

УДК 519.6, 517.95
DOI 10.17223/19988621/74/3

MSC 35C09, 35J25

А.В. Старченко, М.А. Седнев, **С.В. Панько**

**ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ
ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ
В НЕОДНОРОДНОМ КРУГЕ С УЧЕТОМ
СОПРОТИВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОДОВ¹**

Получено приближенное аналитическое решение распределения потенциала в двумерном круге с радиально неоднородной проводимостью для граничных условий полной электродной модели, учитывающей контактное сопротивление электродов при заданной силе тока. Решение получается за счет разделения переменных и использования рядов Фурье, для коэффициентов которых необходимо решать систему линейных уравнений. Полученное решение сравнивалось с приближенным аналитическим решением подобной задачи для однородного диска и граничными условиями Неймана – Робина. Получено хорошее согласование, качество которого улучшалось с увеличением количества учитываемых членов ряда.

Ключевые слова: *уравнение эллиптического типа в круге, кусочно-постоянные коэффициенты, полная электродная модель с интегро-дифференциальным краевым условием, ряды Фурье.*

Электроимпедансная томография (ЭИТ) – методика, позволяющая реконструировать внутреннее строение объектов живой природы, основываясь на измерении напряжения (потенциала) электрического тока, проходящего через прикрепленные к поверхности объектов электроды [1]. Зная значения электрического потенциала u на поверхности объекта и приняв эти значения за граничные условия, определяют пространственное распределение электрического сопротивления (импеданса). Такой подход называется обратной задачей ЭИТ. Он позволяет реконструировать внутреннюю структуру объекта по распределению электрической проводимости σ [2].

Наряду с обратной задачей ЭИТ часто рассматривается прямая задача электроимпедансной томографии, которая может быть использована при решении обратной. В этом случае задано распределение электрической проводимости внутри биологического объекта σ , значения электрического потенциала или плотности электрического тока на границе и требуется найти распределение электрического потенциала внутри рассматриваемого объекта. При определенных допущениях процесс распространения тока в объектах живой природы может описываться уравнением эллиптического типа вида

$$\operatorname{div}(\sigma \cdot \operatorname{grad}(u)) = 0. \quad (1)$$

На границе контакта области с воздушной средой используются условия изоляции (отсутствия тока через эту часть границы), которые математически представляют-

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2021-1392).

ся с помощью простых условий Неймана ($\vec{j} = -\sigma \text{grad}(u)$ – плотность электрического тока, $\vec{n}$ – внешняя нормаль):

$$j_n = -\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0. \quad (2)$$

В процессе получения аналитических и приближенных аналитических решений задача (1), (2) либо дополнялась граничными условиями на электродах, либо на всей границе области задавались граничные условия первого или второго рода [3].

В работе [4] приведена классификация таких «электродных» моделей, в зависимости от выбора которых (и модели на контактах электрода с поверхностью объекта) граничные условия формулировались тем или иным образом.

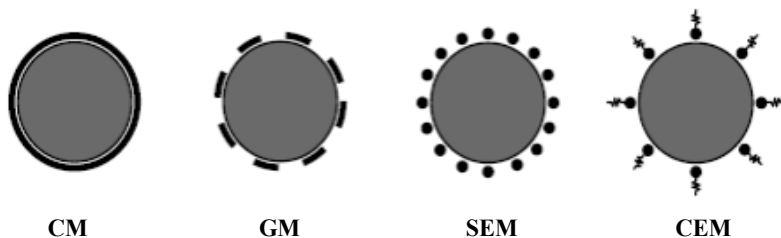


Рис. 1. Модели контактов электродов: CM – электрод занимает всю границу, GM – электроды конечных размеров с зазором, SEM – модель электрода с шунтом, CEM – полная электродная модель. Рисунок взят из [4]

Fig. 1. Models of electrode contacts: CM, the electrode occupies the whole boundary; GM, finite dimension electrodes with a gap; SEM, the shunt electrode model; and CEM, the complete electrode model. The figure is taken from [4]

