

Г.А. Медведев

О ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЕ ДОХОДНОСТИ. 7. НОВАЯ ВЕРСИЯ

В отличие от предыдущих статей серии при анализе временной структуры процентных ставок предлагается рассматривать временную переменную не как дюрацию краткосрочной процентной ставки (там временная переменная зависит от параметров рассматриваемых моделей, что затрудняет сравнение доходностей для одних и тех же реальных сроков до погашения), а как некоторое не зависящее от параметров модели нелинейное преобразование временных сроков, позволяющее отображать всю временную ось на интервал единичной длины. Использование такого подхода проиллюстрировано при анализе свойств кривой доходности и форвардной кривой для одно-, двух- и трехфакторных моделей процентных ставок.

Ключевые слова: процентные ставки доходности, аффинная модель, функции временной структуры, одно-, двух- и трехфакторные модели.

Будем считать, что для n -факторной модели аффинной доходности предполагается, что вектор состояния финансового рынка $X(t) = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ следует однородному по времени марковскому процессу, порождаемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = \mu(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t)$$

с n -вектором дрейфа $\mu(x)$, $(n \times m)$ -матрицей волатильности $\sigma(x)$ и m -вектором $W(t)$ независимых стандартных винеровских процессов [1]. При этом вектор дрейфа $\mu(x)$ и матрица диффузии $\sigma(x)\sigma(x)^T$ должны быть аффинными функциями относительно переменных x , а рыночные цены риска такими, что $\sigma(x)\lambda(x)$ – n -вектор с аффинными компонентами относительно переменных x :

$$\mu(x) = K(\theta - x), \quad \sigma(x)\sigma(x)^T = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i, \quad \sigma(x)\lambda(x) = \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i x_i. \quad (1)$$

Здесь K , α и β_i – $(n \times n)$ -матрицы; θ , ξ и η_i – n -векторы, x_i – компоненты вектора x . Эти свойства для n -факторной модели аффинной доходности приводят к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям для функции $A(\tau)$ и компонент вектора $B(\tau) = (B_1(\tau), B_2(\tau), \dots, B_n(\tau))$, τ – срок до погашения:

$$A'(\tau) = (\xi - K\theta)^T B(\tau) + B(\tau)^T \alpha B(\tau)/2, \quad A(0) = 0; \quad (2)$$

$$B_i'(\tau) = \phi_i - B(\tau)^T (\eta_i + K_i) - B(\tau)^T \beta_i B(\tau)/2, \quad B_i(0) = 0. \quad (3)$$

В уравнении для $B_i(\tau)$ символ K_i обозначает i -й столбец матрицы K , $1 \leq i \leq n$. Если среди переменных состояния имеется краткосрочная процентная ставка r , то компоненты вектора ϕ по экономическому смыслу доходности должны определяться так, чтобы $\phi_r = 1$, а остальные компоненты равны нулю. Кривая доходности $y(\tau, x)$ и форвардная кривая $f(\tau, x)$ определяются через функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ по формулам

$$y(\tau, x) = \frac{x^T B(\tau) - A(\tau)}{\tau}, \quad f(\tau, x) = x^T \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau}. \quad (4)$$

Вслед за функциями $A(\tau)$ и $B(\tau)$ доходности $y(\tau, x)$ и $f(\tau, x)$ определяются на неограниченном интервале сроков погашения $\tau \in [0, \infty]$. Поэтому их визуальный сравнительный анализ на всем интервале изменения сроков до погашения τ затрудняется этой неограниченностью. Для устранения этого недостатка в [1] предложено в качестве временной переменной τ для измерения сроков до погашения использовать меру дюрации $B_r(\tau)$ краткосрочной процентной ставки r . Тогда неограниченный интервал $\tau \in [0, \infty]$ будет отображаться в конечный интервал $B_r \in [0, B_r(\infty)]$, $B_r(\infty) < \infty$. Такой подход описан в [1] для серии одно-, двух- и трехфакторных моделей. Он улучшает визуализацию сравнительного анализа кривых доходности, однако имеет существенный недостаток, заключающийся в том, что $B_r(\infty)$ зависит от всех параметров модели, что влечет зависимость длительности интервала $[0, B_r(\infty)]$ от любого из этих параметров. Вследствие этого, изменение любого параметра модели приводит к изменению временной шкалы. Это хорошо иллюстрируется, например, рис. 3 из статьи 5 серии [1], где интервал изменения дюрации процентной ставки существенно меняется с изменением волатильности модели. В настоящей статье предлагается другое преобразование временной переменной, которое отображает неограниченный интервал изменения сроков погашения $\tau \in [0, \infty]$ в единичный интервал $[0, 1]$ независимо от параметров модели.

Введем переменную u соотношением $u = 1 - \exp[-\rho\tau]$, где ρ – параметр преобразования, $\rho > 0$. При таком преобразовании шкалы изменения сроков до погашения τ неограниченный интервал $[0, \infty]$ возможных значений сроков погашения отображается в единичный интервал $[0, 1]$ изменения переменной u . Заметим, что введенное преобразование обеспечивает взаимно однозначное соответствие между переменными u и τ , когда всякому фиксированному сроку до погашения τ_k соответствует единственное значение переменной $u = u_k = 1 - \exp[-\rho\tau_k]$, и наоборот, всякому фиксированному значению переменной $u = u_k > 0$ соответствует единственный срок до погашения $\tau_k = -\ln(1 - u_k)/\rho > 0$.

Таким образом, используя преобразование переменной $\tau = -\ln(1 - u)/\rho$ в соотношениях (4), вместо функций доходностей $y(\tau, x)$ и $f(\tau, x)$, заданных на неограниченном интервале $\tau \in [0, \infty]$, можно получить функции $Y(u, x)$ и $F(u, x)$, заданные на конечном интервале $u \in [0, 1]$. Функции $Y(u, x)$ и $F(u, x)$ имеют практически те же свойства, что и доходности $y(\tau, x)$ и $f(\tau, x)$, поэтому могут рассматриваться как их эквиваленты.

