

УДК 531.383
DOI 10.17223/19988621/74/7

Е.А. Антонов

ДИНАМИКА ДВУХМАССОВОГО МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА $L-L$ -ТИПА В РЕЖИМЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Исследуется динамика двухмассовой модели микромеханического гироскопа типа $L-L$ в режиме вынужденных колебаний в линейной постановке. Приведена теоретико-механическая модель чувствительного элемента гироскопа с двумя активными массами («инерционная масса – рамка»). Для решения был предложен новый метод анализа двухчастотной системы. В итоге было получено решение и построены амплитудно-частотные характеристики для рассматриваемой модели. На основе полученных результатов сделаны соответствующие выводы по поведению системы.

Ключевые слова: Микромеханический гироскоп, линейные вибрации, вынужденные колебания, линейная система.

На сегодняшний день микросистемная техника (МСТ) используется практически в любой сфере жизнедеятельности человека [1, 2]. МСТ – это научно-техническое направление, целью которого является создание в ограниченном объеме твердого тела или на его поверхности микросистем, представляющих собой упорядоченные композиции областей с заданным составом, структурой и геометрией. МСТ базируется, в первую очередь, на высокоточных и миниатюрных датчиках, эффективных микродвигателях и качественных преобразователях.

Микромеханические гироскопы (ММГ) являются неотъемлемой частью МСТ. Основными свойствами микромеханических гироскопов являются их миниатюрные габариты, сверхмалое энергопотребление, высокая устойчивость к внешним воздействующим факторам. Разработка таких устройств основана на создании и анализе теоретико-механических моделей, описывающих движение чувствительного элемента и учитывающих различное влияние внешних факторов: нелинейные параметры системы, медленно меняющиеся параметры, различные условия функционирования и т.д. [3–5]

Актуальной проблемой является создание новых теоретико-механических микромеханических гироскопов и выявление новых, более точных аналитических зависимостей для различных режимов работы устройства, которые позволят существенно повысить точностные свойства гироскопов.

Постановка задачи

Рассматривается следующая конструктивная схема чувствительного элемента микромеханического гироскопа типа $L-L$ (рис. 1).

На рис. 1 изображена инерционная масса 1 , которая закреплена при помощи четырёх внутренних упругих элементов (торсионов) 4 в рамке 2 . Рамка 2 также связана с подложкой основания 6 четырьмя внешними торсионами 5 . «Гребенчатая структура» 3 образуется из электродов, закреплённых на основании 6 и рамке 2 .

Образованная «гребенчатая структура» относится к двигателю системы и является системой плоских конденсаторов, при помощи которой возбуждаются колебания в системе (за счет изменения емкости между гребенками). Колебания инерционной массы 1 на выходе системы снимаются специальной регистрационной системой, основанной на емкостном принципе работы, после чего проходят обработку внешней компьютерной системой [6].

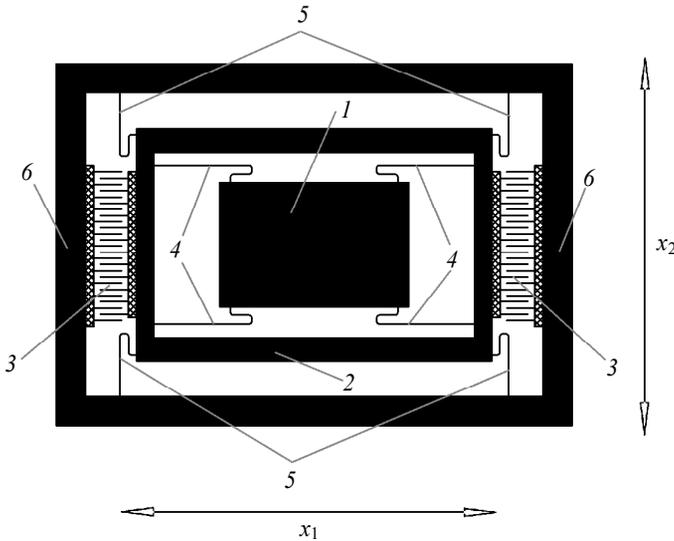


Рис. 1. Кинематическая модель ММГ $L-L$ -типа
Fig. 1. Kinematic model of an $L-L$ -type micromechanical gyroscope

ММГ типа $L-L$ не содержит в своей структуре вращающихся частей и использует только линейные вибрации инерционной массы и рамки, в которой она закреплена в направлении взаимно перпендикулярных осей x_1 и x_2 .

