

УДК 519.2

Е.В. Чимитова, М.А. Ведерникова, Н.С. Галанова**НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ
В ЗАДАЧАХ ПРОВЕРКИ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ
ПО ЦЕНЗУРИРОВАННЫМ ДАННЫМ**

В работе рассматриваются вопросы применения непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, Крамера – Мизеса – Смирнова и Андерсона – Дарлинга при проверке адекватности моделей пропорциональных интенсивностей Кокса и ускоренных испытаний на основе анализа выборок остатков. Предложен алгоритм корректного применения рассматриваемых непараметрических критериев в случае цензурированных данных, в том числе случайно цензурированных данных.

Ключевые слова: *непараметрические критерии, модифицированный критерий Колмогорова, Крамера – Мизеса – Смирнова, Андерсона – Дарлинга, модель пропорциональных интенсивностей Кокса, модель ускоренных испытаний, цензурированные данные.*

Задачи, связанные с исследованием надежности, анализом выживаемости, в которых оперируют данными типа времени жизни, рассматриваются во многих областях науки и техники, в медицине, биологии, в актуарных расчетах и т.п. В инженерных расчетах это могут быть времена отказов некоторых приборов или технических систем. В медицине такие данные могут представлять собой время до изменения некоторых биохимических показателей, время до ремиссии после определенного вида лечения или время жизни пациентов. Целью подобных исследований является установление взаимосвязи между значениями факторов (ковариат) и вероятностью наступления исследуемого события в течение некоторого периода времени. Наиболее популярными моделями в теории надежности являются модель ускоренных испытаний (AFT-модель) [1, 2] и модель пропорциональных интенсивностей Кокса [3]. Несмотря на рост числа серьезных публикаций, имеется множество подводных камней, связанных с построением таких моделей, с вычислением оценок параметров моделей по цензурированным данным в условиях, как правило, небольших объемов выборок, а главное, существуют проблемы с проверкой адекватности построенных моделей.

Основным подходом к проверке согласия с регрессионными моделями надежности является подход, основанный на анализе распределения так называемых остатков. Гипотезу о согласии остатков с предполагаемым законом распределения можно проверить с помощью непараметрических критериев согласия, таких как критерий Колмогорова, критерий Крамера – Мизеса – Смирнова и критерий Андерсона – Дарлинга. В случае полных данных без объясняющих переменных данные критерии подробно исследовались в работах Б.Ю. Лемешко [4–12]. В [4–7, 10] построены вероятностные модели, аппроксимирующие распределения статистик непараметрических критериев относительно широкого спектра законов распределения, с которыми проверяется согласие.

В теории надежности и анализе выживаемости полученные в ходе эксперимента данные, как правило, оказываются цензурированными, например, в связи с

ограниченностью эксперимента по времени. Задачи проверки простых гипотез о согласии по цензурированным I и II типа данным рассмотрены в работах [13, 14]. Распределения статистик и мощность критериев типа Колмогорова, Крамера – Мизеса – Смирнова и Андерсона – Дарлингa при проверке сложной гипотезы исследованы в работе [15]. Для случайно цензурированных данных в литературе обсуждается возможность модификации непараметрических критериев, основанной на использовании вместо эмпирического распределения непараметрической оценки Каплана – Мейера [16–20]. Однако определенных результатов относительно распределений статистик модифицированных критериев не получено. Основной сложностью является то, что распределение моментов цензурирования на практике, как правило, неизвестно. Кроме того, в случае регрессионных моделей распределение моментов цензурирования может зависеть от факторов, представленных в выборке. Единственный выход видится в применении методов компьютерного моделирования и анализа статистических закономерностей.

Таким образом, целью данной работы является разработка алгоритма корректного применения критериев типа Колмогорова, Крамера – Мизеса – Смирнова и Андерсона – Дарлингa по цензурированным данным для проверки адекватности AFT-модели и модели пропорциональных интенсивностей Кокса.