Рассмотрим это более детально. Пусть значения τ_k и u_k связаны соотношениями $\tau_k = -\ln(1 - u_k)/\rho$ и соответственно $u_k = 1 - \exp[-\rho\tau_k]$.

По определению $Y(u_k, x) \equiv y(-\ln(1 - u_k)/\rho, x) = y(\tau_k, x)$ для всех $\tau_k \in [0, \infty]$, $u_k = 1 - \exp[-\rho\tau_k]$. Поэтому область возможных значений $Y(u_k, x)$ полностью совпадает с областью возможных значений $y(\tau_k, x)$, $\tau_k \in [0, \infty]$. Заметим, что взаимоотношения между функциями $F(u, x)$ и $f(\tau, x)$ точно такие же, как и между функциями $Y(u, x)$ и $y(\tau, x)$. Так что достаточно рассмотреть только одну пару функций $Y(u, x)$ и $y(\tau, x)$, чтобы иметь представление о свойствах другой пары $F(u, x)$ и $f(\tau, x)$.

Предельные значения функций $Y(u, x)$ и $y(\tau, x)$ на границах области определения функций совпадают:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y(\tau, x) = \lim_{u \rightarrow 0} Y(u, x), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} y(\tau, x) = \lim_{u \rightarrow 1} Y(u, x).$$

Пусть $y(\tau, x)$ возрастает (убывает) в окрестности точки $\tau = \tau_k$. Вектор переменных состояния x рассматриваем здесь и всюду далее как набор фиксированных

параметров. Тогда функция $Y(u, x)$ будет возрастать (убывать) в окрестности точки $u_k = 1 - \exp[-\rho\tau_k]$. Это следует из соотношений

$$\frac{\partial Y(u, x)}{\partial u} = \frac{\partial y(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{du} = \frac{\partial y(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{d(-\ln(1-u)/\rho)}{du} = \frac{1}{\rho(1-u)} \frac{\partial y(\tau, x)}{\partial \tau}, \quad \frac{1}{\rho(1-u)} > 0,$$

справедливых для всех $\rho > 0$ и $0 < u < 1$. Заметим также, что справедливо следующее соотношение между производными

$$\left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau = -\ln(1-u)/\rho} = \rho(1-u) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (5)$$

Если при некотором значении $\tau = \tau_k$ функция $y(\tau, x)$ имеет максимум (минимум), то функция $Y(u, x)$ будет иметь максимум (минимум) в точке $u_k = 1 - \exp[-\rho\tau_k]$.

К сожалению, свойство выпуклости функции $y(\tau, x)$ на некотором интервале значений τ может не обеспечить выпуклости функции $Y(u, x)$ на соответствующем интервале значений переменной u , так как для выполнения неравенства

$$\frac{\partial^2 Y(u, x)}{\partial u^2} = \frac{1}{\rho^2(1-u)^2} \left(\frac{\partial^2 y(\tau, x)}{\partial \tau^2} + \rho \frac{\partial y(\tau, x)}{\partial \tau} \right) \Bigg|_{\tau = -\ln(1-u)/\rho} > 0$$

необходимо, чтобы $\frac{\partial^2 y(\tau, x)}{\partial \tau^2} > -\rho \frac{\partial y(\tau, x)}{\partial \tau}$, для чего недостаточно усло-

вия $\frac{\partial^2 y(\tau, x)}{\partial \tau^2} > 0$, так как наклон кривой доходности $y(\tau, x)$ может быть и отрицательным.

Если при некотором значении $\tau = \tau_k$ имеет место неравенство $y(\tau_k, x) < f(\tau_k, x)$ (или $y(\tau_k, x) > f(\tau_k, x)$), то справедливо неравенство $Y(u_k, x) < F(u_k, x)$ (или $Y(u_k, x) > F(u_k, x)$) в точке $u_k = 1 - \exp[-\rho\tau_k]$.

Основываясь на этих свойствах, можно полагать, что функции $Y(u, x)$ и $F(u, x)$ достаточно хорошо отражают свойства кривых доходности, заданы на конечном интервале переменной u , которая не связана с параметрами модели, и могут служить для описания свойств доходности на всем интервале изменения сроков погашения. В связи с этим в дальнейшем $Y(u, x)$ и $F(u, x)$ будут называться тоже кривой доходности и форвардной кривой соответственно. Относительно параметра ρ , определяющего переменную u , заметим, что при изображении кривых на рисунках значением этого параметра можно устанавливать долю интервала $[0, 1]$, которую желательно выделить для представления интересующих сроков погашения. Например, если желательно, чтобы на 90 % длины интервала $[0, 1]$ были представлены сроки до погашения, не превышающие T , значение параметра следует выбирать равным $\rho = \ln 10/T$.