Цель данной работы заключается в анализе поведения двухчастотной системы в режиме вынужденных колебаний при помощи нового метода получения решения.

Построение уравнений движения

Рассмотрим связанную систему «рамка – инерционная масса», закрепленную на подвижном основании, которое вращается с произвольной скоростью Ω , где Ω соизмеримо меньше, чем собственная частота колебаний [7], иначе прибор не будет работать, но пренебречь этим значением в построении теоретико-механической модели нельзя.

Кинетическая энергия системы «рамка – инерционная масса»

$$T = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_1^2 + (x_1 \cdot \Omega)^2) + \frac{1}{2} m_{ин} ((\dot{x}_1 - x_2 \cdot \Omega)^2 + (\dot{x}_2 + x_1 \cdot \Omega)^2),$$

где: x_1, x_2 – координаты, определяющие положение чувствительного элемента в заданной системе координат, связанной с основанием; $m_{ин}$ – инерционная масса; m_p – масса рамки; Ω – угловая скорость основания.

Потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1x_1^2 + \frac{1}{2}c_2x_2^2,$$

где c_1, c_2 – жесткость внешних и внутренних торсионов соответственно.

Таким образом, лагранжиан системы записывается в виде

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m_p(\dot{x}_1^2 + (x_1 \cdot \Omega)^2) + \frac{1}{2}m_{ин}((\dot{x}_1 - x_2 \cdot \Omega)^2 + (\dot{x}_2 + x_1 \cdot \Omega)^2) - \frac{1}{2}c_1x_1^2 - \frac{1}{2}c_2x_2^2. \quad (1)$$

В колебательной системе всегда присутствует диссипация. С целью учета диссипативных сил в системе воспользуемся функцией Релея

$$\Phi = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2,$$

где k_1 – коэффициент, который определяет энергию рассеивания при движении рамки; k_2 – коэффициент, учитывающий рассеивание энергии при движении инерционной массы.

Пусть на систему действует внешняя гармоническая вынуждающая сила в общем случае $F(t)$ вдоль обобщенной координаты x_1 (рис. 1).

Воспользовавшись формализмом Лагранжа, запишем уравнения движения чувствительного элемента

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(m_p + m_{ин}) - 2m_{ин}\Omega \cdot \dot{x}_2 - (m_p + m_{ин})\Omega^2x_1 + c_1x_1 &= F(t); \\ \ddot{x}_2m_{ин} + 2m_{ин}\Omega \cdot \dot{x}_1 - m_{ин}\Omega^2x_2 + c_2x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим идеальный случай, когда коэффициенты упругости связаны следующим соотношением:

$$c_1 = \frac{m_p + m_{ин}}{m_{ин}}c_2. \quad (3)$$

Соотношение (3) вводится для улучшения резонансных свойств ММГ.

Проведём процедуру нормализации системы уравнений (2), взяв за нормирующий параметр величину h – зазор между гребенками контактов, образующих систему плоских конденсаторов (рис. 1):

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + 2\gamma_1\omega_0\dot{\alpha} - 2\frac{1}{1+\delta}\Omega\dot{\beta} + (\omega_0^2 - \Omega^2)\alpha &= f(t); \\ \ddot{\beta} + 2\gamma_2\omega_0\dot{\beta} + 2\Omega\dot{\alpha} + (\omega_0^2 - \Omega^2)\beta &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где α и β – малые безразмерные амплитуды колебаний ($|\alpha|$ и $|\beta| \ll 1$); ω_0 – собственная частота чувствительного элемента;

$$x_1 = h \cdot \alpha; \quad x_2 = h \cdot \beta; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_{ин}}};$$

