(w, \tau) + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} F_n(w, \tau) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение системы (6) будем искать в виде:

$$F_k(w, \tau) = r_k e^{jwx(\tau)}, \quad k = \overline{0, N+1}. \quad (7)$$

Здесь  $x = x(\tau)$  – скалярная функция аргумента  $\tau$ , которая определяет при  $\varepsilon \rightarrow 0$  нормированное величиной  $\varepsilon = \sigma$  среднее значение  $\sigma i(\tau/\sigma)$  числа заявок на орбите. Подставим разложение (7) в систему (6) и получим

$$\begin{aligned} -\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n + x\right) r_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k r_k + \gamma_2 r_{N+1} &= 0, \\ -(\mu_1 + \gamma_1) r_1 + (\lambda + x) r_0 &= 0, \\ -\mu_n r_n + \alpha_n r_0 &= 0, \quad n = \overline{2, N}, \\ -\gamma_2 r_{N+1} + \gamma_0 r_0 + \gamma_1 r_1 &= 0, \\ x'(\tau) = -x(\tau) r_0 + \gamma_1 r_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} r_n. \end{aligned} \quad (8)$$

В силу того, что скалярная функция  $x(\tau)$  аргумента  $\tau$  является предельным при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , нормированным величиной  $\varepsilon = \sigma$  средним значением  $\sigma i(\tau/\sigma)$  числа заявок на орбите, то выполняется равенство (5). *Теорема доказана.*

Вероятности  $r_k$  можно найти из (8) с учетом условия нормировки. Так как коэффициенты системы уравнений (8) зависят от  $x$ , величины  $r_k$  также можно представить как  $r_k(x)$ , однако мы опустим аргумент для упрощения выкладок. Также обозначим функцию  $a(x)$ :

$$a(x) = -xr_0 + \gamma_1 r_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} r_n. \quad (9)$$

#### 4. Второй этап асимптотически диффузионного анализа

В системе (2) и уравнении (3) введем замены  $H_k(u, t) = H_k^{(2)}(u, t) e^{j\frac{u}{\sigma} x(\sigma t)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N+1$ , и получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0^{(2)}(u, t)}{\partial t} + jux'(\sigma t) H_0^{(2)}(u, t) &= -\left(\lambda + \sum_{n=2}^N \alpha_n + \gamma_0 + x(\sigma t)\right) H_0^{(2)}(u, t) + j\sigma \frac{\partial H_0^{(2)}(u, t)}{\partial u} + \\ &+ \sum_{k=1}^N \mu_k H_k^{(2)}(u, t) + \gamma_2 H_{N+1}^{(2)}(u, t), \\ \frac{\partial H_1^{(2)}(u, t)}{\partial t} + jux'(\sigma t) H_1^{(2)}(u, t) &= (\lambda(e^{ju} - 1) - \mu_1 - \gamma_1) H_1^{(2)}(u, t) + \\ &+ (\lambda + x(\sigma t)e^{-ju}) H_0^{(2)}(u, t) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0^{(2)}(u, t)}{\partial u}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_n^{(2)}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H_n^{(2)}(u,t) &= (\lambda(e^{ju} - 1) - \mu_n)H_n^{(2)}(u,t) + \alpha_n H_0^{(2)}(u,t), \quad n = \overline{2, N}, \\ \frac{\partial H_{N+1}^{(2)}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H_{N+1}^{(2)}(u,t) &= (\lambda(e^{ju} - 1) - \gamma_2)H_{N+1}^{(2)}(u,t) + \gamma_0 H_0^{(2)}(u,t) + \gamma_1 e^{ju} H_1^{(2)}(u,t), \\ \frac{\partial H^{(2)}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H^{(2)}(u,t) &= (e^{ju} - 1) \times \\ &\times \left\{ -x(\sigma t)e^{-ju} H_0^{(2)}(u,t) + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial u} + \gamma_1 H_1^{(2)}(u,t) + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} H_n^{(2)}(u,t) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Сделаем замены  $\sigma = \varepsilon^2$ ,  $\tau = \varepsilon^2 t$ ,  $u = \varepsilon w$ ,  $H_k^{(2)}(u,t) = F_k^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)$ ,  $k = \overline{0, N+1}$ , после чего получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon wa(x)F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) &= -\left( \lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n + x \right) F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \\ &+ j\varepsilon \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \sum_{k=1}^N \mu_k F_k^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \gamma_2 F_{N+1}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial F_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon wa(x)F_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) &= (\lambda(e^{j\varepsilon w} - 1) - \mu_1 - \gamma_1)F_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \\ &+ (\lambda + xe^{-j\varepsilon w})F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) - j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w}, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial F_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon wa(x)F_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) &= (\lambda(e^{j\varepsilon w} - 1) - \mu_n)F_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \alpha_n F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon), \quad n = \overline{2, N}, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial F_{N+1}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon wa(x)F_{N+1}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) &= (\lambda(e^{j\varepsilon w} - 1) - \gamma_2)F_{N+1}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \\ &+ \gamma_0 F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \gamma_1 e^{j\varepsilon w} F_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial F^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon wa(x)F^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) &= (e^{j\varepsilon w} - 1) \times \\ &\times \left\{ -xe^{-j\varepsilon w} F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \gamma_1 F_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} F_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 2.** Предельные при  $\varepsilon \rightarrow 0$  функции  $F_k^{(2)}(w, \tau)$  имеют вид:

$$F_k^{(2)}(w, \tau) = \Phi(w, \tau) r_k(x), \quad k = \overline{0, N+1},$$

где  $r_k(x)$ , зависящие от значений параметра  $x$ , определены в Теореме 1, а скалярная функция  $\Phi(w, \tau)$  является решением уравнения

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = a'(x)w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} + b(x) \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau). \quad (12)$$

Здесь функция  $a(x)$  определяется равенством (9), а скалярная функция  $b(x)$  имеет вид:

$$b(x) = a(x) + 2 \left( -xg_0 + \gamma_1 g_1 + \lambda \sum_{k=1}^{N+1} g_k + xr_0 \right), \quad (13)$$

где  $g_k = g_k(x)$  определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} -\left( \lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n + x \right) g_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k g_k + \gamma_2 g_{N+1} &= a(x)r_0, \\ -(\mu_1 + \gamma_1)g_1 + (\lambda + x)g_0 &= a(x)r_1 - \lambda r_1 + xr_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\mu_n g_n + \alpha_n g_0 &= a(x)r_n - \lambda r_n, \quad n = \overline{2, N}, \\
 -\gamma_2 g_{N+1} + \gamma_0 g_0 + \gamma_1 g_1 &= a(x)r_{N+1} - \lambda r_{N+1} - \gamma_1 r_1, \\
 \sum_{k=0}^{N+1} g_k &= 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

**Доказательство.** В первых четырех уравнениях системы (11) разложим экспоненты в ряд Тейлора и сгруппируем слагаемые порядка малости не выше  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
 j\varepsilon w a(x) F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) &= -\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n + x\right) F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
 + j\varepsilon \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \sum_{k=1}^N \mu_k F_k^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \gamma_2 F_{N+1}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \\
 j\varepsilon w a(x) F_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) &= (j\varepsilon w \lambda - \mu_1 - \gamma_1) F_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
 + (\lambda + x(1 - j\varepsilon w)) F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) - j\varepsilon \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + O(\varepsilon^2), \\
 j\varepsilon w a(x) F_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) &= (j\varepsilon w \lambda - \mu_n) F_n^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \alpha_n F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad n = \overline{2, N}, \\
 j\varepsilon w a(x) F_{N+1}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) &= (j\varepsilon w \lambda - \gamma_2) F_{N+1}^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \gamma_0 F_0^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + \gamma_1 (1 + j\varepsilon w) F_1^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^2),
 \end{aligned} \tag{15}$$

Будем искать решение системы (15) в виде:

$$F_k^{(2)}(w, \tau, \varepsilon) = \Phi(w, \tau) \{r_k + j\varepsilon w f_k\} + O(\varepsilon^2), \quad k = \overline{0, N+1}, \tag{16}$$

где  $r_k = r_k(x)$ . Разделив уравнения на  $j\varepsilon w \Phi(w, \tau)$  и в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим

$$\begin{aligned}
 -\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n + x\right) f_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k f_k + \gamma_2 f_{N+1} &= a(x)r_0 - \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w \Phi(w, \tau)} r_0, \\
 -(\mu_1 + \gamma_1) f_1 + (\lambda + x) f_0 &= a(x)r_1 - \lambda r_1 + x(\tau)r_0 + \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w \Phi(w, \tau)} r_0, \\
 -\mu_n f_n + \alpha_n f_0 &= a(x)r_n - \lambda r_n, \quad n = \overline{2, N}, \\
 -\gamma_2 f_{N+1} + \gamma_0 f_0 + \gamma_1 f_1 &= a(x)r_{N+1} - \lambda r_{N+1} - \gamma_1 r_1.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Применяя принцип суперпозиции для неоднородных систем, решение  $f(x)$  этой системы уравнений запишем в виде суммы

$$f_k = C r_k + g_k - \varphi_k \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w \Phi(w, \tau)}, \tag{18}$$

и подставив его в (17), получим две системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 -\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n + x\right) \varphi_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k \varphi_k + \gamma_2 \varphi_{N+1} &= r_0, \\
 -(\mu_1 + \gamma_1) \varphi_1 + (\lambda + x) \varphi_0 &= -r_0, \\
 -\mu_n \varphi_n + \alpha_n \varphi_0 &= 0, \quad n = \overline{2, N}, \\
 -\gamma_2 \varphi_{N+1} + \gamma_0 \varphi_0 + \gamma_1 \varphi_1 &= 0,
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 -\left(\lambda + \gamma_0 + \sum_{n=2}^N \alpha_n + x\right) g_0 + \sum_{k=1}^N \mu_k g_k + \gamma_2 g_{N+1} &= a(x)r_0, \\
 -(\mu_1 + \gamma_1) g_1 + (\lambda + x) g_0 &= a(x)r_1 - \lambda r_1 + x r_0, \\
 -\mu_n g_n + \alpha_n g_0 &= a(x)r_n - \lambda r_n, \quad n = \overline{2, N}, \\
 -\gamma_2 g_{N+1} + \gamma_0 g_0 + \gamma_1 g_1 &= a(x)r_{N+1} - \lambda r_{N+1} - \gamma_1 r_1.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Обратим внимание на систему уравнений (19). Если мы продифференцируем по  $x$  систему уравнений (8), то полученная система идентична системе уравнений (19), из чего можем сделать вывод, что

$$\varphi_k = \varphi_k(x) = r'_k(x), \sum_{k=0}^{N+1} \varphi_k = 0,$$

где последнее соотношение получено путем дифференцирования условия нормировки для распределения  $r_k(x)$  по  $x$ .

Далее рассмотрим систему уравнений (20). Данная система имеет бесконечное число решений, так как определитель матрицы системы равен нулю и ранг матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы системы. Наложим на неизвестные  $g_k$  дополнительное условие  $\sum_{k=0}^{N+1} g_k = 0$  и, рассматривая его вместе с системой (20), получим систему уравнений, которая имеет единственное решение.

Обратимся к последнему уравнению системы (11). В этом уравнении сгруппируем слагаемые порядка малости не выше  $\varepsilon^2$  и подставим разложение (16) в полученное уравнение с учетом (8), разделим уравнение на  $\varepsilon^2$  и перейдем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , откуда с учетом разложения (18) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = (jw)^2 \left\{ xr_0 - xg_0 + \gamma_1 g_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} g_n \right\} \Phi(w, \tau) - \\ - (jw)^2 \left\{ -x\varphi_0 + \gamma_1 \varphi_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} \varphi_n - r_0 \right\} \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{w} + \frac{(jw)^2}{2} \left\{ -xr_0 + \gamma_1 r_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} r_n \right\} \Phi(w, \tau). \end{aligned}$$

Обратим внимание на множитель

$$-x\varphi_0 + \gamma_1 \varphi_1 + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} \varphi_n - r_0 = -xr'_0(x) + \gamma_1 r'_1(x) + \lambda \sum_{n=1}^{N+1} r'_n(x) - r_0(x) = a'(x).$$

Обозначим также

$$b(x) = a(x) + 2 \left( -xg_0(x) + \gamma_1 g_1(x) + \lambda \sum_{k=1}^{N+1} g_k(x) + xr_0(x) \right). \quad (22)$$

Тогда уравнение переписется в виде:

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = a'(x)w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} + b(x) \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau), \quad (23)$$

которое совпадает с (12). Теорема доказана.

Применяя обратное преобразование Фурье к уравнению (23), мы получим уравнение Фоккера–Планда для некоторого диффузионного процесса  $y(\tau)$ . Дальнейшая работа с уравнением подробно описана в работе [20].

Полученные функции  $a(x)$  и  $b(x)$  являются коэффициентами переноса и диффузии диффузионного процесса, аппроксимирующего число заявок на орбите в исследуемой системе. Стационарная плотность вероятностей аппроксимирующего случайного процесса имеет следующий вид:

$$\Pi(z) = \frac{C}{b(z)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma_0} \int_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\},$$

где  $C$  – нормирующая константа. Диффузионную аппроксимацию строим по формуле

$$PD(i) = \frac{\Pi(i\sigma)}{\sum_{n=0}^{\infty} \Pi(n\sigma)}. \quad (24)$$

## 5. Точность аппроксимации

Точность аппроксимации  $PD(i)$  определим с помощью расстояния Колмогорова  $\Delta_1 = \max_{0 \leq i < \infty} \left| \sum_{v=0}^i (P(v) - PD(v)) \right|$ , которое показывает разницу между распределением  $PD(i)$  и  $P(i)$ , где  $PD(i)$  получено по формуле (24), а аппроксимация  $P(i)$  построена на основе имитационной модели

системы. Для сравнения мы также покажем точность гауссовской аппроксимации  $\Delta_2$ , полученной в предельном условии  $\sigma \rightarrow 0$ , которое также использовалось для построения диффузионной аппроксимации. Аппроксимацию будем полагать приемлемой, если расстояние Колмогорова для нее  $< 0,05$ . Положим  $N = 3$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\mu_1 = 4$ ,  $\mu_2 = 2$ ,  $\mu_3 = 3$ ,  $\mu_4 = 4$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\alpha_3 = 3$ ,  $\alpha_4 = 4$ ,  $\gamma_0 = 0,1$ ,  $\gamma_1 = 0,2$ ,  $\gamma_2 = 1$ .

#### Расстояние Колмогорова

	$\sigma = 10$	$\sigma = 5$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0,5$	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 0,05$
$\Delta_1$	0,065	<b>0,039</b>	<b>0,023</b>	<b>0,022</b>	<b>0,013</b>	<b>0,011</b>
$\Delta_2$	0,185	0,147	0,089	0,074	<b>0,047</b>	<b>0,045</b>

Для указанных значений параметров область значений параметра  $\sigma$ , для которого аппроксимация является приемлемой, определяется неравенством  $\sigma < 10$ . Из таблицы видно, что точность диффузионной аппроксимации в среднем в 3–4 раза выше точности гауссовской аппроксимации.

#### Заключение

В предложенной работе рассмотрена диффузионная аппроксимация для числа заявок на орбите марковской RQ-системы с разнотипными вызываемыми заявками и ненадежным прибором. Построена аппроксимация распределения вероятностей числа заявок на орбите указанной системы. Численные результаты показывают, что точность диффузионной аппроксимации растет с уменьшением параметра  $\sigma$ . Однако несмотря на то, что предельное условие имеет вид  $\sigma \rightarrow 0$ , аппроксимация является удовлетворительной и для значений параметра  $\sigma < 10$ , которые, на взгляд авторов, далеки от предельных.

Также диффузионная аппроксимация имеет более широкую область применимости, чем гауссовская аппроксимация, построенная в статье [21]. Это следует из результатов численного эксперимента, где при тех же значениях параметров системы гауссовская аппроксимация имеет точность в 3–4 раза ниже, чем диффузионная, в смысле расстояния Колмогорова. Таким образом, полученные в статье результаты расширяют область применимости асимптотических аппроксимаций, полученных в работах [18, 19, 21].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Artalejo J.R., Gómez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Berlin : Springer Science and Business Media, 2008. 321 p.
2. Falin G., Templeton J.G.C. Retrial queues. London : Chapman & Hall, 1997. 324 p.
3. Koole G., Mandelbaum A. Queueing models of call centers: An introduction // Annals of Operations Research. 2002. V. 113, № 4. P. 41–59.
4. Deslauriers A., L'Ecuyer P., Pichitlamken J., Ingolfsson A., Avramidis A.N. Markov chain models of a telephone call center with call blending // Computers & operations research. 2007. V. 34, № 6. P. 1616–1645.
5. Stolletz R. Performance analysis and optimization of inbound call centers. Berlin : Springer Science & Business Media, 2003. 215 p.
6. Artalejo J.R., Phung-Duc T. Markovian retrial queues with two way communication // Journal of industrial and management optimization. 2012. V. 8, № 4. P. 781–806.
7. Artalejo J.R., Phung-Duc T. Single server retrial queues with two way communication // Applied Mathematical Modelling. 2013. V. 37, № 4. P. 1811–1822.
8. Phung-Duc T., Rogiest W. Two way communication retrial queues with balanced call blending // Lecture Notes in Computer Science. 2012. V. 7314. P. 16–31.
9. Paul S., Phung-Duc T. Retrial Queueing Model with Two-Way Communication, Unreliable Server and Resume of Interrupted Call for Cognitive Radio Networks // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 912. P. 213–224.
10. Nazarov A., Phung-Duc T., Paul S. Unreliable Single-Server Queue with TwoWay Communication and Retrials of Blocked and Interrupted Calls for Cognitive Radio Networks // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 919. P. 276–287.
11. Kumar M.S., Dadlani A., Kim K. Performance analysis of an unreliable M/G/1 retrial queue with two-way communication // Operational Research. 2020. V. 20. № 4. P. 1–14.
12. Kuki A., Berczes T., Sztrik J., Toth A. Reliability analysis of a two-way communication system with searching for customers // 2019 International Conference on Information and Digital Technologies (IDT). IEEE, 2019. P. 260–265.
13. Toth A., Sztrik J., Kuki A., Berczes T., Effosinin D. Reliability analysis of finite-source retrial queues with outgoing calls using simulation // 2019 International Conference on Information and Digital Technologies (IDT). IEEE, 2019. P. 504–511.

14. Chen P., Zhou Y. Equilibrium balking strategies in the single server queue with setup times and breakdowns // *Operational Research*. 2015. V. 15, № 2. P. 213–231.
15. Chang J., Wang J. Unreliable M/M/1/1 retrial queues with set-up time // *Quality Technology & Quantitative Management*. 2018. V. 15, № 5. P. 589–601.
16. Phung-Duc T. Single server retrial queues with setup time // *Journal of Industrial & Management Optimization*. 2017. № 3. P. 1329–1345.
17. Chang F.M., Liu T.H., Ke J.C. On an unreliable-server retrial queue with customer feedback and impatience // *Applied Mathematical Modelling*. 2018. V. 55. P. 171–182.
18. Nazarov A.A., Paul S.V., Lizyura O.D. Two-way communication retrial queue with unreliable server and multiple types of outgoing calls // *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*. 2020. V. 28, № 1. P. 49–61.
19. Nazarov A., Paul S., Lizyura O. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with unreliable server and multiple types of outgoing calls // *Modern stochastic models and problems of actuarial mathematics*. 2020. P. 40–41.
20. Nazarov A., Phung-Duc T., Paul S., Lizyura O. Asymptotic-Diffusion Analysis for Retrial Queue with Batch Poisson Input and Multiple Types of Outgoing Calls // *Lecture Notes in Computer Science*. 2019. V. 11965. P. 207–222.
21. Шульгина К.С., Пауль С.В. Асимптотический анализ RQ-системы с вызываемыми заявками и ненадежным прибором // Труды Томского государственного университета. 2020. Т. 305: Материалы VIII международной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем». С. 309–314.

Поступила в редакцию 12 августа 2021 г.

Nazarov A.A., Paul S.V., Lizyura O.D., Shulgina K.S. (2021) ASYMPTOTIC-DIFFUSION ANALYSIS OF RETRIAL QUEUE WITH TWO-WAY COMMUNICATION AND UNRELIABLE SERVER. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 57. pp. 74–83

DOI: 10.17223/19988605/57/8

In this paper Markovian retrial queue with multiple types of outgoing calls and unreliable server, which could be used as a mathematical model of a call center is considered. Incoming calls arrive at system according to a Poisson process with rate  $\lambda$ . Service times of incoming calls follow the exponential distribution with rate  $\mu_1$ . If the server is idle upon arrival of an incoming call, it occupies the server. If the server is busy, an incoming call joins the orbit and makes a random delay for exponentially distributed time with parameter  $\sigma$ . From the orbit, an incoming call retries to occupy the server and behaves the same as a primary incoming call.

On the other hand, the server makes outgoing calls after some exponentially distributed idle time. We assume that there are several types of outgoing calls whole durations follow distinct exponential distributions with parameter depending on the type of outgoing call.

In our system, the server is aim to breakdowns. The duration of periods between breakdowns is exponentially distributed with parameter:  $\gamma_0$ , if the server is idle and  $\gamma_1$ , if the incoming call is in service. The recovery rate is equal to  $\gamma_2$ . We assume that the server cannot be broken while serving outgoing calls due to the fact that in such case the server initiates the service itself.

A random process of the number of incoming calls at the system is considered. The aim of the research is to derive stationary probability distribution for this process using limiting distribution of corresponding diffusion process. We derive Kolmogorov system of differential equations and solve it in the limit by  $\sigma \rightarrow 0$ .

The drift coefficient for normalized number of calls in the system (Theorem 1) is obtained. After that, we extend the study to obtain diffusion coefficient and derive the equation for limiting characteristic function of normalized number of calls in the system (Theorem 2).

Based on the obtained coefficients, we have built the diffusion approximation of the probability distribution of the number of incoming calls in the system.

Numerical example shows high accuracy of the obtained approximation. In this section, we also compare the accuracy of asymptotic-diffusion method and asymptotic analysis method, which gives Gaussian approximation under the same limit condition  $\sigma \rightarrow 0$ . We show that diffusion approximation have more wide area of applicability.

Keywords: Retrial queue; unreliable server; outgoing calls; asymptotic-diffusion analysis method; diffusion approximation.

*NAZAROV Anatoly Andreevich* (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

*PAUL Svetlana Vladimirovna* (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: paulsv82@mail.ru

*LIZYURA Olga Dmitrievna* (Assistant Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: oliztsu@mail.ru

*SHULGINA Ksenia Sergeevna* (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: shulgina19991999@mail.ru

REFERENCES

1. Artalejo, J.R. & Gómez-Corral, A. (2008) *Retrial Queueing Systems: A Computational Approach*. Berlin: Springer Science and Business Media.
2. Falin, G. & Templeton, J.G.C. (1997) *Retrial Queues*. London: Chapman & Hall.
3. Koole, G. & Mandelbaum, A. (2002) Queueing models of call centers: An introduction. *Annals of Operations Research*. 113(1-4). pp. 41–59.
4. Deslauriers, A., L'Ecuyer, P., Pichitlamken, J., Ingolfsson, A. & Avramidis, A. N. (2007) Markov chain models of a telephone call center with call blending. *Computers & Operations Research*. 34(6). pp. 1616–1645.
5. Stolletz, R. (2003) *Performance analysis and optimization of inbound call centers*. Berlin: Springer Science and Business Media.
6. Artalejo, J.R. & Phung-Duc, T. (2012) Markovian retrial queues with two-way communication. *Journal of Industrial and Management Optimization*. 8(4). pp. 781–806. DOI: 10.3934/jimo.2012.8.781
7. Artalejo, J.R. & Phung-Duc, T. (2013) Single server retrial queues with two way communication. *Applied Mathematical Modelling*. 37(4). pp. 1811–1822. DOI: 10.1016/j.apm.2012.04.022
8. Phung-Duc, T. & Rogiest, W. (2012) Two-way communication retrial queues with balanced call blending. *Lecture Notes in Computer Science*. 7314. pp. 16–31. DOI: 10.1007/978-3-642-30782-9\_2
9. Paul, S. & Phung-Duc, T. (2018) Retrial Queueing Model with Two-Way Communication, Unreliable Server and Resume of Interrupted Call for Cognitive Radio Networks. *Communications in Computer and Information Science*. 912. pp. 213–224. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5\_17
10. Nazarov, A., Phung-Duc, T. & Paul, S. (2018) Unreliable Single-Server Queue with Two-Way Communication and Retrials of Blocked and Interrupted Calls for Cognitive Radio Networks. *Communications in Computer and Information Science*. 919. pp. 276–287. DOI: 10.1007/978-3-319-99447-5\_24
11. Kumar, M.S., Dadlani, A. & Kim, K. (2018) Performance analysis of an unreliable M/G/1 retrial queue with two-way communication. *Operational Research*. 20(4). pp. 1–14.
12. Kuki, A., Berczes, T., Sztrik, J. & Toth, A. (2019) Reliability analysis of a two-way communication system with searching for customers. *2019 International Conference on Information and Digital Technologies (IDT), IEEE*. pp. 260–265.
13. Toth, A., Sztrik, J., Kuki, A., Berczes, T. & Effosinin, D. (2019) Reliability analysis of finite-source retrial queues with outgoing calls using simulation. *2019 International Conference on Information and Digital Technologies (IDT), IEEE*. pp. 504–511.
14. Chen, P. & Zhou, Y. (2015) Equilibrium balking strategies in the single server queue with setup times and breakdowns. *Operational Research*. 15(2). pp. 213–231. DOI: 10.1007/s12351-015-0174-0
15. Chang, J. & Wang, J. (2018) Unreliable M/M/1/1 retrial queues with set-up time. *Quality Technology & Quantitative Management*. 15(5). pp. 589–601. DOI: 10.1080/16843703.2017.1320459
16. Phung-Duc, T. (2017) Single server retrial queues with setup time. *Journal of Industrial & Management Optimization*. 13(3). pp. 1329–1345. DOI: 10.3934/jimo.2016075
17. Chang, F.M., Liu, T.H. & Ke, J.C. (2018) On an unreliable-server retrial queue with customer feedback and impatience. *Applied Mathematical Modelling*. 55. pp. 171–182. DOI: 10.1016/j.apm.2017.10.025
18. Nazarov, A.A., Paul, S.V. & Lizyura, O.D. (2020) Two-way communication retrial queue with unreliable server and multiple types of outgoing calls. *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*. 28(1). pp. 49–61. DOI: 10.22363/2658-4670-2020-28-1-49-61
19. Nazarov, A., Paul, S. & Lizyura, O. (2020) Asymptotic analysis of Markovian Retrial Queue with Unreliable Server and Multiple Types of Outgoing Calls. *Modern stochastic models and problems of actuarial mathematics*. April 24–25, 2020, Karshi State University, Uzbekistan. pp. 40–41.
20. Nazarov, A., Phung-Duc, T., Paul, S. & Lizyura, O. (2019) Asymptotic-Diffusion Analysis for Retrial Queue with Batch Poisson Input and Multiple Types of Outgoing Calls. *Lecture Notes in Computer Science*. 11965. pp. 207–222. DOI: 10.1007/978-3-030-36614-8\_16
21. Shulgina, K.S. & Paul, S.V. (2020) Asymptotic Analysis of Retrial Queue with Two-Way Communication and Unreliable Server. *Trudy Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*. 305. pp. 309–314.