Получим уравнения для определения функций $Y(u, x)$ и $F(u, x)$. Для этого естественно применить равенства (4), приспособленные для переменной u . Используем в (4) подстановку $\tau(u) = -\ln(1-u)/\rho$ и формулы дифференцирования (5), введя обозначения $a(u) \equiv A(\tau(u))$ и $b(u) \equiv B(\tau(u))$. Тогда получим

$$Y(u, x) = \rho \frac{a(u) - x^T b(u)}{\ln(1-u)}, \quad F(u, x) = \rho(1-u) \left(x^T \frac{db(u)}{du} - \frac{da(u)}{du} \right). \quad (6)$$

Для определения функций $a(u)$ и $b(u)$ можно использовать уравнения (2) и (3), что с помощью (5) приводит к уравнениям

$$\rho(1-u)a'(u) = (\xi - K\theta)^T b(u) + b(u)^T \alpha b(u)/2, \quad a(0) = 0; \quad (7)$$

$$\rho(1-u)b'_i(u) = \phi_i - b(u)^T (\eta_i + K_i) - b(u)^T \beta_i b(u)/2, \quad b_i(0) = 0. \quad (8)$$

Определим теперь функции доходности $Y(u, x)$ и $F(u, x)$ для моделей, исследовавшихся в [1], и проанализируем их свойства. Приведенные ниже численные результаты, иллюстрирующие поведение функций доходности, основаны на наборе параметров, найденных Д. Аном и Б. Гао [2], приспособившим модель Даффи – Кана для описания динамики процесса годовой ставки доходности одномесячных бумаг Казначейства США для периода наблюдения с января 1960 г. по февраль 1991 г.

1. Однофакторная модель Даффи – Кана

Модель Даффи – Кана использует процесс краткосрочной процентной ставки $r(t)$ в форме [1]

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sqrt{2kD \frac{r(t) - r_{\inf}}{\theta - r_{\inf}}} dW(t), \quad r(0) > r_{\inf}, \quad (9)$$

где параметры θ и D являются константами, но позже при расширении модели до двух- или трехфакторной они будут предполагаться диффузионными процессами $\theta(t)$ и $D(t)$.

Функции $Y(u, x)$ и $F(u, x)$ для этой модели находятся в аналитическом виде, а в качестве переменной состояния x здесь используется краткосрочная процентная ставка $r = r(t)$:

$$b(u) = \left(\frac{\varepsilon}{(1-u)^{-\varepsilon/\rho} - 1} + V \right)^{-1},$$

$$Y(u, r) = r_{\inf} + (\theta - r_{\inf}) \left(\frac{k}{V} + \varepsilon \frac{b(u)\zeta - k \ln(1 + vb(u))/vV}{\ln(1 + vb(u)) - \ln(1 - Vb(u))} \right),$$

$$F(u, r) = r + (\theta - r_{\inf}) [kb(u) - (V - v)\zeta b(u) - vV\zeta b(u)^2],$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{(k + \lambda\sigma)^2 + 2\sigma}, \quad v = \frac{(\varepsilon - k - \lambda\sigma)}{2}, \quad V = \frac{(\varepsilon + k + \lambda\sigma)}{2}, \quad \sigma = \frac{2kD}{\theta - r_{\inf}}, \quad \zeta = \frac{r - r_{\inf}}{\theta - r_{\inf}}.$$

Рыночная цена риска λ и нижняя граница процентной ставки $r_{\inf}$ являются фиксированными параметрами модели. На рис. 1 представлены примеры функций доходности $Y(u, r)$ и $F(u, r)$ для набора параметров Ана – Гао:

$$k = 0,1347; \theta = 0,0762; r_{\inf} = 0,03315 \text{ при } r = 0,05, \lambda = 0,1.$$

Рис. 1 иллюстрирует монотонное уменьшение доходности с ростом волатильности процесса краткосрочной процентной ставки. Причем интересно отметить, что для малых дисперсий форвардная доходность превышает ставку доходности до погашения для любых сроков τ . Однако с ростом дисперсии картина меняется и уже доходность до погашения доминирует над форвардной ставкой также для любых сроков до погашения. Критическое значение дисперсии, меняющее картину, находится из равенства $V\zeta = k$.

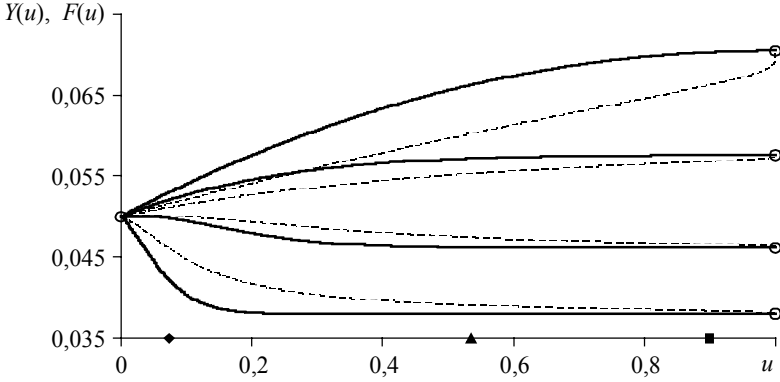


Рис. 1. Функции доходности $Y(u, r)$ (пунктирные линии) и $F(u, r)$ (сплошные линии) для различных значений дисперсии процентных ставок $r(t)$: $D = 0,0002$ (верхняя пара кривых); $0,002892$ (оценка Ана – Гао); $0,02$; $0,2$ (нижняя пара кривых). Маркеры горизонтальной оси обозначают реальную продолжительность срока до погашения: ромб – 1 год, треугольник – 10 лет, квадрат – 30 лет. Кругом отмечены предельные значения функций для $\tau = 0$ (слева) и $\tau = \infty$ (справа). Текущее состояние $r(t) = r = 0,05$

2. Двухфакторные модели

Для перехода к двухфакторной модели нужно выбрать дополнительную переменную состояния. Это можно сделать, предположив, что ею является либо параметр θ , либо параметр D . В первом случае θ рассматривается как стохастически изменяющееся локальное (по времени) среднее $\theta(t)$ процентной ставки, а во втором – D становится стохастическим процессом $D(t)$ ее локальной (по времени) дисперсии. Рассмотрим оба этих варианта. В первом случае уравнение (5) однофакторной модели преобразуется в пару уравнений

$$dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D_r \frac{r(t) - r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}}} dW_r(t), \quad r(0) > r_{\inf}, \quad (10)$$

$$d\theta(t) = k_\theta(\theta_0 - \theta(t))dt + \sqrt{2k_\theta D_\theta \frac{\theta(t) - r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}}} dW_\theta(t), \quad \theta(0) > r_{\inf}. \quad (11)$$