Выделялись следующие модели: Continuous Model, когда на всей границе известно гладкое распределение плотности электрического тока j ; Point Electrode Model, когда электроды имеют точечный размер, на электродах задается плотность электрического тока, а в промежутках между ними исследуемое тело контактирует с воздухом; Gap Model – характеризуется известными условиями Неймана на электродах конечных размеров; Shunt Electrode Model – корректно моделирует геометрию электродов, но пренебрегает учетом сопротивления тонкого контактного слоя между объектом и электродом; Complete Electrode Model – добавляет учет контактного сопротивление z_l для каждого электрода [4]:

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = U_l, l = 1, \dots, NE, \quad (3)$$

где NE – количество электродов. U_l – напряжение на электроде. Если напряжение U_l неизвестно, а известна сила подаваемого на электрод тока I_l , то добавляют следующее условие на электроде с поверхностью E_l :

$$\int_{E_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} dl = I_l. \quad (4)$$

В настоящее время при решении прямых и обратных задач ЭИТ чаще всего используют численные методы [5, 6]. Для доказательства достоверности и настройки параметров таких численных методов часто привлекаются аналитические

или приближенные аналитические решения, полученные для двумерных канонических областей (прямоугольник, круг) [3, 7, 8].

В статье [7] для неоднородного диска с концентрической круглой вставкой с отличной проводимостью и известным распределением плотности электрического тока на границе диска получено за счет разделения переменных в полярных координатах аналитическое решение в виде рядов тригонометрических функций с коэффициентами, зависящими от радиальной координаты.

В работе [3] представлен целый ряд аналитических и полуаналитических решений разнообразных двумерных постановок прямых задач ЭИТ в прямоугольнике, круге, эллипсе. Рассматривались разные модели электродов (несколько точечных электродов, несколько электродов конечной ширины, на которых ставились граничные условия Дирихле, Неймана или Робина) и распределения проводимости внутри области (постоянная проводимость всей области, послойно постоянная проводимость, радиально симметрическое распределение проводимости, некоторые частные случаи двумерной зависимости проводимости, анизотропная электрическая проводимость, вложенные круговые аномалии и т.д.).

В работе [8] предложен приближенный аналитический метод решения прямой задачи ЭИТ в однородном круге с произвольным расположением неперекрывающихся друг друга электродов, в случае когда на электродах известно контактное сопротивление z_l и напряжение электрического тока U_l , т.е. используется граничное условие (3). Решение задачи ищется в полярных координатах разделением переменных в виде тригонометрических рядов Фурье [3]. Неизвестные коэффициенты Фурье в аналитическом решении получаются из решения системы линейных уравнений бесконечного размера [8].

Целью данной работы является применение методики [8] для получения приближенного аналитического решения для неоднородного круга с концентрической вставкой для полной электродной модели (3) – (4), когда на электродах учитывается контактное сопротивление и известна сила подаваемого тока.

Постановка задачи

Математическая постановка прямой задачи ЭИТ может быть получена из стационарных уравнений Максвелла, закона Ома для проводников и необходимых для получения однозначного решения граничных условий [9].

Прямая задача электроимпедансной томографии в двумерном случае (нахождение электрического потенциала $u(x,y)$ по известному распределению электропроводности $\sigma(x,y) > 0$ внутри области $\bar{\Omega}$ и силы электрического тока на электродах формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma(x,y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad (x,y) \in \Omega. \quad (5)$$

На границе, контактирующей с воздухом, задается производная, равная нулю

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (x,y) \notin \Gamma_l; \quad \Gamma_l - l\text{-й электрод}, \quad l = 1, \dots, NE. \quad (6)$$

На электродах ($l = 1, \dots, NE$ – количество электродов) задаются граничные условия полной электродной модели СЕМ:

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = U_l, \quad (x,y) \in \Gamma_l; \quad (7.1)$$

$$\int_{\Gamma_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} dl = I_l. \quad (7.2)$$

Здесь z_l – контактное сопротивление электрода; U_l – напряжение на электроде; I_l – сила тока на электроде. В [10] доказано, что для того, чтобы постановка задачи (5) – (7) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы сумма токов и сумма напряжений равнялись нулю: $\sum_{l=1}^{NE} I_l = 0$, $\sum_{l=1}^{NE} U_l = 0$.

