

Е.А. Молчанова

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Строится асимптотическая модель спектральной задачи. Исходная краевая задача восьмого порядка приводится к последовательности краевых задач более низкого порядка. В нулевом приближении получается обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка. Решение задачи нулевого приближения подчиняется главным граничным условиям, что приводит к трансцендентному уравнению, асимптотическое упрощение которого дает приближенные формулы для собственных значений.

Ключевые слова: моделирование, спектральная задача, асимптотические методы, формальное асимптотическое разложение, собственные значения, собственные функции.

Целью работы является приближенное решение спектральной задачи.

Математическая модель как приближенное описание какого-либо класса явлений с помощью математической символики сводит исследование явления к математической задаче. Естественно, встает проблема выбора метода решения возникшей математической задачи. Так, в дифференциальных задачах, которые содержат малые параметры при старших производных, эффективным является применение асимптотических методов [1–3].

Дело в том, что такие задачи обнаруживают особую структуру интегралов, в число которых входят как «медленные» интегралы, существенные на всем промежутке интегралов, так и «быстрые» интегралы, локализованные в окрестности каких-либо точек, линий. Подобная структура возникает в ряде прикладных задач. Независимо от их физической сущности решение можно представить как асимптотические разложения [4–7].

Рассмотрим реализацию асимптотического моделирования спектральной задачи из теории оболочек [8, 9]. Пусть имеем класс оболочек, включающий в себя цилиндрические и близкие к ним оболочки. Спектральные задачи этого класса объектов описываются системой уравнений теории напряженных состояний с большой изменчивостью [10, 11]:

$$\varepsilon^4 \Delta^2 w + \Delta_R \Phi - \lambda \mu = 0, \varepsilon^4 \Delta^2 \Phi - \Delta_R w = 0, \quad (1)$$

где w – нормальный прогиб, Φ – функция напряжения, ε – малый параметр.

Операторы Δ и Δ_R , явный вид которых приведен в [10], содержат коэффициенты первой и второй квадратичных форм срединной поверхности оболочки.

Их можно выразить, дифференцируя векторное уравнение срединной поверхности

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \mu f(s, \varphi) \vec{n}_0, \quad (2)$$

в котором радиус-вектор $\vec{r}_0$ определяется положением точки на цилиндрической поверхности, орт внешней нормали которой образует правую тройку с ортами

e_1^0, e_2^0 координатных линий s, φ этой поверхности. Координата s отсчитывается вдоль образующей, φ – вдоль направляющей. Функция $f(s, \varphi)$ описывает отклонение от цилиндрической поверхности, μ – малый параметр.

Дифференцируя (2) по s, φ с учетом деривационных формул Гаусса – Вейнгартена [8], после преобразования получим коэффициенты первой квадратичной формы

$$A_1^2 = 1 + \mu^2 f_s'^2, \quad A_2^2 = 1 + 2\mu f k + \mu^2 (f_\varphi'^2 + f^2 k^2), \\ f_\varphi'^2 + f^2 k^2), f_\varphi'^2 + f^2 k^2), \quad k(\varphi) \equiv A_2^0 / R_2^0. \quad (3)$$

Коэффициенты второй квадратичной формы имеют более громоздкие выражения, из которых в дальнейшем используются один-два члена. Поэтому выпишем их, удерживая лишь старшие члены разложений по параметру μ :

$$1/R_1 = -\mu f_{ss}'' + O(\mu^2), \quad 1/R_{12} = \mu(f_{s\varphi}'' - f_\varphi') + O(\mu^2), \\ 1/R^2 = k - \mu(k^2 f + f_{\varphi\varphi}'' + f_s') + O(\mu^2). \quad (4)$$

В том случае, когда функция отклонений $f(s, \varphi)$ зависит только от s , координатные линии s, φ являются линиями кривизны и главные кривизны сравнительно просто записываются без каких-либо отбрасываний:

$$1/R_1 = \mu f_{ss}'' / (1 + \mu^2 (f_s')^2)^{3/2}, \quad 1/R_2 = (k - \mu f_s') / [(1 + \mu^2 (f_s')^2) \mu k f]. \quad (5)$$