В этом случае вектор переменных состояния $X(t) = (r(t), \theta(t))^T$, а параметры системы, определяемые соотношениями (1), имеют представления

$$\mu(X(t)) = K(\theta - X(t)) = \begin{pmatrix} k_r & -k_r \\ 0 & k_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 - r(t) \\ \theta_0 - \theta(t) \end{pmatrix};$$

$$\sigma(X(t))\sigma(X(t))^T = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i(t) =$$

$$= - \begin{pmatrix} \frac{2k_r D_r r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}} & 0 \\ 0 & \frac{2k_\theta D_\theta r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2k_r D_r}{\theta_0 - r_{\inf}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} r(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2k_\theta D_\theta}{\theta_0 - r_{\inf}} \end{pmatrix} \theta(t);$$

$$\begin{aligned} \sigma(X(t))\lambda(X(t)) &= \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i X_i(t) = \\ &= - \left(\frac{2k_r D_r \lambda_r r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}} \right) + \begin{pmatrix} \frac{2k_r D_r \lambda_r}{\theta_0 - r_{\inf}} \\ 0 \end{pmatrix} r(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2k_\theta D_\theta \lambda_\theta}{\theta_0 - r_{\inf}} \end{pmatrix} \theta(t). \end{aligned}$$

Поэтому уравнения для определения функций $a(u)$ и $b(u)$ согласно (7), (8) принимают вид

$$\begin{aligned} \rho(1-u)a'(u) &= -\frac{2k_r D_r \lambda_r r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}} b_r(u) - \left(k_\theta \theta_0 + \frac{2k_\theta D_\theta \lambda_\theta r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}} \right) b_\theta(u) - \\ &\quad - \frac{k_r D_r r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}} b_r^2(u) - \frac{k_\theta D_\theta r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}} b_\theta^2(u), \quad a(0) = 0, \\ \rho(1-u)b_r'(u) &= 1 - \left(k_r + \frac{2k_r D_r \lambda_r}{\theta_0 - r_{\inf}} \right) b_r(u) - \frac{k_r D_r}{\theta_0 - r_{\inf}} b_r^2(u), \quad b_r(0) = 0, \\ \rho(1-u)b_\theta'(u) &= k_r b_r(u) - \left(k_\theta + \frac{2k_\theta D_\theta \lambda_\theta}{\theta_0 - r_{\inf}} \right) b_\theta(u) - \frac{k_\theta D_\theta r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}} b_\theta^2(u), \quad b_\theta(0) = 0. \end{aligned}$$

Уравнение для $b_r(u)$ может быть решено аналитически

$$b_r(u) = \left(\frac{\varepsilon_r}{(1-u)^{-\varepsilon_r/\rho} - 1} + V_r \right)^{-1},$$

где
$$\varepsilon_r = \sqrt{\left(k_r + \frac{2k_r D_r \lambda_r}{\theta_0 - r_{\inf}} \right)^2 + \frac{4k_r D_r}{\theta_0 - r_{\inf}}}, \quad V_r = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_r + k_r + \frac{2k_r D_r \lambda_r}{\theta_0 - r_{\inf}} \right).$$

Однако уравнение для $b_\theta(u)$ и, следовательно, для $a(u)$ можно решить только численно.

Функции доходности для текущего состояния ($r(t) = r$, $\theta(t) = \theta$) определяются по формулам (6).

Рассмотрим теперь второй вариант перехода к двухфакторной модели. Он соответствует применению двухфакторной модели Васичека – Фонга [3], в которой используется модель с квадратным корнем в форме Даффи – Кана. Примем, что в дополнение к краткосрочной ставке $r(t)$ состояние характеризует локальная по времени дисперсия $D(t)$: $X(t) = (r(t), D(t))^T$. Тогда случайный процесс динамики переменных состояния описывается уравнениями

$$dr(t) = k_r(\theta_0 - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)} dW_r(t); \quad (12)$$

$$dD(t) = k_D(D_r - D(t))dt + \sqrt{2k_D S \frac{D(t) - D_{\inf}}{D_r - D_{\inf}}} dW_D(t), \quad D(0) > D_{\inf}, \quad (13)$$

где D_r и S – стационарные среднее и дисперсия процесса $D(t)$ соответственно.

Поэтому соотношения (1) определяют структуру модели следующим образом:

$$\mu(X(t)) = K(\theta - X(t)) = \begin{pmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 - r(t) \\ D_r - D(t) \end{pmatrix};$$

$$\sigma(X(t))\sigma(X(t))^T = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i(t) = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\delta D_{\inf} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_r & 0 \\ 0 & 2\delta \end{pmatrix} D(t), \quad \delta \equiv \frac{k_D S}{D_r - D_{\inf}};$$

$$\sigma(X(t))\lambda(X(t)) = \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i X_i(t) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 2\delta \lambda_D D_{\inf} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_r \lambda_r \\ 2\delta \lambda_D \end{pmatrix} D(t).$$

Это позволяет написать уравнения (7) – (8) для функций $a(u)$ и $b(u)$ в следующем виде

$$\rho(1-u)a'(u) = -k_r \theta_0 b_r(u) - (k_D D_r + 2\delta \lambda_D D_{\inf}) b_D(u) - \delta D_{\inf} b_D^2(u), \quad a(0) = 0;$$

$$\rho(1-u)b_r'(u) = 1 - k_r b_r(u), \quad b_r(0) = 0;$$

$$\rho(1-u)b_D'(u) = -2\lambda_r k_r b_r(u) - (k_D + 2\delta \lambda_D) b_D(u) - k_r b_r^2(u) - \delta b_D^2(u), \quad b_D(0) = 0.$$

Как и в предыдущем случае, уравнение для $b_r(u)$ может быть решено аналитически

$$b_r(u) = \frac{1}{k_r} (1 - (1-u)^{k_r/\rho}),$$

но уравнения для $b_D(u)$ и соответственно для $a(u)$ решаются только численно. Функции доходности для текущего состояния $X(t) = (r(t) = r, D(t) = D)$ определяются по формулам (6).