$f(t)$ – нормализованная вынуждающая сила; γ_1 и $\gamma_2 \ll 1$ – безразмерные коэффициенты затухания (в таком случае система обладает хорошей добротностью);

$$2\omega_0\gamma_i = \frac{k_i}{m_{ин}\omega_0}; \quad f(t) = \frac{F(t)}{m_{ин}h}.$$

Далее рассматриваем систему, где $k_1 = k_2$, параметр δ , равный отношению массы рамки к инерционной массе, является параметром порядка ε .

Пусть внешняя вынуждающая сила задаётся в виде $f_0 \sin \mu t$, где амплитуда вынуждающей силы f_0 мала по отношению к жесткости торсионов c , т. е. будем рассматривать мягкое возбуждение, при котором значение f_0 порядка $\varepsilon^{3/2}$, μ – безразмерная частота внешнего воздействия.

Перепишем систему (4) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - 2\Omega\dot{\beta} + (\omega_0^2 - \Omega^2)\alpha &= -G_1; \\ \ddot{\beta} + 2\Omega\dot{\alpha} + (\omega_0^2 - \Omega^2)\beta &= -G_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где введены следующие замены:

$$\begin{aligned} G_1 &= 2\gamma\omega_0\dot{\alpha} + 2\Omega\delta\dot{\beta} - f_0 \sin \mu t; \\ G_2 &= 2\gamma\omega_0\dot{\beta}. \end{aligned}$$

Анализ динамики чувствительного элемента

Для решения двухчастотной системы (5) был применён новый метод, который основывается на методике Крылова – Боголюбова [8].

Запишем вначале общий вид решения в переменных амплитуда – фаза:

$$\begin{aligned} \alpha &= A(t) \sin(\mu t + \varphi_1(t)) + B(t) \sin(\mu t + \varphi_2(t)); \\ \beta &= A(t) \cos(\mu t + \varphi_1(t)) - B(t) \cos(\mu t + \varphi_2(t)). \end{aligned} \quad (6)$$

Для однородной системы уравнения (6) переписутся в виде

$$\begin{aligned} \alpha &= A(t) \sin(\omega_1 t + \varphi_1(t)) + B(t) \sin(\omega_2 t + \varphi_2(t)); \\ \beta &= A(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1(t)) - B(t) \cos(\omega_2 t + \varphi_2(t)), \end{aligned} \quad (7)$$

где ω_1 и ω_2 – корни однородной системы

$$\omega_1 = \omega_0 - \Omega; \quad \omega_2 = \omega_0 + \Omega. \quad (8)$$

Перейдем от переменных $A, B, \varphi_1, \varphi_2$ в (6) к переменным g_1, g_2, r_1, r_2 :

$$\begin{aligned} \alpha &= g_1 \sin \mu t + r_1 \cos \mu t + g_2 \sin \mu t + r_2 \cos \mu t; \\ \beta &= g_1 \cos \mu t - r_1 \sin \mu t - g_2 \cos \mu t + r_2 \sin \mu t, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} g_1(t) &= A(t) \cos \varphi_1(t); \quad r_1(t) = A(t) \sin \varphi_1(t); \\ g_2(t) &= B(t) \cos \varphi_2(t); \quad r_2(t) = B(t) \sin \varphi_2(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Запишем уравнения (7) в новых переменных:

$$\begin{aligned} \alpha &= g_1 \sin \omega_1 t + r_1 \cos \omega_1 t + g_2 \sin \omega_2 t + r_2 \cos \omega_2 t; \\ \beta &= g_1 \cos \omega_1 t - r_1 \sin \omega_1 t - g_2 \cos \omega_2 t + r_2 \sin \omega_2 t. \end{aligned} \quad (11)$$

Продифференцировав уравнения (6) по времени и преобразовав полученные выражения в соответствии с выражениями (11), получим