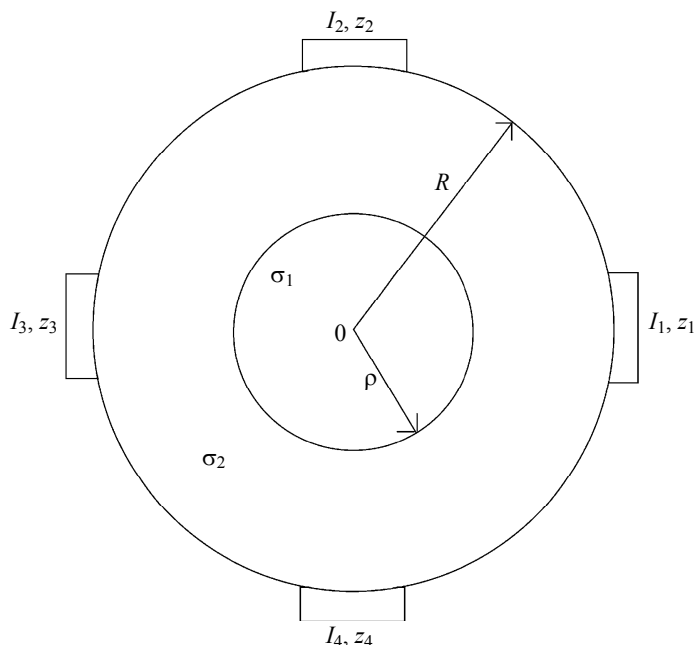


Рис. 2. Область исследования с указанием положения размещения электродов и изменения электрической проводимости σ
Fig. 2. Region under study with the shown position of electrode arrangement and changes in electric conductivity σ

Предположим, что область исследования Ω – круг радиуса R (рис. 2). На границе круга $r = R$ размещены NE электродов полуширины w , координаты центров которых θ_l – известны. Также известно распределение электрической проводимости:

$$\sigma(x, y) = \sigma(r, \theta) = \begin{cases} \sigma_1, & 0 \leq r < \rho, \quad 0 < \theta \leq 2\pi, \\ \sigma_2, & \rho < r \leq R, \quad 0 < \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Здесь σ_1, σ_2 – положительные постоянные.

На границе резкого изменения значений проводимости ($r = \rho$) используются граничные условия четвертого рода: непрерывность изменения решения (электрического потенциала) и плотности электрического тока. На внешней границе области 2 известны значения контактного сопротивления z_l и силы тока I_l на электродах.

С учетом этих условий окончательная математическая постановка задачи примет вид

$$\begin{aligned}
 r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= 0, \quad 0 \leq r < \rho, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \\
 r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= 0, \quad \rho < r < R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \\
 r = \rho : u &= v, \quad -\sigma_1 \frac{\partial u}{\partial r} = -\sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r}; \\
 r = R : -\sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r} &= 0, \quad \theta \notin [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad l = 1, \dots, NE; \\
 r = R : v + z_l \sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r} &= U_l, \quad \theta \in [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad R \int_{\theta_l - w}^{\theta_l + w} \sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r} d\theta = I_l, \quad l = 1 \cap 2 \cap \dots \cap NE.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что в постановке (8) неизвестным является напряжение на электродах U_l , которое легко может быть исключено, и последнее граничное условие в (8) примет вид

$$\begin{aligned}
 r = R : v + z_l \sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{2w} \int_{\theta_l - w}^{\theta_l + w} v(R, \tau) d\tau &= \frac{z_l I_l}{2wR}, \\
 \theta \in [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad l &= 1 \cap 2 \cap \dots \cap NE.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Получение решения с использованием рядов Фурье

Решение задачи (8), (9) будем искать в следующем виде [3, 7, 8]:

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta) &= u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\frac{r}{R} \right)^n f_n(\theta, C'_n, S'_n), \quad 0 \leq r \leq \rho; \\
 v(r, \theta) &= v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{r}{R} \right)^n + b_n \left(\frac{r}{R} \right)^{-n} \right] f_n(\theta, C'_n, S'_n), \quad \rho \leq r \leq R.
 \end{aligned}$$

Здесь $f_n(\theta, C'_n, S'_n) = C'_n \cos(n\theta) + S'_n \sin(n\theta)$; $u_0, v_0, \{a_n\}, \{b_n\}, \{d_n\}, \{C'_n\}, \{S'_n\}$ – неизвестные пока постоянные величины, которые в дальнейшем будут найдены из дополнительных условий (8), (9).