УДК 681.324

DOI: 10.17223/19988605/57/9

**П.В. Приступа, П.А. Михеев, В.В. Поддубный, С.П. Сущенко****ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРЯМОЙ КОРРЕКЦИИ ОШИБОК В ТРАНСПОРТНОМ ПРОТОКОЛЕ НА ВНУТРИСЕГМЕНТНОМ УРОВНЕ**

Рассмотрена математическая модель транспортного соединения, управляемого надежным транспортным протоколом с прямой коррекцией ошибок в виде цепи Маркова с дискретным временем, учитывающая влияние протокольных параметров, достоверности передачи, круговой задержки и параметров прямой коррекции ошибок на пропускную способность транспортного соединения. Проведен анализ зависимости преимуществ использования прямой коррекции ошибок перед классическим транспортным протоколом.

**Ключевые слова:** транспортный протокол; прямая коррекция ошибок; цепь Маркова; пропускная способность; уровень потерь.

Наиболее значимым показателем качества взаимодействия приложений компьютерных сетей является пропускная способность транспортных соединений. Этот операционный параметр в значительной мере определяется транспортным протоколом и параметрами тракта передачи данных [1]. Исследованию вероятностно-временных характеристик транспортных соединений посвящен широкий спектр работ [2–20]. Моделирование транспортного протокола с решающей обратной связью выполнено в [2–8], имитационное исследование его быстродействия проведено в [9–10]. Однако моделирование выполнено при существенных ограничениях на протокольные параметры и факторы, определяющие быстродействие транспортного соединения. Модель состязания конкурирующих абонентов за полосу пропускания транспортного соединения предложена в [11], но только для случая операционного режима селективного повтора. Современные транспортные протоколы для снижения доли повторных передач применяют методы прямой коррекции ошибок [12–20]. Примером такого технологического решения является протокол QUIC кампании Google [12]. В [13–14] выполнено имитационное исследование набора процедурных сценариев транспортного протокола с простейшими методами коррекции ошибок для различных сред передачи данных. Ряд натурных экспериментов на широком спектре сетевого оборудования, проведенных в [15–18], иллюстрирует целесообразность применения механизмов прямой коррекции ошибок для сетевых сервисов реального времени, а также в мультимедийных приложениях. В данных работах выполнена оценка трудоемкости коррекции частично искаженных данных, накладных расходов и ожидаемых технологических ограничений в различных средах передачи данных. Анализ технологии прямой коррекции ошибок в межсегментном пространстве транспортного протокола, проведенный в [19], позволил найти области предпочтительного применения технологии для редуцированного признакового пространства протокольных параметров и характеристик коммуникационной среды. Эффективность применения различных методов прямой коррекции ошибок (поразрядное сложение по модулю 2 с помощью операции XOR, коды Рида–Соломона, сверточные коды) в рамках протокола QUIC исследуется авторами [20]. По результатам стендовых экспериментов отмечается увеличение производительности протокола QUIC с применением технологии прямой коррекции ошибок для маршрутов с большой круговой задержкой и значительным уровнем потерь. Кроме того, авторы делают вывод о целесообразности применения методов прямой коррекции ошибок на канальном и транспортном уровнях.

Следует отметить, что исследование эффективности использования методов прямой коррекции ошибок на различных уровнях сетевой архитектуры [12–20] проводилось преимущественно на качественном уровне, численно и в стендовых экспериментах при значительных ограничениях на харак-

теристики каналов связи, параметры протоколов обмена и коррекции ошибок. В данной работе рассмотрена математическая модель транспортного соединения в фазе информационного переноса с механизмом прямой коррекции ошибок в виде цепи Маркова с дискретным временем. На основе модели предложен анализ условий, обеспечивающих преимущество в быстродействии транспортного протокола с технологией прямой коррекции ошибок в пространстве каждого сегмента перед классическим транспортным протоколом.

### 1. Модель транспортного соединения

Рассмотрим процесс переноса данных между абонентами транспортного протокола, основанного на алгоритме с решающей обратной связью [1] и функционирующего в режиме селективного или группового отказа. Примером семейства таких надежных протоколов является доминирующий в современных компьютерных сетях протокол TCP [Ibid.]. В режиме селективного отказа повторной передаче от источника подлежат только непринятые получателем протокольные блоки данных (сегменты), а в режиме группового отказа – все, начиная с первого неприятого [Ibid.]. Полагаем, что взаимодействующие абоненты имеют неограниченный поток данных для передачи, а обмен выполняется протокольными блоками данных транспортного протокола (сегментами) одинаковой длины. Подтверждения получателя о корректности приема данных переносятся в сегментах встречного потока. Считаем, что управляющий транспортный протокол имеет дополнительную логику внутрисегментной прямой коррекции ошибок. При этом источник перед отправкой каждого сегмента делит его на  $A \geq 1$  фрагментов равного размера, к ним добавляет  $B - A$ ,  $B \geq A$ , избыточных фрагментов той же длины и передает в транспортное соединение расширенный сегмент, состоящий из  $B$  фрагментов. Каждый фрагмент снабжается служебной информацией, позволяющей обнаружить в нем возможные ошибки и восстановить из  $B$  фрагментов исходный сегмент в точке приема. Искажение до  $B - A$  произвольных фрагментов расширенного сегмента позволяет на стороне получателя восстановить исходный сегмент и не инициировать повторные передачи. Пусть  $f_f$  и  $f_r$  – достоверность передачи фрагмента вдоль транспортного соединения от источника до адресата и обратно соответственно. Тогда вероятность доставки исходного сегмента адресату с учетом возможности его восстановления получателем

с помощью механизма прямой коррекции ошибок задается соотношением  $\Psi_f = \sum_{i=A}^B C_i^B f_f^i (1 - f_f)^{B-i}$ , а достоверность получения отправителем подтверждения о корректности доставки составит  $\Psi_r = \sum_{i=A}^B C_i^B f_r^i (1 - f_r)^{B-i}$ . Данные параметрические зависимости от  $A$  и  $B$  определяют математическую

модель различных методов прямой коррекции ошибок. Считаем, что участки переприема вдоль тракта передачи данных имеют одинаковое быстродействие в обоих направлениях, а длительность цикла передачи расширенного сегмента в отдельном звене составляет  $t$ . В общем случае длина пути от источника до адресата, переносящего информационный поток, и длина обратного пути, по которому передаются подтверждения на принятые сегменты, могут быть различными. Полагаем, что длина тракта передачи данных, выраженная в количестве участков переприема, в прямом направлении равна  $D_f \geq 1$ . Обратный тракт, по которому доставляются подтверждения отправителю о корректности приема последовательности сегментов, имеет длину  $D_r \geq 1$ . Считаем, что потерь сегментов из-за блокировок буферной памяти в узлах тракта не происходит. Управление потоком данных реализуется механизмом скользящего окна [Ibid.] размера  $W \geq 1$ .

Процесс информационного переноса расширенных сегментов в транспортном соединении может быть описан Марковским процессом с дискретным временем, кратным длительности такта  $t$ , в силу того что время между получениями подтверждений имеет геометрическое распределение с параметром  $\Psi$ , [2]. Цепь Маркова задает активность отправителя и изменение размера очереди расширенных сегментов в источнике, ожидающих подтверждения. Область возможных состояний

цепи Маркова определяется длительностью тайм-аута ожидания подтверждения  $S$ , выраженной в количестве циклов продолжительности  $t$ . Размер тайм-аута связан с длиной тракта и шириной окна неравенствами  $S > W$ ,  $S \geq D_f + D_r$ . Сумма длин прямого и обратного трактов может быть интерпретирована как круговая задержка  $D = D_f + D_r$ , выраженная в длительностях  $t$  (без учета потерь протокольных блоков при передаче вдоль тракта). Состояниям цепи Маркова  $i = \overline{0, W}$  соответствует размер очереди переданных, но не подтвержденных сегментов в источнике потока, а состояниям  $i = \overline{W + 1, S - 1}$  – время, в течение которого отправитель неактивен и ожидает получение подтверждения о корректности приема переданной последовательности из  $W$  сегментов. Из нулевого состояния в  $(D - 1)$ -е источник продвигается с каждым тактом  $t$  с вероятностью детерминированного события. В состояниях  $i \geq D - 1$  после истечения очередного дискретного цикла  $t$  к отправителю начинают прибывать подтверждения, и в зависимости от результатов доставки отправитель передает новые сегменты (при положительном подтверждении) либо повторно – искаженные. Завершение цикла пребывания в состоянии  $D - 1$  соответствует времени доведения первого сегмента до адресата и получения на него подтверждения. Дальнейший рост номера состояния происходит с вероятностью искажения подтверждения  $1 - \Psi_r$  в обратном тракте. В состояниях  $i \geq D - 1$  в режиме селективного отказа получение подтверждения порождает переход в  $(D - 1)$ -е состояние при  $W \geq D$  или в состояние  $D + W - 2 - i$  при  $W \leq D$ . В режиме группового отказа для исходных состояний  $i \geq D - 1$  возврат в состояния  $D - 1$  (при  $W \geq D$ ) или  $D + W - 2 - i$  (при  $W \leq D$ ) происходит при получении подтверждения только в случае успешной доставки адресату дошедших к данному моменту до получателя  $i - D + 1$  расширенных сегментов, в противном случае следует возврат в нулевое состояние, поскольку очередь переданных, но не подтвержденных сегментов в этот момент обнуляется. В силу того, что в состояниях  $i \geq W$  источник приостанавливает отправку сегментов, получение подтверждений в состояниях  $i = \overline{W, D + W - 3}$  приводит к переходу в состояния  $D + W - 2 - i$ , а из состояний  $i = \overline{D + W - 2, S - 2}$  – в нулевое. Это справедливо для селективного отказа, а в режиме группового отказа указанные изменения состояний реализуются при поступлении положительных подтверждений. В состоянии  $S - 1$  истекает тайм-аут ожидания подтверждения от получателя о корректности принятых сегментов и происходит безусловный переход в нулевое состояние во всех режимах отказа.

Для цепи Маркова с данной структурой переходных вероятностей распределение вероятностей состояний  $P_i$ ,  $i = \overline{0, S - 1}$ , определяется соотношениями между протокольными параметрами  $W$ ,  $S$  и длительностью круговой задержки  $D$  и с точностью до параметров  $\Psi_f$  и  $\Psi_r$  имеет функциональный вид, полученный в [2]. Основной операционной характеристикой транспортного протокола является его пропускная способность, определяемая параметрами тракта передачи данных, накладными расходами и особенностями протокольных процедур управления передачей [Ibid.]. Нормированное быстродействие транспортного соединения определяется средним числом доставленных получателю неискаженных сегментов (с учетом режима отказа [1]) за среднее время между двумя последовательными поступлениями подтверждений [2]. Поскольку время между приходами подтверждений распределено по геометрическому закону с параметром  $\Psi_r$ , то среднее время между приходами подтверждений в длительностях цикла  $t$  составит  $\bar{T} = 1/\Psi_r$ . Тогда для селективной процедуры отказа пропускная способность определится следующей зависимостью [Ibid.]:

$$Z_s(W, S, D, A, B) = \Psi_r \left\{ \sum_{i=D-1}^{D+W-2} (i - D + 2) \Psi_f P_i + W \Psi_f \sum_{i=D+W-1}^{S-1} P_i \right\}.$$

Пропускная способность транспортного соединения для режима группового отказа с учетом повторной передачи всех сегментов, начиная с первого не принятого [2], задается соотношением

$$Z_g(W, S, D, A, B) = \Psi_f \Psi_r \left\{ \sum_{i=D-1}^{D+W-2} \frac{1 - \Psi_f^{i-D+2}}{1 - \Psi_f} P_i + \frac{1 - \Psi_f^W}{1 - \Psi_f} \sum_{i=D+W-1}^{S-1} P_i \right\}.$$

## 2. Анализ условий предпочтения прямой коррекции ошибок

Транспортный протокол с прямой коррекцией ошибок в пространстве каждого сегмента предполагает разбиение на стороне отправителя информационного сегмента на  $A$  фрагментов одинаковой длины и снабжение их  $B - A \geq 0$ ,  $B \geq A$ , избыточными фрагментами того же размера. Наличие в последовательности информационных фрагментов дополнительных фрагментов с поддержкой исправления ошибок (например, кодами четности, кодами Рида–Соломона и др.) позволяет восстановить сегмент на стороне получателя при искажении до  $B - A$  любых фрагментов расширенного сегмента. Получатель при приеме расширенного сегмента с искаженными фрагментами пытается восстановить его и по результатам восстановления высылает отправителю подтверждение, упакованное в аналогичный информационный расширенный сегмент встречного потока. Эффективная реализация технологии прямой коррекции ошибок предполагает поиск параметров  $A$  и  $B$ , обеспечивающих максимальное быстродействие транспортного соединения с заданными параметрами транспортного протокола, известной круговой задержкой и измеренным в результате мониторинга уровнем ошибок. Наличие избыточных фрагментов в передаваемой последовательности увеличивает вероятность доставки получателю сегмента, однако достигается это за счет роста накладных расходов в виде времени переноса избыточных данных. Отсюда возникает задача поиска в многомерном признаковом пространстве области значений характеристик транспортного соединения ( $D$ ,  $\Psi_r$ ,  $\Psi_f$ ), параметров транспортного протокола ( $W$ ,  $S$ ) и механизма прямой коррекции ошибок ( $A$ ,  $B$ ), обеспечивающей превосходство транспортного протокола с технологией прямой коррекцией ошибок перед классической протокольной процедурой с решающей обратной связью, не применяющей исправление ошибок. Сравнительный анализ протокольных процедур проведем при равных интенсивностях потоков абонентских данных, предлагаемых к передаче. Зададим относительный выигрыш в быстродействии от применения технологии коррекции ошибок по сравнению с классической протокольной процедурой в виде разности пропускных способностей:  $\Delta(A, B) = Z(W, S, D, A, B) - Z(W, S, D, 1, 1)$ . Начнем анализ значений выигрыша без учета накладных расходов, связанных с необходимостью введения дополнительных заголовков и концевиков в каждый фрагмент исходного сегмента для диагностики в них ошибок и корректной сборки сегмента из набора фрагментов. В общем случае сравнительный анализ в режимах селективного и группового повтора удастся провести только численно. Однако за счет редуцирования размерности признакового пространства область мажорантных положительных значений выигрыша удастся получить в аналитическом виде.

В режиме селективного отказа при абсолютно надежном обратном соединительном пути ( $f_r = 1$ ) либо в случае  $W \rightarrow \infty$  выигрыш упрощается до соотношения

$$\Delta_s(A, B) = K \left( \frac{A \Psi_f}{B} - f_f^A \right), \quad (1)$$

инвариантного к ширине окна ( $K = 1$ ) для нагруженного транспортного соединения ( $W \geq D$ ) и зависящего от размера окна ( $K = 1/[D - W + 1]$ ) – для недогруженного ( $W < D$ ). Для технологических параметров прямой коррекции ошибок, удовлетворяющих условию  $B = A + 1$ ,  $A \geq 1$ , нетрудно видеть,

что область положительных значений выигрыша  $\Delta_s(A, A + 1) = K f_f^A \left( A - 1 - \frac{A^2 f_f}{A + 1} \right)$  существует при

$A \geq 2$  в интервале  $f_f \in \left( 0, 1 - \frac{1}{A^2} \right)$ . Максимум выигрыша  $\Delta_s(A, A + 1) = K \frac{(A - 1)^{A+1}}{A^A (A + 1)}$  достигается при

значении достоверности  $f_f = 1 - \frac{1}{A}$ . С ростом параметра  $A$  положение максимума выигрыша дрейфует

вправо по координате  $f_f$  (рис. 1). Максимально достижимый уровень выигрыша от достоверности доставки фрагментов данных, огибающий доминирующие кривые при различных  $A$ , имеет вид, представленный на рис. 2. При этом максимальный выигрыш с ростом  $A$  увеличивается вдоль кривой

с насыщением от значения  $\Delta_s(2,3) = K/12$  до  $\Delta_s(\infty, \infty) = K/e$  (рис. 3). Из вида зависимостей, представленных на рис. 1, нетрудно видеть, что оптимальные значения целочисленного параметра прямой коррекции ошибок  $A$  определяются достоверностью доставки получателю фрагментов данных  $f_f$ . Значения  $f_f$ , разделяющие оптимальные значения коэффициента разбиения сегмента на фрагменты, равные  $A$  и  $A + 1$ , определяет условие  $\Delta_s(A, A+1) = \Delta_s(A+1, A+2)$ ,  $A \geq 2$ . Отсюда находим точки разделения областей оптимальности:

$$f_f = \frac{A(A+2)(2A+1) - \sqrt{A^4 + 12A^3 + 32A^2 + 28A + 8}}{2(A+1)^3}.$$

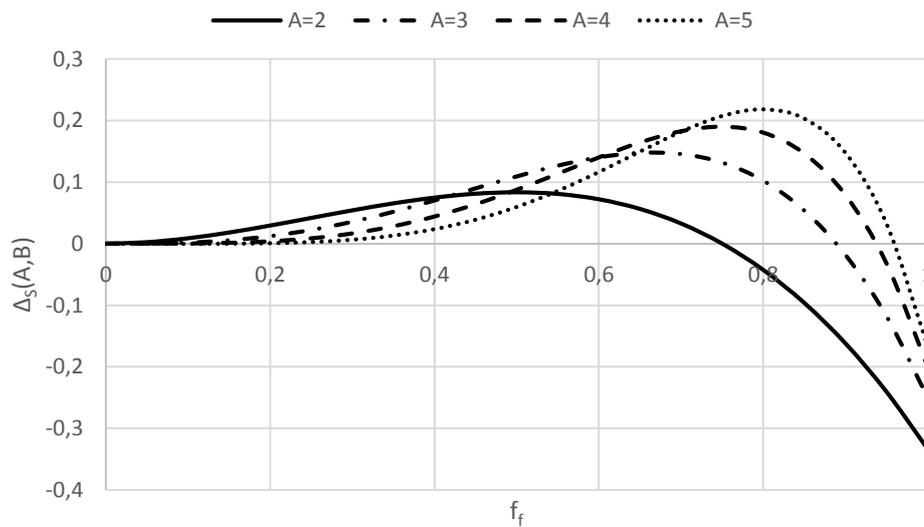


Рис. 1. Зависимость выигрыша в селективном режиме повтора от достоверности доставки фрагментов данных при  $W \geq D$ ,  $f_r = 1$ ,  $B = A + 1$  для различных значений коэффициента фрагментации

Fig. 1. Dependence of the gain in the selective retry mode on the reliability of delivery of data fragments at  $W \geq D$ ,  $f_r = 1$ ,  $B = A + 1$  for different values of the fragmentation coefficient

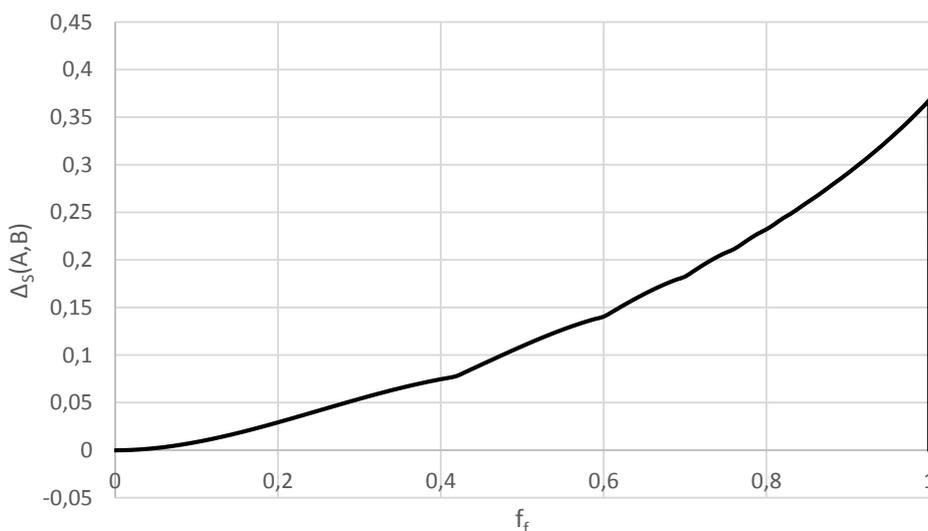


Рис. 2. Зависимость максимально достижимого выигрыша в селективном режиме повтора от достоверности доставки фрагментов данных при  $W \geq D$ ,  $f_r = 1$ ,  $B = A + 1$

Fig. 2. Dependence of the maximum achievable gain in the selective repeat mode on the reliability of delivery of data fragments for  $W \geq D$ ,  $f_r = 1$ ,  $B = A + 1$

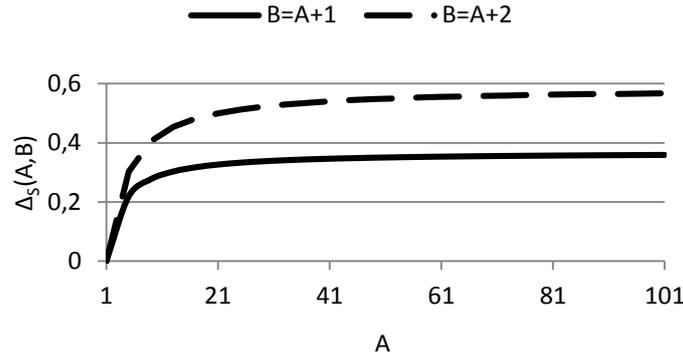


Рис. 3. Зависимость максимальных значений выигрыша в селективном режиме повтора от коэффициента разбиения сегментов на фрагменты при  $f_r = 1$  и различных значениях числа избыточных фрагментов  
 Fig. 3. Dependence of the maximum values of the gain in the selective repeat mode on the coefficient of dividing the segments into fragments for  $f_r = 1$  and different values of the number of redundant fragments

На рис. 4 показаны области оптимальных значений коэффициента разбиения сегмента на фрагменты  $A$ . Таким образом, для нахождения оптимального значения  $A$  достаточно определить, в какую область попадает измеренное в результате мониторинга потерь в транспортном соединении значение  $f_f$ . Для параметров прямой коррекции ошибок  $B = A + 2$ ,  $B = A \geq 1$ , положительный выигрыш достигается на области значений  $f_f \in \left(0, \frac{(A-1)(A+2)}{A(A+1)}\right)$ ,  $A \geq 2$ , а максимум выигрыша – при  $f_f = 1 - \sqrt{\frac{2}{A(A+1)}}$ .

Максимальные значения выигрыша  $\Delta_s(A, A+2) = \left(1 - \sqrt{2/A(A+1)}\right)^A \frac{A-2 + A^2 \sqrt{2/A(A+1)}}{A+2}$  с увеличением  $A$  растут от 0,103 до 0,587 (см. рис. 3). Численные исследования выигрыша для произвольных значений параметров многомерного признакового пространства показывают, что  $\Delta_s(A, B)$  имеет унимодальный характер зависимости от достоверности доставки фрагментов данных в области  $f_f \in (0,1)$  и вид кривой с насыщением от коэффициента разбиения сегмента на фрагменты  $A$ .

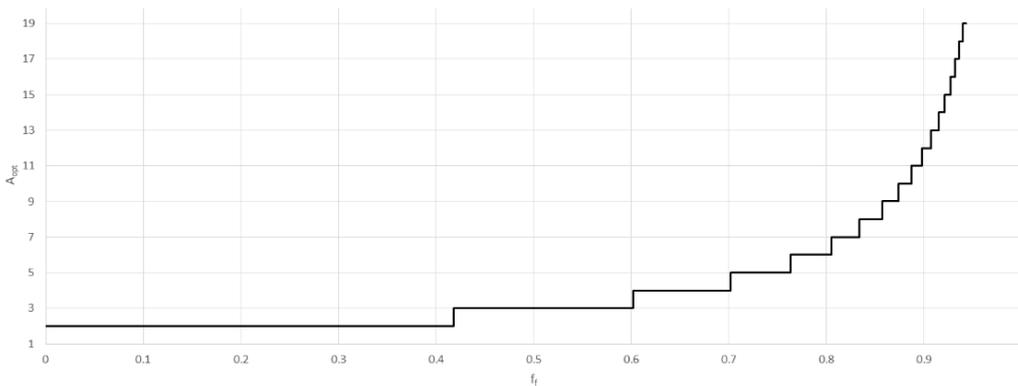


Рис. 4. Области оптимальности коэффициента разбиения сегментов на фрагменты  $A_{opt}$  для селективного режима повтора при  $B = A + 1$ ,  $f_r = 1$   
 Fig. 4. Optimality regions of the partitioning coefficient of segments into fragments  $A_{opt}$  for the selective repetition mode at  $B = A + 1$ ,  $f_r = 1$

В режиме группового повтора для абсолютно надежного обратного тракта передачи данных ( $f_r = 1$ ) выигрыш принимает вид:

$$\Delta_g(A, B) = \frac{A\Psi_f}{B[D - (J-1)\Psi_f]} - \frac{f_f^A}{D - (J-1)f_f^A}, \quad (2)$$

где  $J = W$  при  $W < D$  и  $J = D$  при  $W \geq D$ . Положительные значения выигрыша при  $A=1$ ,  $B=2$  достигаются для достоверности передачи фрагмента в прямом тракте транспортного соединения на интервалах  $f_f \in \left(0, \frac{D-2}{D-1}\right)$ ,  $W \geq D$ ,  $D \geq 3$  и  $f_f \in \left(0, 2 - \frac{D}{W-1}\right)$ ,  $1 + \frac{D}{2} < W < D$ ,  $D \geq 5$ . Для нагруженного ( $W \geq D$ ) и недогруженного ( $W \leq D$ ) транспортного соединения с ростом длительности круговой задержки  $D$  область положительных значений выигрыша расширяется, максимум растет по кривой с насыщением, и его положение сдвигается в область большей достоверности доставки фрагментов  $f_f$  (рис. 5). Зависимость выигрыша от параметра  $A$  при  $B = A + 1$ ,  $A \geq 1$ , так же как и в случае селективного повтора, имеет вид кривой с насыщением. Для недогруженного транспортного соединения ( $1 + \frac{D}{2} < W < D$ ) с расширением окна от значения  $W = 1 + \frac{D}{2}$  до  $W = D - 1$  область положительных значений выигрыша по координате  $f_f$  расширяется, а максимум выигрыша растет и дрейфует вправо (рис. 6). Такой же эффект имеет место с увеличением параметра прямой коррекции ошибок  $A$  для  $B = A + 1$ . При выполнении условия  $W = D - 1$  рост длительности круговой задержки  $D$  приводит к сдвигу вправо по координате  $f_f$  области положительных значений выигрыша и увеличению преимуществ технологии прямой коррекции ошибок (см. рис. 5, б).