1. Модель пропорциональных интенсивностей Кокса и AFT-модель

Пусть T_x – неотрицательная случайная величина, определяющая системное событие (время работы до отказа объекта или время жизни пациента), которое зависит от вектора ковариат $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$.

Функция выживаемости (надежности) определяется соотношением

$$S_x(t) = P(T_x \geq t) = 1 - F_x(t),$$

а кумулятивная функция риска – выражением

$$\Lambda_x(t) = \int_0^t \lambda_x(u) du = -\ln(S_x(t)).$$

Главной особенностью данных типа времени жизни является наличие цензурированных справа наблюдений, которые можно представить в виде

$$(t_1, x^1, \delta_1), (t_2, x^2, \delta_2), \dots, (t_n, x^n, \delta_n),$$

где n – объем выборки, x^i – вектор ковариат i -го объекта, t_i – время жизни до наступления системного события или момента цензурирования, δ_i – индикатор цензурирования, который принимает значение 1, если наблюдение полное, и 0, если цензурированное.

Существует три основных типа цензурирования. Цензурирование *первого типа* возникает в ситуации, когда заранее фиксируется время наблюдения за объектами. При цензурировании *второго типа* наблюдение за объектами прекращается по наступлению заранее определенного количества системных событий. При цензурировании *третьего типа*, или *случайном* цензурировании, времена жизни T и моменты цензурирования C принадлежат законам распределения вероятностей $F(t)$ и $F^C(t)$ соответственно и являются независимыми. Наблюдение, соответствующее i -му объекту определяется следующим образом:

$$t_i = \min(T_i, C_i), \quad \delta_i = 1\{T_i \leq C_i\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Модель пропорциональных интенсивностей, предложенная Коксом [3], определяется следующим соотношением:

$$\Lambda_x(t; \beta) = r(x; \beta) \cdot \Lambda_0(t), \quad (1)$$

где β – вектор параметров регрессии, $r(x; \beta)$ – неотрицательная функция от ковариат, $\Lambda_0(t)$ – базовая кумулятивная функция риска. В данной работе будем рассматривать логарифмически линейную форму функции от ковариат вида $r(x; \beta) = \exp(\beta' \cdot x)$.

Если в (1) не вводится предположение относительно закона распределения времен жизни, модель называется *полупараметрической*. Если же вводится параметризация как для функции воздействий, так и для базовой кумулятивной функции риска $\Lambda_0(t; \theta)$, модель считается *параметрической*.

Оценки неизвестных параметров модели пропорциональных интенсивностей находятся методом максимального правдоподобия. В случае полупараметрической модели максимизируют логарифм функции частичного правдоподобия [3]:

$$\ln(\hat{L}(x; \beta)) = \sum_{i=1}^n \delta_i \left[\ln(r(x^i; \beta)) - \ln \left(\sum_{j: t_j \geq t_i} r(x^j; \beta) \right) \right].$$

В случае параметрической модели логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$\ln(L(x; \beta, \theta)) = \sum_{i=1}^n \left[\delta_i (\ln r(x^i; \beta) + \ln \lambda_0(t_i; \theta)) - r(x^i; \beta) \Lambda_0(t_i; \theta) \right].$$

Модель ускоренных испытаний (Accelerated Failure Time model) или AFT-модель надежности может быть задана следующим образом:

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_0 \left(\int_0^t \frac{ds}{r(x(s))} \right), \quad (2)$$

где $S_0(t) = 1 - F_0(t)$ – базовая функция надежности, $r(x; \beta)$ – неотрицательная функция от воздействий. В данной работе будем рассматривать логлинейную модель вида $r(x; \beta) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x)$.