Сначала воспользуемся условиями сопряжения при $r = \rho$:

$$\begin{aligned}
 u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^n f_n(\theta, C'_n, S'_n) &= v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^n + b_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^{-n} \right] f_n(\theta, C'_n, S'_n); \\
 -\sigma_1 \sum_{n=1}^{\infty} n d_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-1} f_n(\theta, C'_n, S'_n) &= -\sigma_2 \sum_{n=1}^{\infty} n \left[a_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-1} - b_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^{-n-1} \right] f_n(\theta, C'_n, S'_n).
 \end{aligned}$$

Для выполнения этих условий потребуем

$$\begin{aligned}
 u_0 &= v_0; \\
 d_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^n &= a_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^n + b_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^{-n};
 \end{aligned}$$

$$\sigma_1 d_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^n = \sigma_2 \left[a_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^n - b_n \left(\frac{\rho}{R} \right)^{-n} \right].$$

Из второго и третьего равенства получим

$$a_n = 0.5 \left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) d_n, \quad b_n = 0.5 \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2n} d_n.$$

Если ввести обозначения $C_n = d_n C'_n$ и $S_n = d_n S'_n$, то решение задачи (8) с учетом условий сопряжения будет выглядеть следующим образом:

$$u(r, \theta) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n [C_n \cos(n\theta) + S_n \sin(n\theta)], \quad 0 \leq r \leq \rho;$$

$$v(r, \theta) = u_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^n + \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2n} \left(\frac{r}{R} \right)^{-n} \right] [C_n \cos(n\theta) + S_n \sin(n\theta)],$$

$$\rho \leq r \leq R.$$

Для нахождения оставшихся неизвестных коэффициентов u_0 , $\{C_n\}$, $\{S_n\}$ воспользуемся граничными условиями при $r = R$ и методикой, представленной в [8]. Перепишем граничные условия при $r = R$ в (8), (9) в виде

$$\sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R} = \begin{cases} \frac{I_l}{2wR} + \frac{1}{2wz_l} \int_{\theta_l-w}^{\theta_l+w} v(R, \tau) d\tau - \frac{v(R, \theta)}{z_l}, \\ \theta \in [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad l = 1 \cap 2 \cap \dots \cap NE, \\ 0, \quad \theta \notin [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad l = 1, 2, \dots, NE. \end{cases} \quad (10)$$

Подставив вместо

$$v(r, \theta) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A \left(\frac{r}{R} \right)^n + B(n) \left(\frac{r}{R} \right)^{-n} \right] [C_n \cos(n\theta) + S_n \sin(n\theta)], \quad \rho \leq r \leq R$$

и произведя необходимое дифференцирование и интегрирование, получим

$$\frac{\sigma_2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} n(A - B(n)) f_n(\theta, C_n, S_n) =$$

$$= \begin{cases} \frac{I_l}{2wR} + \frac{1}{wz_l} \left\{ wu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(A + B(n)) \sin(nw)}{n} f_n(\theta_l, C_n, S_n) \right\} - \\ - \frac{1}{z_l} \left\{ u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A + B(n)) f_n(\theta, C_n, S_n) \right\}, \\ \theta \in [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad l = 1 \cap 2 \cap \dots \cap NE, \\ 0, \quad \theta \notin [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad l = 1, 2, \dots, NE. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь $A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)$; $B(k) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2k}$.