С помощью формул (4) операторы Δ и Δ_R , приобретают следующий вид:

$$\Delta w = \partial^2 w / \partial s^2 + \partial^2 w / \partial \varphi^2, \\ \Delta_R w = k \partial w / \partial s - \mu(f_{ss}'' \partial^2 w / \partial \varphi^2 - 2f_{\varphi s}'' \partial^2 w / \partial \varphi \partial s - (f_{\varphi\varphi}'')' \partial w / \partial s) + O(\mu). \quad (6)$$

Теперь, исключив функцию напряжения при помощи второго уравнения исходной системы (1), получим из первого уравнения этой системы после преобразований последовательность уравнений для определения прогиба

$$H_0 w_0 = 0, \quad H_0 w_1 + H_1 w_0 = 0, \quad H_0 w_2 + H_1 w_1 + H_2 w_0 = 0, \dots \quad (7)$$

Применительно к анализу уравнений тонкостенных упругих систем асимптотические методы настолько эффективны, что очень хорошую аппроксимацию дает уже нулевое приближение. В силу этих достоинств, не выписывая довольно громоздких выражений операторов $H_1, H_2, \dots$, приведем только H_0 :

$$H_0 w_0 \equiv (k^2 / q^4) w_0^{IV} + (k / q^2) ((f'' w_0)' + f'' w_0') + (q^4 + f''^2 - \lambda_0) w_0. \quad (8)$$

Если поверхность (2) близка к круговому цилиндру, то в (8) кривизна k постоянна и можно положить $k = 1$. Число q вещественно и определяет изменчивость в направлении φ . Дополнив уравнение $H_0 w_0 = 0$ граничными условиями, получим задачу на собственные значения, решением которой будет набор значений параметра λ_0 . Таким образом, асимптотическое моделирование позволяет существенно редуцировать исходную математическую модель (1), которая имеет 8-й порядок. Нулевое приближение (8) асимптотической задачи описывается уравнением 4-го порядка. Если отклонение от прямолинейной образующей имеет параболическую форму, то вторая производная f'' является постоянной. В этом случае (8) являет-

ся уравнением с постоянными коэффициентами, что позволяет получить сравнительно удобные формулы для собственного значения λ_0 .

Решение уравнения $H_0 w_0 = 0$ ищем в виде линейной комбинации

$$w_0 = \sum_{k=1}^4 a_k e^{b_k s}, \quad (9)$$

в которой корни характеристического уравнения $b_k = \pm q(-f'' \pm (\lambda_0 - q^4)^{1/2})^{1/2}$, $k = 1, \dots, 4$, а константы a_k находятся из условия равенства нулю определителя системы линейных алгебраических уравнений, которая получается в результате подчинения (9) граничным условиям. Так, при граничных условиях

$$w_0(0) = w_0(l) = w_0'(0) = w_0'(l) = 0$$

получаем равенство

$$F \equiv (\rho^2 - r^2) \operatorname{sh}(rl) \sin(\rho l) + 2r\rho (\operatorname{ch}(rl) \cos(\rho l) - 1) = 0, \quad (10)$$

в котором

$$r = ql(-f'' + (\lambda_0 - q^4)^{1/2})^{1/2}, \quad \rho = ql(f'' + (\lambda_0 - q^4)^{1/2})^{1/2}. \quad (11)$$

При параболической форме отклонения вторая производная $f'' = \text{const}$ и является параметром задачи. Параметр q определяет изменяемость собственной функции в окружном направлении, l – длина оболочки.

Асимптотический генезис возникающих трансцендентных уравнений позволяет и к этим уравнениям применить асимптотический анализ [12, 13], с помощью которого можно обнаружить компоненты уравнения, такие, которые вносят главный вклад в формирование спектра. Опуская менее существенные компоненты, получим более простые выражения и даже явные формулы для собственных значений.

Исследуем поведение корней. Левая часть уравнения (10) является суммой двух слагаемых $F = F_1 + F_2$. Нули функции $F_1 = (\rho^2 - r^2) \operatorname{sh}(rl) \sin(\rho l)$ совпадают с нулями $\sin(\rho l)$. Нули функции $F_2 = 2r\rho (\operatorname{ch}(rl) \cos(\rho l) - 1)$ совпадают с корнями уравнения $\operatorname{ch}(rl) \cos(\rho l) - 1 = 0$. Это известно из теории колебаний частотное уравнение балки, защемленной с обеих сторон [14].