Результаты вычислений функций доходности $Y(u)$ и $F(u)$ для моделей (9), (10), (11) и (12), (13) для сравнения представлены на рис. 2. Вычисления проводились для параметров, обеспечивающих для всех моделей одинаковые значения стационарного среднего θ_0 , стационарной дисперсии D_r и параметра быстрого действия k_r при следующих значениях переменных текущего состояния: $r = 0,05$; $\theta = 0,06$; $D = 0,005$.

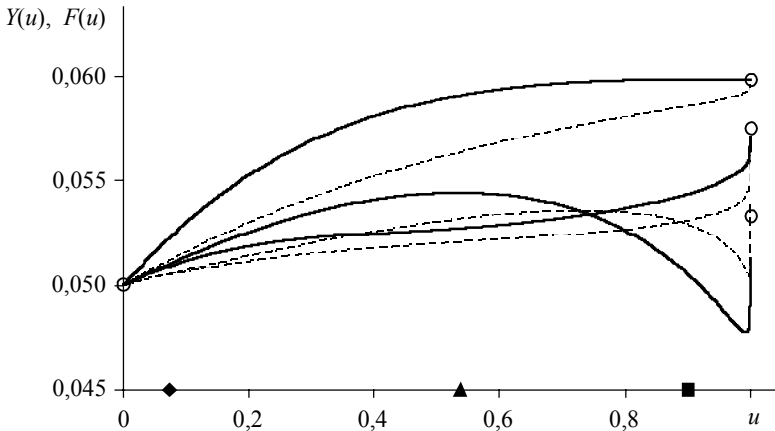


Рис. 2. Функции доходности $Y(u)$ (пунктирные линии) и $F(u)$ (сплошные линии) для различных моделей: модель (9) (верхняя пара кривых); модель (10), (11) (средняя пара кривых); модель (12), (13) (нижняя пара кривых). Маркеры горизонтальной оси обозначают реальную продолжительность срока до погашения: ромб – 1 год, треугольник – 10 лет, квадрат – 30 лет. Кругом отмечены предельные значения функций для $\tau = 0$ (слева) и $\tau = \infty$ (справа)

Из рис. 2 видно, что для выбранных параметров доходности, получающиеся из однофакторной модели, доминируют над доходностями, определяемыми двухфакторными моделями для всех сроков до погашения.

3. Трехфакторные модели

При переходе к трехфакторным моделям переменными состояния становятся краткосрочная ставка $r(t)$, ее локальное (по времени) среднее $\theta(t)$ и ее локальная (по времени) дисперсия $D(t)$, $X(t) = (r(t), \theta(t), D(t))^T$. Все эти компоненты состояния считаются диффузионными стохастическими процессами. Рассмотрим несколько возможных способов задания таких процессов. Первый может быть назван расширенной моделью Васичека – Фонга [3], второй использует модель Чена в интерпретации Дзя – Синглтона [4], а третий представляет так называемую модель BDFS [5].

В расширенной модели Васичека – Фонга стохастическая дисперсия $D(t)$ процесса краткосрочной ставки $r(t)$ порождается однофакторной моделью Даффи – Кана (в [3] использовалась модель Кокса – Ингерсолла – Росса), а стохастическое среднее ставки $r(t)$ – процессом с возвращением к среднему θ_0 со стохастической волатильностью, определяемой $D(t)$. Так что уравнения для переменных состояния $X(t) = (r(t), \theta(t), D(t))^T$ имеют вид

$$dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)} dW_r(t); \quad (14)$$

$$d\theta(t) = k_\theta(\theta_0 - \theta(t))dt + \sigma\sqrt{2k_\theta D(t)} dW_\theta(t); \quad (15)$$

$$dD(t) = k_D(D_r - D(t))dt + \sqrt{2k_D S \frac{D(t) - D_{\inf}}{D_r - D_{\inf}}} dW_D(t), \quad D(0) > D_{\inf} \geq 0. \quad (16)$$

Здесь $D_{\inf}$ – нижняя граница для процесса дисперсии $D(t)$ процентной ставки; D_r – стационарное среднее процесса дисперсии $D(t)$, а S – стационарная дисперсия процесса дисперсии $D(t)$. Для более компактной записи в дальнейшем изложении удобно ввести обозначение $\delta = k_D S / (D_r - D_{\inf})$.

Соотношения (1) имеют вид

$$\mu(X(t)) = K(\theta - X(t)) = \begin{pmatrix} k_r & -k_r & 0 \\ 0 & k_\theta & 0 \\ 0 & 0 & k_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 - r(t) \\ \theta_0 - \theta(t) \\ D_r - D(t) \end{pmatrix};$$

$$\sigma(X(t))\sigma(X(t))^T = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i(t) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\delta D_{\inf} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_r & 0 & 0 \\ 0 & 2k_\theta \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\delta \end{pmatrix} D(t);$$

$$\sigma(X(t))\lambda(X(t)) = \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i X_i(t) = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\delta \lambda_D D_{\inf} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_r \lambda_r \\ 2k_\theta \sigma^2 \lambda_\theta \\ 2\delta \lambda_D \end{pmatrix} D(t).$$