Для нахождения первых N коэффициентов C_n , S_n ($n = 1, \dots, N$) можно, как и в работе [8], умножая (11) на $\cos(k\theta)$ ($k = 1, \dots, N$) или $\sin(k\theta)$ ($k = 1, \dots, N$) и интегрируя обе части равенства от 0 до 2π , получить $2N$ линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_2 \pi [A - B(k)] k C_k}{R} + \sum_{n=1}^N C_n \left\{ [A + B(n)] \sum_{l=1}^{NE} \frac{1}{z_l} (M_{lkn}^{11} - P_{kn} \cos(n\theta_l) \cos(k\theta_l)) \right\} + \\ + \sum_{n=1}^N S_n \left\{ [A + B(n)] \sum_{l=1}^{NE} \frac{1}{z_l} (M_{lkn}^{12} - P_{kn} \sin(n\theta_l) \cos(k\theta_l)) \right\} = \\ = \frac{\sin(kw)}{kwR} \sum_{n=1}^{NE} I_l \cos(k\theta_l), \quad k = 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_2 \pi [A - B(k)] k S_k}{R} + \sum_{n=1}^N C_n \left\{ [A + B(n)] \sum_{l=1}^{NE} \frac{1}{z_l} (M_{lkn}^{12} - P_{kn} \cos(n\theta_l) \sin(k\theta_l)) \right\} + \\ + \sum_{n=1}^N S_n \left\{ [A + B(n)] \sum_{l=1}^{NE} \frac{1}{z_l} (M_{lkn}^{22} - P_{kn} \sin(n\theta_l) \sin(k\theta_l)) \right\} = \\ = \frac{\sin(kw)}{kwR} \sum_{n=1}^{NE} I_l \sin(k\theta_l), \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь [8]

$$\begin{aligned} M_{lkn}^{11} &= \begin{cases} w + \frac{\cos(2k\theta_l) \sin(2kw)}{2k}, & k = n; \\ \frac{\cos((k+n)\theta_l) \sin((k+n)w)}{k+n} + \frac{\cos((k-n)\theta_l) \sin((k-n)w)}{k-n}, & k \neq n. \end{cases} \\ M_{lkn}^{12} &= \begin{cases} \frac{\sin(2k\theta_l) \sin(2kw)}{2k}, & k = n; \\ \frac{\sin((k+n)\theta_l) \sin((k+n)w)}{k+n} - \frac{\sin((k-n)\theta_l) \sin((k-n)w)}{k-n}, & k \neq n. \end{cases} \\ M_{lkn}^{22} &= \begin{cases} w - \frac{\cos(2k\theta_l) \sin(2kw)}{2k}, & k = n; \\ \frac{\cos((k-n)\theta_l) \sin((k-n)w)}{k-n} - \frac{\cos((k+n)\theta_l) \sin((k+n)w)}{k+n}, & k \neq n. \end{cases} \\ P_{kn} &= \frac{2 \sin(nw) \sin(kw)}{nkw}. \end{aligned}$$

Для рассматриваемых в работе значений параметров матрица этой системы линейных уравнений имеет строгое диагональное преобладание. Ее определитель отличен от нуля, что подтверждается расчетами используемого для решения системы (12), (13) математического пакета MathCad, который хорошо себя зарекомендовал в том числе и для решения плохообусловленных систем линейных уравнений (В нашем случае число обусловленности матрицы системы при $N = 700$ около 10^3).

После решения этой системы линейных уравнений значение коэффициента u_0 находится из условия $\sum_{l=1}^{NE} U_l = 0$:

$$u_0 = \frac{- \sum_{l=1}^{NE} \left\{ \frac{z_l I_l}{2wR} + \frac{1}{w} \sum_{n=1}^N \frac{[A + B(n)]}{n} \sin(nw) [C_n \cos(n\theta_l) + S_n \sin(n\theta_l)] \right\}}{NE}. \quad (14)$$

