

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2022

№ 75

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Робаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaev (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shragер, Ernst R. Shragер.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Задорожная О.В., Кочетков В.К. Реализация теории Левнера – Куфарева в вопросе построения параметрического множества однолистных функций некоторого вида.....	5
Зюзьков В.М. Экспериментальная математика и её использование в теории чисел.....	23
Молчанова Е.А. Вариационное моделирование спектральной задачи.....	33
Паньженский В.И., Растрепина А.О. Левоинвариантная парасасакиева структура на группе Гейзенберга.....	38

МЕХАНИКА

Ахметов А.Ж., Смолин И.Ю. Компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния Тунгусской синеклизы и Якутско-Вилюйской крупной изверженной провинции.....	52
Биматов В.И., Куденцов В.Ю., Трушляков В.И. Методика экспериментального определения коэффициента силы лобового сопротивления неустойчивых в полете тел.....	67
Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в решении задач кручения трансверсально-изотропных тел вращения.....	73
Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э., Омонов А.Т. Прямая и обратная динамическая задача пороупругости.....	87
Исламов Д.Ф., Рамазанов А.Ш. Исследование неизотермической двумерной фильтрации в слоистом пласте.....	100
Порязов В.А., Крайнов Д.А., Блохина А.А. Горение заряда металлизированного смесового твердого топлива с плоским каналом в поле массовых сил.....	113
Рашковский С.А., Федорычев А.В., Милехин Ю.М. Сравнительный анализ горения частиц бора, карбида бора, нитрида бора и углерода в воздухе.....	122
Турубасев Р.Р., Шваб А.В. Моделирование аэродинамики газа и траектории движения частиц при взаимодействии двух встречных закрученных потоков.....	138
Юлдашев А., Пирматов Ш.Т. Алгоритмизация решения динамических краевых задач теории гибких пластин с учетом сдвига и инерции вращения.....	150
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	166

CONTENTS

MATHEMATICS

Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. Application of the Loewner–Kufarev theory to the construction of a parametric set of univalent functions of a certain form	5
Zyuz'kov V.M. Experimental mathematics and its use in number theory	23
Molchanova E.A. Variational simulation of the spectral problem	33
Pan'zhenskii V.I., Rastrepina A.O. Left-invariant para-Sasakian structure on the Heisenberg group	38

MECHANICS

Akhmetov A.Z., Smolin I.Yu. Computer modelling of the state of stress and strain of the Tunguska and Vilyui syneclises	52
Bimatov V.I., Kudentsov V.Yu., Trushlyakov V.I. Technique for the experimental determination of the force coefficient of the frontal co-resistance of unstable in flight bodies	67
Ivanychev D.A. Boundary state method in solving torsion problems for transversely isotropic bodies of revolution	73
Imomnazarov Kh.Kh., Kholmurodov A.E., Omonov A.T. Direct and inverse dynamic problems of poroelasticity	87
Islamov D.F., Ramazanov A.Sh. Investigation of nonisothermal two-dimensional filtration in multilayer reservoir	100
Poryazov V.A., Krainov D.A., Blokhina A.A. Combustion of the metallized composite solid chunk fuel charge with a flat channel in a mass force field	113
Rashkovskiy S.A., Fedorychev A.V., Milekhin Yu.M. Comparative analysis of combustion of particles of boron, boron carbide, boron nitride and carbon in air	122
Turubaev R.R., Shvab A.V. Simulation of gas aerodynamics and particle trajectories in the interaction of two opposing swirling flows	138
Yuldashev A., Pirmatov Sh.T. Algorithmization of the solution of dynamic boundary value problems of the theory of flexible plates taking into account shift and rotation inertia	150
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	166

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54
DOI 10.17223/19988621/75/1

MSC 35C15

О.В. Задорожная, В.К. Кочетков

**РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕОРИИ ЛЕВНЕРА – КУФАРЕВА
В ВОПРОСЕ ПОСТРОЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА
ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРОГО ВИДА**

Данная работа относится к теории дифференциальных уравнений Левнера – Куфарева, являющихся частью геометрической теории функций комплексного переменного. Рассматривается вопрос о реализации известного второго дифференциального уравнения Левнера – Куфарева в вопросе построения параметрического семейства однолистных в единичном круге функций $g(z,t)$ при каждом фиксированном неотрицательном значении параметра t , $t \geq 0$, обобщающих известные параметрические семейства. В статье также используются различные альтернативные подходы, дается их сравнительный анализ. Результаты исследования считаются как одна из форм достаточных условий однолистности регулярных в единичном круге функций.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, уравнение Левнера – Куфарева, однолистные функции, формула Базилеваича.