Это позволяет получить систему уравнений (7), (8) для функций $a(u)$ и $b(u)$:

$$\rho(1-u)a'(u) = -k_\theta \theta_0 b_\theta(u) - (k_D D_r + 2\delta \lambda_D D_{\inf}) b_D(u) - \delta D_{\inf} b_D^2(u), \quad a(0) = 0,$$

$$\rho(1-u)b_r'(u) = 1 - k_r b_r(u), \quad b_r(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \rho(1-u)b_\theta'(u) &= k_r b_r(u) - k_\theta b_\theta(u), \quad b_\theta(0) = 0. \\ \rho(1-u)b_D'(u) &= -2k_r \lambda_r b_r(u) - 2k_\theta \sigma^2 \lambda_\theta b_\theta(u) - (k_D + 2\delta \lambda_D) b_D(u) - \\ &\quad - k_r b_r^2(u) - k_\theta \sigma^2 b_\theta^2(u) - \delta b_D^2(u), \quad b_D(0) = 0. \end{aligned}$$

Уравнения для $b_r(u)$ и $b_\theta(u)$ могут быть решены аналитически

$$\begin{aligned} b_r(u) &= \frac{1 - (1-u)^{k_r/\rho}}{k_r}, \\ b_\theta(u) &= \frac{1}{k_\theta} + \frac{(1-u)^{k_r/\rho}}{k_r - k_\theta} - \frac{k_r(1-u)^{k_\theta/\rho}}{k_\theta(k_r - k_\theta)}, \end{aligned}$$

но уравнения для $b_D(u)$ и соответственно для $a(u)$ решаются только численно. Функции доходности $Y(u)$ и $F(u)$ для текущего состояния $X(t) = (r(t) = r, \theta(t) = \theta, D(t) = D)$ определяются по формулам (6).

В модели Чена переменные состояния удовлетворяют системе стохастических дифференциальных уравнений:

$$dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)} dW_r(t); \quad (17)$$

$$d\theta(t) = k_\theta(\theta_0 - \theta(t))dt + \sqrt{2k_\theta D_0 \frac{\theta(t) - \theta_{\inf}}{\theta_0 - \theta_{\inf}}} dW_\theta(t), \quad \theta(0) > \theta_{\inf} \geq 0; \quad (18)$$

$$dD(t) = k_D(D_r - D(t))dt + \sqrt{2k_D S \frac{D(t) - D_{\inf}}{D_r - D_{\inf}}} dW_D(t), \quad D(0) > D_{\inf} \geq 0. \quad (19)$$

Заметим, что в этой модели процессы $\theta(t)$ и $D(t)$ являются независимыми диффузионными процессами, описываемыми одномерными моделями Даффи – Кана. Для недостижимости нижних границ $\theta_{\inf}$ и $D_{\inf}$ процессов $\theta(t)$ и $D(t)$ необходимо выполнение известных условий Феллера $(\theta_0 - \theta_{\inf})^2 > D_\theta$ и $(D_r - D_{\inf})^2 > S$. Для компактности далее будем также использовать обозначения

$$\gamma = k_\theta D_\theta / (\theta_0 - \theta_{\inf}), \quad \delta = k_D S / (D_r - D_{\inf}).$$

Соотношения (1) имеют вид

$$\mu(X(t)) = K(\theta - X(t)) = \begin{pmatrix} k_r & -k_r & 0 \\ 0 & k_\theta & 0 \\ 0 & 0 & k_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 - r(t) \\ \theta_0 - \theta(t) \\ D_r - D(t) \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \sigma(X(t))\sigma(X(t))^T &= \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i(t) = \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma\theta_{\inf} & 0 \\ 0 & 0 & 2\delta D_{\inf} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \theta(t) + \begin{pmatrix} 2k_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\delta \end{pmatrix} D(t); \end{aligned}$$

$$\sigma(X(t))\lambda(X(t)) = \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i X_i(t) = - \begin{pmatrix} 0 \\ 2\gamma\lambda_\theta\theta_{\inf} \\ 2\delta\lambda_D D_{\inf} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\gamma\lambda_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \theta(t) + \begin{pmatrix} 2k_r\lambda_r \\ 0 \\ 2\delta\lambda_D \end{pmatrix} D(t).$$

С учетом этого система уравнений (7), (8) для функций $a(u)$ и $b(u)$ получается следующая:

$$\rho(1-u)a'(u) = -(k_\theta\theta_0 + 2\gamma\lambda_\theta\theta_{\inf})b_\theta(u) - (k_D D_r + 2\delta\lambda_D D_{\inf})b_D(u) - \gamma\theta_{\inf}b_\theta^2(u) - \delta D_{\inf}b_D^2(u), \quad a(0) = 0,$$

$$\rho(1-u)b_r'(u) = 1 - k_r b_r(u), \quad b_r(0) = 0,$$

$$\rho(1-u)b_\theta'(u) = k_r b_r(u) - (k_\theta + 2\gamma\lambda_\theta)b_\theta(u) - \gamma b_\theta^2(u), \quad b_\theta(0) = 0,$$

$$\rho(1-u)b_D'(u) = -2k_r\lambda_r b_r(u) - (k_D + 2\delta\lambda_D)b_D(u) - k_r b_r^2(u) - \delta b_D^2(u), \quad b_D(0) = 0.$$

К сожалению, из этих уравнений аналитически решается только уравнение для $b_r(u)$:

$$b_r(u) = [1 - (1-u)^{k_r/\rho}] / k_r,$$

остальные допускают только численное решение.

Для определения функций доходности $Y(u) = Y(u | r, \theta, D)$ и $F(u) = F(u | r, \theta, D)$ используются формулы (6).