В случае, когда мы обладаем некоторой априорной информацией о законе распределения отказов, то базовая функция $S_0(t)$ выбирается из некоторого параметрического семейства распределений, и в данном случае мы получаем *параметрическую* AFT-модель. Оценки параметров модели находят, максимизируя логарифм функции правдоподобия:

$$\ln L(x; \beta, \theta) = \sum_{i=1}^n (\delta_i \ln f_x(t_i) + (1 - \delta_i) S_x(t_i)).$$

Если информация о виде $S_0(t)$ неизвестна, то мы получаем полупараметрическую модель ускоренных испытаний. Оценки параметров данной модели получают, минимизируя функцию вклада

$$\tilde{U}(\beta) = \sum_{i=1}^n \delta_i \{x^i(t_i) - \bar{x}(f_i(t_i; \beta); \beta)\},$$

$$\text{где} \quad \bar{x}(u; \beta) = \sum_{j=1}^n x^j(g_j(u; \beta)) Y_j(g_j(u; \beta)) / \sum_{j=1}^n Y_j(g_j(u; \beta)),$$

$$f_i(t; \beta) = \int_0^t r^{-1}(x^j(u; \beta)) du, \quad Y_j(t) = 1\{t_i \geq t\},$$

а $g_j(u; \beta)$ – обратная к $f_j(u; \beta)$ функция по первому аргументу.

2. Проверка гипотезы о согласии по выборкам остатков

После вычисления оценок неизвестных параметров необходимо проверить адекватность полученной модели. Универсальным подходом к проверке адекватности регрессионных моделей является анализ распределения остатков.

Для модели пропорциональных интенсивностей Кокса рассчитывают остатки Кокса – Снелла вида [21]

$$z_i = \Lambda_0(t_i) \cdot r(x^i; \beta).$$

Если модель верна, остатки распределены по стандартному экспоненциальному закону. Таким образом, можно сформулировать сложную гипотезу о согласии $H_0 : z_i \succ \text{Exp}(0, 1)$.

Для параметрической модели ускоренных испытаний остатки имеют следующий вид:

$$z_i = t_i / r(x^i; \hat{\beta}).$$

Если данные хорошо описываются построенной моделью, остатки должны принадлежать базовому закону распределения отказов $F_0(t; \hat{\theta})$, стандартизованному по параметру масштаба (параметр масштаба равен 1), то есть проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0 : z_i \succ F_0(t; \hat{\theta}).$$

Для проверки данных гипотез о принадлежности выборки остатков предполагаемому закону распределения при наличии цензурированных наблюдений можно воспользоваться модифицированными критериями согласия типа Колмогорова, Крамера – Мизеса – Смирнова и Андерсона – Дарлингга, в которых вместо эмпирической функции распределения используется непараметрическая оценка Каплана – Мейера [22].

Статистика критерия согласия типа Колмогорова с поправкой Большева [23] имеет вид

$$S_K^C = (6nD_n + 1) / 6\sqrt{n},$$

где

$$D_n = \sup_{t \leq \tau} |\hat{F}_n(t) - F(t)|,$$

статистика критерия типа Крамера – Мизеса – Смирнова имеет вид

$$\omega_n^2 = \sqrt{n} \cdot \int_0^{\tau} (F(t) - \hat{F}_n(t))^2 dF(t),$$

статистика критерия типа Андерсона – Дарлинга определяется выражением

$$\Omega_n^2 = \sqrt{n} \cdot \int_0^\tau \frac{(F(t) - \hat{F}_n(t))^2}{F(t) \cdot (1 - F(t))} dF(t),$$

где $F(t)$ – функция распределения, соответствующая гипотезе H_0 : функция распределения стандартного экспоненциального закона для модели пропорциональных интенсивностей или базовая функция распределения $F_0(t; \hat{\theta})$ для AFT-модели, $\hat{F}_n(t)$ – оценка Каплана – Мейера, вычисленная по выборке остатков, τ – время последнего полного наблюдения.

Следует заметить, что проверяемая гипотеза является сложной, так как проверка гипотезы осуществляется по той же выборке, по которой были оценены параметры модели. В этом случае непараметрические критерии согласия даже в случае полных данных теряют свойство свободы от распределения [4], и распределения $G(S|H_0)$ статистик S непараметрических критериев согласия зависят от вида предполагаемого базового распределения $F_0(t; \theta)$, количества оцениваемых по выборке параметров, метода оценивания параметров и других факторов. Помимо этого, в случае цензурированных данных распределения статистик модифицированных непараметрических критериев зависят от типа, степени цензурирования [15] и распределения моментов цензурирования для случайно цензурированных выборок.