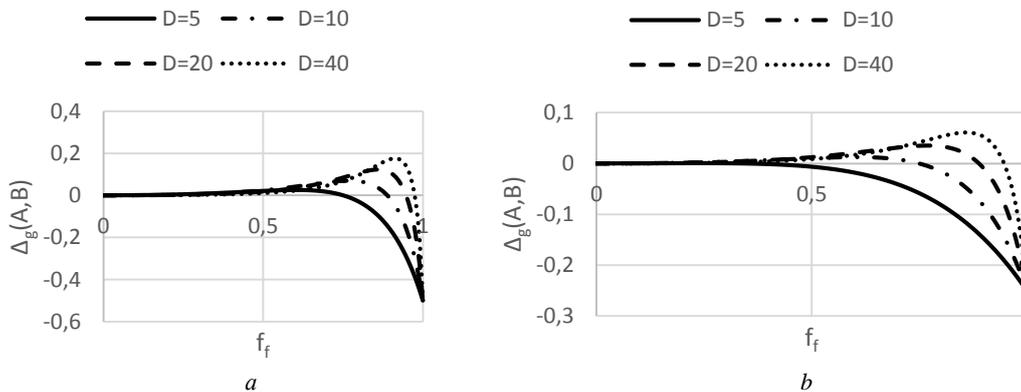


Рис. 5. Зависимость выигрыша в групповом режиме повтора от достоверности доставки фрагментов данных при  $B = A + 1$ ,  $f_r = 1$  для различных значений  $D$  при  $W \geq D$  (a) и  $W = D - 1$  (b)

Fig. 5. Dependence of the gain in the group repetition mode on the reliability of delivery of data fragments for  $B = A + 1$ ,  $f_r = 1$  for different values of  $D$  for  $W \geq D$  (a) and  $W = D - 1$  (b)

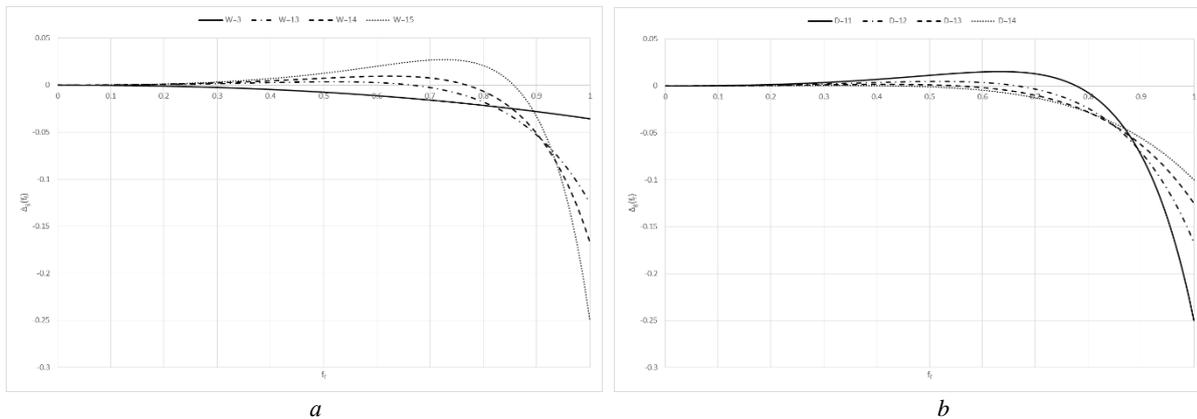


Рис. 6. Зависимость выигрыша в групповом режиме повтора от достоверности доставки фрагментов данных для различных размеров ширины окна  $W$  при  $B = A + 1$ ,  $D = 16$ ,  $f_r = 1$  (a) и для различных длительностей круговой задержки  $D$  при  $B = A + 1$ ,  $W = 10$ ,  $f_r = 1$  (b)

Fig. 6. Dependence of the gain in the group repetition mode on the reliability of delivery of data fragments for different sizes of the window width  $W$  at  $B = A + 1$ ,  $D = 16$ ,  $f_r = 1$  (a) and for different round-trip delay times  $D$  at  $B = A + 1$ ,  $W = 10$ ,  $f_r = 1$  (b)

### 3. Учет накладных расходов реализации

Следует отметить, что при прочих равных условиях с увеличением коэффициента разбиения сегмента на фрагменты (параметра  $A$ ) размер фрагментов снижается и, как следствие, растет достоверность его доставки получателю  $f_f$ . Кроме того, реализация получателем технологической процедуры восстановления сегмента из полученных фрагментов требует снабжения каждого фрагмента дополнительным служебным заголовком размера  $H$ , содержащим контрольную сумму для обнаружения ошибок, данные о взаимном размещении фрагментов в сегменте (смещение от начала сегмента) и, возможно, другую информацию (как это реализовано в IP-протоколе при фрагментации пакетов). Дополнение каждого фрагмента служебной информацией приводит к увеличению времени передачи сегмента в каждом звене транспортного соединения. В связи с этим для корректного сравнительного анализа выигрыша при различных значениях параметра  $A$  необходимо перейти к показателю достоверности доставки получателю отдельного бита и уточнению определения длительности такта  $t$ . Тогда длительность цикла передачи сегмента в отдельном звене  $t$ , выраженная через размер сегмента  $L$ , составит  $t = B \frac{(L-H)/A + H}{C}$ , где  $C$  – физическая скорость передачи данных в звене. Достоверности доставки отдельного фрагмента получателю и приема подтверждения при Марковской модели ошибок примут вид:  $f_f = (1 - r_f)^{(L-H)/A+H}$  и  $f_r = (1 - r_r)^{(L-H)/A+H}$ . Здесь  $r_f$  и  $r_r$  – битовый уровень ошибок в прямом и обратном тракте передачи данных соответственно. Тогда, например, мажорантные соотношения (1) и (2) переписутся следующим образом:

$$\Delta_s(A, B) = KC \frac{A}{L} \left[ \frac{A\Psi_f}{B(1+(A-1)H/L)} - f_f^A \right],$$

$$\Delta_g(A, B) = C \frac{A}{L} \left[ \frac{A\Psi_f}{B(1+(A-1)H/L)[D-(J-1)\Psi_f]} - \frac{f_f^A}{D-(J-1)f_f^A} \right].$$

Нетрудно видеть, что дополнение каждого фрагмента служебной информацией приводит к унимодальной зависимости выигрыша от параметра  $A$  (в отличие от зависимости в виде кривой с насыщением, полученной в предыдущем разделе без учета накладных расходов реализации; см. рис. 3). С одной стороны, коэффициент разбиения сегмента  $A$  следует увеличивать, чтобы повысить вероятность доставки сегментов получателю  $\Psi_f$  (за счет комбинаторного характера зависимости  $\Psi_f$  от  $A$ ) и снизить количество повторных передач. С другой стороны, увеличение параметра  $A$  приводит к росту длительности такта  $t$  и снижению эффективного быстродействия. Численные исследования подтверждают унимодальную зависимость выигрыша от коэффициента  $A$  (рис. 7). Отметим также, что при прочих равных условиях с ростом накладных расходов  $H$  область положительных значений выигрыша сужается по координате  $1 - r$ , а максимальное значение выигрыша снижается.

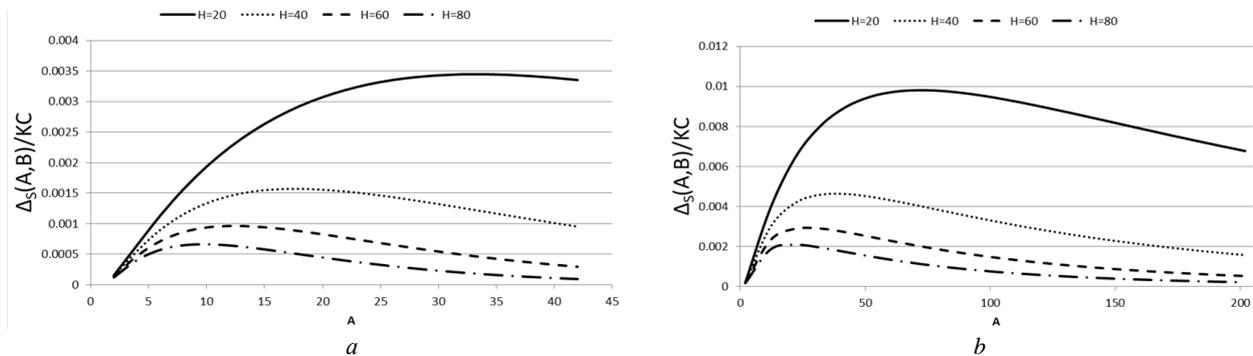


Рис. 7. Зависимость максимального уровня выигрыша от количества фрагментов в сегменте с учетом накладных расходов при  $L = 1\,000$  байт,  $H = 20, 40, 60, 80$  байт,  $r_r = 0$  для  $B = A + 1$  (a) и  $B = A + 2$  (b)

Fig. 7. Dependence of the maximum gain level on the number of fragments in a segment, taking into account overhead costs for  $L = 1\,000$  bytes,  $H = 20, 40, 60, 80$  bytes,  $r_r = 0$  for  $B = A + 1$  (a) and  $B = A + 2$  (b)

## Заключение

В работе предложена модель процесса переноса сегментов данных в транспортном соединении, управляемом надежным транспортным протоколом с технологией прямой коррекции ошибок, реализованной в пространстве каждого сегмента, и подтверждением данных, принятых получателем после процедуры прямой коррекции. Показано, что для всех режимов повтора применение технологии прямой коррекции ошибок выгодно на загруженных транспортных соединениях ( $W \geq D$ ) со значительной круговой задержкой ( $D$ ). Преимущество прямой коррекции ошибок при любом режиме отказа в значительной мере определяется уровнем ошибок в транспортном соединении ( $r_f, r_r$ ), коэффициентом фрагментации исходного сегмента ( $A$ ), числом избыточных фрагментов данных ( $B - A$ ), соотношением между размером окна ( $W$ ) и временем круговой задержки ( $D$ ), а также уровнем накладных расходов реализации технологии. Направлением дальнейших исследований следует выделить задачу обобщения полученных в данной работе результатов на случай соперничества информационных потоков различных абонентских соединений за полосу пропускания маршрута с разделяемыми звеньями тракта передачи данных.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Fall K., Stevens R. TCP/IP Illustrated. 2nd ed. Addison-Wesley Professional, 2012. V. 1: The Protocols. 1017 p. (Addison-Wesley Professional Computing Series).
2. Kokshenev V.V., Mikheev P.A., Sushchenko S.P. Comparative Analysis of the Performance of Selective and Group Repeat Transmission Models in a Transport Protocol // Automation and Remote Control. 2017. V. 78, № 2. P. 247–261.
3. Kokshenev V., Mikheev P., Suschenko S., Tkachyov R. Analysis of the Throughput in Selective Mode of Transport Protocol // Communications in Computer and Information Science. 2016. V. 678. P. 168–181.
4. Bogushevsky D., Mikheev P., Pristupa P., Suschenko S. The Time-Out Length Influence on the Available Bandwidth of the Selective Failure Mode of Transport Protocol in the Load Data Transmission Path // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 919. P. 120–131.
5. Kassa D.F. Analytic Models of TCP Performance : PhD Thesis / University of Stellenbosch. 2005. 199 p.
6. Giordano S., Pagano M., Russo F., Secchi R. Modeling TCP Startup Performance // Journal of Mathematical Sciences. 2014. V. 200, is. 4. P. 424–431.
7. Kravets O.Ya. Mathematical Modeling of Parameterized TCP Protocol // Automation and Remote Control. 2013. V. 74, № 7. P. 1218–1224.
8. Arvidsson A., Krzesinski A. A model of a TCP link // Proc. of the 15th International Teletraffic Congress Specialist Seminar. 2002.
9. Olsen Y. Stochastic modeling and simulation of the TCP protocol // Uppsala Dissertations in Mathematics. 2003. V. 28. 94 p.
10. Mikheev P., Pristupa P., Suschenko S. Performance of Transport Connection with Selective Failure Mode When Competing for Throughput of Data Transmission Path // Communications in Computer and Information Science. 2019. V. 1141. P. 89–103.
11. Nikitinskiy M.A., Chalyy D.Ju. Performance analysis of trickles and TCP transport protocols under high-load network conditions // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47, № 7. P. 359–365.
12. Langley A., Riddoch A., Wilk A., Vicente A., Krasic C., Zhang D., Yang F., Kouranov F., Swett I., Iyengar J., Bailey J., Dorfman J., Roskind J., Kulik J., Westin P., Tenneti R., Shade R., Hamilton R., Vasiliev V., Chang W.T., Shi Z. The QUIC Transport Protocol: Design and Internet-Scale Deployment // SIGCOMM'17, August, 2017, Los Angeles, CA, USA. P. 183–196.
13. Lundqvist H., Karlsson G. TCP with end-to-end FEC // International Zurich Seminar on Communications. 2004. P. 152–156.
14. Barakat Ch., Altman E. Bandwidth tradeoff between TCP and link-level FEC // Computer Networks. 2002. № 39. P. 133–150.
15. Shalin R., Kesavaraja D. Multimedia Data Transmission through TCP/IP using Hash Based FEC with AUTO-XOR Scheme // ICTACT Journal on Communication Technology. 2012. V. 03, is. 03. P. 604–609.
16. Ribadeneir A.F. An Analysis of the MOS under condition of delay, jitter and packet loss and an analysis of the impact of introducing piggybacking and Reed Solomon FEC for VOIP : Master's thesis/ Georgia State University. 2007.
17. Matsuzono K., Detchart J., Cunche M., Roca V., Asaeda H. Performance analysis of a high-performance real-time application with several al-fec schemes // Proceedings of the IEEE 35th Conference on Local Computer Networks, LCN'10. 2010. P. 1–7.
18. Herrero R. Modeling and comparative analysis of Forward Error Correction in the context of multipath redundancy // Telecommunication Systems. Modelling, Analysis, Design and Management. 2017. V. 65 (4). P. 783–794.
19. Mikheev P., Suschenko S., Tkachev R. Estimation of High-Speed Performance of the Transport Protocol with the Mechanism of Forward Error Correction // Communications in Computer and Information Science. 2017. V. 700. P. 259–268.
20. Francois M., De Coninck Q., Bonaventure O. QUIC-FEC: Bringing the benefits of Forward Erasure Correction to QUIC // arXiv: 1904.11326v1 [cs.NI]. 25 Apr. 2019. P. 1–9.

Поступила в редакцию 31 мая 2021 г.

Pristupa P.V., Mikheev P.A., Poddubnyy V.V., Suschenko S.P. (2021) THE EFFECTIVENESS OF FORWARD ERROR CORRECTION IN TRANSPORT PROTOCOL AT THE INTRASEGMENT LEVEL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 57. pp. 84–94

DOI: 10.17223/19988605/57/9

In this paper the effectiveness of using the forward error correction (FEC) in transport protocol intrasegment data blocks was analyzed. According to the mechanism of the FEC, the sender splits each segment into  $A$  fragments each of the same size, then adds  $B - A \geq 0$ ,  $B \geq A$  redundant fragments of the same size. It allows recovering the segment by the recipient if no more than  $B - A$  arbitrary fragments of the extended segment were distorted. The recipient, when receiving the extended segment with distorted fragments, tries to recover it and in return sends the acknowledgment inside the alike information extended segment going backward.

In order to effectively apply the FEC technology, we should find the optimal fragmentation parameters  $A$  and  $B$  which maximize the transport connection performance with given characteristics and protocol parameters. Presence of redundant fragments in the data sequence being sent increases the probability of successful segment delivery, however it is being achieved through the increased overheads like the time of sending additional data.

Thereby a problem of finding transport connection parameters (the round-trip delay, transmission path reliability in both directions), transport protocol parameters (the window size  $W$ , the acknowledgment timeout  $S$ ), and FEC parameters (the number of information  $A$  and redundant fragments  $B - A$ ), that provides the benefit of using the FEC as opposed to the classical acknowledgment-based transport protocol, is formulated. Comparison of control procedures is done in condition of equal data flow rates.

The performance benefit is determined as the difference between the FEC-based connection performance and the performance of the classical acknowledgment-based protocol connection.

$$\Delta(A, B) = Z(W, S, D, A, B) - Z(W, S, D, 1, 1).$$

In case of no overheads the benefit majorants for fully-loaded ( $W > D$ ) and underloaded ( $W < D$ ) transport connection in selective and group reject modes are obtained in analytic form, optimal FEC parameters providing the maximum of benefit are found.

Considering the overheads of having additional headers in every fragment required for recovering data, the benefit function of the  $A$  parameter is unimodal. With the growth of overheads, the positive range of benefit as a function of the connection reliability narrows while the maximum benefit value decreases.

Keywords: transport protocol; forward error correction; Markov chain; bandwidth; loss rate.

*PRISTUPA Pavel Viktorovich* (Assistant Professor, Department of Applied Informatics, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: pristupa@gmail.com

*MIKHEEV Pavel Andreevich* (Candidate of Technical Sciences, Lead developer, Department of Applied Informatics, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: doka.patrick@gmail.com

*PODDUBNYI Vasilij Vasilievich* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Applied Informatics, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: vvpoddubny@gmail.com

*SUSCHENKO Sergey Petrovich* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department of Applied Informatics, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: ssp.inf.tsu@gmail.com

## REFERENCES

1. Fall, K. & Stevens, R. (2012) *TCP/IP Illustrated*. Vol. 1. Addison-Wesley Professional Computing Series.
2. Kokshenev, V.V., Mikheev, P.A. & Sushchenko, S.P. (2017) Comparative Analysis of the Performance of Selective and Group Repeat Transmission Models in a Transport Protocol. *Automation and Remote Control*. 78(2). pp. 247–261.
3. Kokshenev, V., Mikheev, P., Suschenko, S. & Tkachyov, R. (2016) Analysis of the Throughput in Selective Mode of Transport Protocol. *Communications in Computer and Information Science*. 678. pp. 168–181.
4. Bogushevsky, D., Mikheev, P., Pristupa, P. & Suschenko, S. (2018) The Time-Out Length Influence on the Available Bandwidth of the Selective Failure Mode of Transport Protocol in the Load Data Transmission Path. *Communications in Computer and Information Science*. 919. pp. 120–131. DOI: 10.1007/978-3-319-99447-5\_11
5. Kassa, D.F. (2005) *Analytic Models of TCP Performance*. PhD Thesis. University of Stellenbosch.
6. Giordano, S., Pagano, M., Russo, F. & Secchi, R. (2014) Modeling TCP Startup Performance. *Journal of Mathematical Sciences*. 200(4). pp. 424–431.

7. Kravets, O.Ya. (2013) Mathematical Modeling of Parameterized TCP Protocol. *Automation and Remote Control*. 74(7). pp. 1218–1224.
8. Arvidsson, A. & Krzesinski, A. (2002) A model of a TCP link. *Proceedings of the 15th International Teletraffic Congress Specialist Seminar*.
9. Olsen, Y. (2003) *Stochastic modeling and simulation of the TCP protocol*. Uppsala Dissertations in Mathematics.
10. Mikheev, P., Pristupa, P. & Suschenko, S. (2019) Performance of Transport Connection with Selective Failure Mode When Competing for Throughput of Data Transmission Path. *Communications in Computer and Information Science*. 1141. pp. 89–103. DOI: 10.1007/978-3-030-36625-4\_8
11. Nikitinskiy, M.A. & Chalyy, D.Yu. (2013) Performance analysis of trickles and TCP transport protocols under high-load network conditions. *Automatic Control and Computer Sciences*. 47(7). pp. 359–365.
12. Langley, A., Riddoch, A., Wilk, A., Vicente, A., Krasic, C., Zhang, D., Yang, F., Kouranov, F., Swett, I., Iyengar, J., Bailey, J., Dorfman, J., Roskind, J., Kulik, J., Westin, P., Tenneti, R., Shade, R., Hamilton, R., Vasiliev, V., Chang, W.T. & Shi, Z. (2017) The QUIC Transport Protocol: Design and Internet-Scale Deployment. *SIGCOMM '17, August 2017*. Los Angeles, CA, USA. pp. 183–196.
13. Lundqvist, H. & Karlsson, G. (2004) TCP with end-to-end FEC. *International Zurich Seminar on Communications*. pp. 152–156. DOI: 10.1109/IZS.2004.1287411
14. Barakat, Ch. & Altman, E. (2002) Bandwidth tradeoff between TCP and link-level FEC. *Computer Networks*. 39. pp. 133–150. DOI: 10.1007/3-540-47734-9\_10
15. Shalin, R. & Kesavaraja, D. (2012) Multimedia Data Transmission through TCP/IP using Hash Based FEC with AUTO-XOR Scheme. *ICTACT Journal on Communication Technology*. 3(3). pp. 604–609. DOI: 10.21917/ijct.2012.0086
16. Ribadeneir, A.F. (2007) *An Analysis of the MOS under condition of delay, jitter and packet loss and an analysis of the impact of introducing piggybacking and Reed Solomon FEC for VOIP*. Master's Thesis. Georgia State University.
17. Matsuzono, K., Detchart, J., Cunche, M., Roca, V. & Asaeda, H. (2010) Performance analysis of a high-performance real-time application with several al-fec schemes. *Proceedings of the IEEE 35th Conference on Local Computer Networks, LCN'10*. pp. 1–7.
18. Herrero, R. (2017) Modeling and comparative analysis of Forward Error Correction in the context of multipath redundancy. *Telecommunication Systems. Modelling, Analysis, Design and Management*. 65(4). pp. 783–794. DOI: 10.1007/s11235-016-0267-y
19. Mikheev, P., Suschenko, S. & Tkachev, R. (2017) Estimation of High-Speed Performance of the Transport Protocol with the Mechanism of Forward Error Correction. *Communications in Computer and Information Science*. 700. pp. 259–268. DOI: 10.1007/978-3-319-66836-9\_22
20. Michel, F., Coninck, Q. & Bonaventure, O. (2019) QUIC-FEC: Bringing the benefits of Forward Erasure Correction to QUIC. *arXiv: 1904.11326v1 [cs.NI] 25 Apr 2019*. pp. 1–9.

UDK 62–50

DOI: 10.17223/19988605/57/10

**A.I. Rouban**

**THE SENSITIVITY COEFFICIENTS FOR DYNAMIC SYSTEMS DESCRIBED BY DIFFERENCE EQUATIONS WITH THE DISTRIBUTED MEMORY ON PHASE COORDINATES AND VARIABLE PARAMETERS**

The variational method of calculation of sensitivity coefficients connecting first variation of quality functional with variations of variable and constant parameters for multivariate non-linear dynamic systems described by difference equations with the distributed memory on phase coordinates and variable parameters is developed. Sensitivity coefficients are components of sensitivity functional and they are before variations of variable and constant parameters. The base of calculation are the decision of object equations in the forward direction of discrete time and corresponding difference conjugate equations for Lagrange’s multipliers in the opposite direction of discrete time.

**Keywords:** variational method; sensitivity coefficient; difference equation; conjugate equation; Lagrange’s multiplier.

For dynamic systems the problem of calculation of sensitivity coefficients (SC) is central at the analysis and syntheses of control laws, optimization, identification, stability [1–16]. The first-order sensitivity characteristics mostly are used. Later on we shall examine only SC of the first-order.

The sensitivity functional connects the first variation of quality functional with variations of variable and constant parameters and the SC are components of vector gradient from quality functional according to parameters.

Consider a vector output  $y(t)$  of dynamic object model under discrete time  $t \in [0, 1, \dots, N + 1]$  implicitly depending on vector constant parameters  $\alpha$  and additive functional  $I(\alpha)$  constructed on a basis of  $y(t)$  under  $t \in [0, 1, \dots, N + 1]$  and on a basis of parameters  $\alpha$  :

$$I(\alpha) = \sum_{t=0}^{N+1} f_0(y(t), \alpha, t).$$

SC with respect to constant parameters  $\alpha$  are called a gradient from  $I(\alpha)$  on  $\alpha$  :  $(dI(\alpha)/d\alpha)^T \equiv \nabla_{\alpha} I(\alpha)$ . SC are a coefficients of single-line relationship between the first variation of functional  $\delta_{\alpha} I(\alpha)$  and the variations  $\alpha$  of constant parameters  $d\alpha$  :

$$\delta_{\alpha} I(\alpha) = (\nabla_{\alpha} I(\alpha))^T d\alpha = \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} d\alpha \equiv \sum_{j=1}^m \frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha_j} d\alpha_j.$$

The direct method of SC calculation inevitably requires a solution of cumbersome sensitivity equations to sensitivity functions  $W(t)$ . For instance, for functional  $I(\alpha)$  we have following SC vector (row vector):

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \sum_{t=0}^{N+1} \left[ \frac{\partial f_0(y(t), \alpha, t)}{\partial y(t)} W(t) + \frac{\partial f_0(y(t), \alpha, t)}{\partial \alpha} \right].$$

$W(t)$  is the matrix of single-line relationship of the first variation of dynamic model output with parameter variations:  $\delta y(t) = W(t)d\alpha$ . For obtaining the matrix  $W(t)$  it is necessary to decide bulky system equations – sensitivity equations. The  $j$ -th column of matrix  $W(t)$  is made of the sensitivity functions  $\partial y(t)/\partial \alpha_j$  with respect to component  $\alpha_j$  of vector  $\alpha$ . They satisfy a vector equation (if  $y$  is a vector) resulting from dynamic model (for  $y$ ) by derivation on a parameter  $\alpha_j$ .

For variable parameters such method essentially becomes complicated and practically is not applicable.

Application of the variation approach allows fundamentally to simplify process of calculation of SC concerning variable and constant parameters. To this problem it is devoted given paper for the dynamic systems described by difference equations with distributed memory on phase coordinates and variable parameters.

Variational method [6], ascending to Lagrange's, Hamilton's, Euler's memoirs, makes possible to simplify the process of determination of conjugate equations and formulas of account of SC. On the basis of this method it is an extension of quality functional by means of inclusion into it dynamic equations of object by means of Lagrange's multipliers and obtaining the first variation of extended functional on phase coordinates of object and on interesting parameters. Dynamic equations for Lagrange's multipliers are obtained due to set equal to a zero (in the first variation of extended functional) the functions before the variations of phase coordinates. Given simplification first variation of extended functional brings at presence in the right part only parameter variations, i.e. it is got the sensitivity functional according to concerning parameters.

In difference from other papers devoted to calculation of SC in given paper the generalized difference models are used. Thus variables and constant parameters enter into the right parts of difference equations of dynamic object, in an indicator of quality of system work, in the measuring device model and initial values of phase coordinates depend on constant parameters.

At the right part of the equations of object model there are also phase coordinates and variable parameters during the previous moments of time. Such discrete equations are similar numerical decisions of the integrated Volterra's equations.

It is proved that both methods to calculation of SC (either with use of Lagrange's functions or with use of sensitivity functions) yield the same result, but the first method it is essential more simple in the computing relation.

### 1. Problem statement

We suppose that the dynamic object is described by system of non-linear difference equations [13]

$$y(t+1) = \sum_{s=0}^t K(t, y(s), \tilde{\alpha}(s), \alpha, s), \quad t = 0, 1, 2, \dots, N, \quad y(0) = y_0(\alpha). \quad (1)$$

Here:  $\tilde{\alpha}(t), \alpha$  are a vector-columns of interesting variable and constant parameters;  $y$  is a vector-column of phase coordinates;  $K(\cdot), y_0(\alpha)$  are known continuously differentiated limited vector-functions.

The quality of functioning of system it is characterised of functional

$$I(\tilde{\alpha}, \alpha) = \sum_{t=0}^N f_0(y(t), \tilde{\alpha}(t), \alpha, t) + f_0(y(N+1), \tilde{\alpha}(N+1), \alpha, N+1) \quad (2)$$

depending on  $\tilde{\alpha}(t)$  and  $\alpha$ . The conditions for function  $f_0(\cdot), I(\cdot)$  are the same as for  $K(\cdot)$ . With use of a functional (2) the optimization problem (in the theory of optimal control) are named as the Bolts's problem. From it as the individual variants follow: Lagrange's problem (when there is only the first group of the summands) and Mayer's problem (when there is only the last summand – function from phase coordinates at a finishing point).