В модели BDFS используются переменные состояния $X(t) = (r(t), \theta(t), D(t))^T$, удовлетворяющие системе уравнений

$$dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)} dW_r(t); \quad (20)$$

$$d\theta(t) = k_\theta(\theta_0 - \theta(t))dt + \sqrt{2k_\theta D_\theta} dW_\theta(t); \quad (21)$$

$$dD(t) = k_D(D_r - D(t))dt + \sqrt{2k_D S \frac{D(t) - D_{\inf}}{D_r - D_{\inf}}} dW_D(t), \quad D(0) > D_{\inf} \geq 0. \quad (22)$$

Фактически, эта модель является частным случаем модели Чена, когда $\theta_{\inf} \rightarrow -\infty$ (см. уравнение (18)). В этом случае $\gamma \rightarrow 0$, но $\gamma\theta_{\inf} \rightarrow -k_\theta D_\theta$, и мы имеем

$$\mu(X(t)) = K(\theta - X(t)) = \begin{pmatrix} k_r & -k_r & 0 \\ 0 & k_\theta & 0 \\ 0 & 0 & k_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 - r(t) \\ \theta_0 - \theta(t) \\ D_r - D(t) \end{pmatrix};$$

$$\sigma(X(t))\sigma(X(t))^T = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i(t) = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2k_\theta D_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2\delta D_{\inf} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\delta \end{pmatrix} D(t);$$

$$\sigma(X(t))\lambda(X(t)) = \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i X_i(t) = -\begin{pmatrix} 0 \\ -2k_\theta\lambda_\theta D_\theta \\ 2\delta\lambda_D D_{\inf} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_r\lambda_r \\ 0 \\ 2\delta\lambda_D \end{pmatrix} D(t).$$

Это позволяет получить уравнения для функций $a(u)$ и $b(u)$ в следующей форме:

$$\rho(1-u)a'(u) = -(\theta_0 - 2\lambda_\theta D_\theta)k_\theta b_\theta(u) - (k_D D_r + 2\delta\lambda_D D_{\inf})b_D(u) + k_\theta D_\theta b_\theta^2(u) - \delta D_{\inf} b_D^2(u), \quad a(0) = 0,$$

$$\rho(1-u)b_r'(u) = 1 - k_r b_r(u), \quad b_r(0) = 0,$$

$$\rho(1-u)b_\theta'(u) = k_r b_r(u) - k_\theta b_\theta(u), \quad b_\theta(0) = 0,$$

$$\rho(1-u)b_D'(u) = -2k_r\lambda_r b_r(u) - (k_D + 2\delta\lambda_D)b_D(u) - k_r b_r^2(u) - \delta b_D^2(u), \quad b_D(0) = 0.$$

Здесь аналитически решаются только уравнения для $b_r(u)$ и $b_\theta(u)$:

$$b_r(u) = \frac{1 - (1-u)^{k_r/\rho}}{k_r},$$

$$b_\theta(u) = \frac{1}{k_\theta} + \frac{(1-u)^{k_r/\rho}}{k_r - k_\theta} - \frac{k_r(1-u)^{k_\theta/\rho}}{k_\theta(k_r - k_\theta)},$$

а остальные уравнения приходится решать численными методами.

Результаты вычислений функций доходности $Y(u)$ и $F(u)$ для моделей (14) – (16), (17) – (19) и (20) – (22) представлены на рис. 3. Вычисления проводились для параметров, обеспечивающих для всех моделей одинаковые значения стационарного среднего и стационарной дисперсии при следующих текущих значениях переменных состояния: $r = 0,05$; $\theta = 0,06$; $D = 0,005$.

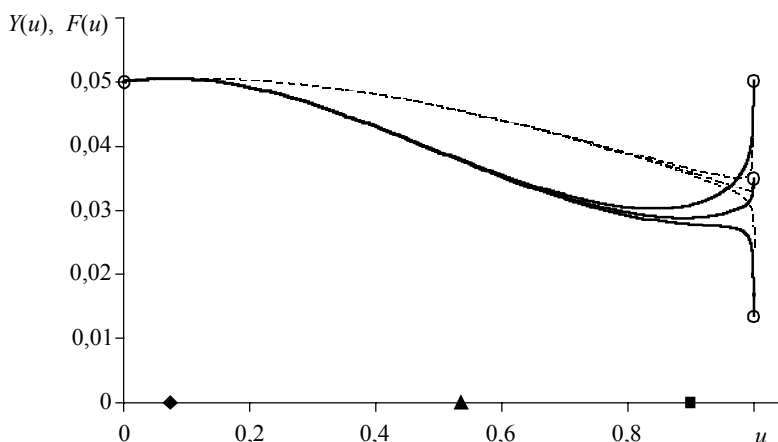


Рис. 3. Функции доходности $Y(u)$ (пунктирные линии) и $F(u)$ (сплошные линии) для трехфакторных моделей: модель (14) – (16) (верхняя пара кривых); модель (17) – (19) (средняя пара кривых); модель (20) – (22) (нижняя пара кривых). Маркеры горизонтальной оси обозначают реальную продолжительность срока до погашения: ромб – 1 год, треугольник – 10 лет, квадрат – 30 лет. Кругом отмечены предельные значения функций для $\tau = 0$ (слева) и $\tau = \infty$ (справа)

Из рис. 3 можно заключить, что для принятого набора параметров все три трехфакторные модели практически определяют доходность одинаково. Исключение составляет область продолжительных сроков до погашения (более 30 лет), в которой доходности существенно расходятся. При этом модель BDFS предусматривает резкий спад доходности для больших сроков до погашения. Это, видимо, объясняется тем, что в этой модели локальное среднее краткосрочной процентной ставки следует гауссовскому процессу, в принципе, допускающему наличие отрицательных значений процентной ставки, что может приводить к падению доходности. Для принятого набора параметров вероятность отрицательных значений $\theta(t)$ в рассматриваемом случае равна $3,7 \cdot 10^{-6}$. Сравнение рис. 2 и 3 позволяет заключить, что с увеличением размерности моделей определяемые ими ставки доходности уменьшаются.