При проверке гипотез о согласии с регрессионными моделями надежности непараметрические критерии исследовались авторами настоящей работы в [24–26]. Показано, что в случае полных данных распределения статистик критериев согласия с моделями надежности согласуются с аппроксимациями, построенными для данных без ковариат. Заметим, что в случае цензурированных I и II типа выборок распределения статистик при проверке согласия с моделями надежности отличаются от распределений статистик при проверке согласия по цензурированным выборкам без ковариат. Это объясняется тем, что выборка остатков, по которой проверяется гипотеза о согласии при проверке адекватности регрессионной модели для цензурированных данных первого или второго типа, оказывается многократно цензурированной. Поэтому единственной возможностью обеспечить проверку соответствующей сложной гипотезы является моделирование распределений статистик критериев в условиях справедливости проверяемой гипотезы и определение достигнутого уровня значимости по смоделированному распределению статистики.

Алгоритм проверки гипотезы о согласии с регрессионными моделями надежности

1. Задается уровень значимости α .
2. Моделируются значения времен жизни $t_1, \dots, t_n$ в соответствии с проверяемой моделью $F_x(t; \hat{\beta}, \hat{\theta})$, где $\hat{\beta}$ и $\hat{\theta}$ – оценки максимального правдоподобия (ОМП) параметров, полученные по исходным данным.
3. Если исходная выборка была цензурированной, полная выборка $t_1, \dots, t_n$ преобразуется в цензурированную.

4. По полученной выборке оцениваются параметры модели β и θ , находится выборка остатков и вычисляются значения статистик критериев согласия S_n^* .

5. Пункты 1–3 повторяются N раз.

6. По эмпирическому распределению статистики критерия $G_N(S_n | H_0)$ оценивается достигнутый уровень значимости критерия $\alpha_n = 1 - G_N(S_n^* | H_0)$.

7. Гипотеза H_0 отвергается, если $\alpha_n \leq \alpha$.

Описанный алгоритм позволяет проверить адекватность вероятностных моделей надежности на основе моделирования эмпирического распределения статистики, по которому определяется достигнутый уровень значимости. Однако при моделировании распределений статистик сталкиваемся с необходимостью моделировать цензурированные выборки. В случае первого и второго типов цензурирования данная задача не представляет особых трудностей, так как данные схемы цензурирования являются достаточно простыми и воспроизводимыми, тогда как моделирование случайно цензурированных выборок может вызвать сложности, так как на практике закон распределения моментов цензурирования $F^C(t)$ обычно неизвестен. Кроме того, распределение выбытий (моментов цензурирования) может зависеть от факторов, при которых проводится испытание, и для достоверного моделирования необходимо учитывать это влияние. Подбирать некоторую параметрическую модель для моментов цензурирования не представляется разумным, поскольку эта задача вновь сопряжена с проблемой проверки адекватности по случайно цензурированной выборке. Поэтому в данной работе был разработан непараметрический способ моделирования случайно цензурированных данных на основе непараметрической оценки функции риска по цензурированным наблюдениям.

3. Алгоритм моделирования случайно цензурированных выборок

Предположим, что вид зависимости моментов цензурирования от ковариат соответствует регрессионной модели, с которой проверяется согласие. Так, при проверке адекватности модели пропорциональных интенсивностей для моделирования случайно цензурированных данных строим полупараметрическую модель Кокса по исходным данным, в которых цензурированные наблюдения рассматриваются как полные и наоборот. Таким образом, непараметрическая оценка базовой функции риска для моментов цензурирования имеет вид

$$\hat{\Lambda}_0^C(t) = \frac{\sum_{i: t_i \leq t}^n (1 - \delta_i)}{\sum_{j: t_j \geq t_i}^n r(x^j; \hat{\beta}^C)}, \quad (3)$$

где $\hat{\beta}^C$ – ОМП параметров, полученные по исходным данным, в которых цензурированные наблюдения рассматриваются как полные и наоборот.