Графическое решение уравнений $F = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ обнаруживает их близость в определенных диапазонах изменения параметра λ_0 .

На рис. 1 изобразим графики функций F (сплошная линия), F_1 (штрихпунктирная линия), F_2 (пунктирная линия). Из рисунка видно, что в области малых значений λ_0 слагаемые F_1 , F_2 равноудалены от их суммы F . С увеличением значений λ_0 обнаруживается явная тенденция к сближению F , F_2 , а F_1 существенно отстает. Эта тенденция хорошо иллюстрируется рис. 2, где взяты большие значения λ_0 .

Для сравнения числовых значений зафиксируем значения числовых параметров $l = 3$, $q = 2$, $f'' = -1$ и, применяя численный метод для определения значений параметра λ_0 , получим для первых десяти значений таблицу.

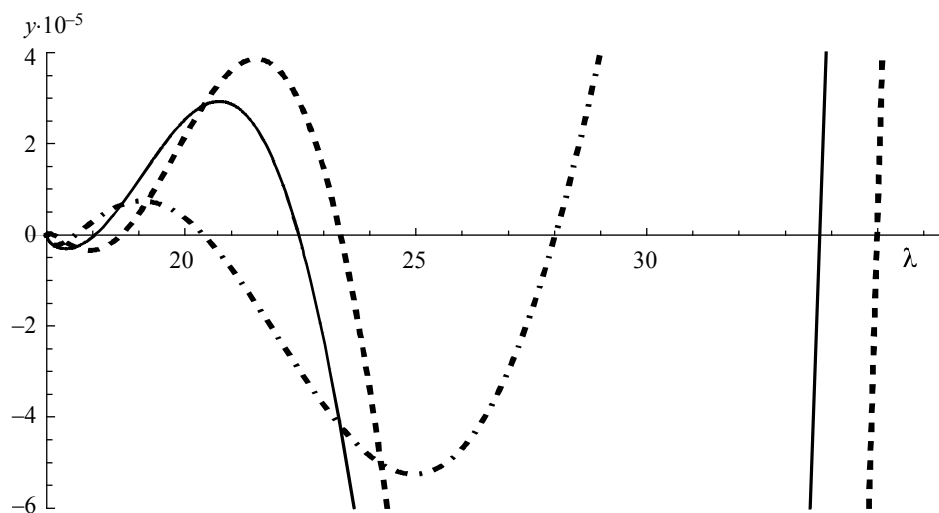


Рис. 1. Графики в диапазоне λ от 0 до 40 трёх функций F (сплошная линия), F_1 (штрих-пунктирная линия), F_2 (пунктирная линия), фигурирующих в левой части трансцендентного уравнения (10)

Fig. 1. Graphs ranging from λ from 0 to 40 for three functions F (solid line), F_1 (chain-dotted line), and F_2 (dashed line) appearing on the left side of the transcendental equation (10)

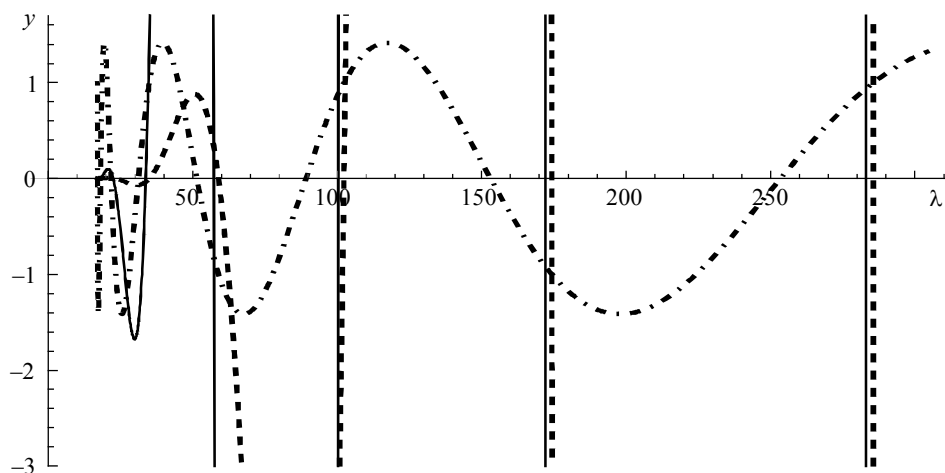


Рис. 2. Графики в диапазоне λ от 0 до 300 трёх функций F (сплошная линия), F_1 (штрих-пунктирная линия), F_2 (пунктирная линия), фигурирующих в левой части трансцендентного уравнения (10)

