

УДК 532.5

DOI 10.17223/19988621/74/9

Н.В. Бурмашева, Е.А. Ларина, Е.Ю. Просвиряков

**ТЕЧЕНИЕ ТИПА КУЭТТА С УЧЕТОМ ИДЕАЛЬНОГО СКОЛЬЖЕНИЯ
НА КОНТАКТЕ С ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ¹**

Построено новое точное решение, описывающее сдвиговое однонаправленное течение вязкой несжимаемой жидкости в горизонтальном слое при нулевом расходе и идеальном скольжении на контакте с твердой поверхностью. Проводится анализ свойств решения в зависимости от характеристик температуры и давления на верхней границе слоя. Показано, что данное решение способно описывать стратификацию гидродинамических полей.

Ключевые слова: конвекция вязкой жидкости, точное решение, сдвиговое течение, застойные точки, расслоение полей.

Одной из наиболее распространенных моделей, используемых для описания вихревых конвективных течений вязких жидкостей, является система уравнений Обербека – Буссинеска [1–5]. Эта модель строится при помощи гипотезы о линейной зависимости плотности жидкости от температуры, которая учитывается только в массовых силах [6].

Для решения практических задач и проведения теоретической оценки устойчивости установившихся движений жидкости часто используются и исследуются однонаправленные течения жидкости $\mathbf{V} = (V_x(z), 0, 0)$ [7–11]. Одним из первых слоистых течений, свойства которого описаны в точной постановке решений вида $\mathbf{V} = (V_x(z), 0, 0)$ уравнений движения вязкой жидкости, является изотермическое и изобарическое течение Куэтта [12]. Еще одним известным однонаправленным изотермическим течением такого вида является градиентное течение Пуазейля [13], вызванное перепадом давления. И эксперименты, и анализ данного решения показывают, что оно обладает ненулевой завихренностью, обусловленной (в отличие от течения Куэтта) неоднородным распределением поля скорости относительно координаты z . Таким образом, учет неоднородности (по координатам) гидродинамических полей позволяет создавать модели, наиболее приближенные к действительности, поскольку реальные течения жидкостей являются вихревыми [14, 15].

Более сложным объектом для моделирования являются конвективные течения, поскольку требуется дополнительно учитывать температурные факторы, распределение которых зависит от положения элементарного жидкого объема в рассматриваемой области течения. Одним из первых в этом классе было решение Остроумова – Бириха [16, 17]. Краевые условия, отвечающие этому решению, подразумевают задание неоднородного поля температуры, характеризуемого одинаковыми значениями продольных градиентов на обеих границах рассматриваемого слоя жидкости, а также замкнутость потока.

Однако независимо от структуры поля скоростей, закладываемой при выводе точного решения уравнений гидродинамики, все известные (классические) тече-

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-19-00571).

ния используют условие прилипания для описания взаимодействия жидкости на контакте с твердой поверхностью [2, 3, 8, 18–23]. На настоящий момент для специалистов, занимающихся поиском приложений теоретических достижений к областям практики, вызывает отдельный интерес течение жидкостей на контакте со слабо смачиваемыми (гидрофобными) покрытиями [24–26]. В этом случае использование условия прилипания является неприемлемым, необходимо брать в расчет альтернативные условия – условия скольжения [20, 27–31].

В данной работе исследуется обобщение течения Остроумова – Бириха на предельный случай проскальзывания жидкости (случай идеального скольжения [32–34] Навье) при постоянном (нулевом) расходе жидкости и неоднородном распределении поля температуры.

Постановка задачи

Рассматривается установившееся однонаправленное сдвиговое конвективное течение вязкой несжимаемой жидкости, движущейся со скоростью $\mathbf{V} = (V_x(z), 0, 0)$, в горизонтальном слое постоянной толщины h . Введем декартову систему координат таким образом, что ось Oz направлена строго вверх, ось Ox – вдоль исследуемого потока жидкости (рис. 1).

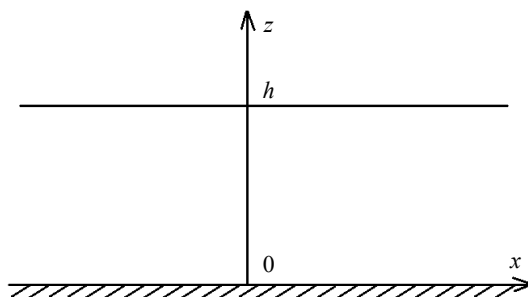


Рис. 1. Область течения

Fig. 1. Flow area

Система уравнений тепловой конвекции для таких течений принимает следующий вид [35]:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = g\beta T; \quad (1)$$

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Здесь V_x – скорость течения вдоль оси Ox ; $P = P(x, y, z)$ – отклонение давления от гидростатического, отнесённое к постоянной средней плотности жидкости ρ ; $T = T(x, y, z)$ – отклонение от средней температуры; ν и χ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости соответственно; β – тем-

пературный коэффициент объёмного расширения жидкости; g – ускорение свободного падения.

Уравнения (1) есть проекции векторного уравнения движения вязкой жидкости (уравнений Навье – Стокса с учетом приближения Буссинеска) на оси выбранной системы координат, уравнение (2) представляет собой закон изменения температуры при движении этой жидкости, а уравнение (3) отражает свойство ее несжимаемости. Заметим, что уравнение несжимаемости выполняется тождественно для поля скоростей $\mathbf{V} = (V_x(z), 0, 0)$, поэтому при записи уравнений сохранения моментов импульса (1) обнуляются конвективное слагаемое и вторые производные от скорости по переменным x и y .