Заключение

В статье предлагается рассматривать временную переменную, описывающую срок до погашения бескупонных облигаций, как результат не зависящего от параметров модели изменения процентной ставки нелинейного преобразования $u(\tau)$ временных сроков, позволяющего отображать временную ось на интервал единичной длины. Этот способ имеет преимущества перед применением в качестве меры времени дюрации $B(\tau)$ краткосрочной процентной ставки, поскольку при применении дюрации временная переменная зависит от параметров рассматриваемых моделей, что затрудняет сравнение доходностей для одних и тех же реальных сроков до погашения. Показано, что функции доходности $Y(u)$ и $F(u)$ обладают практически теми же свойствами, что кривая доходности до погашения $y(\tau)$ и форвардная кривая $f(\tau)$ соответственно, за исключением (в некоторых случаях) свойств, связанных со второй производной, так как они удобнее, поскольку позволяют визуально анализировать доходности на всей оси времени. Использование такого подхода проиллюстрировано при анализе свойств кривой доходности и форвардной кривой для одно-, двух- и трехфакторных моделей процентных ставок. Для этого сформулированы математические модели динамики переменных состояния для всех этих случаев (всего шесть различных моделей), выведены уравнения для функций временной структуры и при возможности найдены их аналитические решения. Поскольку большая часть уравнений может быть решена только численно, проведены численные расчеты для всех шести моделей и проведены сравнения функций доходностей, характеризующих их временную структуру. Расчеты проводились для набора параметров, основанных на оценках Д. Ана и Б. Гао [2], приспособивших однофакторную модель Даффи – Кана для описания динамики процесса годовой ставки доходности одномесечных бумаг Казначейства США для периода наблюдения с января 1960 г. по февраль 1991 г. Ими были получены следующие значения (в обозначениях настоящей статьи) $k_r = 0,1347$; $\theta_0 = 0,0762$; $D_r = 0,002892$; $r_{\inf} = 0,03315$. Остальные параметры моделей были приняты следующими: $k_\theta = 0,01347$; $D_\theta = 0,0002892$; $\theta_{\inf} = 0,03315$; $k_D = 0,01347$; $S = 1,882 \times 10^{-7}$; $D_{\inf} = 0,0001$; $\lambda_r = 0,1$; $\lambda_\theta = \lambda_D = 0,1$. Текущие значения параметров состояния во всех случаях выбирались следующими: $r = 0,05$; $\theta = 0,06$; $D = 0,005$. Параметр преобразования временных сроков во всех случаях был $\rho = 0,0767528$. В этом случае короткие сроки до погашения (менее 1 года) занимают 7,4 % интервала, средние сроки от 1 года до 10 лет – 46,2 % интервала, сроки от 10 лет до 30 лет – 36,4 % и сроки, превышающие 30 лет, занимают 10 %. С увеличением параметра ρ перераспределение интервала происходит в пользу более коротких сроков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Медведев Г. А.* О временной структуре доходности. 1–6 // Вестник ТГУ. УВТиИ. 2012. № 1(18). С. 102–111; № 2(19). С. 102–111; № 3(20). С. 71–80; № 4(21). С. 89–99; 2013. № 2(23). С. 64–74; № 3(24). С. 113–122.
2. *Ahn D.-H., Gao B.* A parametric nonlinear model of term structure dynamics // The Review of Financial Studies. 1999. V. 12. No. 4. P. 721–762.
3. *Fong H.G., Vasicek O.A.* Fixed-income volatility management // J. Portfolio Management. 1991. P. 41–56.
4. *Dai Q., Singleton K.* Specification analysis of affine term structure models // J. Finance. 2000. V. 55(5). P. 1943–1978.

5. BDFS: *Balduzzi P., Das S., Foresi S., Sundaram R.* A simple approach to three factor affine term structure models // *J. Fixed Income*. 1996. V. 6. P. 43–53.

Медведев Геннадий Алексеевич

Белорусский государственный университет

E-mail: MedvedevGA@cosmostv.by

Поступила в редакцию 19 августа 2013 г.

Medvedev Gennady A. (Belarusian State University). **On term structure of yield rates. 6. The new version.**

Keywords: yield interest rates, affine model, yield curve, forward curve, Duffie–Kan one-factor model, three factor model, Fong – Vasicek two-factor model, Chen three-factor model, BDFS three-factor model.

In paper it is proposed to consider a time variable that describes term to maturity of zero-coupon bonds as result of nonlinear transformation of the temporary terms that are independent on parameters of interest rate dynamics model, allowing to map the time numerical axis into an interval of unit length. This way has advantages before application as a measure of time of a duration of a short-term interest rate because at the duration application the time variable depends on parameters of considered models that complicates a comparison of yields for the same real terms to maturity. It is shown that resulting yield functions possess practically the same properties as a yield to maturity curve and a forward curve, except for (in certain cases) properties connected with the second derivative. At the same time they it is more convenient because allow to analyze visually the yields on all time axis. Use of such approach is illustrated in the analysis of properties of the yield curve and the forward curve for one-factor model of Duffie – Kan, Fong – Vasicek two-factor model and three-factor models of interest rates: Fong – Vasicek expanded model, Chen model and the BDFS model. In paper the mathematical models of dynamics of the state variables for all these cases (six various models) are formulated, the equations for functions of term structure are deduced and (when it is possible) their analytical solutions are found. As the main part of the equations can be solved only by calculations, numerical calculations for all six models are carried out and comparisons of yield functions characterizing their term structure are carried out. Calculations were carried out for a set of the parameters based on estimates, published by D. Ahn and B. Gao, fitting one-factor Duffie – Kan model for the description of dynamics of process of an annualized one-month U.S. Treasury bill rate for the supervision period from January, 1960 to February, 1991. Calculations showed that the increase of model dimension implies the decrease of yield rate.