При проверке согласия с AFT-моделью для моделирования цензурированных наблюдений будем строить полупараметрическую AFT-модель, и непараметрическая оценка функции риска для некоторого значения ковариаты x запишется как

$$\hat{\Lambda}_x^C(t) = \sum_{\substack{i: t_i \leq t \\ r(x^i; \hat{\beta}^C)}} (1 - \delta_i) \ln \left(1 - 1 / \sum_{j=1}^n 1 \left\{ t_j \geq t_i \cdot \frac{r(x^j; \hat{\beta}^C)}{r(x^i; \hat{\beta}^C)} \right\} \right). \quad (4)$$

Разработанный алгоритм моделирования случайно цензурированной выборки имеет следующий вид:

1. Моделируются значения $T_i = F_0^{-1} \left(\xi_i^{1/r(x^i; \hat{\beta})} \right)$ для модели Кокса и $T_i = F_0^{-1}(\xi_i) \cdot r(x^i; \hat{\beta})$ для AFT-модели, $\xi_i \succ \text{Uniform}(0,1)$, $i = 1, \dots, n$;
2. Моделируются значения $\Lambda_0^i = -\frac{\ln(\eta_i)}{r(x^i; \hat{\beta}^C)}$ для модели Кокса и $\Lambda_{x^i}^i = -\ln(\eta_i)$ для AFT-модели, $\eta_i \succ \text{Uniform}(0,1)$, $i = 1, \dots, n$;
3. Далее вычисляются значения C_i :
 - 3.1. Для модели Кокса: обозначим через $c_1 < c_2 < \dots < c_p$ значения моментов цензурирования в исходной выборке. Если $\hat{\Lambda}_0^C(c_k) \leq \Lambda_0^i < \hat{\Lambda}_0^C(c_{k+1})$, то $C_i = c_k + \frac{(c_{k+1} - c_k) \cdot (\Lambda_0^i - \hat{\Lambda}_0^C(c_k))}{(\hat{\Lambda}_0^C(c_{k+1}) - \hat{\Lambda}_0^C(c_k))}$, $k = 1, \dots, p-1$. Если $\Lambda_0^i < \hat{\Lambda}_0^C(c_1)$ или $\Lambda_0^i \geq \hat{\Lambda}_0^C(c_p)$, то $C_i = c_1 \cdot \Lambda_0^i / \hat{\Lambda}_0^C(c_1)$ или $C_i = c_p + c_p \cdot (\Lambda_0^i - \hat{\Lambda}_0^C(c_p))$ соответственно, $\hat{\Lambda}_0^C(c_k)$ вычисляются по формуле (3).
 - 3.2. Для AFT-модели: обозначим через $c_1 < c_2 < \dots < c_q$ значения наблюдений исходной выборки, такие, что $\hat{\Lambda}_{x^i}^C(c_{k+1}) - \hat{\Lambda}_{x^i}^C(c_k) \neq 0 \quad \forall k = 1, \dots, q-1$. Если $\hat{\Lambda}_{x^i}^C(c_k) \leq \Lambda_{x^i}^i < \hat{\Lambda}_{x^i}^C(c_{k+1})$, то $C_i = c_k + \frac{(c_{k+1} - c_k) \cdot (\Lambda_{x^i}^i - \hat{\Lambda}_{x^i}^C(c_k))}{(\hat{\Lambda}_{x^i}^C(c_{k+1}) - \hat{\Lambda}_{x^i}^C(c_k))}$. Если $\Lambda_{x^i}^i < \hat{\Lambda}_{x^i}^C(c_1)$ или $\Lambda_{x^i}^i \geq \hat{\Lambda}_{x^i}^C(c_q)$, то $C_i = c_1 \cdot \Lambda_{x^i}^i / \hat{\Lambda}_{x^i}^C(c_1)$ или $C_i = c_q + c_q \cdot (\Lambda_{x^i}^i - \hat{\Lambda}_{x^i}^C(c_q))$ соответственно, $\hat{\Lambda}_{x^i}^C(c_k)$ вычисляются по формуле (4).
4. $t_i = \min(T_i, C_i)$, $\delta_i = 1\{T_i \leq C_i\}$, $i = 1, \dots, n$.