Кроме того, в системе (1) – (3) число уравнений превосходит число неизвестных функций, поэтому рассматриваемая система является также и переопределенной. Факт переопределенности приводит к вопросу о существовании совместного нетривиального решения данной системы. Разрешимость переопределенной системы будет обеспечена, если удовлетворить «избыточным» уравнениям. Для этого решение системы (1) – (3) будем искать в классе функций следующего вида [36–40]:

$$V_x = U(z); \quad (4)$$

$$P = P_0(z) + xP_1(z), \quad T = T_0(z) + xT_1(z). \quad (5)$$

Представление (4) обеспечивает тождественное удовлетворение уравнения несжимаемости (3) и тем самым выравнивает баланс числа уравнений и числа неизвестных в системе уравнений тепловой конвекции (1) – (3). Отметим, что представление (4), (5) является частным случаем класса Линя – Сидорова – Аристова [2, 3, 8, 19, 37–39, 41–43].

В результате подстановки представлений (4) и (5) в систему уравнений тепловой конвекции и проецирования получившихся выражений на оси Ox , Oy , Oz выбранной декартовой системы координат приходим к следующей редуцированной системе обыкновенных дифференциальных уравнений [2, 8, 12, 13, 16, 17, 37–39, 44]:

$$T_1'' = 0, \quad P_1' = g\beta T_1, \quad \nu U'' = P_1, \quad \chi T_0'' = UT_1, \quad P_0' = g\beta T_0. \quad (6)$$

Операция дифференцирования в системе (6) ведется по вертикальной координате z . Полученная редуцированная (в классе (4), (5)) система наследует свойство нелинейности от изначальной системы (1) – (3). При этом, согласно порядку системы (6), для описания с ее помощью конкретных течений необходимо задать соответствующее число краевых условий.

Будем считать, что нижняя граница бесконечного горизонтального слоя жидкости, задаваемая уравнением $z = 0$ (рис. 1), является абсолютно твердой и неподвижной. При этом на этой границе выполняется условие идеального скольжения [32 – 34]. Значение температуры на нижней границе принимаем за отсчётное значение. С учетом структуры (4), (5) выбранного обобщенного класса решений эти условия записываются в следующем виде:

$$T_0(0) = 0, \quad U'(0) = 0. \quad (7)$$

На верхней границе $z = h$ (рис. 1) задано неоднородное распределение температурного поля и однородное распределение поля давления. Кроме того, полагаем верхнюю границу свободной (поле касательных напряжений, действующее на

ней, считаем нулевым). Согласно структуре класса решений (4), (5) эти условия принимают вид

$$T_0(h) = 0, \quad T_1(h) = A, \quad U'(h) = 0, \quad P_0(h) = 0, \quad P_1(h) = 0. \quad (8)$$

Кроме того, полагаем, что течение происходит с нулевым расходом жидкости [17, 37]:

$$\int_0^h U dz = 0. \quad (9)$$

Условие (9) для однонаправленных течений является аналогом уравнения неразрывности. Решение системы уравнений (6), удовлетворяющее граничным условиям (7) – (9), с учетом замены $Z = z/h \in [0, 1]$ является полиномиальным:

$$U = \frac{Ag\beta h^3}{120\nu} (-3 + 30Z^2 - 40Z^3 + 15Z^4); \quad (10)$$

$$T_0 = \frac{A^2 g h^5 \beta}{1680\nu\chi} (-1 + Z) Z (15 - 27Z - 6Z^2 + 64Z^3 - 55Z^4 + 15Z^5); \quad (11)$$

$$T_1 = A(-2 + 3Z); \quad (12)$$

$$P_0 = S_0 + \frac{A^2 g^2 h^6 \beta^2}{40320\nu\chi} (-1 + Z)^2 (25 + 50Z - 150Z^2 + 76Z^3 + 131Z^4 - 150Z^5 + 45Z^6); \quad (13)$$

$$P_1 = \frac{1}{2} Ag\beta h (-1 + Z)(-1 + 3Z). \quad (14)$$

Введение нормированной вертикальной координаты Z позволяет рассматривать слой фиксированной толщины, не зависящей от параметров краевой задачи, что в свою очередь снижает зависимость анализа свойств решения (10) – (14) от этих параметров.

Анализ точного решения для поля скорости

Проанализируем точное решение (10), описывающее свойства поля скорости. Известно, что границами зон обратного (возвратного) течения [2, 45, 46] при их наличии выступают точки, в которых скорость принимает нулевое значение. Изучим свойства полинома (10) на этот предмет.

Очевидно, что коэффициент $Ag\beta h^3/(120\nu)$ не оказывает влияния на расположение нулевых точек. Поэтому при нормировке скорости на этот коэффициент можно без потери общности рассматривать полином $-3 + 30Z^2 - 40Z^3 + 15Z^4$, входящий в выражение (10). Этот многочлен имеет единственный на интервале $[0, 1]$ нуль – это точка $Z = 0.4445$ (рис. 2).

Таким образом, поле скорости U расслаивается на две зоны относительно нулевого значения: в одной скорость U совпадает по направлению с осью Ox , а в другой – противоположна ей. Направление скорости U в каждой из этих двух областей определяется знаком параметра A , задаваемого на верхней границе. При этом положение границы этих областей не зависит от параметров краевой задачи, а определяется только структурой выбранного класса (4), (5) и типом краевых условий (7) – (9).

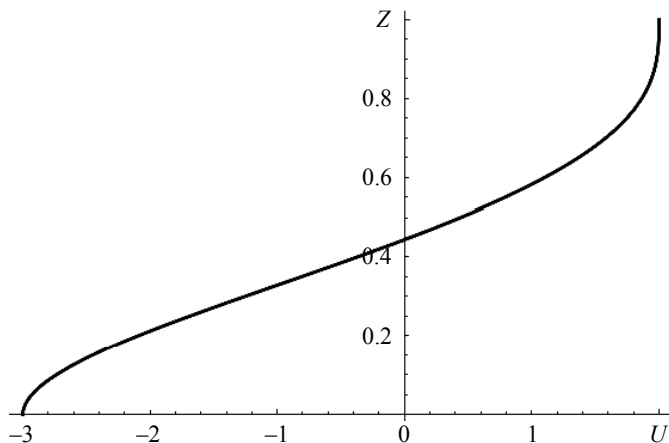


Рис. 2. Профиль скорости U , нормированной на множитель $Ag\beta h^3/(120\nu)$

Fig. 2. A profile of the velocity U normalized to a multiplier $Ag\beta h^3/(120\nu)$

Изучим далее зависимость касательного напряжения τ_{xz} , определяемого выражением

$$\tau_{xz} = \eta \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = \frac{\eta}{h} \frac{dU}{dZ} = \frac{\eta h^2 Ag\beta}{2\nu} Z(Z-1)^2, \quad (15)$$

от граничных параметров (здесь η – коэффициент динамической вязкости). Очевидно, что напряжение τ_{xz} всюду в слое $[0,1]$ принимает значения только одного знака.