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= g_1 \omega_1 \cos \mu t - r_1 \omega_1 \sin \mu t + g_1 (\mu - \omega_1) \cos \mu t - r_1 (\mu - \omega_1) \sin \mu t + \\ &+ g_2 \omega_2 \cos \mu t - r_2 \omega_2 \sin \mu t + g_2 (\mu - \omega_2) \cos \mu t - r_2 (\mu - \omega_2) \sin \mu t; \\ \dot{\beta} &= -g_1 \omega_1 \sin \mu t - r_1 \omega_1 \cos \mu t - g_1 (\mu - \omega_1) \sin \mu t - r_1 (\mu - \omega_1) \cos \mu t + \\ &+ g_2 \omega_2 \sin \mu t + r_2 \omega_2 \cos \mu t + g_2 (\mu - \omega_2) \sin \mu t + r_2 (\mu - \omega_2) \cos \mu t. \end{aligned} \quad (12)$$

В таком случае условие совместности запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 \sin \mu t + \dot{r}_1 \cos \mu t + \dot{g}_2 \sin \mu t + \dot{r}_2 \cos \mu t &= 0; \\ \dot{g}_1 \cos \mu t - \dot{r}_1 \sin \mu t - \dot{g}_2 \cos \mu t + \dot{r}_2 \sin \mu t &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Продифференцировав (12), получим вторые производные для амплитуд α и β . Подставив найденные производные в исходную систему уравнений (5), имеем

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 \mu \cos \mu t - \dot{r}_1 \mu \sin \mu t + \dot{g}_2 \mu \cos \mu t - \dot{r}_2 \mu \sin \mu t &= -F_1; \\ -\dot{g}_1 \mu \sin \mu t - \dot{r}_1 \mu \cos \mu t + \dot{g}_2 \mu \sin \mu t + \dot{r}_2 \mu \cos \mu t &= -F_2, \end{aligned} \quad (14)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F_1 &= 2\gamma\omega_0\dot{\alpha} + 2\delta\Omega\dot{\beta} - \omega_0^2 f_0 \sin \mu t - g_1 (\mu^2 - \omega_1^2) \sin \mu t - \\ &- r_1 (\mu^2 - \omega_1^2) \cos \mu t - g_2 (\mu^2 - \omega_2^2) \sin \mu t - r_2 (\mu^2 - \omega_2^2) \cos \mu t - \\ &- 2\Omega (-g_1 (\mu - \omega_1) \sin \mu t - r_1 (\mu - \omega_1) \cos \mu t + g_2 (\mu - \omega_2) \sin \mu t + r_2 (\mu - \omega_2) \cos \mu t); \\ F_2 &= 2\gamma\omega_0\dot{\beta} - g_1 (\mu^2 - \omega_1^2) \cos \mu t + r_1 (\mu^2 - \omega_1^2) \sin \mu t + \\ &+ g_2 (\mu^2 - \omega_2^2) \cos \mu t - r_2 (\mu^2 - \omega_2^2) \sin \mu t + \\ &+ 2\Omega (g_1 (\mu - \omega_1) \cos \mu t - r_1 (\mu - \omega_1) \sin \mu t + g_2 (\mu - \omega_2) \cos \mu t - r_2 (\mu - \omega_2) \sin \mu t). \end{aligned}$$

Разрешим (14) и (13) относительно переменных g_1, g_2, r_1, r_2 . Так как данные переменные являются медленными функциями времени, воспользуемся методом осреднения Крылова – Боголюбова [8]:

$$\begin{aligned} 2\mu\dot{g}_1 &= -\gamma\omega_0\mu (g_1 + g_2 + r_1 - r_2) - \delta\mu\Omega (-r_1 + r_2) + \\ &+ 2\Omega ((g_1 - r_1)(\mu - \omega_1) - (r_2 - g_2)(\mu - \omega_2)) - \\ &- (g_1 - r_1)(\mu^2 - \omega_1^2) - (r_2 - g_2)(\mu^2 - \omega_2^2); \\ 2\mu\dot{r}_1 &= -\mu\omega_0 f_0 + \gamma\omega_0\mu (-g_1 + g_2 - r_1 - r_2) + \\ &+ \delta\mu\Omega (-g_1 + g_2) + 2\Omega ((g_1 + r_1)(\mu - \omega_1) + (r_2 - g_2)(\mu - \omega_2)) - \\ &- (g_1 - r_1)(\mu^2 - \omega_1^2) - (r_2 + g_2)(\mu^2 - \omega_2^2); \\ 2\mu\dot{g}_2 &= -\gamma\omega_0\mu (g_1 + g_2 - r_1 + r_2) - \delta\mu\Omega (-r_1 + r_2) - \\ &- 2\Omega ((g_1 - r_1)(\mu - \omega_1) + (r_2 + g_2)(\mu - \omega_2)) + \\ &+ (g_1 + r_1)(\mu^2 - \omega_1^2) + (r_2 - g_2)(\mu^2 - \omega_2^2); \\ 2\mu\dot{r}_2 &= -\mu\omega_0 f_0 + \gamma\omega_0\mu (g_1 - g_2 - r_1 - r_2) + \\ &+ \delta\mu\Omega (-g_1 + g_2) + 2\Omega ((g_1 + r_1)(\mu - \omega_1) - (r_2 + g_2)(\mu - \omega_2)) - \\ &- (g_1 + r_1)(\mu^2 - \omega_1^2) - (r_2 + g_2)(\mu^2 - \omega_2^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Предложенный новый метод анализа вынужденных колебаний по сравнению с другими методами, используемыми в работах В.Ф. Журавлевым и А. Найфе [7, 9] (нахождение решения в переменных амплитуда – фаза), Н.Н. Боголюбовым и А.Ю. Митропольским (переход к нормальным координатам), имеет такие преимущества, как отсутствие в решении тригонометрических функций, а также не требует перехода к новым переменным и, как следствие, возврата к исходным.

Числовой пример

Рассмотрим двухмассовый ММГ с характеристиками: $m_{\text{ин}} = 10^{-6}$ кг (масса инерционной массы); величина зазора между контактами гребенки $h = 100$ мкм (нормализующий параметр). Построим амплитудно-частотные характеристики для различных значений параметров

На рис. 2 изображены амплитудно-частотные характеристики со следующими параметрами:

- 1 – $\Omega = 0, \gamma = 0$;
- 2 – $\Omega = 0.05, \gamma = 0$;
- 3 – $\Omega = 0.05, \gamma = 0.007$.