Результаты расчетов

Проверка полученного приближенного решения прямой задачи электроимпедансной томографии в однородном по проводимости круге с граничными условиями на электродах с учетом контактного сопротивления проводилась для условий, взятых из работы [8]: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$, $R = 1$, $NE = 4$, $w = 0.25$, $z_1 = 1.0$, $z_2 = 0.1$, $z_3 = 0.01$, $z_4 = 0.1$. Для сравнения результатов расчетов прямых задач ЭИТ с разным способом задания граничных условий на электродах для (8) (в [8] известны значения $U_1 = 7$, $U_2 = -3$, $U_3 = -7$, $U_4 = 3$; в данной работе требуется задание значений I_1, I_2, I_3, I_4) выполнялась следующая вычислительная процедура в среде программирования MathCad. Сначала для выбранного N решалась задача с заданными значениями $\{U_l\}$, потом из ее решения аналитическим интегрированием определялись значения силы тока на электродах $\{I_l\}$ из формулы

$$I_l = R \int_{\theta_l - w}^{\theta_l + w} \sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r} d\theta, l = 1, 2, \dots, NE.$$

И, наконец, эти значения $\{I_l\}$ использовались в качестве известных величин в постановке (8) с граничным условием (9). Значения $\{U_l\}$ считались неизвестными и вычислялись из

$$(U_l)_{\text{calc}} = \frac{z_l I_l}{2wR} + \frac{1}{w} \left\{ wu_0 + \sum_{n=1}^N \frac{(A + B(n)) \sin(nw)}{n} (C_n \cos(n\theta_l) + S_n \sin(n\theta_l)) \right\},$$

$$l = 1, 2, \dots, NE. \quad (15)$$

Полученные решения для электрического потенциала и плотности электрического тока сравнивались с аналогичными величинами, полученными в [8], на границе области при $r = R$ для различных учтенных членов ряда Фурье N (рис. 3).

В таблице приведены рассчитанные из полученного решения с помощью (15) значения напряжения на электродах и диапазон изменения разности между рассчитанными значениями электрического потенциала и плотности электрического тока на границе круга.

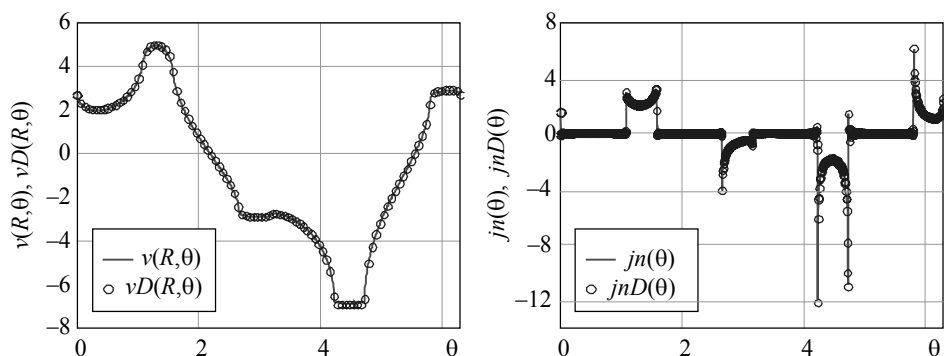


Рис. 3. Распределение приближенного аналитического решения на границе круга при $N = 700$. Слева – электрический потенциал $v(R, \theta)$, справа – плотность электрического тока (2). Значки – решение из [8]

Fig. 3. Distribution of the approximate analytical solution at the circle boundary at $N = 700$. On the left, the electric potential $v(R, \theta)$; on the right, the electric current density (2). The signs are the solution from [8]

Рассчитанные значения напряжения $\{U_B\}$ по формуле (15) и диапазон изменения разности решения [8] и полученного решения и их производных

	$N = 700$	$N = 1400$	$N = 2100$
$(U_1)_{\text{calc}}$	6,956	6.979	6.985
$(U_2)_{\text{calc}}$	-3.001	-3.001	-3.001
$(U_3)_{\text{calc}}$	-6.921	-6.960	-6.973
$(U_4)_{\text{calc}}$	2.966	2.983	2.988
$v(R, \theta) - vD(R, \theta)$	$\in [-0.04; 0.08]$	$\in [-0.02; 0.04]$	$\in [-0.01; 0.03]$
$jn(\theta) - jnD(\theta)$	$\in [-0.05; 0.21]$	$\in [-0.02; 0.09]$	$\in [-0.01; 0.07]$