Fig. 2. Graphs ranging from λ from 0 to 300 for three functions F (solid line), F_1 (chain-dotted line), and F_2 (dashed line) appearing on the left side of the transcendental equation (10)

В первой строке таблицы содержатся корни уравнения $F_1 = 0$, во второй – корни уравнения $F = 0$, в третьей – корни уравнения $F_2 = 0$.

18.0402	21.7021	31.177	51.4256	89.2123	153.106	253.478	402.505	614.167	904.247
18.0476	22.4595	33.7547	57.3408	100.435	172.059	283.035	445.992	675.36	987.375
18.6142	23.3629	34.9957	58.9242	102.364	174.334	285.658	448.962	678.379	991.042

Из этих решений следует, что при больших значениях λ_0 их можно определять, решая уравнение $F_2 = 0$ или

$$\operatorname{ch}(rl) \cos(\rho l) - 1 = 0. \quad (12)$$

Корни этого уравнения близки к нулям функции $\cos(\rho l)$. Поэтому следует решить уравнение

$$\cos(ql(f'' + (\lambda_0 - q^4)^{1/2})^{1/2}) = 0, \quad (13)$$

из которого следует

$$ql(f'' + (\lambda_0 - q^4)^{1/2})^{1/2} = \pi/2, \text{ или } \lambda_0 = q^4 + [((\pi/2 + \pi n)/ql)^2 - f'']^2. \quad (14)$$

При малых значениях λ их можно решать из условия равенства синуса и косинуса аргумента $ql(f'' + (\lambda_0 - q^4)^{1/2})^{1/2}$ или, что то же самое, равенства единице тангенса этого аргумента. Поэтому надо решить уравнение

$$\operatorname{tg}(ql(f'' + (\lambda_0 - q^4)^{1/2})^{1/2}) = 1, \quad (15)$$

из которого следует

$$ql(f'' + (\lambda_0 - q^4)^{1/2})^{1/2} = \pi/4 + \pi n, \text{ или } \lambda_0 = q^4 + [((\pi/4 + \pi n)/ql)^2 - f'']^2. \quad (16)$$

Формулы (14) и (16) носят асимптотический характер и хорошо работают каждая в своей асимптотике. Однако формально каждую из них можно применить на всем спектре. Оказывается, что вычисления, произведенные по этим формулам, снова дают результаты таблицы, что свидетельствует об одной и той же точности формул (14), (16) и того численного метода, который используется в компьютерной программе.

Таким образом, в результате проведенного асимптотического моделирования получены приближенные формулы для собственных значений спектральной задачи.

Получены следующие результаты: из приведенного асимптотического моделирования получена задача нулевого приближения, в результате решения которой возникают трансцендентные уравнения. Асимптотическое моделирование рассмотренной спектральной задачи приводит к следующим утверждениям:

1) при асимптотике $\lambda \rightarrow \infty$ для спектрального параметра справедлива приближенная формула

$$\lambda_0 = q^4 + [((\pi/2 + \pi n)/ql)^2 - f'']^2;$$

2) при асимптотике $\lambda \rightarrow 0$ для спектрального параметра справедлива приближенная формула

$$\lambda_0 = q^4 + [((\pi/4 + \pi n)/ql)^2 - f'']^2.$$

Приближенные аналитические формулы удобны для анализа спектра рассмотренной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И. Асимптотическая математика и синергетика: путь к целостной простоте. М.: Editorial URSS, 2004. 304 с.
2. Аргатов И.И. Введение в асимптотическое моделирование в механике. СПб.: Политехника, 2004. 302 с.
3. Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Товстик П.Е., Филиппов С.Б. Асимптотические методы в механике твердого тела. М.: Ижевск, 2007. 356 с.
4. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
5. Вазов В. Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
6. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962. 128 с.
7. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
8. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: 1953. 544 с.
9. Гольденвейзер А.Л. Асимптотический метод в теории оболочек // Успехи механики. 1982. Т. 5. Вып.1. С. 137–182.
10. Гольденвейзер А.Л., Лидский Б.В., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: 1979. 384 с.
11. Товстик П.Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Изв. РАН: Механика твердого тела. 2005. № 1. С. 147–160.
12. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.
13. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
14. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.