Анализ точного решения для поля температуры

Исследуем теперь свойства поля температуры T , определяемого точным решением (11), (12). Горизонтальный градиент температуры $T_1 = A(-2 + 3Z)$ (12) есть строго монотонно возрастающая функция. Он может принимать нулевое значение только в одной точке – точке $Z = 2/3$, причем независимым от значения параметра A (как и от значений других параметров краевой задачи) образом.

Рассмотрим теперь многочлен (11), характеризующий распределение фоновой температуры T_0 . Очевидно, что фоновая температура обращается в нуль на границах интервала $[0,1]$, а также может принимать нулевое значение в точках, являющихся нулями полинома $f(Z) = 15 - 27Z - 6Z^2 + 64Z^3 - 55Z^4 + 15Z^5$. Анализ свойств функции $f(Z)$ показывает, что она всюду на интервале $(0,1)$ принимает только положительные значения.

Следовательно, фоновая температура, определяемая выражением (11), не имеет нулей внутри рассматриваемого слоя жидкости (рис. 3), но имеет немонотонный характер. Это говорит о том, что при некотором возмущении (в роли которых могут выступать дополнительно накладываемые тепловые поля, например поле $T_1(x)$) итоговое тепловое поле может стратифицироваться на зоны относительно отсчетного значения. Взаимодействие тепловых полей, определяемых компонентами T_0 и T_1 , представим, согласно выражениям (11), (12), в следующем виде:

$$T = T_0 + T_1 x = A \left[b(-1 + Z)Z(15 - 27Z - 6Z^2 + 64Z^3 - 55Z^4 + 15Z^5) + (-2 + 3Z)x \right]. \quad (16)$$

Здесь введено обозначение: $b = Ag\beta h^5/1680\nu\chi$. Выражение (16), описывающее поведение результирующего температурного поля T , является функцией трех переменных: координаты x , координаты Z , введенного параметра b . При этом параметр A , характеризующий распределение температуры на верхней границе слоя, не влияет на форму изолиний температурного поля T в явном виде, только опосредованно (как один из множителей, входящих в выражение для параметра b). На рис. 4 в качестве примера приведено распределение изолиний в плоскости xZ для значения $b = 1$ (для значений горизонтальной координаты $x \in [-1, 1]$).

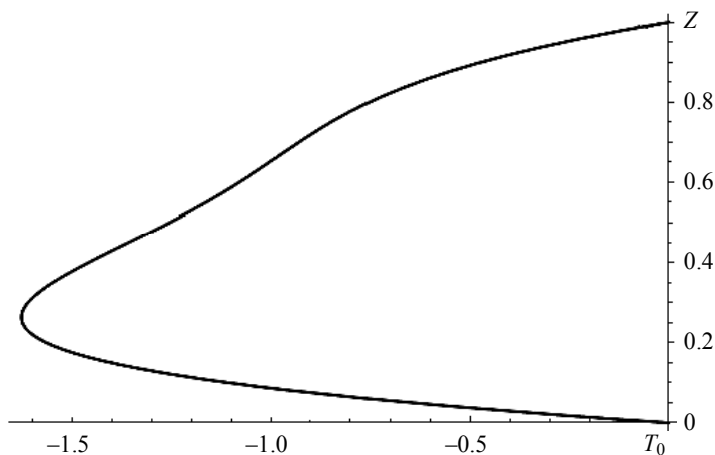


Рис. 3. Профиль фоновой температуры

Fig. 3. A background temperature profile

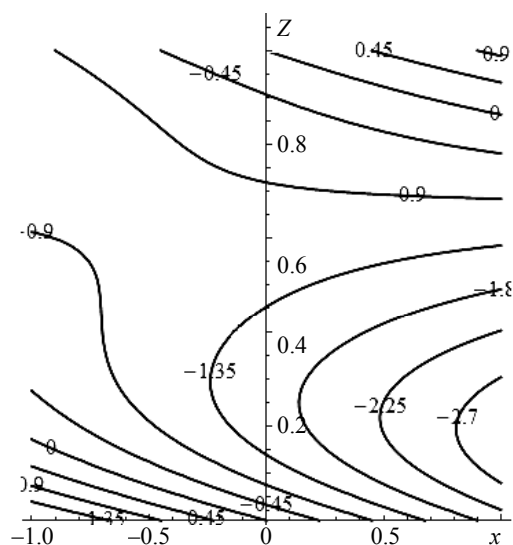


Рис. 4. Изолинии температуры T при $b = 1$

Fig. 4. Isolines of temperature T at $b = 1$

Отметим, что случай $b = 0$ описывает распределение изолиний дополнительного поля T_{1x} , отвечающего за неоднородность распределения тепловых эффектов. Кроме того, при увеличении значения параметра b происходит искривление изотерм. Это объясняется тем, что при увеличении значения параметра b возрастает влияние нелинейного (по переменной Z) слагаемого (вклад фоновой температуры) в выражении (16) для итогового температурного поля T .

Анализ точного решения для поля давления

Изучение свойств поля давления начнем так же, как поля температуры, с исследования свойств его продольного градиента P_1 . Решение (14) определяет квадратичную зависимость градиента P_1 от координаты Z . Нулями этого полинома являются значения $Z = 1$ и $Z = 1/3$. В этих точках будет происходить переход от положительно значения градиента давления к отрицательному значению (или наоборот) (рис. 5).