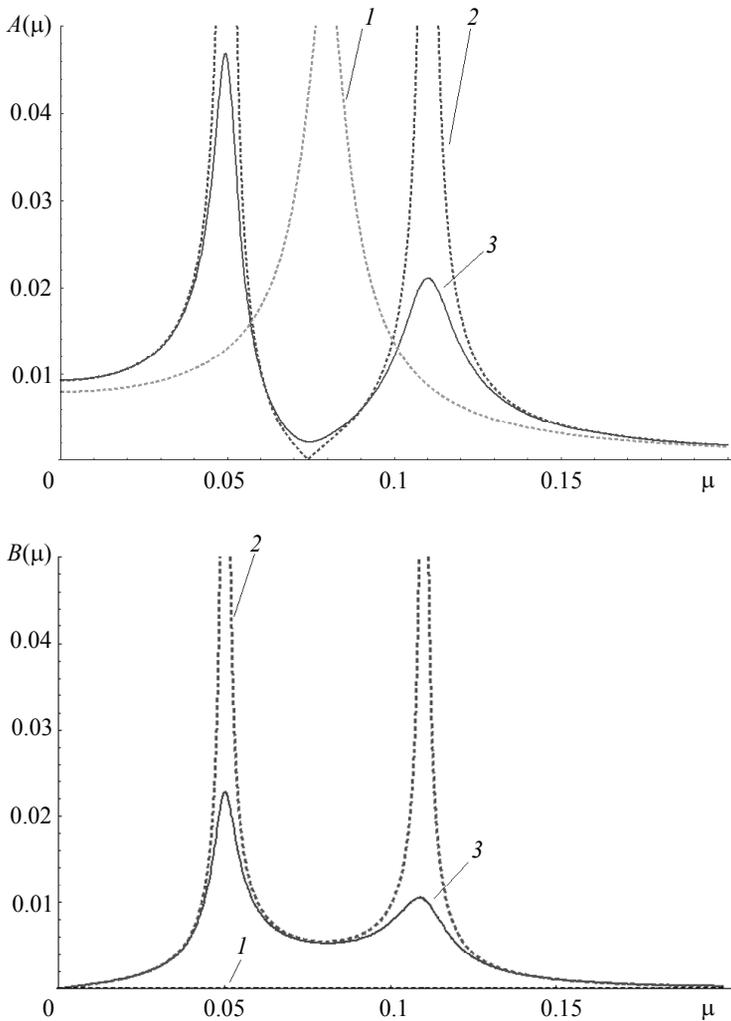


Рис. 2. Графики зависимости амплитуды первичных и вторичных колебаний от частоты внешнего воздействия
Fig. 2. Amplitude of primary and secondary oscillations as a function of the frequency of the external action

Рассмотрев АЧХ, представленные на графиках (см. рис. 2) можно отметить следующее:

- для системы при угловой скорости $\Omega = 0$ в отсутствие вязкого трения АЧХ вторичных колебаний совпадает с осью μ , так как амплитуда в этом случае пропорциональна угловой скорости основания;

- при приближении частоты μ к одной из резонансных частот, амплитуда колебаний возрастает. Когда же частота удаляется от резонансных частот – наблюдаются установившиеся колебания малой амплитуды;

- для колебаний по первой моде при приближении к первой резонансной частоте ω_1 амплитуда колебаний имеет значение больше, нежели при достижении частотой внешнего воздействия второй резонансной частоты ω_2 . Для вторичных колебаний $B(\mu)$ ситуация противоположна.

Заключение

Представлена теоретико-механическая модель двухмассового микромеханического гироскопа типа L-L, учитывающая вязкое трение и произвольную угловую скорость основания. Анализ полученной модели проводился в режиме вынужденных колебаний с применением нового метода.

Основная цель данной работы – продемонстрировать новый метод анализа двухчастотных систем, который имеет ряд преимуществ перед своими аналогами: отсутствие в решении тригонометрических функций, не требует перехода к новым переменным. Данный метод будет полезен для анализа сложных двухчастотных нелинейных систем.

Построены необходимые АЧХ и сделаны соответствующие выводы о поведении системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blixhaven B., Lapadatu D., Holm R., Kvisterfy T.* SAR-500-A novel high-precision gyroscope // Symposium Gyro Technology. Karlsruhe, Germany, 2010.
2. *Пешехонов В.Г.* Современное состояние и перспективы развития гироскопических систем // Гироскопия и навигация. 2011. № 1. С. 3–17.
3. *Нарайкин О.С., Сорокин Ф.Д., Козубняк С.А., Вахлярский Д.С.* Численное моделирование прецессии упругой волны в цилиндрическом резонаторе волнового твердотельного гироскопа с неоднородным распределением плотности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2017. № 5. С. 41–51. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-5-41-51.
4. *Лестев А.М., Ефимовская А.В.* О влиянии нелинейных факторов на динамику микромеханического гироскопа с двухмассовым чувствительным элементом // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2012. Т. 55. №5. С. 40–46.
5. *Евстифеев М.И., Челпанов И.Б.* Вопросы обеспечения стойкости микромеханических гироскопов при механических воздействиях // Гироскопия и навигация. 2013. № 1. С. 119–131.
6. *Бурцев В.А., Дергачев П.Б., Карелин А.П., Лестев А.М., Лестев М.А., Попова И.В., Семенов А.А.* Микромеханической гироскоп. Патент на полезную модель RU 30972 U1 МПК G01C 19/56 от 2003.02.04 / Оpubл. 2003.07.10.
7. *Журавлев В.Ф.* Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 27–35.
8. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974 503 с.
9. *Найфе А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.