With the purpose of simplification of appropriate deductions with preservation of a generality in all transformations (1), (2) there are two vectors of parameters  $\tilde{\alpha}(t), \alpha$ . If in the equations (1), (2) parameters are different then it is possible formally to unit them in two vectors  $\tilde{\alpha}(t), \alpha$ , to use obtained outcomes and then to make appropriate simplifications, taking into account a structure of a vectors  $\tilde{\alpha}(t), \alpha$ .

Is shown also that the variation method without basic modifications allows to receive SC in relation to variable and constant parameters:

$$\delta I(\tilde{\alpha}, \alpha) = \sum_{t=0}^{N+1} \frac{\partial I(\tilde{\alpha}, \alpha)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} \delta \tilde{\alpha}(t) + \frac{\partial I(\tilde{\alpha}, \alpha)}{\partial \alpha} \delta \alpha. \quad (3)$$

$$\nabla_{\tilde{\alpha}(t)} I(\tilde{\alpha}, \alpha) = \left( \frac{\partial I(\tilde{\alpha}, \alpha)}{\partial \tilde{\alpha}_1(t)} \quad \dots \quad \frac{\partial I(\tilde{\alpha}, \alpha)}{\partial \tilde{\alpha}_{m_1}(t)} \right)^T, \quad t = 0, 1, 2, \dots, N, N+1,$$

$$\nabla_{\alpha} I(\tilde{\alpha}, \alpha) = \left( \frac{\partial I(\tilde{\alpha}, \alpha)}{\partial \alpha_1} \quad \dots \quad \frac{\partial I(\tilde{\alpha}, \alpha)}{\partial \alpha_{m_2}} \right)^T.$$

By obtaining of results the obvious designations:

$$K(t, s) \equiv K(t, y(s), \tilde{\alpha}(s), \alpha, s), \quad t = 0, 1, 2, \dots, N; \quad s = 0, 1, 2, \dots, t, \quad (4)$$

$$f_0(t) \equiv f_0(y(t), \tilde{\alpha}(t), \alpha, t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, N+1$$

are used.

The indexes  $t, s$  in functions  $K(t, y(s), \tilde{\alpha}(s), \alpha, s)$  and  $t$  in functions  $f_0(y(t), \tilde{\alpha}(t), \alpha, t)$  also reflects not only obvious dependence on step number, but also that the kind of functions from a step to a step can change.

Let's receive the conjugate equations for calculation of Lagrange's multipliers and on the basis of them formulas for calculation of SC.

## 2. Conjugate equations

Complement a quality functional (2) by restrictions-equalities (1) by means of Lagrange's multipliers  $\lambda(t)$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots, N+1$  (column vectors) and get the extended functional

$$I = I(\tilde{\alpha}, \alpha) + \sum_{t=0}^N \lambda^T(t+1) \left[ -y(t+1) + \sum_{s=0}^t K(t, s) \right] + \lambda^T(0) [-y(0) + y_0(\alpha)] = \quad (5)$$

$$= f_0(N+1) - \lambda^T(N+1)y(N+1) + \sum_{t=0}^N \left[ f_0(t) - \lambda^T(t)y(t) \right] + \sum_{t=0}^N \sum_{s=0}^t \lambda^T(t+1)K(t, s) + \lambda^T(0)y_0(\alpha).$$

Functional (5) complies with  $I(\tilde{\alpha}, \alpha)$  when (1) is fulfilled.

We consider equality

$$\sum_{t=0}^N \sum_{s=0}^t A(t, s) = \sum_{s=0}^N \sum_{t=s}^N A(s, t). \quad (6)$$

For summand  $\sum_{t=0}^N \sum_{s=0}^t \lambda^T(t+1)K(t, s)$  in formulas (5) the equality (6) assumes the following form:

$$\sum_{t=0}^N \sum_{s=0}^t \lambda^T(t+1)K(t, s) = \sum_{s=0}^N \sum_{t=s}^N \lambda^T(s+1)K(s, t).$$

Extended functional becomes now:

$$I = f_0(N+1) - \lambda^T(N+1)y(N+1) + \sum_{t=0}^N \left[ f_0(t) - \lambda^T(t)y(t) + \sum_{s=t}^N \lambda^T(s+1)K(s, t) \right] + \lambda^T(0)y_0(\alpha). \quad (7)$$

We calculate the first variation of extended functional, caused by a variation of phase coordinates, and also a variation of variables and constant parameters:

$$\delta I = \sum_{t=0}^{N+1} \frac{\partial I}{\partial y(t)} \delta y(t) + \sum_{t=0}^{N+1} \frac{\partial I}{\partial \tilde{\alpha}(t)} \delta \tilde{\alpha}(t) + \frac{\partial I}{\partial \alpha} \delta \alpha. \quad (8)$$

The factors standing in the formula (8) before variations of phase coordinates look like:

$$\frac{\partial I}{\partial y(N+1)} = -\lambda^T(N+1) + \frac{\partial f_0(N+1)}{\partial y(N+1)}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial I}{\partial y(t)} = -\lambda^T(t) + \sum_t^{s=N} \lambda^T(s+1) \frac{\partial K(s,t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial y(t)}, t = N, N-1, \dots, 1, 0.$$

From equality to zero of these factors we receive the equations for Lagrange's multipliers:

$$\lambda^T(N+1) = \frac{\partial f_0(N+1)}{\partial y(N+1)}, \tag{10}$$

$$\lambda^T(t) = \sum_t^{s=N} \lambda^T(s+1) \frac{\partial K(s,t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial y(t)}, t = N, N-1, \dots, 1, 0.$$

These equations are decided in the opposite direction changes of an independent integer variable  $t$ .

### 3. Sensitivity coefficients

In the equation (6) SC concerning variables and constant parameters look like:

$$\frac{\partial I}{\partial \tilde{\alpha}(N+1)} = \frac{\partial f_0(N+1)}{\partial \tilde{\alpha}(N+1)}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial I}{\partial \tilde{\alpha}(t)} = \frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \sum_t^{s=N} \lambda^T(s+1) \frac{\partial K(s,t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)}, t = N, N-1, \dots, 1, 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \frac{\partial f_0(N+1)}{\partial \alpha} + \sum_0^{t=N} \left[ \frac{\partial f_0(t)}{\partial \alpha} + \sum_t^{s=N} \lambda^T(s+1) \frac{\partial K(s,t)}{\partial \alpha} \right] + \lambda^T(0) \frac{dy_0(\alpha)}{d\alpha}.$$

This result is more common in relation to appropriate results of monograph [13] and paper [16].

At reception SC (11) it was used extended functional (7).

### 4. Equivalence of sensitivity coefficient for initial (2) and extended (5) functionals

We take extended functional, presented in an initial part of the formula (5):

$$I = I(\tilde{\alpha}, \alpha) + \lambda^T(0)[-y(0) + y_0(\alpha)] + \sum_{t=0}^N \lambda^T(t+1) \left[ -y(t+1) + \sum_{s=0}^t K(t,s) \right].$$

Before  $\lambda^T(\cdot)$  in square brackets there are the dynamic equations of the object which has been written down in the form of the equation of equality type. Hence, values of functions in square brackets are always equal to zero.

Let's calculate from both parts of the previous equation derivatives in the beginning on a vector of constant parameters  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \alpha} &= \frac{\partial I(\tilde{\alpha}, \alpha)}{\partial \alpha} + \lambda^T(0) \left[ -W_\alpha(0) + \frac{dy_0(\alpha)}{d\alpha} \right] + \\ &+ \sum_{t=0}^N \lambda^T(t+1) \left[ -W_\alpha(t+1) + \sum_{s=0}^t \left( \frac{\partial K(t,s)}{\partial y(s)} W_\alpha(s) + \frac{\partial K(t,s)}{\partial \alpha} \right) \right]. \end{aligned}$$

Before  $\lambda^T(\cdot)$  now there are sensitivity equations for a matrix of sensitivity functions. These equations are written down as in the form of restriction of equality type. Values of functions in square brackets also are always equal to zero.

Hence, SC rather both for initial functional and for its extended variant have identical values.

That the sensitivity equation had the specified appearance, it is necessary (1) to impose a condition of differentiability of  $K(t,s)$  on phase coordinates and on considered parameters on the right member of equation of movement of dynamic object (1). On parameters  $\alpha$  should be differentiated initial functions  $y_0(\alpha)$ .

We receive the same result and for SC in relation to variable parameters. The sensitivity equations of for each fixed value of argument of variable parameters  $\tilde{\alpha}(j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N+1$  have more complex form. They demand special consideration. Important that these sensitivity equations objectively exist.

## 5. Example

Let's receive the conjugate equations and SC for dynamic object described by system of non-linear ordinary difference equations [16]:

$$x(t+1) = f(x(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t = 0, 1, \dots, N, \quad x(0) = x_0(\bar{\alpha}). \quad (12)$$

The dynamic equation (12) coincides with the equation (1) in the absence of the distributed memory, i.e. at  $s=t$ . Then it is necessary to replace  $y(t)$  on  $x(t)$  and

$$K(t, t) = f(t) \equiv f(x(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t = 0, 1, \dots, N,$$

$$f_0(t) \equiv f_0(x(t), \tilde{\alpha}(t), \alpha, t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, N+1.$$

The conjugate equations for Lagrange's multipliers look like:

$$\lambda^T(N+1) = \frac{\partial f_0(N+1)}{\partial x(N+1)},$$

$$\lambda^T(t) = \lambda^T(t+1) \frac{\partial f(t)}{\partial x(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial x(t)}, \quad t = N, N-1, \dots, 0.$$

From (11) it is received SC:

$$\frac{\partial I}{\partial \tilde{\alpha}(N+1)} = \frac{\partial f_0(N+1)}{\partial \tilde{\alpha}(N+1)},$$

$$\frac{\partial I}{\partial \tilde{\alpha}(t)} = \frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \lambda^T(t+1) \frac{\partial f(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)}, \quad t = N, N-1, \dots, 1, 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \frac{\partial f_0(N+1)}{\partial \alpha} + \sum_{t=0}^N \left[ \frac{\partial f_0(t)}{\partial \alpha} + \lambda^T(t+1) \frac{\partial f(t)}{\partial \alpha} \right] + \lambda^T(0) \frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha}.$$

## 6. The account of the measuring device model

At additional use of model of the measuring device it is necessary to make changes to problem statement:

$$f_0(t) \equiv f_0(\eta(t), \tilde{\alpha}(t), \alpha, t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, N+1;$$

$$\eta(t) \equiv \eta(y(t), \tilde{\alpha}(t), \alpha, t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, N+1.$$

In the received results it is necessary to execute small replacements:

$$\frac{\partial f_0(t)}{\partial y(t)} \text{ to replace on } \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)};$$

$$\frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} \text{ to replace on } \frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)};$$

$$\frac{\partial f_0(t)}{\partial \alpha} \text{ to replace on } \frac{\partial f_0(t)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \alpha}.$$

## Conclusion

Variational method is applicability for calculation of SC of multivariate non-linear dynamic systems described by difference equations with the distributed memory on phase coordinates and variable parameters. Variables and constant parameters are present at object model, at model of the measuring device and at generalized quality functional for system (the Bolts's problem).

In a basis of calculation of SC the decision of the difference equations of object model in a forward direction of time and obtained difference equations for Lagrange's multipliers in the opposite direction of time. It is proved that both methods to calculation of SC (with use of Lagrange's functions or with use of sensitivity functions) yield the same result, but the first method it is essential more simple in the computing relation.

Results of present paper are applicable at design of high-precision systems and devices. This paper continues research in [13, 16].

It is possible generalization of the received results on the dynamic systems described by the difference equations, similar to the decision of ordinary integro-differential equations of Volterra's type. Such models include interconnected the ordinary difference equations and difference equations with the distributed memory in time on phase coordinates and variable parameters.

## REFERENCES

1. Ostrovskij, G.M. & Volin, Yu.M. (1967) *Methods of Optimization of Chemical Reactors*. Moscow: Khimiya.
2. Rosenwasser, E.N. & Yusupov, R.M. (1969) *Sensitivity of Automatic Control Systems*. Leningrad: Energiya.
3. Krutyko P.D. (1969) The decision of a identification problem by a sensitivity theory method. *News of Sciences Academy of the USSR. Technical Cybernetics*. 6. pp. 146–153.
4. Petrov, B.N. & Krutyko, P.D. (1970) Application of the sensitivity theory in automatic control problems. *News of Sciences Academy of the USSR. Technical Cybernetics*. 2. pp. 202–212.
5. Gorodetsky, V.I., Zacharin, F.M., Rosenwasser, E.N. & Yusupov, R.M. (1971) *Methods of Sensitivity Theory in Automatic Control*. Leningrad: Energiya. 344 p.
6. Bryson, A.E. & Ho, Ju-Chi. (1972) *Applied Theory of Optimal Control*. Moscow: Mir.
7. Speedy, C.B., Brown, R.F. & Goodwin, G.C. (1973) *Control Theory: Identification and Optimal Control*. Moscow: Mir.
8. Gekher, K. (1973) *Theory of Sensitivity and Tolerances of Electronic Circuits*. Moscow: Sovetskoe radio.
9. Rouban, A.I. (1975) *Nonlinear Dynamic Objects Identification on the Base of Sensitivity Algorithm*. Tomsk: Tomsk State University.
10. Rosenwasser, E.N. & Yusupov, R.M. (eds) (1977) *Cybernetics Problems. Sensitivity Theory and its Application*. Vol. 23. Moscow: Svyaz.
11. Voronov, A.A. (1979) *Stability, Controllability, Observability*. Moscow: Nauka.
12. Rosenwasser, E.N. & Yusupov, R.M. (1981) *Sensitivity of Control Systems*. Moscow: Nauka.
13. Rouban, A.I. (1982) *Identification and Sensitivity of Complex Systems*. Tomsk: Tomsk State University.
14. Haug, E.J., Choi, K.K. & Komkov, V. (1988) *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Moscow: Mir.
15. Afanasyev, V.N., Kolmanovskiy, V.B. & Nosov, V.R. (1998) *The Mathematical Theory of Designing of Control Systems*. Moscow: Vysshaya shkola.
16. Rouban, A.I. (2021) The sensitivity coefficients for multivariate dynamic systems described by ordinary difference equations with variable and constant parameters. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 55. pp. 65–70. DOI: 10.17223/19988605/55/8

Received: May 23, 2021

Rouban A.I. (2021) THE SENSITIVITY COEFFICIENTS FOR DYNAMIC SYSTEMS DESCRIBED BY DIFFERENCE EQUATIONS WITH THE DISTRIBUTED MEMORY ON PHASE COORDINATES AND VARIABLE PARAMETERS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 57. pp. 95–100

DOI: 10.17223/19988605/57/10

Рубан А.И. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПАМЯТЬЮ ПО ФАЗОВЫМ КООРДИНАТАМ И ПЕРЕМЕННЫМ ПАРАМЕТРАМ. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2021. № 57. С. 95–100

Вариационный метод применен для расчета коэффициентов чувствительности, которые связывают первую вариацию функционала качества работы системы (функционала Больца) с вариациями переменных и постоянных параметров, для многомерных нелинейных динамических систем, описываемых разностными уравнениями с распределенной памятью по фазовым координатам и переменным параметрам.

Ключевые слова: вариационный метод; коэффициент чувствительности; разностное уравнение; функционал качества работы системы; сопряженное уравнение; множитель Лагранжа.

*ROUBAN Anatoly Ivanovich* (Doktor of Technical Sciences, Professor of Computer Science Department of Institute of Space and Information Technologies, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation).

E-mail: ai-rouban@mail.ru

## ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 004.434

DOI: 10.17223/19988605/57/11

**И.А. Жуков, Ю.Л. Костюк**

### РАСШИРЕННЫЙ АЛГОРИТМ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МНОГОВАРИАНТНЫХ ЗАДАНИЙ

Для модели представления многовариантных заданий расширено понятия эксперта. Описаны его составные части: считыватель и анализатор. Предложен расширенный алгоритм оценки соответствия, проводящий развернутый анализ ответа обучающегося с предоставлением максимально детализированной информации для преподавателя.

**Ключевые слова:** автоматизированный контроль знаний; проверка формализованных ответов; сопоставление с последовательностью образцов.

Решение проблемы автоматизированного контроля знаний для многовариантных заданий по программированию можно разделить на два этапа: создание модели представления заданий и разработка алгоритма контроля. Модель представления задания приведена в [1]. Эта модель описывает формальное представление множества правильных ответов с помощью компонентов, элементов и шаблонов. В проверке формализованных ответов существует подход, основанный на копировании простейших контролируемых действий человека, т.е. в процессе контроля ответ обучающегося сравнивается с некоторым эталоном (правильным ответом, образцом) [2]. Задачи сопоставления с образцом встречаются в различных областях информатики. В частности, они используются в компиляторах [3], системах верификации [4], поисковых системах [5] и анализе естественных языков [6].

Одним из способов задания образцов служат регулярные выражения. Они применяются, например, в текстовых редакторах [7]. Авторы [8] использовали регулярные выражения для анализа баз данных электронных медицинских библиотек.

Характерной чертой заданий по программированию является существование множества правильных ответов. Для формализации в [1] предложено группировать правильные ответы по степени сходства. Средствами группировки в модели являются элементы, которые подобны регулярным выражениям, но в силу особенностей предметной области имеют свою специфику. В модели определены три типа элементов: «Один компонент», «Один из компонентов» и «Перестановка компонентов». Последовательность элементов (шаблон) задается на формальном языке. В результате правильный ответ на задание представлен множеством шаблонов. Поэтому алгоритм контроля должен обеспечивать сопоставление с множеством образцов. В модели вводится понятие эксперта. Экспертом назван автомат, оценивающий соответствие варианта решения (входной последовательности) одному шаблону. Следовательно, для одного задания ответ обучающегося оценивает множество экспертов.

В данной работе понятие эксперта модифицировано и представлен расширенный алгоритм оценки соответствия, проводящий развернутый анализ ответа обучающегося с предоставлением максимально детализированной информации для преподавателя.

#### 1. Модель эксперта

Ответ обучающегося эксперт получает в виде последовательности номеров компонентов, которые являются натуральными числами. Для создания эксперта необходимо задать шаблон; множество

всех рубежных элементов из шаблона и количество считываемых компонентов  $n$ , по умолчанию равно 2.

В процессе оценки вспомогательными средствами для эксперта служат считыватель и анализатор. Считыватель на основе информации о текущем и следующем элементе шаблона читает подпоследовательность из ответа по следующим правилам:

- если текущий элемент не является «перестановкой компонентов» или не помечен как рубежный, считать  $n$  компонентов;
- для рубежного элемента считать только один компонент;
- для элемента «перестановка компонентов» считыватель просматривает все значения до ближайшего из компонентов следующего рубежного элемента, если ни один из компонентов следующего рубежного элемента не представлен, считывается пустая последовательность.

Затем анализатор оценивает соотношение текущего элемента шаблона и прочитанной подпоследовательности. Для оценки соответствия подпоследовательности и элементов «Один компонент» и «Один из компонентов» достаточно регулярных выражений. Существует две спецификации регулярных выражений: POSIX [9] и Perl [10]. Задача оценки для приведенных двух типов элементов решается средствами любой из этих спецификаций. Элемент «Перестановка компонентов» не может быть представлен средствами спецификаций регулярных выражений. Существуют расширения, позволяющие определять перестановки, например описанное в [11]. Для нашей задачи достаточно определить, какие из компонентов перестановки присутствуют в подпоследовательности, при этом не уточняя, какая именно перестановка представлена.

Для определения соответствия необходимы индекс элемента в подпоследовательности компонентов (далее – индекс элемента) и мощность пересечения множеств всех компонентов элемента и компонентов подпоследовательности (далее – мощность). Для элементов типа «Один компонент» или «Один из компонентов» мощность всегда равна 0. Мощность указывает количество компонентов перестановки в подпоследовательности. Индекс принимает целые значения от  $-1$  до  $n - 1$ . Значение индекса равно  $-1$ , если элемент имеет тип «Перестановка компонентов» или в считанной подпоследовательности не найдено ни одного компонента данного элемента. Индекс равен 0, если подпоследовательность начинается с одного из компонентов текущего элемента. Индекс больше 0 означает, что какой-либо из компонентов элемента присутствует в подпоследовательности, но не первым. В таком случае индекс показывает позицию первого встретившегося компонента данного элемента.

Оценкой соотношения элемента и подпоследовательности является одно из трех значений: 0 – подпоследовательность полностью удовлетворяет элементу, 1 – подпоследовательность частично удовлетворяет элементу, 2 – подпоследовательность не удовлетворяет элементу. Алгоритм анализа представлен деревом принятия решения, изображенным на рис. 1.

В процессе анализа также вычисляется коэффициент ошибки, выявляются отсутствующие и «лишние» компоненты. Коэффициент ошибки определяется следующим образом:

- если подпоследовательность полностью удовлетворяет элементу, то коэффициент равен 0;
- если подпоследовательность не удовлетворяет, то коэффициент равен 1;
- для частично удовлетворяющих: если элемент имеет тип «Перестановка компонентов», то коэффициент ошибки равен разности длины элемента и мощности, деленной на длину элемента; для остальных типов элементов – индекс элемента, деленный на длину подпоследовательности.

Отсутствующими компонентами будем считать компоненты, которые входят в элемент, но не входят в подпоследовательность. Для элемента типа «Один из компонентов», если любой из компонентов присутствует в подпоследовательности, то отсутствующие компоненты не вычисляются. «Лишними» компонентами будем считать компоненты, которые входят в подпоследовательность, но не входят в элемент.

В результате анализа получается запись, имеющая следующую структуру: элемент, считанная из ответа подпоследовательность, индекс элемента, мощность, оценка соответствия, коэффициент ошибки, отсутствующие компоненты, «лишние» компоненты.

По результатам анализа считыватель выставляет позицию начала следующего считывания согласно алгоритму:

- если индекс элемента и мощность меньше 1, сместить позицию в ответе обучающегося вправо на 1;
- если элемент не помечен как опциональный, сместить позицию в ответе обучающегося вправо на длину считанной подпоследовательности;
- если элемент помечен как опциональный, позиция не меняется.

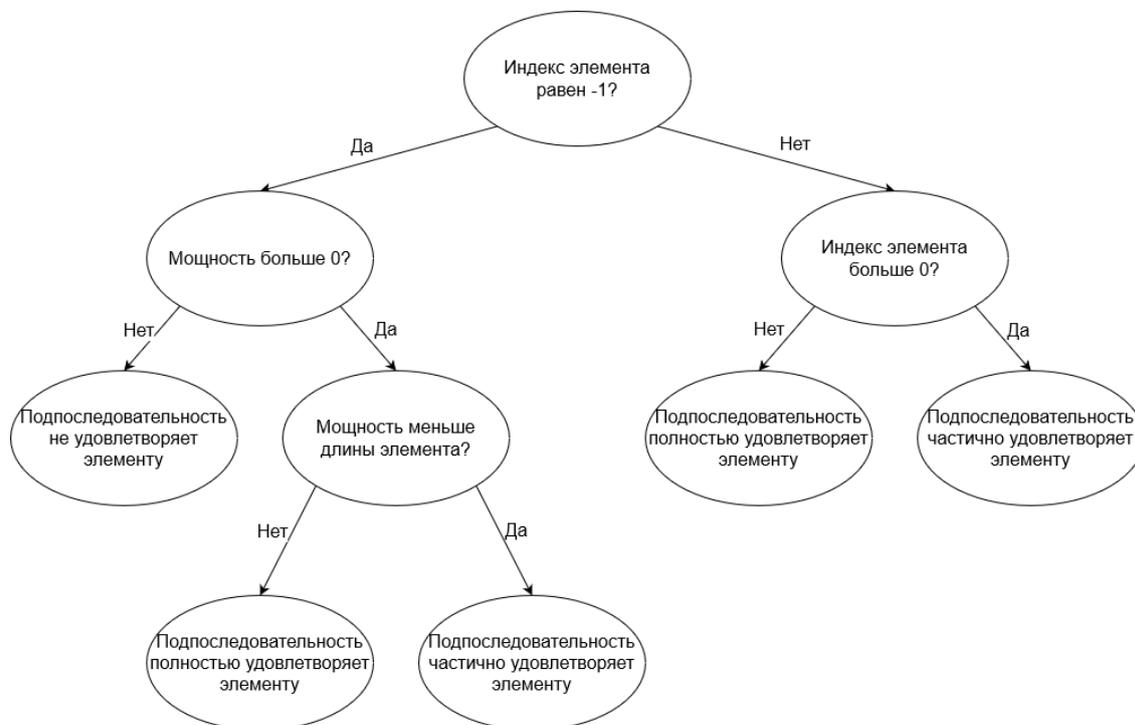


Рис. 1. Дерево принятия решений для оценки соответствия элемента считанной последовательности из ответа обучающегося  
 Fig. 1. Analysis algorithm represented by decision tree

В ходе работы эксперт сохраняет результаты анализа. В итоге записи о процессе работы эксперта состоят из трех частей: записей о результатах анализа, списка «лишних» компонентов и причины завершения анализа. Записи о результатах анализа делаются последовательно для каждого элемента шаблона, т.е. одна запись соответствует одному элементу. Список «лишних» компонентов относится к компонентам, которые остались не считанными после завершения работы с шаблоном. Причина завершения классификации может иметь одно из трех значений: закончился шаблон, закончился ответ, закончился и шаблон, и ответ.

Результатом работы является мнение эксперта, которое содержит оценку в виде обыкновенной дроби, таблицу ошибок и записи о процессе работы эксперта. Записи в таблице ошибок имеют вид: позиция элемента в шаблоне, элемент, характеристика ошибки, отсутствующие компоненты, «лишние» компоненты. Характеристика ошибки может иметь одно из четырех значений: 0 – элемент отсутствует, 1 – элемент частично присутствует (часть компонентов отсутствует), 2 – элемент присутствует с лишними компонентами, 3 – элемент присутствует, но часть компонентов отсутствует, и имеются лишние компоненты.

## 2. Алгоритм работы эксперта

На рис. 2 приведена диаграмма деятельности, описывающая алгоритм работы эксперта.

Остановимся на некоторых шагах алгоритма. В начале работы алгоритма вычисляется пересечение множеств всех компонентов рубежных элементов и всех компонентов ответа. Если множество

всех рубежных элементов непустое, а пересечение множеств – пустое, то эксперт оценит соответствие на 0, в таблицу ошибок заносятся все рубежные элементы, все ошибки будут иметь характеристику «элемент отсутствует».