Далее изучим поведение фонового давления P_0 . Заметим, что выражение (13) содержит слагаемое S_0 – значение фонового давления на верхней границе слоя. Рассмотрим возможные варианты относительно этого значения. Если $S_0 = 0$, тогда выражение (13) примет вид

$$P_0 = \frac{A^2 g^2 h^6 \beta^2}{40320 \nu \chi} (-1 + Z)^2 (25 + 50Z - 150Z^2 + 76Z^3 + 131Z^4 - 150Z^5 + 45Z^6). \quad (17)$$

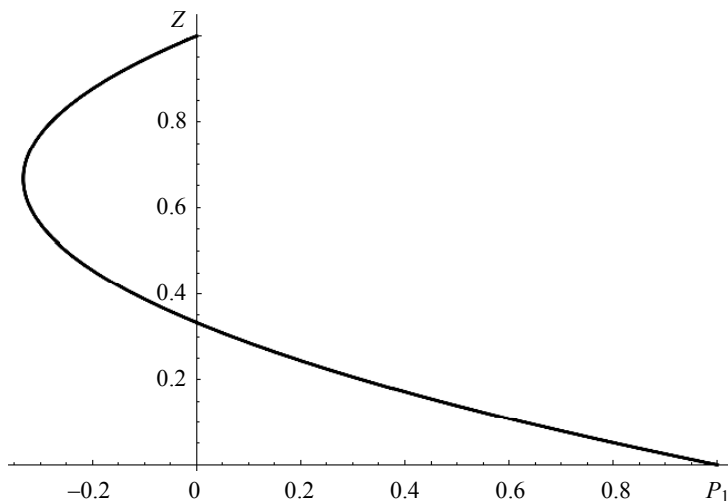


Рис. 5. Профиль компоненты P_1 поля давления
Fig. 5. A profile of pressure component P_1

При анализе расположения нулей выражения (17) можно не брать во внимание общий коэффициент, стоящий перед выражением, так как он не влияет на корни полинома (17). Единственный корень на промежутке $[0, 1]$ – это значение $Z = 1$, отвечающее положению верхней границы рассматриваемого слоя. Это означает, что в случае $S_0 = 0$ фоновое давление P_0 всюду внутри слоя отлично от нуля (рис. 6).

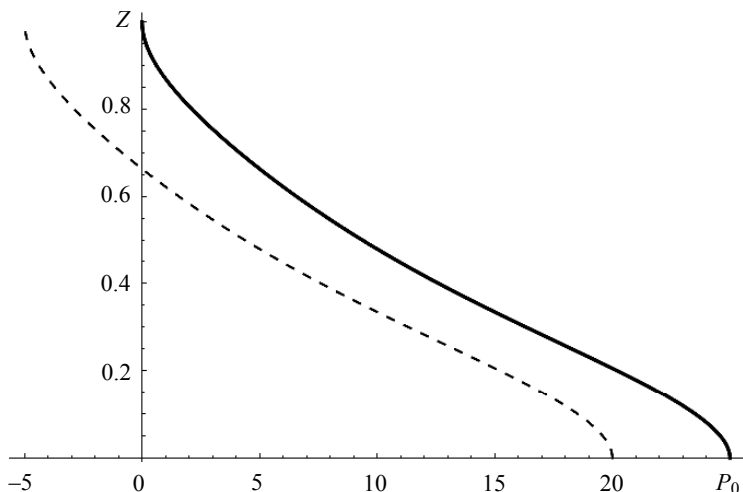


Рис. 6. Характерный профиль фонового давления P_0 при $S_0 = 0$ (сплошная линия) и $S_0 = -5$ (пунктирная линия)

Fig. 6. Typical profiles of background pressure P_0 at $S_0 = 0$ (solid line) and $S_0 = -5$ (dashed line)

Заметим, что слагаемое S_0 в выражении (13) определяет сдвиг, а не формоизменение профиля фонового давления. Таким образом, в случае $S_0 \neq 0$ при определенных значениях этого параметра возможно появление одной нулевой точки (рис. 6).

Теперь изучим распределение итогового поля давления, определяемого точным решением (13), (14). Заметим, что в тривиальном случае, когда $A = 0$, продольный градиент давления $P_1 = 0$, а фоновое давление P_0 принимает постоянное значение S_0 . И, очевидно, стратификации поля давления такого вида не наблюдается. Поэтому будем далее полагать, что параметр A отличен от нуля.

Рассмотрим сначала частный случай $S_0 = 0$. Давление тогда примет вид

$$P = \frac{A^2 g^2 h^6 \beta^2}{40320 \nu \chi} (-1 + Z)^2 (25 + 50Z - 150Z^2 + 76Z^3 + 131Z^4 - 150Z^5 + 45Z^6) + x \frac{A g h \beta}{2} (-1 + Z)(-1 + 3Z).$$

Выполним элементарные преобразования и используем замену $b = A g h^5 / 1680 \nu \chi$:

$$P = \frac{(-1+Z)840\nu\chi}{h^4} \left[\frac{b^2}{12} (-1+Z)(25+50Z-105Z^2+76Z^3+131Z^4-150Z^5+45Z^6) + x b (-1+3Z) \right]. \quad (18)$$

Из структуры полинома (18) видно, что одним из его корней будет граничная точка $Z = 1$. Разберем поведение функции

$$f = \frac{b^2}{12} (-1+Z)(25+50Z-105Z^2+76Z^3+131Z^4-150Z^5+45Z^6) + x b (-1+3Z),$$

стоящей в квадратных скобках выражения (18). Функция f зависит от трех параметров — x , b и Z . Рассмотрим, как влияют параметры x , b на поведение f .

Для сравнения с характером распределения поля температуры на рис. 7 приведено распределение изолиний поля давления на промежутке $x \in [-1, 1]$ при значении $b = 1$.