Antonov E.A. (2021) DYNAMICS OF AN L-L-TYPE TWO-MASS MICROMECHANICAL GYROSCOPE UNDER FORCED OSCILLATIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 63–70

DOI 10.17223/19988621/74/7

Keywords: micromechanical gyroscope, linear vibrations, forced oscillations, linear system.

This paper is devoted to a study of dynamics of an L-L-type two-mass micromechanical gyroscope (abbreviated as MMG) under forced oscillations. The mechanical-theoretical model of MMG with a sensitive element in the form of a model with two active masses (“Inertial mass – Frame”) is obtained. Based on the model, the system of differential equations is written. A distinctive feature of this paper is that an arbitrary angular velocity of the base Ω is considered. A new method is used to find a solution to the system. This method is suitable for analyzing dual-frequency systems. Finally, the solution is determined, and the amplitude-frequency characteristics of the system are described. The obtained analytical expressions and graphs are analyzed, and the reasonable conclusions about system behavior under forced oscillations are made. The proposed method for analyzing complex systems is compared with other available methods.

Egor A. ANTONOV (Candidate of Technical Sciences, Public Joint Stock Company «Tupolev», Moscow, Russian Federation). E-mail: ve.no.m@yandex.ru

REFERENCES

1. Blixhaven B., Lapadatu D., Holm R., Kvisterfy T. (2010) SAR-500-A Novel High-Precision Gyroscope. *Symposium Gyro Technology. Karlsruhe, Germany*.
2. Peshekhonov V.G. (2011) Sovremennoe sostoyanie i perspektivy razvitiya giroskopicheskikh sistem [The current state and prospects of development of gyroscopic systems]. *Giroskopiya i navigatsiya – Gyroscopy and Navigation*. 1. pp. 3–17.
3. Naraykin O.S., Sorokin F.D., Kozubnyak S.A., Vakhlyarskiy D.S. (2017) Chislennoe modelirovanie pretsessii uprugoy volny v tsilindricheskom rezonatore volnovogo tverdotel'nogo giroskopa s neodnorodnym raspredeleniem plotnosti [Numerical simulation of elastic wave precession in the cylindrical resonator of a hemispherical resonator gyroscope featuring a non-homogeneous density distribution]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Mashinostroenie – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*. 5. pp. 41–51. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-5-41-51.
4. Lestev A.M., Efimovskaya A.V. (2012) O vliyani nelineynykh faktorov na dinamiku mikromekhanicheskogo giroskopa s dvukhmassovym chuvstvitel'nyy elementom [Nonlinear factors effect on dynamics of micromechanical gyroscope with two-mass sensitive element]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 55(5). pp. 40–46.
5. Evstifeev M.I., Chelpanov I.B. (2013) Voprosy obespecheniya stoykosti mikromekhanicheskikh giroskopov pri mekhanicheskikh vozdeystviyakh [Issues of ensuring durability of micromechanical gyroscopes under mechanical stress]. *Giroskopiya i navigatsiya – Gyroscopy and Navigation*. 1. pp. 119–131.
6. Zbrutskiy A.B., Apostolyuk V.A. (1998) Dinamika chuvstvitel'nogo elementa mikromekhanicheskogo giroskopa s dopolnitel'noy ramkoy [Dynamics of the sensitive element of a micromechanical gyroscope with an additional frame]. *Giroskopiya i navigatsiya – Gyroscopy and Navigation*. 22(3). pp. 13–23.
7. Zhuravlev V.F. (1997) Upravlyaemyy mayatnik Fuko kak model' odnogo klassa svobodnykh giroskopov [A controlled Foucault pendulum as a model of a class of free gyros]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 6. pp. 27–35.
8. Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy Yu.A. (1974) *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations]. Moscow: Nauka.
9. Nayfe A. (1976) *Metody vozmushcheniy* [Perturbation methods]. Moscow: Mir.

Received: December 16, 2020