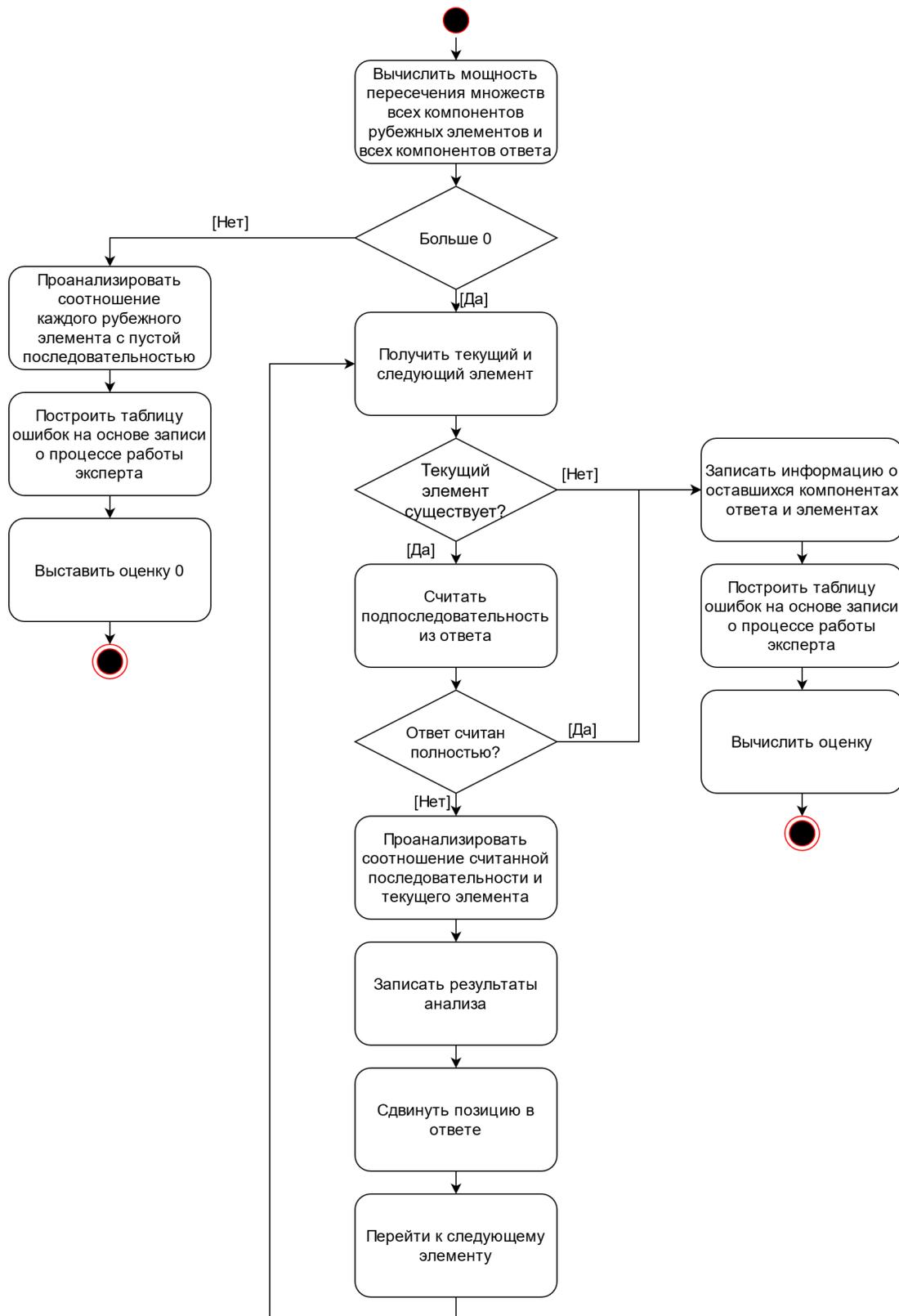


Рис. 2. Диаграмма деятельности для алгоритма оценки  
 Fig. 2. Activity diagram for assessment algorithm

Если причина завершения анализа – «закончился ответ», проанализировать соотношение каждого оставшегося элемента с пустой последовательностью. То есть в записи о процессе работы эксперта это будет отражено как элемент, не удовлетворяющий подпоследовательности, при этом отсутствуют все компоненты элемента и не присутствует «лишних».

Таблица ошибок строится по следующему алгоритму:

– если соответствие элемента и подпоследовательности оценено как «подпоследовательность не удовлетворяет элементу», соответствующий элемент характеризовать как «элемент отсутствует»;

– если соответствие элемента и подпоследовательности оценено как «подпоследовательность частично удовлетворяет элементу» и количество отсутствующих компонентов не равно 0, характеризовать как «элемент частично присутствует»;

– если количество «лишних» компонентов не равно 0, характеризовать как «присутствует с лишними компонентами»;

– если и количество отсутствующих компонентов, и количество «лишних» компонентов не равно 0, характеризовать как «присутствует, но часть компонентов отсутствует, и имеются лишние компоненты». Список отсутствующих компонентов и список «лишних» компонентов скопировать.

Оценка  $M$  вычисляется по формуле

$$M = 1 - \sum_{i=1}^n w_i e_i p(f_i) - w_d P_{extra}(a_{extra} + a_{ee}), \quad (1)$$

где  $w_i$  – вес  $i$ -го элемента,  $e_i$  – коэффициент ошибки  $i$ -го элемента,  $p(f_i)$  – множитель штрафа для метки  $i$ -го элемента,  $w_d$  – вес элемента, по умолчанию равный единице, деленной на длину шаблона,  $P_{extra}$  – множитель штрафа для «лишних» компонентов,  $a_{extra}$  – количество «лишних» компонентов, не привязанных к элементам,  $a_{ee}$  – количество «лишних» компонентов в элементах. Если вычисленная оценка получилась меньше 0, оценка будет приравнена к 0.

### 3. Пример работы алгоритма

Разберем работу эксперта на примере. Для примера возьмем один шаблон из задания, приведенного в [1]. Рассмотрим работу эксперта, который оценивает соответствие ответа шаблону  $\{(1;4);5;6;3*;7|8;9\}$ . Пусть ответ обучающегося будет  $\langle 2;1;5;10;6;3;8;11 \rangle$ .

Все программы, соответствующие полностью правильным ответам:

S:=0;	S:=0;	i:=0;	i:=0;
i:=0;	i:=0;	S:=0;	S:=0;
while i <= n do			
begin	begin	begin	begin
S:=S + m[i];	S:=S + m[i];	S:=S + m[i];	S:=S + m[i];
i:=i + 1;	inc(i);	i:=i + 1;	inc(i);
end;	end;	end;	end;

Программа, соответствующая ответу обучающегося:

```

for i:=1 to n do
S:=0;
while i <= n do
repeat
begin
S:=S + m[i];
inc(i);
until i > n;

```

Рассмотрим работу эксперта пошагово. Количество считываемых компонентов  $n = 2$ . Множество всех компонентов рубежных элементов из шаблона равно  $\{3, 5\}$ , множество всех компонентов ответа равно  $\{2, 1, 5, 10, 6, 3, 8, 11, 9\}$ . Пересечение этих множеств равно  $\{3, 5\}$ ,  $|\{3, 5\}| = 2 > 0$ , сле-

довательно, эксперт продолжит оценивание. Позиция считывателя находится в начале ответа. Пройдем шаги алгоритма.

1. Текущий элемент (1;4) имеет тип «Перестановка компонентов». Индекс элемента будет равен  $-1$ . За перестановкой находится рубежный элемент с компонентом 5. Согласно алгоритму считывателя из ответа будет прочитана подпоследовательность, состоящая из двух компонентов: 2, 1. Для этого элемента мощность пересечения  $|\{1, 4\} \cap \{2, 1\}| = 1$ , что меньше длины элемента. Следовательно, подпоследовательность частично удовлетворяет элементу, коэффициент ошибки будет равен 0,5, отсутствует компонент 4, «лишним» компонентом будет 2. Текущая позиция считывателя сдвинется на 2 вправо.

2. Текущий элемент 5 имеет тип «Один компонент». Для этого элемента мощность равна 0. Так как элемент помечен как рубежный, из ответа будет считана подпоследовательность, состоящая из одного компонента 5. Индекс элемента равен 0, следовательно, подпоследовательность полностью удовлетворяет элементу. Текущая позиция считывателя сдвинется на 1 вправо.

3. Текущий элемент 6 имеет тип «Один компонент». Для этого элемента мощность равна 0. Из ответа будет считана подпоследовательность, состоящая из двух компонентов: 10, 6. Индекс равен 1, следовательно, подпоследовательность частично удовлетворяет элементу, «лишним» компонентом будет 10. Текущая позиция считывателя сдвинется на 2 вправо.

4. Текущий элемент 3\* имеет тип «Один компонент». Для этого элемента мощность равна 0. Элемент помечен как рубежный. Из ответа будет считана подпоследовательность, состоящая из одного компонента 3. Индекс равен 0, следовательно, подпоследовательность полностью удовлетворяет элементу. Текущая позиция считывателя сдвинется на 1 вправо.

5. Текущий элемент 7|8 имеет тип «Один из компонентов». Для этого элемента мощность равна 0. Из ответа будет считана последовательность, состоящая из двух компонентов: 8, 11. Индекс равен 0, следовательно, один из компонентов входит в считанную подпоследовательность, т.е. подпоследовательность полностью удовлетворяет элементу. Текущая позиция считывателя сдвинется на 1 вправо.

6. Текущий элемент 9 имеет тип «Один компонент». Для этого элемента мощность равна 0. Из ответа должна быть считана подпоследовательность, состоящая из двух компонентов. Но в силу того, что текущее смещение считывателя равно 5, а длина ответа – 6, будет считана подпоследовательность, состоящая из одного компонента 11. Индекс равен  $-1$ , следовательно, подпоследовательность не удовлетворяет элементу. Текущая позиция считывателя сдвинется на 1 вправо.

7. Текущий элемент является последним, позиция в ответе равна длине ответа, следовательно, анализ завершен.

Причиной завершения анализа будет «закончился и шаблон, и ответ». Результаты анализа всех элементов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Пример результатов анализа

Элемент	Подпоследовательность	Индекс элемента	Мощность	Соответствие	Коэффициент ошибки $e_i$	Отсутствующие компоненты	«Лишние» компоненты
(1;4)	2, 1	$-1$	1	Частично удовлетворяет	0,5	4	2
5*	5	0	0	Полностью удовлетворяет	0		
6	10, 6	1	0	Частично удовлетворяет	0,5		10
3*	3	0	0	Полностью удовлетворяет	0		
7 8	8, 11	0	0	Полностью удовлетворяет	0		
9	11	$-1$	0	Не удовлетворяет	1	9	11

Следующим шагом алгоритма будет построение таблицы ошибок. Таблица ошибок для данного примера приведена в табл. 2.

Таблица 2

Пример таблицы ошибок

Позиция	Элемент	Характеристика ошибки	Отсутствующие компоненты	«Лишние» компоненты
0	(1;4)	Присутствует, но часть компонентов отсутствует, и имеются лишние компоненты	4	2
2	6	Присутствует с лишними компонентами		10
5	9	Элемент отсутствует	9	11

Вычислим оценку по формуле (1). Веса элементов  $w_i$  не заданы. В этом случае, вес каждого элемента будет принят равным  $w_d$ , т.е. единице, деленной на длину шаблона, которая равна 6. Анализируя табл. 1, видим, что элементы с номерами 1, 3, 6 имеют ненулевой коэффициент ошибки  $e_i$ , а именно:  $e_1 = 0,5$ ,  $e_3 = 0,5$ ,  $e_6 = 1$ . Среди элементов с ненулевым коэффициентом ошибки нет помеченных, поэтому согласно [1]  $p(f_1) = p(f_3) = p(f_6) = 0,25$ . Множитель штрафа для «лишних» компонентов  $p_{extra}$  не задан, поэтому будет использовано значение по умолчанию, равное 0,75. Количество «лишних» компонентов, не привязанных к элементам,  $a_{extra}$  определяется экспертом после завершения анализа. В данном примере  $a_{extra} = 0$ , так как анализ завершился по причине «закончился и шаблон, и ответ». Количество «лишних» компонентов в элементах  $a_{ee}$  можно определить по табл. 1. В последнем столбце указаны номера лишних компонентов. В данном примере  $a_{ee} = 3$ . Подставляя указанные значения в формулу (1), получим общую оценку  $M = 0,54$ .

В данном примере задание затрагивает темы «Массив» и «Циклы». Оценка 0,54 свидетельствует о наличии серьезных проблем с освоением этих тем обучающимся. Приведенный ответ некорректен с точки зрения синтаксиса языка программирования Pascal, т.е. программа не может быть исполнена. Таблица 2 показывает, что обучающийся имеет проблемы с определением сопутствующих циклу while элементов, при этом сам заголовок цикла и суммирование элементов массива реализованы верно. Основываясь на таблице ошибок, можно подготовить рекомендации для обучающегося по изучению указанных тем.

Полученная оценка также может использоваться в системе автоматизированного контроля знаний. При достаточно большом количестве заданий такого типа по изучаемой дисциплине сумма оценок отражает уровень освоения материала обучающимся.

### Заключение

В результате развития модели представления многовариантных заданий представлен алгоритм контроля, проводящий развернутый анализ ответа обучающегося с предоставлением максимально детализированной информации для преподавателя о местах, в которых обучающийся допустил ошибки, с указанием данных об отсутствующих и «лишних» компонентах. Применение алгоритма возможно как в виде отдельного инструмента автоматизированного контроля, так и в виде «помощника» преподавателя.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков И.А., Костюк Ю.Л. Модель представления многовариантных заданий для автоматизированного контроля знаний по программированию // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. № 53. С. 110–117.
2. Шевелев М.Ю., Вишнякова Л.А., Шевелев Ю.П. Контроль знаний в компьютерном обучении. Неантропоморфный подход. Saarbrücken : LAP Lambert Academic Publishing, 2014. 395 с.
3. Васенин В.А., Кривчиков М.А. Промежуточное представление программ для описания типов в терминах сопоставления значений с образцом // Программирование. 2020. № 1. С. 63–74.
4. Гаранина Н.О., Ануреев И.С., Боровикова О.И., Зюбин В.Е., Методы специализации онтологии процессов, ориентированной на верификацию // Моделирование и анализ информационных систем. 2019. Т. 26, № 4. С. 534–549.

5. Шокин Ю.И., Федотов А.М., Барахнин В.Б. Проблемы поиска информации. Новосибирск : Наука, 2010. 220 с.
6. Тимофеев П.С., Сидорова Е.А. Лексико-семантические шаблоны как инструмент декларативного описания языковых конструкций и лингвистического анализа текста // Системная информатика. 2018. № 13. С. 35–48.
7. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов : пер. с англ. М. : Мир, 1979. 536 с.
8. Рослик Д.А., Лучинин Е.А., Арькова Е.С., Корнилова Е.Б., Толкушин А.Г., Холонья-Волоскова М.Э. Применение языка «регулярных выражений» (regular expressions) для изучения баз данных электронных медицинских библиотек в рамках оценки медицинских технологий // Московская медицина. 2020. № 4 (38). С. 73–81.
9. The Open Group Base Specifications Issue 7, 2018 edition IEEE Std 1003.1-2017 (Revision of IEEE Std 1003.1-2008). URL: [https://pubs.opengroup.org/onlinepubs/9699919799/basedefs/V1\\_chap09.html](https://pubs.opengroup.org/onlinepubs/9699919799/basedefs/V1_chap09.html) (accessed: 12.05.2021).
10. Perlre-Perl regular expressions. URL: <https://perldoc.perl.org/perlre> (accessed: 12.05.2021).
11. Lovett A.M., Shallit J. Optimal Regular Expressions for Permutations // Leibniz International Proceedings in Informatics, LIPIcs. 2019. V. 132. Art. 121.

Поступила в редакцию 3 июня 2021 г.

Zhukov I.A., Kostyuk Yu.L. (2021) AN EXTENDED ASSESSMENT ALGORITHM FOR MULTIVARIATE TASK PRESENTATION MODEL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 57. pp. 101–109

DOI: 10.17223/19988605/57/11

The solution to the problem of automated knowledge assessment for multivariate programming tasks can be divided into two stages: the creation of a model for the presentation of tasks and the development of assessment algorithm. The model describes the formal representation of a set of correct answers using components, elements and patterns. There is an approach in formalized answers assessment based on copying the simplest actions of a human, i.e. in an assessment process a student's answer is compared with some sample (correct answer, pattern). Pattern matching problems are found in various fields of computer science. Regular expressions are one way to specify patterns.

A characteristic feature of programming assignments is that there are many correct answers. For formalization in the task presentation model, it is proposed to group the correct answers according to the degree of similarity. The means of grouping in the model are elements that are similar to regular expressions, but due to the peculiarities of the domain, they have their own specifics. Three types of elements are defined in the model: "One component", "One of the components" and "Permutation of components". A sequence of elements (pattern) is specified in a formal language. As a result, the correct answer to the task is represented by many patterns. The concept of an expert is introduced into the model. An expert called an automaton that evaluates the correspondence of a solution option (input sequence) to one pattern. Therefore, for one task, the student's answer is assessed by many experts.

The expert receives the student's answer in the form of a sequence of component numbers, which are natural numbers. To create an expert, it is necessary to specify a pattern, the set of all important elements from the pattern, and the number of readable components  $n$ , by default equal to 2. In the process of evaluation, the reader and the analyzer serve as auxiliary means for the expert. The reader, based on information about the current and next pattern element, reads a subsequence from the answer.

The analyzer evaluates the ratio of the current pattern element to the read subsequence. Regular expressions are sufficient to evaluate the match between a subsequence and the elements "One component" and "One of the components". The "Permutation of components" element cannot be represented by regular expressions. For our problem, it is enough to determine which of the components of the permutation are present in the subsequence, without specifying which particular permutation is represented.

To determine the match, the index of the element in the subsequence of components (element index) and the cardinality of the intersection of the sets of all components of the element and the components of the subsequence are required. For elements of type "One component" or "One of components" the cardinality is always 0. Cardinality indicates the number of components of the permutation in the subsequence. The index takes integer values from  $-1$  to  $(n - 1)$ . The index value is  $-1$  if the element is of type "Permutation of components" or no component of this element was found in the read subsequence. The index is 0 if the subsequence starts with one of the components of the current element. An index greater than 0 means that any of the element's components are present in the subsequence, but not on first place. In this case, the index indicates the position of the first encountered component of this element.

The estimate of the ratio of an element and a subsequence is one of three values: 0 is the subsequence fully satisfies the element, 1 is the subsequence partially satisfies the element, 2 is the subsequence does not satisfy the element. During the analysis, the error rate is also calculated, and the missing and "extra" components are identified.

During the assessment, the expert saves the results of the analysis. As a result, the records about the experts work process consist of three parts: records about the analysis results, the list of "extra" components, and the reason for the completion of the analysis. The analysis results are recorded sequentially for each element of the pattern, i.e. one record corresponds to one element. The list of "extra" components refers to the components that were left unread after finishing work with the pattern. The reason for the completion of the analysis can have one of three meanings: the pattern ended, the answer ended, both the pattern and the answer ended.

The result of the work is an expert's opinion, which contains an assessment in the form of an ordinary fraction, a table of errors and records about the expert's work process. The entries in the error table are of the form: position of an element in the pattern,

element, error characteristics, missing components, "extra" components. The error characteristic can have one of four values: 0 is an element missing, 1 is an element partially present (some components are missing), 2 an element present with extra components, 3 an element present, but some components are missing and there are extra components. The score  $M$  is calculated by the formula:

$$M = 1 - \sum_{i=1}^n w_i e_i p(f_i) - w_d p_{extra} (a_{extra} + a_{ee}),$$

where  $w_i$  is the weight of the  $i$ -th element,  $e_i$  is the error coefficient for the  $i$ -th element,  $p(f_i)$  is the penalty multiplier for the flag of the  $i$ -th element,  $w_d$  is the default weight of the element equal to one divided by the length of the pattern,  $p_{extra}$  is the penalty multiplier for "extra" components,  $a_{extra}$  is the number of "extra" components that are not tied to elements,  $a_{ee}$  is the number of "extra" components in the elements. If the calculated score is less than 0, the score will be set to 0.

Keywords: automated knowledge assessment; assessment of formalized answers; matching with sequence of patterns.

ZHUKOV Igor Andreevich (Post-graduate Student, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: Ig.Zhukov963@yandex.ru

KOSTYUK Yuriy Leonidovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: kostyuk\_y\_1@sibmail.com

#### REFERENCES

1. Zhukov, I.A. & Kostyuk, Yu.L. (2020) Model of representation of multivariate tasks for automated control of programming knowledge. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 53. pp. 110–117. DOI: 10.17223/19988605/53/11
2. Shevelev, M.Yu., Vishnyakova, L.A. & Shevelev, Yu.P. (2014) *Kontrol' znaniy v komp'yuternom obuchenii. Neantropomorfnyy podkhod* [Knowledge control in computer learning. The Non-anthropomorphic approach]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing.
3. Vasenin, V.A. & Krivchikov, M.A. (2020) Intermediate representation of programs with type specification based on pattern matching. *Programmirovaniye – Programming and Computer Software*. 46(1). pp 57–66. DOI: 10.1134/S0361768820010077
4. Garanina, N.O., Anureev, I.S., Borovikova, O.I. & Zyubin, E.V. (2019) Methods for Domain Specification of Verification-Oriented Process Ontology. *Modelirovaniye i analiz informatsionnykh sistem – Modeling and Analysis of Information Systems*. 26(4). pp. 534–549. DOI: 10.18255/1818-1015-2019-4-534-549
5. Shokin, Yu.I., Fedotov, A.M., Barakhnin, V.B. (2010) *Problemy poiska informatsii* [Problems of Finding Information]. Novosibirsk: Nauka.
6. Timofeev, P.S. & Sidorova, E.A. (2018) A lexico-semantic templates as a tool for declarative description language constructs linguistic text analysis. *Sistemnaya informatika – System Informatics*. 13. pp. 35–48. DOI: 10.31144/si.2307-6410.2018.n13.p35-48
7. Aho, A., Hopcroft, J. & Ullman, J. (1974) *Postroeniye i analiz vychislitel'nykh algoritmov* [Design and Analysis of Computer Algorithms]. Translated from English. Moscow: Mir.
8. Roslik, D.A., Luchinin, E.A., Arkova, E.S., Kornilova, E.B., Tolkushin, A.G. & Kholovnya-Voloskova, M.E. (2020) Use of regular expressions language for processing text data sets when extracted from databases of electronic medical libraries in the framework of medical technology assessment. *Moskovskaya meditsina – Moscow Medicine Journal*. 4(38). pp. 73–81.
9. Opengroup.org. (2018) *The Open Group Base Specifications*. Issue 7. IEEE Std 1003.1-2017 [Online] Available from: [https://pubs.opengroup.org/onlinepubs/9699919799/basedefs/V1\\_chap09.html](https://pubs.opengroup.org/onlinepubs/9699919799/basedefs/V1_chap09.html) (Accessed: 12th May 2021).
10. Perldoc Browser. (n.d.) *Perlre-Perl regular expressions*. [Online] Available from: <https://perldoc.perl.org/perlre> (Accessed: 12th May 2021).
11. Lovett, A.M. & Shallit, J. (2019) Optimal Regular Expressions for Permutations. *Leibniz International Proceedings in Informatics*. 132. Art. 121. DOI: 10.4230/LIPIcs.ICALP.2019.121

УДК 004.415.2

DOI: 10.17223/19988605/57/12

**С.Н. Калашников, Е.А. Мартусевич, Е.В. Мартусевич, И.А. Рыбенко, В.Н. Буинцев****ПРОЕКТИРОВАНИЕ И РЕАЛИЗАЦИЯ КОМПЛЕКСА ПРОГРАММ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ АЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВОВ НА ОСНОВЕ ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ПОДХОДА***Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-37-90087\19.*

Рассматриваются основополагающие принципы разработки специализированного комплекса программ, представленного в виде многофункциональной информационно-обучающей системы «Алюминщик» с интерактивным пользовательским интерфейсом. Данная компьютерная система спроектирована на основе объектно-ориентированного подхода и предназначена для проведения вычислительных экспериментов с использованием соответствующей математической модели технологического процесса, что позволяет повысить уровень квалификации технологического персонала и получить новые практические результаты в отрасли алюминиевой промышленности.

**Ключевые слова:** комплекс программ; объектно-ориентированный подход; вычислительный эксперимент; математическая модель; технологический персонал.

Процесс изучения действующих технологических этапов производства цветных металлов, включая детальный анализ установившихся принципов формирования алюминиевых сплавов, позволяет не только выявлять, но и планомерно систематизировать основные негативные тенденции, оказывающие непосредственное влияние на конечную себестоимость и совокупность конкурентных характеристик выпускаемой продукции в рамках установленных спецификаций портфеля заказов [1]. При этом наличие сложной структуры исследуемых многопараметрических объектов [2], а также присутствие трудно формализуемых или скрытых технологических особенностей предопределяют необходимость внедрения и использования современных средств информационных технологий при проведении серии соответствующих научно-исследовательских мероприятий, предназначенных для рационализации установившихся режимов изготовления алюминиевых сплавов различных марок.

Развитие сферы информационных технологий и постоянное совершенствование инструментов программной разработки определяет широкие функциональные возможности для реализации специализированных программных комплексов, предназначенных для математического моделирования и осуществления непрерывного мониторинга ключевых технологических параметров, определяющих последовательность и точность выполнения заданных производственных операций [3]. Также представленный подход способствует безопасному проведению необходимого количества вычислительных экспериментов [4], а полученные при этом результаты могут быть использованы для информационно-событийной поддержки технологического персонала и последующей выработки эффективных управляющих воздействий с целью сохранения минимальных технико-экономических показателей промышленного производства [5]. В данном случае это непосредственно влияет на безопасность организации рабочего процесса за счет снижения случаев возникновения аварийных ситуаций в результате использования средств компьютерного моделирования, а также определенно способствует повышению текущего уровня квалификации технологического персонала [6, 7].

Компьютерное моделирование является универсальным инструментом для исследования сложных технологических систем [8], к которым относится и процесс формирования алюминиевого расплава различных марок в плавильном миксере. Вместе с тем математическое представление техноло-

гического процесса изготовления алюминиевых сплавов для последующей программной реализации определяется моделью материально-теплого баланса взаимодействующих веществ, а также дополнительной моделью динамики, характеризующей последовательность модификации жидкого алюминиевого расплава с использованием исходного алюминия-сырца с установленным химическим составом из набора доступных литейных ковшей [9].

При этом, затрагивая аспекты изучения алюминиевой промышленности, имеется возможность обратиться к научно-практическим исследованиям Б.М. Горенского, которые содержат различные примеры специализированных программных комплексов, использующих сходные математические модели реальных технологических процессов. Одним из таких программных комплексов является «Автоматизированная обучающая система управления электролизом алюминия», разработанная в непосредственной близости от крупного промышленного предприятия КрАЗ в г. Красноярске. Основное предназначение данной системы заключается в том, чтобы предоставить пользователю возможность близко ознакомиться с одним из наиболее важных этапов производства алюминия, а именно с технологией электролиза алюминия. Другим примером является «Компьютерный тренажер для исследования процесса плавки в рудно-термических печах». Данный программный комплекс предназначен для приобретения опыта коррекции при протекании технологического процесса переработки медно-никелевых сульфидных руд, а также для психологической подготовки сотрудников предприятия к возникновению нештатных ситуаций. Этот тренажерный комплекс построен на основе имитационной математической модели, определяющей материально-тепловой баланс плавки рудного агломерата в рудно-термической печи. Аналогичным примером программной реализации действующего технологического процесса является «Компьютерный тренажер для исследования процесса спекания нефелино-известняковой шихты во вращающихся печах». Основной целью разработки данного тренажера является необходимость закрепления теоретического материала по технологии спекания нефелиново-известняковой шихты во вращающихся плавильных печах с учетом различных температурных условий [10].

Таким образом, профессиональное применение IT-инструментов предоставляет расширенные возможности для графической визуализации и динамического воспроизведения различных выходных характеристик исследуемых технологических объектов в ответ на выработанные управляющие воздействия, представленные в виде входных сигналов специального вида.