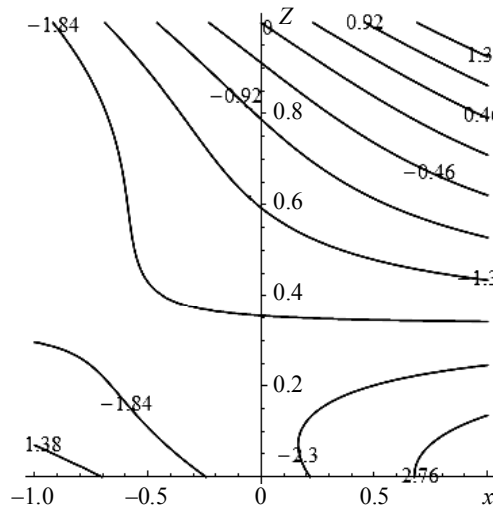


Рис. 7. Изолинии функции f при $b = 1$
Fig. 7. Isolines of function f at $b = 1$

Функция f в зависимости от расположения выбранного (по координате x) сечения имеет не более одной нулевой точки внутри слоя $Z \in [0, 1]$. Значит, итоговое давление (18) также имеет не более одной нулевой точки внутри промежутка $Z \in [0, 1]$. (рис. 8).

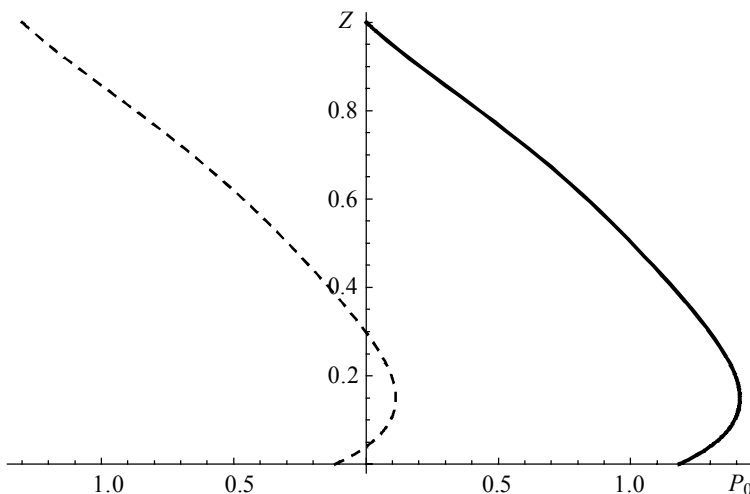


Рис. 8. Характерный профиль давления P при $b = 1$, $x = -0.9$
в случае $S_0 = 0$ (сплошная линия) и в случае $S_0 = -1.3$ (пунктирная линия)
Fig. 8. Typical profiles of pressure P at $b = 1$, $x = -0.9$
in the case of $S_0 = 0$ (solid line) and $S_0 = -1.3$ (dashed line)

Как было сказано выше, учет ненулевого значения S_0 в выражениях для давления (в частности, в выражении (18)) приводит к сдвигу профилей. Это означает, что в случае $S_0 \neq 0$ итоговое давление P в некоторых сечениях может иметь две нулевые точки (рис. 8). Характерные профили такого же, как на рис. 8, типа говорят о явной локализации поля давления в придонной области для рассматриваемых сечений.

Заключение

В ходе анализа приведенного в статье точного решения было установлено, что распределение полей скорости, температуры и давления в общем случае неоднородно и зависит от значений краевых параметров. Было показано, что поле скорости может расслаиваться на две зоны относительно нулевого значения: в одной направлении течения жидкости совпадает с соответствующей координатной осью, а в другой – противоположно ей. При этом соответствующее касательное напряжение не допускает возникновения стратификации. Температурное поле, в свою очередь, демонстрирует аналогичное поведение: наблюдается переход от нагрева жидкости в одной из зон к охлаждению в соседней с ней зоне. Поле давления может иметь не более двух нулевых (относительно отсчетного значения) точек внутри рассматриваемого слоя жидкости, т. е. смена знака давления происходит не более двух раз по толщине изучаемого слоя. Полученные выводы применимы к различным по своей природе вязким жидкостям, так как анализ был проведен в общем виде (без конкретизации значений физических констант, однозначным образом идентифицирующих исследуемую жидкость).

Литература

1. Степанова И.В. Построение и анализ точного решения уравнений Обербека – Буссинеска // Журнал СФУ. Математика и физика. 2019. Т. 12. № 5. С. 590–597. DOI: 10.17516/1997-1397-2019-12-5-590-597.
2. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect // Journal of King Saud University – Science. 2020. V. 32. Iss. 8. P. 3364–3371. DOI: 10.1016/j.jksus.2020.09.023.
3. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23. № 2. С. 341–360. DOI: 10.14498/vsgtu1670.
4. Васенин И.М., Крайнов А.Ю., Шахтин А.А., Мазур Р.Л., Зернаев П.В., Чуканов М.В. Математическая модель и результаты численных расчетов перелива UF_6 в присутствии микроколичеств легких примесей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. Т. 2. № 10. С. 53–59.
5. Гончарова О.Н. Моделирование микроконвекции в жидкости, заключенной между теплопроводными массивами // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52. № 1. С. 84–91.
6. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
7. Брутян М.А. Однонаправленные течения простых жидкостей и их газодинамическое описание // Механика композиционных материалов и конструкций. 1995. Т. 1. № 2. С. 83–90.
8. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Термокапиллярная конвекция вертикально завихренной жидкости // Теоретические основы химической технологии. 2020. Т. 54. № 1. С. 114–124. DOI: 10.31857/S0040357119060034.