Использование предложенного алгоритма моделирования случайно цензурированных выборок делает возможным применение вышеописанного алгоритма проверки адекватности регрессионных моделей по цензурированным данным. При проверке согласия по случайно цензурированной выборке замена пунктов 2 и 3 алгоритма проверки адекватности на алгоритм моделирования случайно цензурированных выборок приведет к получению корректного результата проверки гипотезы.

Заключение

В работе рассмотрены вопросы проверки адекватности регрессионных моделей ускоренных испытаний и моделей пропорциональных интенсивностей. Решение об адекватности построенной модели может быть принято по результатам проверки гипотезы о принадлежности выборки остатков предполагаемому закону распределения. Такая проверка может осуществляться с использованием непараметрических критериев согласия. В случае полных данных (при отсутствии цензурированных наблюдений) в качестве предельных распределений статистик модифицированных критериев Колмогорова, Крамера – Мизеса – Смирнова и Андерсона – Дарлинга можно использовать модели, построенные в [4–7, 10] для классических критериев в условиях проверки сложных гипотез.

Для случая цензурированных данных типа времени жизни в работе сформулирован интерактивный алгоритм проверки гипотезы о согласии с использованием методов статистического моделирования. Данный алгоритм не вызывает сложностей в случае наличия цензурированных наблюдений первого или второго типа в силу простоты реализации данных схем цензурирования. Для случая третьего типа цензурирования в работе предложен алгоритм непараметрического моделирования случайно цензурированной выборки, основанный на использовании полупараметрических моделей надежности для моментов цензурирования: полупараметрическая модель пропорциональных интенсивностей Кокса и полупараметрическая модель ускоренных испытаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bagdonavicius V., Nikulin M. Accelerated life models: modeling and statistical analysis // Boca Raton, Florida: Chapman & Hall/CRC. 2002. 334 p.
2. Meeker W.Q., Escobar L. Statistical Methods for Reliability Data. New York: John Wiley and Sons. – 1998.
3. Cox D.R., Roy J. Regression models and life tables (with Discussion) // J. Royal Statistical Society. 1972. Series B. V. 34. P. 187–220.
4. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н., Чимитова Е.В. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход: монография. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. 888 с.
5. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Никулин М.С., Сааидиа Н. Моделирование распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обратного гауссовского закона // Автоматика и телемеханика. 2010. № 7. С. 83–102.
6. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. I // Измерительная техника. 2009. № 6. С. 3–11.
7. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. II // Измерительная техника. 2009. № 8. С. 17–26.
8. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н. Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких альтернативах. II. Проверка сложных гипотез // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. 11. № 4(36). С. 78–93.
9. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н. Мощность критериев согласия при близких альтернативах // Измерительная техника. 2007. № 2. С. 22–27.
10. Лемешко Б.Ю., Маклаков А.А. Непараметрические критерии при проверке сложных гипотез о согласии с распределениями экспоненциального семейства // Автотестирование. 2004. № 3. С. 3–20.

11. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. О зависимости распределений статистик непараметрических критериев и их мощности от метода оценивания параметров // Заводская лаборатория. 2001. Т. 67. № 7. С. 62–71.
12. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез // Автометрия. 2001. № 2. С. 88–102.
13. Barr D.M., Davidson T. A Kolmogorov – Smirnov test for censored samples // Technometrics. 1973. V. 15. No. 4.
14. Koziol J.A., Green S.B. A Cramer – von Mises statistic for randomly censored data // Biometrika. 1976. V. 63. No. 3. P. 465–474.
15. Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В., Плешкова Т.А. Проверка простых и сложных гипотез о согласии по цензурированным выборкам // Научный вестник НГТУ. 2010. № 4(41). С. 13–28.
16. Kac M., Kiefer J., Wolfowitz J. On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods // Annals of Mathematical Statistics. 1955. V. 26. P. 189–211.
17. Hjort N.L. On Inference in Parametric Survival Data // International Statistical Review. 1992. V. 60. No. 3. P. 355–387.
18. Nair V. Plots and tests for goodness of fit with randomly censored data // Biometrika. 1981. V. 68. P. 99–103.
19. Reineke D., Crown J. Estimation of Hazard, Density and Survival Functions for Randomly Censored Data // J. Applied Statistics. 2004. V. 31. No. 10. P. 1211–1225.
20. Nikulin M., Lemesko B., Chimitova E., Tsivinskaya A. Nonparametric goodness-of-fit tests for censored data // Proc. of the 7th Int. Conf. «Mathematical Methods in Reliability: Theory. Methods. Applications». Beijing, China, 2011. P. 817–823.
21. Lawless J.F. Statistical Models and Methods for Lifetime Data. New Jersey: John Wiley and Sons, Inc., Hoboken. 2003. 630 p.
22. Kaplan E.L., Meier P. Nonparametric estimation from incomplete observations // J. American Statistical Association. 1958. V. 53. P. 457–481.
23. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М.: Наука. 1983. 416 с.
24. Chimitova E., Chuyanov E., Galanova N., Vedernikova M. Computer approach to the choice of parametric ALT-models // Proc. of the Third Int. Conf. «Accelerated Life Testing, Reliability-Based Analysis and Design». Clermont-Ferrand, 2010. P. 111–116.
25. Chimitova E., Galanova N. Application of the computer simulation technique for investigating problems of parametric AFT-model construction // Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis Int. Conf.: Proc. Chania, Crete, Greece, 2010. P. 177–185.
26. Чимитова Е.В., Ведерникова М.А. Проверка адекватности модели пропорциональных интенсивностей Кокса по случайно цензурированным выборкам // Сборник научных трудов НГТУ. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. № 4(62). С. 103–108.

Чимитова Екатерина Владимировна

Ведерникова Мария Александровна

Галанова Наталья Сергеевна

Новосибирский государственный технический университет

E-mail: ekaterina.chimitova@gmail.com

Поступила в редакцию 7 мая 2012 г.

Chimitova Ekaterina V., Vedernikova Mariya A., Galanova Natalia S. (Novosibirsk State Technical University). Nonparametric goodness-of-fit tests in testing adequacy of reliability models for right censored data.

Keywords: nonparametric goodness-of-fit tests, Kolmogorov, Cramer-von Mises-Smirnov and Anderson-Darling tests, Cox proportional hazards model, accelerated failure time model, right censored data

The problem of testing goodness-of-fit with the failure time model (AFT-model) model and the Cox proportional hazards model by censored samples is considered. Testing goodness-of-fit with considered models is carried out on the basis of the residual samples analysis. The hypothesis of goodness-of-fit with proposed distribution law is tested by using the nonparametric Kol-

mogorov, Cramer-von Mises-Smirnov and Anderson-Darling tests. It has been shown that in the case of complete data the test statistics distributions for testing goodness-of-fit with the reliability models coincide with approximations, obtained for data without covariates. In the case of type I or type II censored data the statistics distributions for testing goodness-of-fit with the reliability models differ from the statistics distributions for testing goodness-of-fit by censored data without covariates. Therefore, the only way to support testing goodness-of-fit of the corresponding composite hypothesis is the application of the developed algorithm of simulation of the test statistics distributions and then estimation of the significance level by the simulated distribution. The simulation of the statistics distributions for the type I or type II censoring schemes is not complicated, as these censoring schemes are reproducible. But the simulation of randomly censored samples may cause difficulties, because in practice the distribution law of the censoring times is usually unknown. In addition, the censoring time distribution may depend on the covariates and it is necessary to take into account this dependence. To do this, the nonparametric algorithm of simulation of the randomly censored samples by using the semiparametric proportional hazards or accelerated failure time models has been developed.