## **1. Содержательная постановка задачи**

В результате рассмотрения основных технологических этапов производства алюминиевых сплавов определена необходимость проектирования специального программного обеспечения для литейного отделения алюминиевого предприятия компании РУСАЛ, предназначенного не только для визуального моделирования вычислительных экспериментов, направленных на формирование алюминиевого расплава, но и для повышения уровня квалификации технологического персонала функционирующего литейного отделения.

Как оказалось, ни на одном из предприятий компании нет совершенной образовательной базы для обучения технологического персонала основам шихтовки алюминиевых сплавов. Изучение основ производства осуществляется в учебных классах традиционным способом либо в непосредственной близости от производственных агрегатов, что является устаревшим и небезопасным подходом. Получается, что процесс шихтовки расплава в большей степени зависит от навыков и трудового опыта шихтовщика. На сегодняшний день процесс модификации расплава происходит эмпирическим путем, т.е. методом проб и ошибок, на основе использования неэффективных средств расчета, предназначенных для вычисления количества массовых добавок имеющихся компонентов, что приводит к ошибкам шихтовки и увеличению себестоимости изготовления металла.

В связи со сложившимися обстоятельствами предлагается разработать комплекс программ в виде автоматизированной информационно-обучающей системы «Алюминщик», которая бы позволила моделировать процесс формирования алюминиевых сплавов с учетом различных требований и ограниче-

ний, а также обеспечивала поиск оптимального варианта решения технологической задачи шихтовки. При этом требуется последующее тестирование реализованных функциональных возможностей данного программного продукта с использованием технологических данных.

Стоит отметить, что разработанное программное решение планируется ввести в эксплуатацию на алюминиевых предприятиях компании РУСАЛ. Также немаловажным намерением является идея внедрения данной информационно-обучающей системы в учебный процесс высших учебных заведений на соответствующие металлургические специальности, преимущественно для профориентационных мероприятий и стимулирования обучающихся к получению новых знаний.

## 2. Проектирование и реализация специализированного комплекса программ

Известно, что любая производственная деятельность в большинстве случаев оценивается по экономическому критерию и в первую очередь зависит не только от общей степени обученности, но и от действующего уровня квалификации технологического персонала промышленного предприятия. В целом повышение квалификации рабочих кадров является наиболее перспективным способом увеличения эффективности любого бизнес-процесса, так как при этом не требуется приостановка работоспособности дорогостоящих производственных агрегатов. Вместе с тем к основополагающим производственным показателям относятся параметры производительности предприятия и доля неверных управляющих воздействий, приводящих к негативным экономическим издержкам.

С точки зрения образовательного подхода исходный набор знаний любого сотрудника является основополагающим ядром для дальнейшего обучения. Далее на основе уже полученных знаний формируются новые практические умения и умственные навыки, а также нравственные убеждения и общее мировоззрение. Однако, умение – это лишь промежуточный этап освоения новых способов выполнения конкретных действий с учетом каких-либо правил, а навыки – набор сознательных действий, выработанных в процессе неоднократного решения определенных типов задач в различных условиях [11].

Таким образом, после прохождения первоначального обучения, основанного на традиционных методах познания в виде теоретических занятий, необходимо последовательное вовлечение сотрудников предприятия в производственный процесс с соблюдением всех мер безопасности. Однако в случае сохранения высокого риска возникновения аварийных ситуаций или при отсутствии должного экспертного контроля в процессе практического обучения возникает необходимость использования специализированных тренажерных комплексов, обеспечивающих непрерывный контроль управляющих воздействий на основе установленных эталонных значений, определяющих наиболее оптимальный режим управления выбранным технологическим процессом [12]. С учетом этого на рис. 1 представлена обобщенная структура взаимодействий основных компонентов информационно-обучающей системы «Алюминщик».

В разрабатываемой системе выделяется три основных контура. Первый контур инициирует процесс обучения, в котором обучаемый при получении задания  $Y_3$  формирует собственный набор управляющих воздействий  $X_y$ , который определяет некоторый вариант решения поставленной расчетно-технологической задачи эмпирическим путем на основе математической модели технологического процесса. Во втором контуре происходит предварительный расчет оптимальных (эталонных) управляющих воздействий  $X_0$ , к которым нужно приблизиться обучаемому в полученном решении. Наконец, третий контур обеспечивает анализ и интерпретацию совершенных ошибок по выбранному критерию  $F$ , а также осуществляет автоматическую генерацию информационных подсказок или рекомендаций для пользователя компьютерной системы. Следовательно, в каждом контуре выполняется задача оптимизации по определенному критерию с учетом сформированных исходных данных и различных настраиваемых ограничений.

При этом эталонные значения управляющих воздействий  $X_0$  рассчитываются на основе сложившихся условий минимизации [13] исходных ошибок управления по заданному критерию  $Q_0$ :

$$Q_0 = (Y_0 - Y_s)^2 \rightarrow \min. \quad (1)$$



Рис. 1. Структура информационно-обучающей системы «Алюминщик»  
 Fig. 1. The structure of the information and training system «Aluminshchik»

Оценка эффективности проведенного процесса обучения  $F$  определяется как квадрат разности пользовательских и оптимальных значений параметров управления:

$$F = (X_y - X_0)^2 \rightarrow \min. \quad (2)$$

По результатам данной оценки определяется величина отклонения, характеризующая факт достижения заданной степени обученности пользователя системы. В зависимости от полученных результатов формируются соответствующие информационные подсказки и рекомендации с учетом накопленных типовых ошибок, хранящихся в библиотеке данных.

Далее, в соответствии со сформированными условиями поставленной расчетно-технологической задачи, осуществлены разработка и программная реализация специализированной информационно-обучающей системы «Алюминщик» на основе объектно-ориентированного языка программирования C# с использованием встроенных инструментов среды разработки Microsoft Visual Studio Community. Данная среда разработки обладает многофункциональными возможностями по взаимодействию исполняемого кода с сервисными службами операционной системы Windows, а также имеет набор открытых скомпилированных библиотек, повышающих гибкость разработки за счет потенциала их внедрения в разрабатываемое решение [14, 15].

Также в ходе работы был произведен подбор графических компонентов пользовательского интерфейса, в том числе специальных компонентов, предназначенных для организации хранения, ввода и вывода системной информации. Для редактирования и просмотра отображаемых данных применены диалоговые окна, исключающие выполнение недопустимых пользовательских действий. Программная реализация структуры данного программного комплекса представлена в виде основополагающих классов технологических объектов. Экземпляры таких классов беспрепятственно взаимодействуют между собой и хранят первичную информацию об объектах программы, а также производят корректирующую обработку данных, передаваемых в конструктор класса.

В информационно-обучающей системе «Алюминщик» используется три основных класса: *Form* (Форма), *Mixer* (Миксер) и *Bucket* (Ковш). Класс *Form* является системным и обеспечивает отображение основных визуальных компонентов пользовательского интерфейса, а также предназначен для хранения множества полей и методов, обеспечивающих работоспособность всей программы с момента ее запуска. Класс *Mixer* служит для хранения и обработки данных о технических характеристиках плавильного миксера и содержит описание соответствующего набора полей данных. Класс *Bucket*

предназначен для хранения и обработки данных о доступных литейных ковшах и содержит детальное описание собственного уникального набора полей данных.

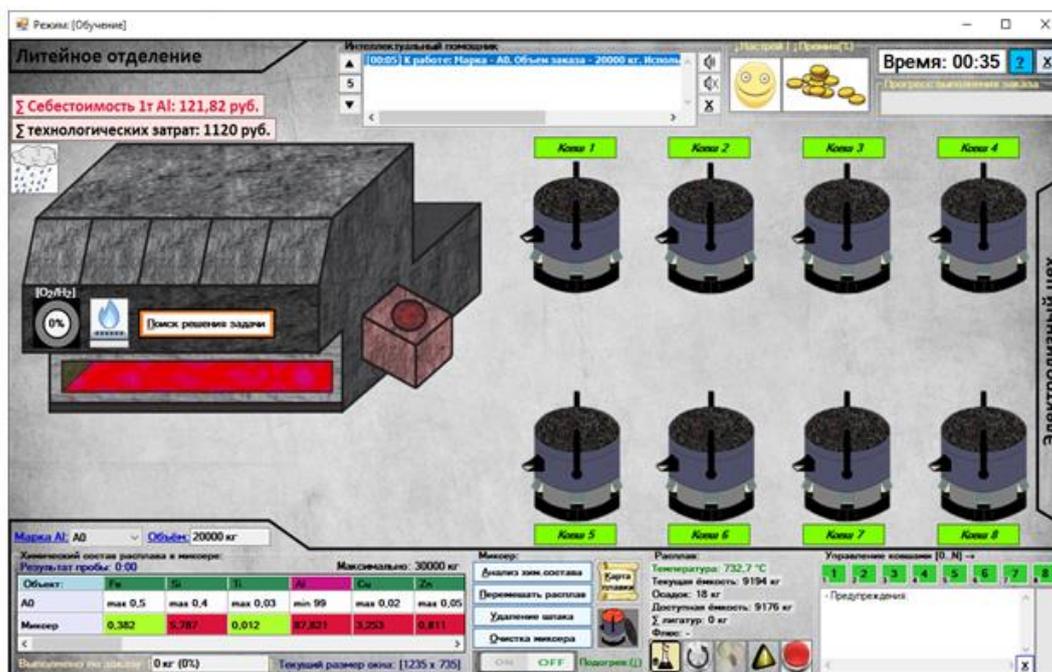


Рис. 2. Пользовательский интерфейс информационно-обучающей системы «Алюминщик»  
Fig. 2. User interface of the information and educational system «Aluminschik»

Как итог, на рис. 2 представлен результат применения соответствующих средств программной разработки, позволивший реализовать интерактивный интерфейс пользователя информационно-обучающей системы «Алюминщик», обеспечивающий динамическое отображение технологических особенностей производства алюминиевых сплавов.

### Заключение

Представленные результаты научно-исследовательской работы позволили осуществить высокоуровневую объектно-ориентированную программную реализацию специального комплекса программ в виде автоматизированной информационно-обучающей системы «Алюминщик». Данная компьютерная система предназначена для осуществления математического моделирования и выполнения визуализации технологического процесса формирования алюминиевых сплавов за счет соответствующего набора функциональных возможностей. Кроме того, наличие динамической библиотеки исходных компонентов расплава, а также использование алгоритмов интеллектуальной поддержки пользователя определяют возможность настройки и проведения серии различных сценариев вычислительных экспериментов.

Таким образом, предложенная компьютерная система является инструментом для снижения количества ошибок шихтовки алюминиевого расплава за счет повышения уровня квалификации технологического персонала, что, несомненно, способствует улучшению качества готовой продукции и сопутствующих технико-экономических показателей литейного отделения в результате поиска более рациональных вариантов распределения доступных материальных ресурсов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Макаров Г.С. Состояние и проблемы вторичного алюминия в России // Материалы международной конференции «Алюминий-21. Рециклинг» // Цветные металлы. 2019. № 2. С. 79–84.
2. Зибров П.Ф., Зиброва О.Г. Обобщенные вероятностные показатели нерезализованных возможностей многопараметрических систем // Вестник Волжского университета имени В.Н. Татищева. 2016. № 2 (3). С. 32–38.

3. Кучеренко Е.И., Дрюк А.Д. Расширение методов интеллектуального управления сложными объектами // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2014. № 3 (70). С. 13–18.
4. Рутковская К.В., Сурымто К.А. Вычислительный эксперимент как метод моделирования технологических процессов в промышленности // Моделирование в технике и экономике : сб. материалов междунар. науч.-практ. конф. Витебск, 2016. С. 153–155.
5. Боровиков И.Г., Вивчарь Р.М., Волков Н.А., Пачин А.В. Методика использования учебно-тренировочных средств подготовки технологического персонала // Современные наукоемкие технологии. 2019. № 3 (1). С. 93–99.
6. Гончаренко С.Н., Дементьева Е.В. Разработка мероприятий по снижению риска возникновения аварийных ситуаций промышленных объектов // Управление риском. 2010. № 1 (53). С. 38–42.
7. Киван М., Березкин Д.В., Раад М., Рашид Б. Анализ основных подходов к моделированию аварийных ситуаций для управления рисками в социотехнических системах // Динамика сложных систем – XXI век. 2021. № 15 (1). С. 22–37.
8. Сталинский Д.В., Ботштейн В.А., Павленко А.А. Инновационные решения по технологическому переоснащению и модернизации металлургических производств // Экология и промышленность. 2012. № 2. С. 10–17.
9. Судник Л.В., Рудницкий Ф.И., Рудницкий К.Ф., Николайчик Ю.А., Галиновский А.Л., Моисеев В.А. Технологические возможности повышения качества и снижения себестоимости изделий, эксплуатируемых в условиях повышенных нагрузок, на стадии металлургического передела // Технология металлов. 2018. № 4. С. 13–19.
10. Горенский Б.М. Автоматизированные системы имитационного управления объектами цветной металлургии / Краснояр. гос. акад. цв. металлов и золота. Красноярск : Поликом, 2002. 149 с.
11. Дзида Г.А. О соотношении понятий «компетенции, способности» личности и понятий «знания, умения и навыки» // Ямальский научный вестник. 2016. № 2 (7). С. 50–56.
12. Гафуров К.А. Исследование соответствия информационных процессов и зрения специалистов в системах с высокой профессиональной информативной нагрузкой // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. 2020. № 2-3 (79). С. 95–108.
13. Тятюшкин А.И. Численные методы оптимизации управляемых систем с параметрами // Евразийское научное объединение. 2016. № 10 (22). С. 40–50.
14. Шувалов Н.В. Основы объектно-ориентированного программирования // Аллея науки. 2018. № 5 (21). С. 1119–1122.
15. Мавлянов А.Н., Хаджибаев К.О. Ключевые концепции и принципы объектно-ориентированного программирования // Современное образование: традиции и инновации. 2020. № 2. С. 227–232.

Поступила в редакцию 12 февраля 2021 г.

Kalashnikov S.N., Martusevich E.A., Martusevich E.V., Rybenko I.A., Buintsev V.N. (2021) DESIGN AND IMPLEMENTATION OF A SET OF PROGRAMS FOR MODELING THE TECHNOLOGICAL PROCESS OF FORMING ALUMINUM ALLOYS BASED ON AN OBJECT-ORIENTED APPROACH. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 57. pp. 110–117

DOI: 10.17223/19988605/57/12

The study of the main technological stages of metallurgical production, including a detailed analysis of the established principles of the formation of aluminum alloys, allows not only to identify, but also to systematically systematize significant negative trends that have a direct impact on the final quality and consumer properties of products, taking into account the specified requirements of the order portfolio. In the context of significant development of IT tools and due to the availability of a wide range of modern software development tools, unique opportunities are opening up for conducting low-cost optimization of established production modes of operation without significantly changing or interrupting them. In this case, there is a need to carry out a series of research and development work aimed at the design and high-level object-oriented implementation of the structure of special software systems intended for information support of technological personnel through continuous monitoring of key parameters of the modeled process.

The study of the technological foundations of the production of aluminum alloys in cooperation with «RUSAL» made it possible to establish that the process of modifying the liquid melt occurs empirically based on the use of ineffective means and calculation methods designed to calculate the amount of mass additions of the available components, which leads to periodic errors in the blending of the aluminum melt and an increase in the cost of metal production.

To solve this technological problem, it is proposed to design a special complex of programs in the form of an automated information and training system «Alumishchik», which would allow simulating the process of forming aluminum alloys, taking into account various requirements and restrictions, as well as providing a search for the optimal solution to the technological problem of batching.

Further development and software implementation of the structure of the information and training system «Alumishchik» was carried out in the high-level object-oriented programming language C # using the built-in tools of the Microsoft Visual Studio Community development environment. At the moment, in the developed information and training system «Alumishchik», three basic classes are used: Form, Mixer and Bucket. The presented classes are the central structural units and directly interact with each other. Reasonable selection of visual components of software development, available in the executable environment, contributed to the creation of a multifunctional user interface of the software product.

Ultimately, a special software product was developed, which is an effective tool for reducing the number of errors in the blending of aluminum melt by increasing the level of qualification of technological personnel, which undoubtedly contributes to improving the

quality of finished products and other technical and economic indicators of the foundry as a result of the search for more rational options for using available material resources.

Keywords: software package; object-oriented approach; computational experiment; mathematical model; technological personnel.

KALASHNIKOV Sergey Nikolaevich (Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Applied Information Technologies and Programming, Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russian Federation).

E-mail: s.n.kalashnikov@yandex.ru

MARTUSEVICH Efim Aleksandrovich (Junior Researcher, Post-graduate Student of the Department of Applied Information Technologies and Programming, Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russian Federation).

E-mail: program.pro666@yandex.ru

MARTUSEVICH Elena Vladimirovna (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Natural Science Disciplines named after Professor V.M. Finkel, Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russian Federation).

E-mail: science\_nv kz@yandex.ru

RYBENKO Inna Anatolyevna (Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Applied Information Technologies and Programming, Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russian Federation).

E-mail: rybenkoi@mail.ru

BUINTSEV Vladimir Nikolaevich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Information Technologies and Programming, Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russian Federation).

E-mail: buintcev@mail.ru

#### REFERENCES

1. Makarov, G.S. (2019) Sostoyanie i problemy vtorichnogo alyuminiya v Rossii [State and problems of secondary aluminum in Russia]. *Tsvetnyye metally*. 2. pp. 79–84.
2. Zibrov, P.F. & Zibrova, O.G. (2016) Obobshchennyye veroyatnostnyye pokazateli nerealizovannykh vozmozhnostey mnogoparametricheskikh sistem [Generalized probabilistic indicators of unrealized capabilities of multiparameter systems]. *Vestnik Volzhskogo universiteta imeni V.N. Tatishcheva*. 2(3). pp. 32–38.
3. Kucherenko, E.I. & Dryuk, A.D. (2014) Rasshirenie metodov intellektual'nogo upravleniya slozhnyimi ob"ektami [Expansion of methods of intelligent control of complex objects]. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy – Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 3(70). pp. 13–18.
4. Rutkovskaya, K.V. & Surimto, K.A. (2016) Vychislitel'nyy eksperiment kak metod modelirovaniya tekhnologicheskikh protsessov v promyshlennosti [Computational experiment as a method for modeling technological processes in industry]. In: Vankevich, E.V. (ed.) *Modelirovanie v tekhnike i ekonomike* [Modeling in technology and economics]. Vitebsk: VSTU. pp. 153–155.
5. Borovikov, I.G., Vivchar, R.M., Volkov, N.A. & Pachin, A.V. (2019) Methodology of using educational and training means of training technological personnel [Methodology of using educational and training means of training technological personnel]. *Sovremennyye naukoemkie tekhnologii – Modern High Technologies*. 3(1). pp. 93–99.
6. Goncharenko, S.N. & Dementieva, E.V. (2010) Development of measures to reduce the risk of accidents of industrial facilities. *Upravlenie riskom*. 1(53). pp. 38–42.
7. Kiwan, M., Berezkin, D.V., Raad, M. & Rashid, B. (2021) Analyzing common approaches of accident models for risk management in socio-technical systems. *Dinamika slozhnykh sistem – XXI vek – Journal Dynamics of Complex Systems - XXI century*. 15(1). pp. 22–37. DOI: 10.18127/j19997493-202101-03
8. Stalinsky, D.V., Botshtein, V.A. & Pavlenko, A.A. (2012) Innovatsionnyye resheniya po tekhnologicheskomu pereosnashcheniyu i modernizatsii metallurgicheskikh proizvodstv [Innovative solutions for technological re-equipment and modernization of metallurgical production]. *Ekologiya i promyshlennost'*. 2. pp. 10–17.
9. Sudnik, L.V., Rudnitsky, F.I., Rudnitsky, K.F., Nikolaychik, Yu.A., Galinovsky, A.L. & Moiseev, V.A. (2018) Technological possibilities for improvement of quality and reduction of cost price of products that operate under conditions of high loads at stage of metallurgical conversion. *Tekhnologiya metallov*. 4. pp. 13–19.
10. Gorensky, B.M. (2002) *Avtomatizirovannyye sistemy imitatsionnogo upravleniya ob"ektami tsvetnoy metallurgii* [Automated systems for imitation control of non-ferrous metallurgy objects]. Krasnoyarsk: Polikom.
11. Dzida, G.A. (2016) O sootnoshenii ponyatiy "kompetentsii, sposobnosti" lichnosti i ponyatiy "znaniya, umeniya i navyki" [On the relationship between the concepts of "competence, ability" of a person and the concepts of "knowledge, skills and abilities"]. *Yamal'skiy nauchnyy vestnik*. 2(7). pp. 50–56.
12. Gafurov, K.A. (2020) Issledovanie sootvetstviya informatsionnykh protsessov i zreniya spetsialistov v sistemakh s vysokoy professional'noy informativnoy nagruzkoy [Investigation of the correspondence of information processes and the vision of specialists in systems with a high professional information load]. *Nauchnyy vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2-3(79). pp. 95–108.

13. Tyatyushkin, A.I. (2016) Numerical optimization methods for controlled systems with parameters. *Evraziyskoe nauchnoe ob"edinenie*. 10(22). pp. 40–50. DOI: 10.7868/S0044466917100131
14. Shuvalov, N.V. (2018) Osnovy ob"ektно-orientirovannogo programmirovaniya [Fundamentals of object-oriented programming]. *Alleya nauki – Journal of Science Alley*. 5(21). pp. 1119–1122.
15. Mavlyanov, A.N. & Khadzhibaev, K.O. (2020) Klyuchevye kontseptsii i printsipy ob"ektно-orientirovannogo programmirovaniya [Key concepts and principles of object-oriented programming]. *Sovremennoe obrazovanie: traditsii i innovatsii*. 2. pp. 227–232.

УДК 004.855

DOI: 10.17223/19988605/57/13

**Н.А. Кривошеев, Ю.А. Иванова, В.Г. Спицын****АВТОМАТИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ КОРОТКИХ ТЕКСТОВ  
НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ LSTM И SeqGAN**

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-08-00977 А и в рамках Программы повышения конкурентоспособности Томского политехнического университета.*

Проведено исследование качества генерации коротких текстов на основе применения нейронных сетей LSTM и SeqGAN на русском и английском языках. Для обучения нейронной сети используются следующие подходы: оценка максимального правдоподобия и состязательная сеть, генерирующая последовательность (Sequence Generative Adversarial Nets, SeqGAN). В данной работе реализация SeqGAN не включает алгоритм Монте-Карло. Предложен и реализован подход на основе возведения значений выходного вектора нейронной сети (вектора вероятностей) в степень, большую 1, данная операция позволяет увеличить качество генерируемого текста, но снижает его разнообразие. Обучение и тестирование проводятся на основе следующих выборок данных: сборника русских стихов с сайта Stihi.ru и подписей к изображениям на английском языке из выборки COCO Image Captions. Проведена оценка качества генерации текстов на основе метрики BLEU. Приведены примеры сгенерированных текстов. Проанализированы аналогичные решения.

**Ключевые слова:** SeqGAN; генерация текста; состязательное обучение с подкреплением.

Автоматическая генерация текста является сложной и широко исследуемой задачей, которая используется в таких областях, как машинный перевод текстов, создание субтитров, реферирование текстов, генерация подписей к изображениям.

Одной из проблем генерации текстов с помощью LSTM является снижение качества генерируемого текста при увеличении длины последовательности. В данной работе были рассмотрены решения, позволяющие увеличить качество генерации коротких текстов: SeqGAN [1] и LeakGAN [2].

В статье [1] рассматривается модификация генеративно-состязательной нейронной сети для генерации текстов. Основными модификациями являются использование обучения с подкреплением и алгоритма Монте-Карло. В указанном подходе применяется обучение, состоящее из двух этапов: контролируемое обучение (Maximum Likelihood Estimation, MLE, рассматриваемое далее в данной статье), и состязательное обучение с подкреплением, использующее генеративно-состязательную нейронную сеть для динамической оценки качества текста. По результатам, представленным в [1], можно сделать вывод, что использование SeqGAN позволяет улучшить качество генерации текста.

В работе [2] рассматривается генеративно-состязательная нейронная сеть LeakGAN, основанная на объединении генеративно-состязательных нейронных сетей SeqGAN [1] и RankGAN [3]. Рассматривается подход, основанный на утечке памяти из дискриминатора, который позволяет улучшить качество генерируемого текста. В [2] проведено сравнение таких подходов, как MLE, SeqGAN, RankGAN и предлагаемого LeakGAN. По представленным результатам можно сделать вывод, что подходы SeqGAN, RankGAN и LeakGAN позволяют улучшить качество генерируемого текста по сравнению с подходом на основе MLE. Генеративно-состязательная нейронная сеть RankGAN генерирует более качественный результат, чем SeqGAN, но уступает по качеству генерации нейронной сети LeakGAN по метрике BLEU.

Целью данной работы является оценка качества автоматической генерации коротких текстов на основе сети с долгой краткосрочной памятью (Long Short-Term Memory, LSTM) [4, 5]. Для обучения нейронной сети LSTM используется контролируемое обучение на основе метода максимального правдоподобия (MLE) [6], применяется дальнейшее обучение LSTM в составе состязательной сети,

генерирующей последовательность (Sequence Generative Adversarial Net, SeqGAN) [1]. Следует отметить, что в данной работе не используется метод Монте-Карло, предложенный в работе [1]. Применяется пакетное обучение с увеличенным пакетом данных.

Предложен и реализован подход на основе возведения значений вектора вероятностей (выходного вектора нейронной сети) в степень, большую 1; данная операция позволяет увеличить качество генерируемого текста, но снижает его разнообразие.

Длина генерируемых текстов составляет 10 и 20 слов. Для обучения и тестирования нейронных сетей используются следующие выборки данных: сборник русских стихов с сайта Stihi.ru [7] и подписи к изображениям на английском языке из выборки COCO Image Captions [8]. Максимальная длина текстов в выборке с сайта Stihi.ru составляет 10 слов, а в выборке на основе подписей из выборки COCO Image Captions – 20 слов. Применяется пословная генерация текста. Качество генерации текста оценивается с использованием метрики BLEU [9–11]. Проведены анализ и сравнение аналогичных решений [1–3]. Проанализированы работы [12–14]. Для проведения сравнения данные выборки COCO Image Captions взяты из аналога [2]. Данные размещены на сайте [15]. Таким образом, предварительная обработка выборки данных совпадает с реализованной в аналоге [2].

Было проведено обучение и тестирование подходов на основе MLE и SeqGAN. Сделан вывод, что обучение на основе нейронной сети SeqGAN, по сравнению с подходом на основе MLE, позволяет улучшить качество генерации текста по метрике BLEU. Тексты, сгенерированные на основе нейронной сети SeqGAN, сравнимы по качеству с примерами из обучающей выборки по метрике BLEU [9].

В рамках данной работы создана программная реализация исследуемых моделей на языке Python и проведены тестовые эксперименты. В реализации используется библиотека PyTorch. Программная реализация представлена на сайте [16] и основана на работе [17].

## 1. Описание использовавшихся выборок данных

В данной работе используются следующие выборки данных: сборник русских стихов с сайта Stihi.ru [7] и подписи к изображениям из выборки COCO Image Captions [8].