9. Жучков В.И., Раева В.М., Фролова А.К. Исследование селективности бинарных агентов методом газожидкостной хроматографии // Теоретические основы химической технологии. 2020. Т. 54. № 1. С. 69–74. DOI: 10.31857/S0040357120010248.
10. Spurk J.H., Aksel N. Laminar unidirectional flows. In: Fluid Mechanics. Springer, Cham., 2020. DOI: 10.1007/978-3-030-30259-7_6.
11. Wichterle K., Večeř M. Chapter Twelve – The steady unidirectional flow // Transport and Surface Phenomena. Elsevier, 2020. DOI: 10.1016/B978-0-12-818994-8.00012-9.
12. Couette M. Etudes sur le frottement des liquides // Ann. Chim. Phys. 1890. V. 21. No. 6. P. 433–510.
13. Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres // Comptes Rendus. 1844. V. 9. P. 1–122.
14. Наумов И.В., Миккельсен Р.Ф., Окулов В.Л. Формирование застойной зоны на оси замкнутого закрученного течения // Теплофизика и аэромеханика. 2014. Т. 21. № 6. С. 799–802.
15. Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск: Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе, 2003. 503 с.
16. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
17. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.: Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1952. 256 с.
18. Гебхарт Б., Джалаурия Й., Махаджан Р., Самакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен: в 2 кн. Кн. 1. М.: Мир, 1991. 678 с.
19. Бурмашева Н.В., Просвирыков Е.Ю. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 3. С. 528–541. DOI: 10.14498/vsgtu1770.
20. Bulíček M., Málek J. Internal flows of incompressible fluids subject to stick-slip boundary conditions // Vietnam J. Math. 2017. V. 45. P. 207–220. DOI: 10.1007/s10013-016-0221-z.
21. Zhang S., Huan J., Song H., Liu X., Wei Y.G. Plastic effect on the sliding inception between a cylinder and a rigid flat // Acta Mech. Solida Sin. 2019. V. 32. P. 1–16. DOI: 10.1007/s10338-018-0060-4.
22. Chen Y., O'Shaughnessy T.J., Kamimori G.H., Horner D.M., Egnoto M.J., Bagchi A. Role of interfacial conditions on blast overpressure propagation into the brain // Front. Neurol. 2020. V. 11. 323. DOI: 10.3389/fneur.2020.00323.
23. Ekiel-Jeżewska M.L., Wajnryb E. Motion of a particle with stick-slip boundary conditions towards a flat interface: hard wall or free surface // Physicochem. Probl. Miner. Process. 2018. V. 54. No. 1. P. 203–209. DOI: 10.5277/ppmp1849.
24. Кошоридзе С.И., Левин Ю.К. Образование пузырька на гидрофобной поверхности // Журнал технической физики. 2020. Т. 90. №. 6. С. 886–890. DOI: 10.21883/JTF.2020.06.49272.182-19.
25. Varughese S.M., Bhandaru N. Durability of submerged hydrophobic surfaces // Soft Matter. 2020. V. 16. P. 1692–1701. DOI: 10.1039/C9SM01942A.
26. Li J., Wang W., Mei X., Pan A. Effects of surface wettability on the dewetting performance of hydrophobic surfaces // ACS Omega. 2020. V. 5. P. 28776–28783. DOI: 10.1021/acsomega.0c04106.
27. Qian T.Z., Wang X.P., Sheng P. Molecular scale contact line hydrodynamics of immiscible fluids // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. 016306. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.016306.
28. Hooman K., Hooman F., Famouri M. Scaling effects for flow in micro-channels: Variable property, viscous heating, velocity slip, and temperature jump // Int. Communications in Heat and Mass Transfer. 2009. V. 36. P. 192–196.
29. Neto C., Evans D., Craig V.S.J., Bonaccorso E. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies // Reports on Progress in Physics. 2005. V. 39. P. 2859–2897. DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05_2.
30. Bahrami M., Tamayol A., Taheri P. Slip-flow pressure drop in microchannels of general cross section // J. Fluids Engineering. 2009. V. 131. 031201.

31. Шварц К.Г., Шварц Ю.А. Устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое несжимаемой жидкости при наличии условия проскальзывания // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2020. № 1. С. 33–44. DOI: 10.31857/S0568528120010119.
32. Эйжкел Я. Проскальзывание жидкости в микро- и нанофлюидике: недавние исследования и их возможные применения // Научные труды НИПИ Нефтегаз ГНКАР. 2010. № 4. С. 62–66. DOI: 10.5510/OGP20100400047.
33. Борзенко Е.И., Дьякова О.А., Шрагер Г.Р. Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 2(28). С. 35–44.
34. Шелухин В.В., Христенко У.А. Об одном условии проскальзывания для уравнений вязкой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 5. С. 101–109.
35. Андреев В.К., Бекежанова В.Б., Ефимова М.В., Рыжков И.И., Степанова И.В. Неклассические модели конвекции: точные решения и их устойчивость // Вычислительные технологии. 2009. Т. 14. № 6. С. 5–18.
36. Stepanova I.V. Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity // Applied Mathematics and Computation. 2019. V. 343. P. 57–66. DOI: 10.1016/j.amc.2018.09.036.
37. Burmasheva N.V., Larina E.A., Prosviryakov E.Yu. Unidirectional convective flows of a viscous incompressible fluid with slippage in a closed layer // AIP Conference Proceedings. 2019. V. 2176. 030023. DOI: 10.1063/1.5135147.
38. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 2. С. 79–87. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
39. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2020. Т. 32. С. 33–48. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
40. Барановский Е.С., Артемов М.А. О стационарном течении жидкостей второго порядка в канале // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. № 4. С. 342–353. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.401.
41. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. 1958. V. 1. P. 391–395. DOI: 10.1007/BF00298016.
42. Сидоров А.Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // ПМТФ. 1989. № 2. С. 34–40.
43. Аристов С.Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости: автореф. ... дис. докт. физ.-мат. наук. Владивосток, 1990.
44. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование поля скоростей // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21. № 1. С. 180–196. DOI: 10.14498/vsgtu1527.
45. Shtern V. Counterflows. Paradoxical fluid mechanics phenomena. Cambridge, Cambridge University Press, 2012. DOI: 10.1017/CBO9781139226516.
46. Павленко А.М., Занин Б.Ю., Катасонов М.М., Зверков И.Д. Преобразование структуры открытого течения с помощью локального воздействия // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17. № 1. С. 17–22.