Из таблицы видно, что при увеличении количества членов ряда N разница между вычисленными и задаваемыми значениями напряжения становится меньше. Также меньше становится диапазон расхождения значений потенциала и его производной, полученных при различных способах реализации полной электродной модели, учитывающей контактное сопротивление электродов. Здесь $v(R, \theta)$ и $jn(\theta)$ – рассчитанные по предлагаемому методу величины в случае, когда известна сила тока I на электродах; $vD(R, \theta)$ и $jnD(\theta)$ – полученные при приближенном аналитическом решении задачи Неймана – Робина (известны значения напряжения U на электродах) для уравнения Лапласа [8].

Заключение

Получено аналитическое решение для уравнения эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами в круге, на границе которого задаются условия Неймана и условия третьего рода с интегралом от искомого решения. Такая математическая постановка используется для прямой двумерной задачи электроимпедансной томографии в круге, проводимость которого является кусочно-постоянной функцией от радиальной координаты. На границе круга в местах крепления электродов рассматриваются интегро-дифференциальные граничные условия нового типа, с помощью которых учитывается контактное сопротивление электродов при заданной силе тока на них. Решение получено с использованием разделения переменных и тригонометрических рядов. Оно может использоваться для настройки и апробации разрабатываемых вычислительных технологий для решения прямых и обратных задач подобного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пеккер Я.С., Бразовский К.С., Усов В.Ю. и др. Электроимпедансная томография. Томск: НТЛ, 2004. 192 с.
2. Гуляев Ю.В., Корженевский А.В., Черепенин В.А. О возможности использования электроимпедансной компьютерной томографии для диагностики поражения легких вирусом COVID-19 // Журнал радиоэлектроники. 2020. № 5.
3. Pidcock M.K., Kuzuoglu M., Leblebicioglu K. Analytic and semi-analytic solutions in electrical impedance tomography. I. Two-dimensional problems // Physiol. Meas. 1995. V. 16(2). P. 77–90.
4. Boyle A., Adler A. Electrode models under shape deformation in electrical impedance tomography // Journal of Physics: Conference Series. 2010. V. 224. 012051.
5. Jehl M., Dedner A., Betcke T., Aristovich K., Klöfkom R., Holder D. A fast parallel solver for the forward problem in electrical impedance tomography // IEEE Trans Biomed Eng. 2015. V. 62(1). P. 126–137.

6. Шерина Е.С., Старченко А.В. Численное моделирование задачи электроимпедансной томографии и исследование подхода на основе метода конечных объемов // Бюллетень сибирской медицины. 2014. Т. 13. № 4. С. 156–164.
7. Isaacson D. Distinguishability of Conductivities by Electric Current Computed Tomography // IEEE Transactions on medical imaging. 1986. V. MI-5. No. 5. P. 91–95.
8. Demidenko E. An analytic solution to the homogeneous EIT problem on the 2D disk and its application to estimation of electrode contact impedances // Physiol Meas. 2011. V. 32(9). P. 1453–1471.
9. Borcea L. Electric Impedance Tomography. Topical Review // Inverse Problems. 2002. V. 18. P. R99–R136.
10. Somersalo E., Cheney M., Isaacson D. Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography // SIAM J. Appl. Math. 2002. V. 52. P. 1023–40.

Статья поступила 16.08.2021

Starchenko A.V., Sednev M.A., Panko S.V. (2021) AN APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION TO THE FORWARD INHOMOGENEOUS EIT PROBLEM ON THE 2D DISK WITH ALLOWANCE FOR THE ELECTRODE CONTACT IMPEDANCE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 19–29

DOI 10.17223/19988621/74/3

Keywords: elliptic equation in a circle, piecewise constant coefficients, complete electrode model with integro-differential boundary condition, Fourier series