Статья поступила 22.09.2021

Molchanova E.A. (2021) ASYMPTOTIC SIMULATION OF THE SPECTRAL PROBLEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 12–18

DOI 10.17223/19988621/74/2

Keywords: simulation, spectral problem, asymptotic methods, formal asymptotic expansion, eigenvalues, eigenfunctions.

A mathematical model of a spectral problem containing a small parameter at the higher derivatives is investigated by an asymptotic method. The expected solution and its geometric parameters are presented as formal asymptotic decompositions. As a result, the original high-order differential task is reduced to a sequence of lower order tasks. Next, the zero approximation problem under the main boundary conditions is solved, the execution of which leads to a system of linear algebraic equations containing a spectral parameter. Equating to the zero of the determinant of the resulting system gives transcendental equations for eigenvalues. The asymptotic genesis of emerging transcendental equations allows asymptotic analysis to be applied to these equations. It helps to reveal the components of the equation that make the major contribution to the spectrum formation. Graphical solutions are used as leading considerations in this analysis. As a result of the asymptotic simulation, approximate formulas for the eigenvalues of the spectral problem have been obtained.

AMS Mathematical Subject Classification: 41A60

Evgeniya. A. MOLCHANOVA (Candidate of Physics and Mathematics, Khakas State University, Abakan, Russian Federation). E-mail: mevgen2001@mail.ru

REFERENCES

1. Andrianov I.V., Barantsev R.G., Manevich L.I. (2004) *Asimptoticheskaya matematika i sinergetika: put' k tselostnoy prostote* [Asymptotical mathematics and synergetics: a way to holistic simplicity]. Moscow: Editorial URSS.
2. Argatov I.I. (2004) *Vvedeniye v asimptoticheskoye modelirovaniye v mekhanike* [Introduction to asymptotic modeling in mechanics]. St. Petersburg: Politehnika.
3. Bauer S.M., Smirnov A.L., Tovstik P.E., Filippov S.B. (2007) *Asimptoticheskiye metody v mekhanike tverdogo tela* [Asymptotic methods in mechanics of solids]. Moscow: URSS.
4. Fedoryuk M.V. (1983) *Asimptoticheskiye metody dlya lineynykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Asymptotic methods for linear ordinary differential equations]. Moscow: Nauka.
5. Wasow W. (1966) *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*. New York: John Wiley and Sons Inc.
6. Erdélyi A. (1956) *Asymptotic Expansions*. Dover Publications.
7. Vasil'yeva A.B., Butuzov V.F. (1973) *Asimptoticheskiye razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy* [Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations]. Moscow: Nauka.
8. Goldenveizer A.L. (1961) *Theory of Elastic Thin Shells*. New York: Pergamon Press.
9. Gol'denveizer A.L. (1982) Asimptoticheskiy metod v teorii obolochek [The asymptotic method in the theory of shells]. *Uspekhi mekhaniki*. 5(1). pp. 137–182.
10. Gol'denveyzer A.L., Lidskiy B.V., Tovstik P.E. (1979) *Svobodnyye kolebaniya tonkikh uprugikh obolochek* [Free vibrations of thin elastic shells]. Moscow: Nauka.
11. Tovstik P.E. (2005) Local Buckling of Plates and Shallow Shells on an Elastic Foundation. *Mechanics of Solids (English Translation)*. 40(1). pp. 120–131.
12. Olver F. (1974) *Asymptotics and Special Functions*. Elsevier.
13. Fedoryuk M.V. (1987) *Asimptotika: Integraly i ryady* [Asymptotics: integrals and series]. Moscow: Nauka.
14. Babakov I.M. (1968) *Teoriya kolebaniy* [Theory of vibrations]. Moscow: Nauka.

Received: September 22, 2021