Burmasheva N.V., Larina E.A., Prosviryakov E.Yu. (2021) A COUETTE-TYPE FLOW WITH A PERFECT SLIP CONDITION ON A SOLID SURFACE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 74. pp. 79–94

DOI 10.17223/19988621/74/9

Keywords: viscous fluid convection, exact solution, shear flow, stagnation points, stratification of fields.

On the basis of a system of hydrodynamic equations, the unidirectional steady flow of a viscous incompressible fluid in a horizontal extended layer is studied. The solution to the governing equations is discovered in a distinguished class of functions that are linear in coordinates.

The contact of the fluid with a lower hydrophobic solid boundary is described by the Navier-slip condition. At the upper boundary of the layer, the temperature and pressure fields are assumed to be given, and a zero shear stress is specified. The system of boundary conditions is redefined due to the fact that all conditions for velocities are assigned as their derivatives. Zero flow rate is taken as an additional condition.

The obtained exact solution to the boundary value problem is the only possible polynomial solution. The highest (eighth) degree of polynomials corresponds to a solution for background pressure. Analysis of the solution shows that it can describe a multiple stratification of kinetic-force fields.

Since the analysis is carried out in a general form (without specifying physical constants that uniquely identify the fluid under study), the obtained results are applicable to viscous fluids of different nature.

Financial support. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 19-19-00571).

Natal'ya V. BURMASHEVA (Candidate of Technical Sciences, Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation). E-mail: nat_burm@mail.ru

Ekaterina A. LARINA (Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation). E-mail: larinakaterina@hotmail.com

Evgeniy Yu. PROSVIRYAKOV (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation). E-mail: evgen_pros@mail.ru

REFERENCES

1. Stepanova I.V. (2019) Construction and analysis of exact solution of Oberbeck–Boussinesque equations. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 12(5). pp. 590–597. DOI: 10.17516/1997-1397-2019-12-5-590-597.
2. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect. *Journal of King Saud University – Science*. 32(8). pp. 3364–3371. DOI: 10.1016/j.jksus.2020.09.023.
3. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2019) Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation. *Journal of Samara State Technical University, Series Physical and Mathematical Sciences*. 23(2). pp. 341–360. DOI: 10.14498/vsgtu1670.
4. Vasenin I.M., Krainov A.Yu., Shakhtin A.A., Mazur R.L., Zernaev P.V., Chukanov M.V. (2010) Matematicheskaya model' i rezul'taty chislennykh raschetov pereliva UF₆ v prisutstvii mikrokolichestv legkikh primesey [Mathematical model and results of numerical calculations for UF₆ overflowing in presence of microquantities of light impurities]. *Vestnik Tomskogo*

- gosudarstvennogo universiteta. *Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(10). pp. 53–59.
5. Goncharova O.N. (2011) Modeling of microconvection in a fluid between heat conducting solids. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 52(1). pp. 67–73. DOI: 10.1134/S002189441101010X.
 6. Gershuni G.Z., Zhukovitskii E.M. (1976) *Convective Stability of Incompressible Fluids*. Jerusalem: Keter Publications.
 7. Brutyan M.A. (1995) Odnopravlennye techeniya prostykh zhidkostey i ikh gazodinamicheskoe opisanie [Unidirectional flows of simple liquids and their gas-dynamic description]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktivnykh materialov – Journal on Composite Mechanics and Design*. 1(2). pp. 83–90.
 8. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Y. (2020) Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 54(1). pp. 230–239. DOI: 10.1134/S0040579519060034.
 9. Zhuchkov V.I., Raeva V.M., Frolkova A.K. (2020) Study of the selectivity of binary agents by gas–liquid chromatography. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 54(1). pp. 194–199. DOI: 10.31857/S0040357120010248.
 10. Spurk J.H., Aksel N. (2020) Laminar unidirectional flows. In: *Fluid Mechanics*. Cham, Springer. DOI: 10.1007/978-3-030-30259-7_6.
 11. Wichterle K., Večeř M. (2020) Chapter twelve – The steady unidirectional flow. *Transport and Surface Phenomena*. Elsevier. DOI: 10.1016/B978-0-12-818994-8.00012-9.
 12. Couette M. (1890) Etudes sur le frottement des liquides. *Annales de Chimie et de Physique*. 21. pp. 433–510.
 13. Poiseuille J. (1844) Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres. *Comptes Rendus*. 9. pp. 1–122.
 14. Naumov I.V., Okulov V.L., Mikkelsen R.F. (2014) Stagnation zone formation on the axis of a closed vortex flow. *Thermophysics and Aeromechanics*. 21(6). pp. 767–770. DOI: 10.1134/S0869864314060134.
 15. Alekseenko S.V., Kuybin P.A., Okulov V.L. (2003) *Vvedenie v teoriyu kontsentririrovannykh vikhrey* [Introduction to the theory of concentrated vortices]. Novosibirsk: Institut teplofiziki im S.S. Kutateladze.
 16. Birikh R.V. (1966) Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 7. pp. 43–44.
 17. Ostroumov G.A. (1958) *Free Convection under the Condition of the Internal Problem*. Washington, NACA Technical Memorandum 1407, National Advisory Committee for Aeronautics.
 18. Gebhart B., Jaluria Y., Mahajan R.L., Sammakia B. (1988) *Buoyancy-induced Flows and Transport*. Springer.
 19. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation. *Journal of Samara State Technical University, Series Physical and Mathematical Sciences*. 24(3). pp. 528–541. DOI: 10.14498/vsgtu1770.
 20. Bulíček M., Málek J. (2017) Internal flows of incompressible fluids subject to stick-slip boundary conditions. *Vietnam Journal of Mathematics*. 45. pp. 207–220. DOI: 10.1007/s10013-016-0221-z.
 21. Zhang S., Huan J., Song H., Liu X., Wei Y.G. (2019) Plastic effect on the sliding inception between a cylinder and a rigid flat. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 32. pp. 1–16. DOI: 10.1007/s10338-018-0060-4.
 22. Chen Y., O'Shaughnessy T.J., Kamimori G.H., Horner D.M., Egnoto M.J., Bagchi A. (2020) Role of interfacial conditions on blast overpressure propagation into the brain. *Frontiers in Neurology*. 11. Article 323. DOI: 10.3389/fneur.2020.00323.
 23. Ekiel-Jezewska M.L., Wajnryb E. (2018) Motion of a particle with stick-slip boundary conditions towards a flat interface: hard wall or free surface. *Physicochemical Problems of Mineral Processing*. 54(1). pp. 203–209. DOI: 10.5277/ppmp1849.