**Выборка стихов на русском языке.** Выборка, содержащая сборник русских стихов с сайта Stihi.ru [7], состоит из 2 414 243 строк, в среднем по 8–9 слов в строке. Максимальная длина примера в данной выборке составляет 10 слов. Была проведена предварительная обработка текстов, состоящая из следующих последовательных этапов:

1. Разбиение текста на примеры (предложения и строки).
2. Составление словаря наиболее часто встречающихся слов.
3. Удаление примеров, содержащих меньше 8 слов.
4. Удаление примеров, содержащих слова, не вошедшие в словарь.
5. Заполнение или сокращение примеров до длины текста, равной 10 словам. Для заполнения текста до заданной длины используется зарезервированное слово `_AGG_` (от слова *aggregate* – англ. «заполнитель»). Для сокращения длины примера удаляется конец предложения.

Из данной выборки удалены все знаки препинания. После предварительной обработки текста выборка содержит 78 661 предложение, средняя длина предложения – 8,2 слова.

В результате предварительной обработки текста был сформирован словарь из 5 000 слов, включающий зарезервированные слова (удаленное слово `_UNK_`, слово-заполнитель `_AGG_` и стартовое слово `_START_`). Набор данных был разделен на обучающую выборку (70 000 примеров) и тестовую выборку (5 000 примеров).

**Выборка подписей из выборки COCO Image Captions.** Набор данных COCO Image Captions [8] содержит изображения и их описания на английском языке. Описания изображений используются для формирования текстовой выборки данных. Большинство предложений данного набора содержит около 10 слов. Максимальная длина примера в данной выборке составляет 20 слов. Выборка данных взята из источника [15], ее предварительная обработка соответствует представленной в статье [2].

Набор данных [15] представлен следующими файлами: словарь (vocab\_cotra.pkl), обучающая выборка (realtrain\_cotra.txt), тестовая выборка (realtest\_coco.txt). В наборе данных содержится 4 837 оригинальных слов. Обучающий набор данных содержит 80 000 примеров, тестовая выборка содержит 5 000 примеров. Авторы статьи [2] указывают, что из выборки удалены слова, упоминающиеся менее 10 раз, а также содержащие их предложения.

## 2. Топология нейронной сети LSTM

В данной работе применяется рекуррентная нейронная сеть LSTM [4]. Используется пословное преобразование текста в вектор с помощью слоя Embedding [18, 19]. Применяется пословная генерация текста с генерацией одного слова на каждом итерационном шаге.

Архитектура нейронной сети представлена на рис. 1. Нейронная сеть состоит из следующих слоев: Embedding, слой LSTM, полносвязный слой нейронов (Dense) и слой с функцией активации Log\_Softmax. Элемент  $X_i$  является индексом слова в словаре на итерации  $i$ . Элемент  $Y_i$  является выходом нейронной сети на итерации  $i$ , после применения операций экспоненты и multinomial [20].

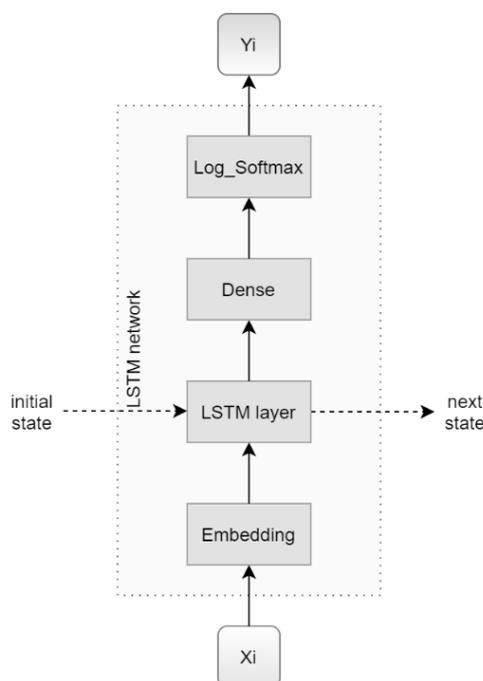


Рис. 1. Архитектура нейронной сети  
Fig. 1. Architecture of the neural network

На каждом итерационном шаге генерации текста происходит инициализация слоя LSTM (initial state). После генерации слова новое состояние (next state) сохраняется и используется для инициализации слоя LSTM на следующем шаге. На первом шаге генерации текста состояние слоя LSTM инициализируется нулями. Полносвязный слой нейронов (с последующим слоем Log\_Softmax) генерирует слово на основе информации из слоя LSTM.

В данной работе длина вектора слова составляет 150 чисел. Слой LSTM содержит 150 нейронов. Количество нейронов в полносвязном слое равняется размеру словаря.

## 3. Описание контролируемого обучения MLE для нейронной сети LSTM и процесса генерации текста

Процесс обучения нейронной сети на основе MLE [6] представлен на рис. 2. Обучение нейронной сети заключается в предсказании некоторой последовательности слов  $[X_1, X_2, \dots, X_t, \dots, X_T]$  (output)

на основе последовательности  $[X_0, X_1, \dots, X_{t-1}, \dots, X_{T-1}]$  (input). В данной работе слово  $X_0$  всегда задается зарезервированным словом `_START_`. На каждом временном шаге проводится инициализация слоя LSTM [4, 5], далее на нейронную сеть LSTM подается слово из входной последовательности (input). Генерируется слово и новое состояние. Состояние нейронной сети сохраняется и передается для инициализации слоя LSTM на следующем шаге.

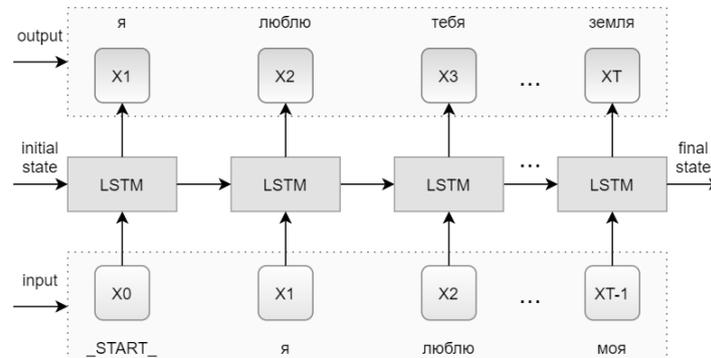


Рис. 2. Процесс обучения нейронной сети  
Fig. 2. Neural network learning process

В процессе генерации текста на нейронную сеть подается некоторая частичная последовательность входных данных. Недостающая часть последовательности восполняется из вывода нейронной сети для генерации полной выходной последовательности (рис. 3). В данной работе на нейронную сеть подается слово  $X_0$ . Новое слово генерируется на основе выхода нейронной сети и операции multinomial [20], которая позволяет выбрать случайное слово на основе распределения вероятностей. Операция multinomial позволяет нейронной сети генерировать случайные тексты.

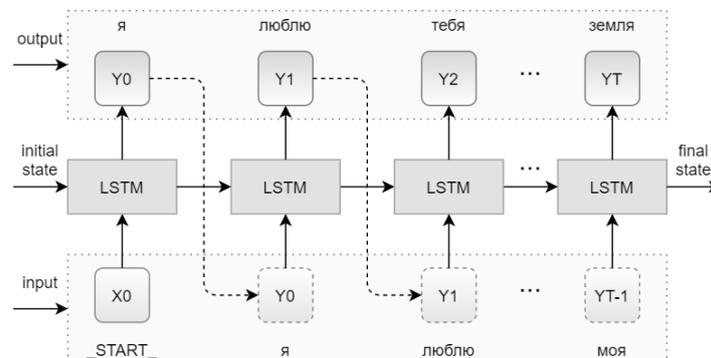


Рис. 3. Процесс генерации текста  
Fig. 3. Text generation process

Таким образом, часть сгенерированной последовательности  $[Y_0, Y_1, \dots, Y_t, \dots, Y_{T-1}]$  является частью входной последовательности  $[X_0, Y_0, Y_1, \dots, Y_t, \dots, Y_{T-1}]$ . Результатом работы нейронной сети является последовательность  $[Y_0, Y_1, \dots, Y_t, \dots, Y_T]$ .

При обучении генератора используется оптимизатор Adam [21].

#### 4. Результаты тестирования нейронной сети LSTM, обученной на основе MLE

Для оценки качества генерации текстов в данной работе используется метрика BLEU, реализованная в библиотеке nltk.

Перед оценкой проводится удаление слова-заполнителя `_AGG_` из текста примера. Данная операция позволяет получить более качественную оценку, так как при оценке не будут учитываться совпадения слов-заполнителей.

При оценке по метрике BLEU используется сглаживание на уровне предложений. Нами применяется метод сглаживания *smoothing 1*, представленный в работе [11]. Данная модификация дает возможность получить более корректные оценки качества текста, но не позволяет сравнить полученные результаты с аналогичными работами, представленными в данной статье, в которых такая модификация не использовалась.

Было проведено тестирование нейронной сети LSTM, обученной на основе MLE на выборках данных: стихи с сайта Stihi.ru [7] и подписи к изображениям из выборки COCO Image Captions [8]. Тестирование проводилось на тестовых выборках, описанных ранее. Для тестирования использовалось 500 сгенерированных примеров. Оценка качества проводилась на основе метрики BLEU. Результаты тестирования представлены в табл. 1:

Таблица 1

Результаты тестирования LSTM, обученной на основе MLE

Выборка	BLEU-2	BLEU-3	BLEU-4	BLEU-5
Stihi.ru	0,71	0,375	0,187	0,116
COCO Image Captions	0,528	0,393	0,265	0,166

Для оценки качества генерации текста по метрике BLEU было проведено тестирование на основе реальных примеров, написанных людьми, с применением соответствующих обучающих выборок. Полученные результаты используются для последующего сравнения с результатами генерации. Результаты тестирования 500 случайных примеров из обучающих выборок (написанных людьми) на тестовых выборках представлены в табл. 2:

Таблица 2

Результаты тестирования реальных примеров

Выборка	BLEU-2	BLEU-3	BLEU-4	BLEU-5
Stihi.ru	0,738	0,425	0,224	0,136
COCO Image Captions	0,557	0,443	0,319	0,212

Примеры сгенерированных текстов на основе MLE и текстов из обучающей выборки представлены в табл. 3. Для каждого примера приведена оценка по метрике BLEU [9].

Таблица 3

Примеры текстов

Выборка	Тип примеров	№	Пример	BLEU-2	BLEU-3	BLEU-4	BLEU-5
Stihi.ru	Из выборки	1	чтоб не вспомнить что есть где то ты	0,943	0,693	0,556	0,437
		2	от того что я с тобой в раю	1,0	0,956	0,707	0,334
		3	пусть в душе моей с каждым днем все сильнее грусть	0,745	0,518	0,211	0,127
	Сгенерированные на основе MLE	1	и тихо мы все вместе с тобой	0,775	0,669	0,599	0,533
		2	и до сих пор в них всё и в ней	0,943	0,693	0,467	0,24
		3	тех кто с такое предал что пишет куда пришла	0,632	0,368	0,163	0,104
COCO Image Captions	Из выборки	1	Several motorcycles are lined up and parked on the side of the street	0,665	0,605	0,529	0,455
		2	A person sitting in the middle of a pile of luggage	0,589	0,513	0,422	0,331
		3	A man wearing a suit , dress shirt and neck tie	0,503	0,348	0,223	0,109
	Сгенерированные на основе MLE	1	A dog laying on top of a desk in front of a TV	0,692	0,664	0,589	0,496
		2	Two people holding remotes together in a living room	0,459	0,388	0,288	0,212
		3	The two beds and a picture of a enjoying from the sky	0,523	0,357	0,228	0,111

Из табл 1, 2 можно увидеть, что качество примеров, сгенерированных нейронной сетью LSTM, обученной на основе подхода MLE, уступает примерам из обучающей выборки, написанным людьми, по метрике BLEU.

## 5. Описание архитектуры SeqGAN

В данной работе обучение на основе SeqGAN [1] является продолжением обучения LSTM на основе MLE. SeqGAN используется для увеличения качества генерации текста.

Нейронная сеть SeqGAN состоит из двух нейронных сетей: генератора и дискриминатора. Целью нейронной сети генератора является генерация текста. В данной работе в качестве нейронной сети генератора выступает предварительно обученная нейронная сеть LSTM, использовавшаяся для обучения с помощью MLE, описанная выше.

Целью нейронной сети дискриминатора является классификация на два класса: реальных образцов текста и сгенерированных. В качестве нейронной сети дискриминатора могут использоваться многие нейронные сети с сигмоидальной функцией активации на выходном слое [22], например сверточная нейронная сеть, рекуррентная нейронная сеть или полносвязная нейронная сеть.

В данной работе в качестве дискриминатора выступает двунаправленная традиционная LSTM [4]. Нейронная сеть дискриминатор состоит из слоя Embedding (длина вектора слова составляет 150 элементов), двух слоев двунаправленной традиционной LSTM (каждый слой состоит из 150 нейронов), скрытого полносвязного слоя (из 150 нейронов с функцией активации *relu*) и одного полносвязного выходного слоя (с одним нейроном и функцией активации *sigmoid*).

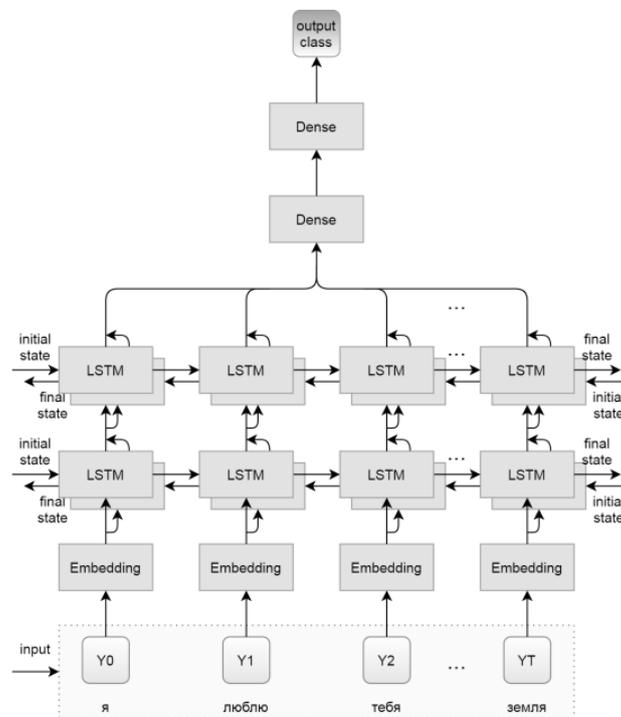


Рис. 4. Топология дискриминатора SeqGAN

Fig. 4. SeqGAN discriminator topology

Топология нейронной сети дискриминатора из SeqGAN [1] представлена на рис. 4. Следует отметить, что обучение генератора и нейронной сети SeqGAN в целом отличается от алгоритма, используемого в традиционной генеративно-состязательной нейронной сети (GAN) [23]. Алгоритм обучения SeqGAN будет описан ниже, информация о данном подходе содержится в статьях [1, 12].

## 6. Обучение SeqGAN

Процесс обучения нейронной сети SeqGAN [1] состоит из следующих этапов:

1. Предварительное обучение генератора на основе MLE.
2. Предварительное обучение дискриминатора.

3. Повторение шагов в цикле:

– обучение генератора на основе обучения с подкреплением (reinforcement learning, RL [24, 25]) в составе SeqGAN;

– обучение дискриминатора.

Первый этап полностью соответствует контролируемому обучению нейронной сети LSTM на основе MLE, которое было описано выше.

На втором этапе необходимо составить выборку для обучения дискриминатора. Данная выборка состоит из реальных примеров и примеров, сгенерированных предварительно обученным генератором (в данной работе размер выборки для обучения дискриминатора составляет 10 000 примеров). На реальные примеры дискриминатор должен учиться выдавать 1, а на сгенерированные генератором 0. Далее происходит обучение дискриминатора. В процессе обучения дискриминатора каждые 10 000 итераций (1 эпоха) проводится обновление обучающей выборки. В результате обучения нейронная сеть должна научиться классифицировать реальные и сгенерированные примеры. От качества обучения дискриминатора зависит качество обучения генератора на третьем этапе (в оригинальной статье [1] авторы советуют проводить наиболее качественное обучение дискриминатора). Обучение нейронной сети дискриминатора проводилось в течение 300 эпох. В данной работе точность нейронной сети дискриминатора составляет 81% на выборке COCO Image Captions [8] и 76% на выборке стихов с сайта Stihi.ru [7]. При обучении дискриминатора используется оптимизатор Adagrad [21], который показал наибольшую стабильность и качество при обучении дискриминатора.

На третьем этапе проводится заданное количество итераций: 25 эпох обучения генератора в составе нейронной сети SeqGAN. Каждая эпоха состоит из следующих шагов:

1. Одна итерация обучения генератора в составе SeqGAN.

2. Обучение дискриминатора в течение 5 эпох по 10 000 итераций на новой сгенерированной обучающей выборке из 10 000 примеров.

Обучение генератора SeqGAN [1] существенно отличается от алгоритма обучения, используемого в традиционной GAN.

Перед вычислением ошибки проводится генерация текста на основе нейронной сети генератора, этап генерации текста представлен в виде псевдокода (рис. 5):

```
# генерация текста
СГЕНЕРИРОВАННЫЙ_ТЕКСТ = ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ_МАССИВА(ДЛИНА_ТЕКСТА) # инициализация массива для записи текста
СКРЫТОЕ_СОСТОЯНИЕ, СОСТОЯНИЕ_ЯЧЕЙКИ = ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ_СОСТОЯНИЯ_LSTM()
ВХОДНОЕ_СЛОВО = ИНДЕКС_СТАРТОВОГО_СЛОВА
i = 0
ПОКА i < ДЛИНА_ТЕКСТА:
    ВЫХОД_НС, СКРЫТОЕ_СОСТОЯНИЕ, СОСТОЯНИЕ_ЯЧЕЙКИ = ВЫЧИСЛЕНИЕ_LSTM(ВХОДНОЕ_СЛОВО,
        СКРЫТОЕ_СОСТОЯНИЕ, СОСТОЯНИЕ_ЯЧЕЙКИ) # вычислить выход нейронной сети на итерации i
    ВЫХОД_НС_EXP = EXP(ВЫХОД_НС)
    ИНДЕКС_СГЕНЕРИРОВАННОГО_СЛОВА = MULTINOMIAL(ВЫХОД_НС_EXP)
    СГЕНЕРИРОВАННЫЙ_ТЕКСТ[i] = ИНДЕКС_СГЕНЕРИРОВАННОГО_СЛОВА
    ВХОДНОЕ_СЛОВО = ИНДЕКС_СГЕНЕРИРОВАННОГО_СЛОВА
    i = i + 1
```

Рис. 5. Псевдокод этапа генерации текста  
Fig. 5. Pseudocode of the text generation stage

Здесь переменные СКРЫТОЕ\_СОСТОЯНИЕ и СОСТОЯНИЕ\_ЯЧЕЙКИ представляют собой состояние нейронной сети LSTM. СГЕНЕРИРОВАННЫЙ\_ТЕКСТ представляет собой массив сгенерированных индексов слов из словаря. ИНДЕКС\_СТАРТОВОГО\_СЛОВА является индексом слова `_START_`. ВХОДНОЕ\_СЛОВО представляет собой вход на нейронную сеть LSTM на текущей итерации. ВЫХОД\_НС содержит выход нейронной сети генератора на итерации  $i$  до выбора случайного индекса слова из словаря. Переменная ВЫХОД\_НС\_EXP является выходом нейронной сети генератора после вычисления экспоненты. ИНДЕКС\_СГЕНЕРИРОВАННОГО\_СЛОВА содержит результат операции `multinomial` на основе переменной ВЫХОД\_НС\_EXP, является сгенерированным словом. Функция ВЫЧИСЛЕНИЕ\_LSTM проводит одну итерацию вычислений на основе нейронной сети LSTM, в результате чего вычисляются новое скрытое состояние и один выходной вектор вероятностей.

Вычисление функции ошибки нейронной сети генератора представлено в виде псевдокода на рис. 6.

Переменная ОШИБКА является минимизируемой ошибкой нейронной сети генератора. Функция ОТВЕТ\_ДИСКРИМИНАТОРА проводит оценку качества сгенерированного текста. ОЦЕНКА\_ДИСКРИМИНАТОРА является выводом нейронной сети дискриминатора на основе переменной СГЕНЕРИРОВАННЫЙ\_ТЕКСТ.

```
# оценка текста дискриминатором
ОЦЕНКА_ДИСКРИМИНАТОРА = ОТВЕТ_ДИСКРИМИНАТОРА(СГЕНЕРИРОВАННЫЙ_ТЕКСТ)

# вычисление ошибки генератора
СКРЫТОЕ_СОСТОЯНИЕ, СОСТОЯНИЕ_ЯЧЕЙКИ = ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ_СОСТОЯНИЯ_LSTM()
ВХОДНОЕ_СЛОВО = ИНДЕКС_СТАРТОВОГО_СЛОВА
ОШИБКА = 0 # инициализация ошибки
i = 0
ПОКА i < ДЛИНА_ТЕКСТА: # проход по всем словам сгенерированного текста
    ВЫВОД_НС, СКРЫТОЕ_СОСТОЯНИЕ, СОСТОЯНИЕ_ЯЧЕЙКИ = ВЫЧИСЛЕНИЕ_LSTM(ВХОДНОЕ_СЛОВО,
        СКРЫТОЕ_СОСТОЯНИЕ, СОСТОЯНИЕ_ЯЧЕЙКИ) # вычислить выход нейронной сети на итерации i
    ОШИБКА = ОШИБКА - ВЫВОД_НС[СГЕНЕРИРОВАННЫЙ_ТЕКСТ[i]] * ОЦЕНКА_ДИСКРИМИНАТОРА # вычислить ошибку для слова на итерации i
    ВХОДНОЕ_СЛОВО = СГЕНЕРИРОВАННЫЙ_ТЕКСТ[i]
    i = i + 1
```

Рис. 6. Псевдокод вычисления ошибок  
Fig. 6. Error computation pseudocode

В [1] предлагается использование метода Монте-Карло [26] для уточнения градиента. В данной работе не реализовывался алгоритм Монте-Карло, SeqGAN может применяться без данного алгоритма. В работе предпринята попытка увеличения точности вычисления градиента на основе использования пакетного обучения с увеличенным до 4 000 примеров пакетом данных.

## 7. Результаты тестирования SeqGAN

Нейронная сеть SeqGAN была реализована и протестирована на задаче пословной генерации коротких текстов [16].

В качестве нейронной сети генератора в SeqGAN выступает LSTM, обученная с помощью MLE. Результаты обучения и тестирования указанной LSTM описаны выше. Далее будут приведены результаты дообучения LSTM с помощью нейронной сети SeqGAN.

Были проведены реализация [16] и тестирование нейронной сети SeqGAN на выборках данных: стихи с сайта Stihi.ru [7] и подписи к изображениям из выборки COCO Image Captions [8]. Тестирование проводилось на тестовых выборках, описанных ранее. Для тестирования использовалось 500 сгенерированных примеров. Оценка качества проводилась на основе метрики BLEU [9]. Результаты тестирования представлены в табл. 4:

Таблица 4

Результаты тестирования SeqGAN

Выборка	BLEU-2	BLEU-3	BLEU-4	BLEU-5
Stihi.ru	0,798	0,49	0,259	0,153
COCO Image Captions	0,545	0,430	0,308	0,206

Примеры текстов, сгенерированных с помощью SeqGAN, представлены в табл. 5. Для каждого примера приведена оценка по метрике BLEU [9].

Таблица 5

Примеры сгенерированного текста

Выборка	Тип примеров	№	Пример	BLEU-2	BLEU-3	BLEU-4	BLEU-5
Stihi.ru	Сгенерированные с помощью SeqGAN	1	кому то на меня я не знаю что будет	1,0	0,855	0,65	0,495
		2	и без тебя не могу без тебя кричу	0,943	0,822	0,631	0,305
		3	на небесах не так уж не просто как прежде	0,943	0,606	0,237	0,14
COCO Image Captions	Сгенерированные с помощью SeqGAN	1	A group of people standing next to a body of water	0,589	0,577	0,565	0,537
		2	A man sitting on a bench holding a Frisbee as others watch	0,585	0,485	0,428	0,384
		3	A man and woman are playing a video game	0,429	0,313	0,206	0,103

По приведенным в табл. 1, 4 результатам можно сделать вывод, что нейронная сеть SeqGAN [1] позволяет улучшить качество генерации текста по метрике BLEU [9].

### 8. Возведение в степень значений вектора вероятностей

В данной работе предпринята попытка улучшить качество генерации текста на основе возведения значений вектора вероятностей в степень  $k$ , большую 1.

Данная операция заключается в возведении выхода нейронной сети, после вычисления экспоненты, в некоторую степень  $k$ , большую 1, что позволяет увеличить качество генерации текста за счет снижения его разнообразия. Рост качества генерации связан с повышением вероятности выбора более подходящего слова, по мнению нейронной сети. Операцию можно представить в виде псевдокода (рис. 7). Здесь  $k$  – выбранная степень, большая 1.

```
# генерация текста
СГЕНЕРИРОВАННЫЙ_ТЕКСТ = ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ_МАССИВА(ДЛИНА_ТЕКСТА) # инициализация массива для записи текста
СКРЫТОЕ_СОСТОЯНИЕ, СОСТОЯНИЕ_ЯЧЕЙКИ = ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ_СОСТОЯНИЯ_LSTM()
ВХОДНОЕ_СЛОВО = ИНДЕКС_СТАРТОВОГО_СЛОВА
i = 0
ПОКА i < ДЛИНА_ТЕКСТА:
    ВЫХОД_НС, СКРЫТОЕ_СОСТОЯНИЕ, СОСТОЯНИЕ_ЯЧЕЙКИ = ВЫЧИСЛЕНИЕ_LSTM(ВХОДНОЕ_СЛОВО,
        СКРЫТОЕ_СОСТОЯНИЕ, СОСТОЯНИЕ_ЯЧЕЙКИ) # вычислить выход нейронной сети на итерации i
    ВЫХОД_НС_EXP = EXP(ВЫХОД_НС)**k
    ИНДЕКС_СГЕНЕРИРОВАННОГО_СЛОВА = MULTINOMIAL(ВЫХОД_НС_EXP)
    СГЕНЕРИРОВАННЫЙ_ТЕКСТ[i] = ИНДЕКС_СГЕНЕРИРОВАННОГО_СЛОВА
    ВХОДНОЕ_СЛОВО = ИНДЕКС_СГЕНЕРИРОВАННОГО_СЛОВА
    i = i + 1
```

Рис. 7. Псевдокод этапа генерации текста на основе возведения вектора вероятностей в степень  $k$

Fig. 7. Pseudocode of the text generation stage based on raising the probability vector to the power  $k$

Плюсом данного подхода является простота его реализации, которая не требует дополнительного обучения нейронной сети. Существенным минусом является снижение разнообразия генерируемых текстов.

Данный подход можно применить к нейронной сети, обученной как на основе MLE, так и на основе SeqGAN. Нами было проведено тестирование данного подхода с использованием нейронной сети, обученной на основе SeqGAN.

Тестирование проводилось на тестовых выборках, описанных ранее. Для тестирования использовалось 500 сгенерированных примеров. Оценка качества проводилась на основе метрики BLEU [9].

Результаты тестирования SeqGAN с возведением значений вектора вероятностей в степень 1,5 представлены в табл. 6.