An approximate analytical solution is obtained for the electrical potential distribution in a two-dimensional circle with radially inhomogeneous conductivity σ for the boundary conditions of the complete electrode model with allowance for the contact resistance of the electrodes z_l :

$$\begin{aligned}
 r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= 0, \quad 0 \leq r < \rho, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \\
 r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= 0, \quad \rho < r < R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \\
 r = \rho : u &= v, \quad -\sigma_1 \frac{\partial u}{\partial r} = -\sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r}; \\
 r = R : -\sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r} &= 0, \quad \theta \notin [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad l = 1, \dots, NE; \\
 r = R : v + z_l \sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{2w} \int_{\theta_l - w}^{\theta_l + w} v(R, \tau) d\tau &= \frac{z_l I_l}{2wR}, \\
 \theta \in [\theta_l - w, \theta_l + w], \quad l &= 1 \cap 2 \cap \dots \cap NE.
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

An approximate solution is obtained by separating variables and using Fourier series for the coefficients of which it is necessary to solve a system of linear equations [8]. The obtained solution is compared with an approximate analytical solution of a similar problem for a homogeneous disk and Neumann–Robin boundary conditions [8]. A good agreement has been obtained. Its quality is improved with an increase in the number of considered terms of the series.

AMS Mathematical Subject Classification: MSC 35C09, 35J25

Financial support. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement No. 075-02-2021-1392).

Alexander V. STARCHENKO (Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Computational Mathematics and Computer Modelling of National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation. Scientific Researcher, Regional Scientific Educational Mathematical Center of Tomsk State University).

Maxim A. SEDNEV (Master Student of Department of Computational Mathematics and Computer Modelling of National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation.)

Sergey V. PANKO (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

REFERENCES

1. Pekker Ya.S., Brazovskiy K.S., Usov V.Yu. et. al. (2004) *Electrical Impedance Tomography*. Tomsk: NTL Publishing.
2. Gulyayev Yu.V., Korzhenevskiy A.V., Cherepenin V.A. O vozmozhnosti ispol'zovaniya elektroimpedansnoy komp'yuternoy tomografii dlya diagnostiki porazheniya legkikh virusom COVID-19 [On the possibility of using electrical impedance computed tomography for diagnosing lung damage with the COVID-19 virus]. *Zhurnal Radioelektroniki – Journal of Radio Electronics*. (5). Access mode: <http://jre.cplire.ru/jre/may20/8/text.pdf>. DOI: 10.30898/1684-1719.2020.5.8.
3. Pidcock M.K., Kuzuoglu M., Leblebicioglu K. (1995) Analytic and semi-analytic solutions in electrical impedance tomography. I. Two-dimensional problems. *Physiological Measurement*. 16(2). pp. 77–90.
4. Boyle A., Adler A. (2010) Electrode Models under Shape Deformation in Electrical Impedance Tomography. *Journal of Physics: Conference Series*. 224. 012051. DOI: 10.1088/1742-6596/224/1/012051.
5. Jehl M., Dedner A., Betcke T., Aristovich K., Klöfkom R., Holder D. (2015) A fast parallel solver for the forward problem in electrical impedance tomography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 62(1). pp. 126–137. DOI: 10.1109/TBME.2014.2342280
6. Sherina Y.S., Starchenko A.V. (2014) Chislennoye modelirovaniye zadachi elektroimpedansnoy tomografii i issledovaniye podkhoda na osnove metoda konechnykh ob'yemov [Numerical simulation of electrical impedance tomography problem and study of approach based on finite volume method]. *Byulleten' sibirskoy meditsiny – Bulletin of Siberian Medicine*. 13(4). pp. 156–164. Access mode: <https://doi.org/10.20538/1682-0363-2014-4-156-164>
7. Isaacson D. (1986) Distinguishability of Conductivities by Electric Current Computed Tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*. MI-5(5). pp. 91–95.
8. Demidenko E. (2011) An analytic solution to the homogeneous EIT problem on the 2D disk and its application to estimation of electrode contact impedances. *Physiological Measurement*. 32(9). pp. 1453–1471. DOI: 10.1088/0967-3334/32/9/008.
9. Borcea L. (2002) Electric Impedance Tomography. Topical Review. *Inverse Problems*. 18. pp. R99–R136.
10. Somersalo E, Cheney M., Isaacson D. (2002) Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 52(4). pp. 1023–1040. DOI: 10.1137/0152060.

Received: August 16, 2021