24. Koshoridze S.I., Levin Y.K. (2020) Bubble formation on a hydrophobic surface. *Technical Physics*. 65(6). pp. 846–850. DOI: 10.1134/S1063784220060171.
25. Varughese S.M., Bhandaru N. (2020) Durability of submerged hydrophobic surfaces. *Soft Matter*. 6. DOI: 10.1039/C9SM01942A.
26. Li J., Wang W., Mei X., Pan A. (2020) Effects of surface wettability on the dewetting performance of hydrophobic. *ACS Omega*. 5. pp. 28776–28783. DOI: 10.1021/acsomega.0c04106.
27. Qian T.Z., Wang X.P., Sheng P. (2003) Molecular scale contact line hydrodynamics of immiscible fluids. *Physical Review E*. 68. Article 016306. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.016306.
28. Hooman K., Hooman F., Famouri M. (2009) Scaling effects for flow in micro-channels: Variable property, viscous heating, velocity slip, and temperature jump. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 36(2). pp. 192–196. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2008.10.003.
29. Neto C., Evans D., Bonaccorso E. (2005) Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies. *Reports on Progress in Physics*. 39. pp. 2859–2897. DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
30. Bahrami M., Tamayol A., Taheri P. (2009) Slip-flow pressure drop in microchannels of general cross section. *Journal of Fluids Engineering*. 131. Article 031201. DOI: 10.1115/1.3059699.
31. Schwarz K.G., Schwarz Y.A. (2020) Stability of advective flow in a horizontal incompressible fluid layer in the presence of the Navier slip condition. *Fluid Dynamics*. 55. pp. 31–42. DOI: 10.1134/S0015462820010115.
32. Eijkel J. (2007) Liquid slip in micro- and nanofluidics: recent research and its possible implications. *Lab on a Chip*. 7(3). pp. 299–301. DOI: 10.1039/B700364C.
33. Borzenko E.I., Diakova O.A., Shrager G.R. (2014) Issledovanie yavleniya proskal'zyvaniya v sluchae tehnicheskoy vyzkoy zhidkosti v izognutom kanale [Studying the slip phenomenon for a viscous fluid flow in a curved channel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(28). pp. 35–44.
34. Shelukhin V.V., Khristenko U.A. (2013) On one slip condition for the equations of a viscous fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 54(5). pp. 773–780. DOI: 10.1134/S0021894413050106.
35. Andreev V.K., Bekezhanova V.B., Efimova M.V., Ryzhkov I.I., Stepanova I.V. (2009) Neklassicheskie modeli konveksii: tochnye resheniya i ikh ustoychivost' [Non-classical convection models: exact solutions and their stability]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 14(6). pp. 5–18.
36. Stepanova I.V. (2019) Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity. *Applied Mathematics and Computation*. 343. pp. 57–66. DOI: 10.1016/j.amc.2018.09.036.
37. Burmasheva N.V., Larina E.A., Prosviryakov E.Yu. (2019) Unidirectional convective flows of a viscous incompressible fluid with slippage in a closed layer. *AIP Conference Proceedings*. 2176. Article 030023. DOI: 10.1063/1.5135147.
38. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) Tochnoe reshenie uravneniy Nav'e–Stoksa, opisuyayushchee prostranstvenno neodnorodnye techeniya vrashchayushcheyasya zhidkosti [Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*. 26(2). pp. 79–87. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
39. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) Klass tochnykh resheniy dlya dvumernykh uravneniy geofizicheskoy gidrodinamiki s dvumya parametrami Koriolisa [A class of exact solutions for two-dimensional equations of geophysical hydrodynamics with two Coriolis parameters]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematika» – The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*. 32. pp. 33–48. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
40. Baranovskiy E.S., Artemov M.A. (2017) O statsionarnom techenii zhidkostey vtorogo porjadka v kanale [Steady flows of second-grade fluids in a channel]. *Vestnik Sankt-Peterburg-*

- skogo universiteta. *Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya – Vestnik of Saint Petersburg State University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 13(4). pp. 342–353. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.401.
41. Lin C.C. (1958) Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1. pp. 391–395. DOI: 10.1007/BF00298016.
 42. Sidorov A.F. (1989) Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 30(2). pp. 197–203. DOI: 10.1007/BF00852164.
 43. Aristov S.N. (1990) *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Eddy currents in thin liquid layers]: Dissertation. Institute of Automation and Control Processes.
 44. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2017) Krupnomasshtabnaya sloistaya statsionarnaya konvektsiya vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti pod deystviem kasatel'nykh napryazheniy na verkhney granitse. Issledovanie polya skorostey [A large-scale layered stationary convection of an incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Velocity field investigation]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki – Journal of Samara State Technical University, Series Physical and Mathematical Sciences*. 21(1). pp. 180–196. DOI: 10.14498/vsgtu1527.
 45. Shtern V. (2012) *Counterflows. Paradoxical Fluid Mechanics Phenomena*. Cambridge: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9781139226516.
 46. Pavlenko A.M., Zanin B.Y., Katasonov M.M., Zverkov I.D. (2010) Alteration of separated-flow structure achieved through a local action. *Thermophysics and Aeromechanics*. 17(1). pp. 15–20. DOI: 10.1134/S0869864310010026.

Received: May 06, 2021