Таблица 6

Результаты тестирования SeqGAN с возведением значений вектора вероятностей в степень 1,5

Выборка	BLEU-2	BLEU-3	BLEU-4	BLEU-5
Stihi.ru	0,936	0,761	0,483	0,278
COCO Image Captions	0,601	0,548	0,466	0,362

Результаты тестирования SeqGAN с возведением значений вектора вероятностей в степень 2 представлены в табл. 7. В табл. 8 приведены примеры сгенерированного теста.

Таблица 7

Результаты тестирования SeqGAN с возведением значений вектора вероятностей в степень 2

Выборка	BLEU-2	BLEU-3	BLEU-4	BLEU-5
Stihi.ru	0,968	0,86	0,618	0,383
COCO Image Captions	0,602	0,571	0,511	0,423

По полученным результатам можно сделать вывод, что возведение значений вектора вероятностей в степень, большую 1, перед использованием данного вектора в операции multinomial [20] позволяет увеличить качество генерации текстов.

Примеры сгенерированного текста

Выборка	Тип примеров	№	Пример	BLEU-2	BLEU-3	BLEU-4	BLEU-5
Stihi.ru	Сгенерированные	1	и не важно что ты не со мной	1,0	1,0	0,962	0,844
		2	и в то что я не могу понять	1,0	0,909	0,753	0,351
		3	и не забыть мне все что я не знаю	0,943	0,822	0,531	0,265
COCO Image Captions	с помощью SeqGAN и возведением вектора вероятностей в степень 2	1	A man is sitting next to a fire hydrant on the side of the road	0,795	0,789	0,767	0,721
		2	A man holding a smart phone in his hand and a man	0,692	0,683	0,641	0,555
		3	A young man sitting on a couch next to a little girl	0,613	0,551	0,445	0,345

Следует отметить, что качество генерации текстов значительно превышает качество реальных текстов по метрике BLEU. Существенное увеличение качества генерации текстов по метрике BLEU связано со снижением разнообразия текстов, в результате чего нейронная сеть чаще использует популярные слова и словосочетания. Тексты из обучающей выборки являются более разнообразными, чем тексты, генерируемые нейронной сетью, что могло привести к более низкой оценке примеров из обучающей выборки по метрике BLEU.

### Заключение

В данной работе были рассмотрены и реализованы подходы MLE [6] и SeqGAN [1] для генерации коротких текстов на основе нейронной сети LSTM [4]. В реализации SeqGAN метод Монте-Карло был заменен пакетным обучением с увеличенным пакетом данных. Программная реализация представлена на сайте [16].

Рассматриваемые подходы протестированы на следующих выборках данных: сборник русских стихов с сайта Stihi.ru [7] и подписи к изображениям из выборки COCO Image Captions [8]. На основе полученных результатов сделан вывод, что алгоритмы MLE и SeqGAN способны генерировать короткие тексты. Подход на основе SeqGAN позволяет улучшить качество генерации текста по сравнению с подходом на основе MLE, но в процессе обучения уменьшается разнообразие генерируемых текстов. Нейронная сеть LSTM, обученная на основе SeqGAN, генерирует примеры, близкие по качеству к реальным примерам, по метрике BLEU (см. табл. 1, 2, 4–7).

Предложен, реализован и протестирован подход на основе возведения значений вектора вероятностей в степень, большую 1. Данная операция позволила увеличить качество генерируемого текста по метрике BLEU, но снизила его разнообразие. Нейронная сеть чаще использует некоторый небольшой набор слов и словосочетаний. Для повышения разнообразия текстов данный подход требует модификации.

В результате проделанной работы следует отметить, что требуется качественное предварительное обучение генератора и дискриминатора SeqGAN, что требует дополнительных затрат времени на обучение и реализацию алгоритмов.

Был сделан вывод, что для обучения генератора на основе нейронной сети SeqGAN требуется качественно обученный дискриминатор. Дискриминатор может не справиться с классификацией сгенерированных и реальных примеров при достаточно качественно обученном генераторе. Требуется настройка гиперпараметров нейронной сети дискриминатора, таких как оптимизатор, скорость обучения, топология нейронной сети.

В рамках данной работы сделан вывод, что оценка качества генерации текстов по метрике BLEU имеет свои недостатки. Низкая оценка качества примера по метрике BLEU может быть дана качественному тексту, написанному человеком или сгенерированному алгоритмом. Например, если оцениваемый пример оказался оригинальным и не имеет совпадений с тестовой выборкой. Таким образом, более высокая оценка качества генерации текстов по метрике BLEU, чем у примеров, написанных людьми, может быть вызвана генерацией более популярных текстов, которые чаще встречаются

в тестовой выборке. Для улучшения качества оценки по метрике BLEU требуется увеличение количества примеров в тестовой выборке, что приводит к возрастанию времени тестирования алгоритмов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Yu L., Zhang W., Wang J., Yu Y. SeqGAN: Sequence Generative Adversarial Nets with Policy Gradient // AAAI'17: Proc. of the Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2017. P. 2852–2858.
2. Guo J., Lu S., Cai H., Zhang W., Yu Y., Wang J. Long Text Generation via Adversarial Training with Leaked Information // The Thirty-Two AAAI Conference on Artificial Intelligence, 2018. V. 32, N. 1. P. 5141–5148.
3. Lin K., Li D., He X., Zhang Z., Sun M.-T. Adversarial Ranking for Language Generation // Advances in Neural Information Processing Systems. 2018. P. 3155–3165.
4. Hochreiter S., Schmidhuber J. Long short-term memory // Neural Computation. 1997. V. 9, is. 8. P. 1735–1780.
5. Знакомство с архитектурой LSTM-сетей. URL: <http://datareview.info/article/znakomstvo-s-arhitekturoy-lstm-setey/> (accessed: 20.10.2020).
6. Cramer J.S. Econometric Applications of Maximum Likelihood Methods. Cambridge University Press, 1986. 206 p.
7. StihData. URL: <https://github.com/DenisVorotyntsev/StihData/tree/194107ff98249fd11e8da5c3ee2d> (accessed: 20.10.2020).
8. Chen X., Fang H., Lin T.-Y., Vedantam R., Gupta S., Dollar P., Zitnick, C.L. Microsoft COCO Captions: Data Collection and Evaluation Server. 2015. URL: <https://arxiv.org/pdf/1504.00325.pdf> (accessed: 20.10.2020).
9. Papineni K., Roukos S., Ward T., Zhu W.-J. BLEU: a Method for Automatic Evaluation of Machine Translation // Proc. of the 40th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics. 2002. P. 311–318.
10. Coughlin D. Correlating Automated and Human Assessments of Machine Translation Quality // Proc. of MT Summit IX. 2003. P. 63–70.
11. Chen B., Cherry C. A Systematic Comparison of Smoothing Techniques for Sentence-Level BLEU // Proc. of the Ninth Workshop on Statistical Machine Translation. 2014. P. 362–367.
12. Wu Y., Wang, J. Text Generation Service Model Based on Truth-Guided SeqGAN // IEEE Access. 2020. V. 8. P. 11880–11886.
13. Shi Z., Chen X., Qiu X., Huang X. Toward Diverse Text Generation with Inverse Reinforcement Learning. 2018. URL: <https://arxiv.org/pdf/1804.11258.pdf> (accessed: 20.10.2020).
14. Li J., Monroe W., Shi T., Jean S., Ritter A., Jurafsky D. Adversarial Learning for Neural Dialogue Generation // EMNLP. 2017. P. 2147–2159.
15. Выборка данных Image COCO. URL: <https://github.com/CR-Gjx/LeakGAN/tree/master/Image%20COCO/save> (accessed: 20.10.2020).
16. Программная реализация SeqGAN. URL: <https://github.com/NikolayKrivosheev/Generation-of-short-texts-SeqGAN> (accessed: 20.10.2020).
17. SeqGAN. URL: <https://github.com/suragnair/seqGAN> (accessed: 20.10.2020).
18. What the heck is Word Embedding. URL: <https://towardsdatascience.com/what-the-heck-is-word-embedding-b30f67f01c81> (accessed: 20.10.2020).
19. Xu H. Text Classification with Topic-based Word Embedding and Convolutional Neural Networks // Proc. of the 7th ACM International Conference on Bioinformatics, Computational Biology, and Health Informatics. 2016. P. 88–97.
20. Torch.multinomial. URL: <https://pytorch.org/docs/master/generated/torch.multinomial.html> (accessed: 20.10.2020).
21. Ruder S. An overview of gradient descent optimization algorithms. 2017. URL: <https://arxiv.org/pdf/1609.04747.pdf> (accessed: 20.10.2020).
22. Николенко С., Кагурин А., Архангельская Е. Глубокое обучение Погружение в мир нейронных сетей. Спб. : Питер. 2018. 477 с.
23. Goodfellow I. Generative Adversarial Nets // Advances in Neural Information Processing Systems. 2014. V. 27. P. 2672–2680.
24. Sutton R.S. Policy Gradient Methods for Reinforcement Learning with Function Approximation // Advances in Neural Information Processing Systems. 1999. V. 12. P. 1057–1063.
25. Kulkarni T.D. Hierarchical Deep Reinforcement Learning: Integrating Temporal Abstraction and Intrinsic Motivation // Advances in Neural Information Processing Systems. V. 29. 2016. P. 3675–3683.
26. Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo Method // Journal of the American Statistical Association. 1949. V. 44, is. 247. P. 335–341.

Поступила в редакцию 20 апреля 2021 г.

Krivosheev N.A., Ivanova Y.A., Spitsyn V.G. (2021) AUTOMATIC GENERATION OF SHORT TEXTS BASED ON THE USE OF NEURAL NETWORKS LSTM AND SeqGAN. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 57. pp. 118–130

DOI: 10.17223/19988605/57/13

The aim of this work is to estimate the quality of automatic short texts generation based on a network with long short-term memory (Long Short-Term Memory, LSTM). To train the LSTM neural network, supervised learning based on the maximum likeli-

hood estimation (MLE) method is used. Further LSTM training is used as part of an adversarial network that generates a sequence (Sequence Generative Adversarial Net, SeqGAN). It should be noted that the Monte Carlo method is not used in this work, batch training with a larger data packet is applied instead.

The paper proposes a modification of the output vector by raising its values to a power greater than 1 to increase the probability of choosing the generated word with the greatest weight in the output vector of the neural network. This operation makes it possible to increase the quality of the generated text, but reduces its variety.

The length of the generated texts is 10 and 20 words. The following data samples are used for training and testing neural networks: a collection of Russian poems from the Stihi.ru website and captions to images in English from the COCO Image Captions sample. Word-by-word text generation is applied. The quality of text generation is assessed using the BLEU metric. The analysis and comparison with similar solutions based on the COCO Image Captions data sample are carried out.

Training and testing of MLE and SeqGAN-based approaches was carried out. Based on the presented results, we can conclude that training based on the SeqGAN neural network, in comparison with the MLE-based approach, improves the quality of text generation according to the BLEU metric. The texts generated on the basis of the SeqGAN neural network are comparable in quality to the examples from the training set using the BLEU metric.

The approach based on raising the values of the probability vector to a power makes it possible to increase the quality of text generation according to the BLEU metric, but leads to a reduction in texts variety.

It should be noted that the quality of text generation, based on SeqGAN and modifying the output vector by raising its values to a power greater than 1, significantly exceeds the quality of real texts according to the BLEU metric. A significant increase in the quality of text generation according to the BLEU metric is associated with a reduction the variety of texts, as a result of which the neural network uses popular words and phrases more often. The texts from the training set are more diverse than the texts generated by the neural network, which could lead to a lower score of training set examples according to the BLEU metric.

Keywords: SeqGAN; text generation; adversarial reinforcement learning.

*KRIVOSHEEV Nikolay Anatolyevich* (Post-graduate student of National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: nikola0212@mail.ru

*IVANOVA Yulia Aleksandrovna* (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Information Technologies of National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: jbolotova@tpu.ru

*SPITSYN Vladimir Grigorievich* (Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Information Technologies of National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation).

Email: spvg@tpu.ru

## REFERENCES

1. Yu, L., Zhang, W., Wang, J. & Yu, Y. (2017) SeqGAN: Sequence Generative Adversarial Nets with Policy Gradient. *AAAI'17: Proceedings of the Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence*. pp. 2852–2858.
2. Guo, J., Lu, S., Cai, H., Zhang, W., Yu, Y. & Wang, J. (2018) Long Text Generation via Adversarial Training with Leaked Information. *The Thirty-Two AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 32(1). pp. 5141–5148.
3. Lin, K., Li, D., He, X., Zhang, Z. & Sun, M.-T. (2018) Adversarial Ranking for Language Generation. *Advances in Neural Information Processing Systems*. pp. 3155–3165.
4. Hochreiter, S. & Schmidhuber, J. (1997) Long short-term memory. *Neural Computation*. 9(8). pp. 1735–1780.
5. Datareview.info. (s.n.) *Znakomstvo s arkhitekturoy LSTM-setey* [The architecture of LSTM networks]. [Online] Available from: <http://datareview.info/article/znakomstvo-s-arkhitekturoy-lstm-setey/> (Accessed: 20th October 2020).
6. Cramer, J.S. (1986) *Econometric Applications of Maximum Likelihood Methods*. Cambridge University Press.
7. Github.com. (n.d.) *StihiData*. [Online] Available from: <https://github.com/DenisVorotyntsev/StihiData/tree/194107ff98249fd11e8da5c3ee2d> (Accessed: 20th October 2020).
8. Chen, X., Fang, H., Lin, T.-Y., Vedantam, R., Gupta, S., Dollar, P. & Zitnick, C.L. (2015) *Microsoft COCO Captions: Data Collection and Evaluation Server*. [Online] Available from: <https://arxiv.org/pdf/1504.00325.pdf> (Accessed: 20th October 2020).
9. Papineni, K., Roukos, S., Ward, T. & Zhu, W.-J. (2002) BLEU: a Method for Automatic Evaluation of Machine Translation. *Proceedings of the 40th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*. pp. 311–318.
10. Coughlin, D. (2003) Correlating Automated and Human Assessments of Machine Translation Quality. *Proceedings of MT Summit IX*. pp. 63–70.
11. Chen, B. & Cherry, C. (2014) A Systematic Comparison of Smoothing Techniques for Sentence-Level BLEU. *Proceedings of the Ninth Workshop on Statistical Machine Translation*. pp. 362–367.
12. Wu, Y. & Wang, J. (2020) Text Generation Service Model Based on Truth-Guided SeqGAN. *IEEE Access*. 8. pp. 11880–11886.
13. Shi, Z., Chen, X., Qiu X. & Huang, X. (2018) *Toward Diverse Text Generation with Inverse Reinforcement Learning*. [Online] Available from: <https://arxiv.org/pdf/1804.11258.pdf> (Accessed: 20th October 2020).

14. Li, J., Monroe, W., Shi, T., Jean, S., Ritter A. & Jurafsky, D. (2017) Adversarial Learning for Neural Dialogue Generation. *EMNLP*. pp. 2147–2159.
15. Github.com. (n.d.) *Vyboroka dannykh Image COCO* [COCO Image Sampling]. [Online] Available from: <https://github.com/CR-Gjx/LeakGAN/tree/master/Image%20COCO/save> (Accessed: 20th October 2020).
16. Github.com. (n.d.) *Programmnyaya realizatsiya SeqGAN* [SeqGAN neural network implementation]. [Online] Available from: <https://github.com/NikolayKrivoshchev/Generation-of-short-texts-SeqGAN> (Accessed: 10th December 2020).
17. Github.com. (n.d.) *SeqGAN*. [Online] Available from: <https://github.com/suragnair/seqGAN> (Accessed: 20th October 2020).
18. Agrawal, S. (2019) *What the heck is Word Embedding*. [Online] Available from: <https://towardsdatascience.com/what-the-heck-is-word-embedding-b30f67f01c81> (Accessed: 20th October 2020).
19. Xu, H. (2016) Text Classification with Topic-based Word Embedding and Convolutional Neural Networks. *Proceedings of the 7th ACM International Conference on Bioinformatics, Computational Biology, and Health Informatics*. pp. 88–97.
20. Pytorch.org. (n.d.) *Torch.multinomial*. [Online] Available from: <https://pytorch.org/docs/master/generated/torch.multinomial.html> (Accessed: 20th October 2020).
21. Ruder, S. (2017) *An overview of gradient descent optimization algorithms*. [Online] Available from: <https://arxiv.org/pdf/1609.04747.pdf> (Accessed: 20th October 2020).
22. Nikolenko, S., Kadurin, A. & Arkhangelskaya, E. (2018) *Glubokoe obuchenie Pogruzhenie v mir neyronnykh setey* [Deep learning. Immersion in the world of neural net-works]. St. Petersburg: Piter.
23. Goodfellow, I. (2014) Generative Adversarial Nets. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 27. pp. 2672–2680.
24. Sutton, R.S. (1999) Policy Gradient Methods for Reinforcement Learning with Function Approximation. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 12. pp. 1057–1063.
25. Kulkarni, T.D. (2016) Hierarchical Deep Reinforcement Learning: Integrating Temporal Abstraction and Intrinsic Motivation. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 29. pp. 3675–3683.
26. Metropolis, N. & Ulam, S. (1949) The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association*. 44(247). pp. 335–341.

## ХРОНИКИ: МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

DOI: 10.17223/19988605/57/14

### ПАМЯТИ ЮРИЯ ИВАНОВИЧА ПАРАЕВА



7 ноября 2021 года на 85-м году жизни ушел из жизни известный ученый в области теории автоматического управления, Заслуженный деятель науки РФ, Почетный работник Высшего профессионального образования РФ, Заслуженный профессор Томского государственного университета, профессор кафедры прикладной математики, доктор технических наук **Юрий Иванович Параев**.

Ю.И. Параев родился 16 ноября 1936 г. в г. Томске. После окончания с серебряной медалью Новосибирской мужской средней школы № 12 в 1954 г. он поступил на радиофизический факультет (РФФ) ТГУ. Окончил университет в 1959 г. по специальности «радиофизика и электроника» с квалификацией «физик-радиоэлектроник», защитив дипломную работу: «Анализ работы системы автоматического управления на основе критерия среднеквадратической ошибки» (научный руководитель – аспирант, затем профессор Г.А. Медведев). С сентября 1959 г. работал инженером лаборатории счетно-решающих устройств СФТИ, с 1 декабря того же года – аспирант кафедры электронной вычислительной техники и автоматики (ЭВТиА) РФФ. С 1 декабря 1962 г. был ассистентом, с 4 декабря 1964 г. – доцентом кафедры ЭВТиА. В 1970 г. в связи с организацией факультета прикладной математики стал доцентом вновь организованной кафедры прикладной математики (заведующий кафедрой – профессор Г.А. Медведев). С 1972 г. был старшим научным сотрудником (докторантом) факультета прикладной математики и кибернетики (ФПМК). В октябре 1974 г. избран по конкурсу на должность заведующего кафедрой прикладной математики ФПМК. В 1981 г. в диссертационном совете при Том-

ском политехническом институте (ныне ТПУ) защитил диссертацию «Параметрическая и структурная оптимизация в задачах статистической динамики процессов управления и фильтрации» на соискание ученой степени доктора технических наук. Ю.И. Параев читал курсы: теория управления; теория принятия решений; методы оптимизации; теория вероятностей; математическая статистика. Область научных исследований – теория управления динамическими объектами, включая теорию автоматического управления, статистическую динамику, теорию оптимального управления, оптимальную фильтрацию, структурную оптимизацию многосвязных систем управления. Начиная заниматься научной работой в студенческом кружке, которым руководил доцент П.П. Бирюлин, положивший начало развитию кибернетических исследований в ТГУ. Теоретические результаты, полученные Ю.И. Параевым и сотрудниками кафедры в 1960–1990-е гг., широко применялись в ряде ведущих отраслевых институтов страны при проектировании и проведении опытно-конструкторских разработок сложных информационно-управляющих комплексов для летательных аппаратов и некоторых технологических процессов. В 1990-х гг. многие из разработанных методов и алгоритмов были реализованы Ю.И. Параевым в виде вычислительной системы «Управление». Эта система содержит большой набор (около 250) операций линейной алгебры и операций, связанных с решением алгебраических, дифференциальных и разностных уравнений, и использовалась в учебном процессе в ТГУ, ТУСУРе, ТПУ, АлтГТУ.

Ю.И. Параев является автором более 250 научных работ, в том числе 8 монографий, 20 учебно-методических разработок. Он подготовил 22 кандидата наук, был научным консультантом по 6 докторским диссертациям. Он возглавлял в ТГУ научную школу по теории управления. Участвовал в редактировании научных трудов ряда научных конференций. С начала 1970-х гг. был членом диссертационных советов в ТГУ, ТПУ, Институте горного дела СО АН СССР. В 1975–1990 гг. был членом комиссии и подкомиссий Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР, председателем секции «Программное и математическое обеспечение вычислительных машин, комплексов и сетей» Головного совета ГКВШ «Автоматизированные системы, средства автоматизации и вычислительной техники». Неоднократно удостоивался Премий ТГУ за научные монографии (1981, 1987, 1991, 1999, 2001). Являлся лауреатом конкурса Томской области в сфере образования и науки (1998). Награждался почетной грамотой МВиССО РСФСР (1980), нагрудным знаком «За отличные успехи в работе» МВиССО СССР (1981), медалью «За заслуги перед Томским университетом» (1998), медалью «Ветеран труда» (1986).

Светлая и добрая память о Юрии Ивановиче Параеве – крупном ученом, одном из основателей образования по прикладной математике в ТГУ и замечательном человеке – сохранится в памяти его коллег и учеников.

*Институт прикладной математики и компьютерных наук,  
Редколлегия журнала «Вестник Томского государственного университета.  
Управление, вычислительная техника и информатика»,  
Кафедра прикладной математики*

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ**

**БУИНЦЕВ Владимир Николаевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладных информационных технологий и программирования Сибирского государственного индустриального университета (г. Новокузнецк). E-mail: buintcev@mail.ru

**ЖУКОВ Игорь Андреевич** – аспирант Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: Ig.Zhukov963@yandex.ru

**ИВАНОВА Юлия Александровна** – кандидат технических наук, доцент отделения информационных технологий Национального исследовательского Томского политехнического университета. E-mail: jbolotova@tpu.ru

**ИСАЕВА Ольга Сергеевна** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник отдела прикладной информатики Института вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск). E-mail: isaeva@icm.krasn.ru

**ИСАЕВ Сергей Владиславович** – кандидат технических наук, доцент, заместитель директора Института вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск). E-mail: si@icm.krasn.ru

**КАЛАШНИКОВ Сергей Николаевич** – доцент, доктор технических наук, профессор кафедры прикладных информационных технологий и программирования Сибирского государственного индустриального университета (г. Новокузнецк). E-mail: s.n.kalashnikov@yandex.ru

**КЕБА Анастасия Владимировна** – аспирант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: mir.na.mig7@mail.ru

**КОЛЕСНИКОВА Светлана Ивановна** – доктор технических наук, профессор кафедры компьютерных технологий и программной инженерии Института вычислительных систем и программирования Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. E-mail: skolesnikova@yandex.ru

**КОСТЮК Юрий Леонидович** – профессор, доктор технических наук, профессор Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: kostyuk\_y\_1@sibmail.com

**КРИВОШЕВ Николай Анатольевич** – аспирант отделения информационных технологий Национального исследовательского Томского политехнического университета. E-mail: nikola0212@mail.ru

**КУЛЯСОВ Никита Владимирович** – инженер отдела информационно-телекоммуникационных технологий Института вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск). E-mail: razor@icm.krasn.ru

**ЛИЗЮРА Ольга Дмитриевна** – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: oliztsu@mail.ru

**МАРТУСЕВИЧ Елена Владимировна** – кандидат технических наук, доцент кафедры естественнонаучных дисциплин им. профессора В.М. Финкеля Сибирского государственного индустриального университета (г. Новокузнецк). E-mail: science\_nvz@yandex.ru

**МАРТУСЕВИЧ Ефим Александрович** – младший научный сотрудник, аспирант кафедры прикладных информационных технологий и программирования Сибирского государственного индустриального университета (г. Новокузнецк). E-mail: program.pro666@yandex.ru

**МИХЕЕВ Павел Андреевич** – кандидат технических наук, ведущий программист кафедры прикладной информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: doka.patrick@gmail.com

**НАЗАРОВ Анатолий Андреевич** – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

**НЕЖЕЛЬСКАЯ Людмила Алексеевна** – доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ludne@mail.ru

**ОВЧИННИКОВА Анастасия Сергеевна** – аспирант кафедры прикладной математики факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: ovchinnikova.2014@stud.nstu.ru

**РЫБЕНКО Инна Анатольевна** – доктор технических наук, доцент, заведующая кафедрой прикладных информационных технологий и программирования Сибирского государственного индустриального университета (г. Новокузнецк). E-mail: rybenkoi@mail.ru

**ПАРАЕВ Юрий Иванович** – профессор, доктор технических наук, заслуженный деятель науки РФ, заслуженный профессор Национального исследовательского Томского государственного университета, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук.

**ПАТРУШЕВ Илья Игоревич** – аспирант кафедры прикладной математики факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: patrushev@ami.nstu.ru

**ПАУЛЬ Светлана Владимировна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: paulsv82@mail.ru

**ПЕРСОВА Марина Геннадьевна** – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: persova@ami.nstu.ru

**ПОДДУБНЫЙ Василий Васильевич** – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: vvpoddubny@gmail.com.

**ПРИСТУПА Павел Викторович** – ассистент кафедры прикладной информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: pristupa@gmail.com

**РУБАН Анатолий Иванович** – профессор, доктор технических наук, заслуженный деятель науки РФ, заслуженный профессор Сибирского федерального университета, профессор кафедры информатики Института космических и информационных технологий Сибирского Федерального университета (г. Красноярск). E-mail: ai-rouban@mail.ru

**СОЛОВЕЙЧИК Юрий Григорьевич** – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: soloveychik@ami.nstu.ru

**СОЧНЕВ Алексей Николаевич** – доцент, кандидат технических наук, заведующий кафедрой робототехники и технической кибернетики Политехнического института Сибирского федерального университета (г. Красноярск). E-mail: asochnev@sfu-kras.ru

**СПИЦЫН Владимир Григорьевич** – профессор, доктор технических наук, профессор отделения информационных технологий Национального исследовательского Томского политехнического университета. E-mail: spvg@tpu.ru

**СУЩЕНКО Сергей Петрович** – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ssp.inf.tsu@gmail.com

**ХАЙИТКУЛОВ Бобомурод Хайитович** – аспирант кафедры алгоритмов и технологий программирования Национального университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека (г. Ташкент, Узбекистан). E-mail: b.hayitqulov@mail.ru

**ЦВЕТНИЦКАЯ Светлана Александровна** – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: svetasa@sibmail.com

**ШУЛЬГИНА Ксения Сергеевна** – студент Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: shulgina19991999@mail.ru

**ЯБЛОНСКИЙ Владимир Олегович** – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры «Процессы и аппараты химических производств» Волгоградского государственного технического университета. E-mail: V.yablonsky@mail.ru

**Научный журнал**

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

**2021. № 57**

Редактор Е.Г. Шумская  
Оригинал-макет Е.Г. Шумской  
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева  
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 30.12.2021 г. Формат 60x84<sup>1/8</sup>.  
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 15,6.  
Тираж 250 экз. Заказ № 4844. Цена свободная.

Дата выхода в свет 17.01.2022 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании  
Издательства Томского государственного университета  
634050, г. Томск, Ленина, 36  
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75  
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)