Дифференциальные уравнения Левнера – Куфарева имеют большой класс применимости [1–9], а именно, с их помощью решены многие проблемные задачи, ранее считавшиеся не поддающимися исследованию. Интегралы дифференциальных уравнений Левнера – Куфарева рассматриваются как достаточные условия однолистности функций. Уравнения Левнера – Куфарева считаются формой вариационных формул как эффективный метод исследований.

Большой вклад в развитие геометрической теории функций комплексного переменного, создание вариационно-параметрического метода исследования функционалов, рассмотрение случаев интегрируемости дифференциального уравнения Левнера – Куфарева внесли ученые ведущих научных центров Томска, Казани, Краснодара, Санкт-Петербурга, Саратова и др.

**Дифференциальное уравнение Левнера – Куфарева.
Формула Базилеваича**

Введем обозначения:

- C – множество регулярных в $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $p(z)$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}[p(z)] > 0$ в E ;
- P – множество функций $p(z)$ класса C , удовлетворяющих условию $p(0) = 1$;
- $C(T)$ – множество функций $p(z,t)$, принадлежащих классу C при каждом фиксированном $t \in T = \{t : t \geq 0\}$ и непрерывных по $t \in T$;

- \bar{S} – класс выпуклых в E функций $\varphi(z), \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1$, отображающих E на выпуклую область D_w ;
- S – класс регулярных и однолистных в E функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $f(0) = 0, f'(0) = 1$.

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f p(f, t), \quad |f| < 1, \quad t \in T$$

называется первым дифференциальным уравнением Левнера – Куфарева, а дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{zg'_z}{g'_t} = p(z, t), \quad p(z, t) \in C(T)$$

– вторым дифференциальным уравнением Левнера – Куфарева.

Рассматривая первое дифференциальное уравнение Левнера – Куфарева И.Е. Базилевич доказал, что функция

$$f(z) = \left(\frac{p_1(0)}{p_0(0)} \int_0^z p_0(z) \cdot z^{p_1(0)-1} e^{\int_0^z \frac{p_1(z)-p_1(0)}{z} dz} dz \right)^{\frac{1}{p_1(0)}} = z + a_1 z^2 + \dots$$

принадлежит классу S , где $f(z)$ – однозначная ветвь данного разложения, $p_0(z), p_1(z) \in C$.

Функции вида

$$\int \frac{p_0(z)}{z} v(z) dz, \quad v(z) = e^{\int \frac{p_1(z)}{z} dz}$$

назовем составляющими функциями формулы Базилевича, а функцию $p(z, t) \in C(T)$ – ядром уравнения Левнера – Куфарева.

Построение однопараметрического множества однолистных функций вида

$$g(z, t) = \left(\sum_{k=0}^n a_k(z) t^k \right)^\alpha, \quad t > 0, \quad (*)$$

сводится к построению ядра $p(z, t)$ класса $C(T)$ с учетом исходной позиции

$$\frac{zg'_z}{g'_t} = \frac{z \sum_{k=0}^n a'_k(z) t^k}{\sum_{k=1}^n k a_k(z) t^{k-1}} \equiv p(z, t).$$

Работа состоит из трех параграфов. Первый метод изложен в первом параграфе при рассмотрении $g(z, t)$ в (*) последовательно при $m = 1, 2, 3, n$. Кроме того, получено, что

- показатель α зависит от n ;
- функции $a_k(z), k = \overline{0, n}$ выражаются в терминах составляющих функций Базилевича.

Во втором параграфе вводится специальное множество функций вида

$$g(z) = \int_0^z h(z) e^{\int_0^z \frac{p(z)-1}{z} dz} dz ,$$

где $h(z) \in C, p(z) \in P$, и исследуются некоторые свойства:

- однолиственность;
- линейность.

Третий параграф посвящен изложению в обзорной форме некоторых альтернативных методов построения ядра в случае функций вида (*) при $n = 3$.

§ 1. Первый способ построения однопараметрического множества

однолистных функций вида $w = g(z, t) = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k t^k \right\}^\alpha$

1.1. Случай множества функций вида

$$w = g(z, t) = (a_0(z) + a_1(z)t)^\alpha$$

Относительно функции вида

$$w = g(z, t) = (a_0(z) + a_1(z)t)^\alpha \tag{1.1.1}$$

составим отношение

$$\frac{zg'_z}{g'_t} = \frac{za'_0}{a_1} + \frac{za'_1}{a_1} t \equiv p(z, t) . \tag{1.1.2}$$

Проблема сводится к построению функции $p(z, t)$ класса $C(T)$.

Полагая

$$\frac{za'_1}{a_1} = p_1(z) \in C , \tag{1.1.3}$$

$$\frac{za'_0}{a_1} = p_0(z) \in C , \tag{1.1.4}$$

выражение в (1.1.2) перепишем в виде

$$\frac{zg'_z}{g'_t} = p_0(z) + p_1(z)t \equiv p(z, t) \in C(T) ,$$

являющемся вторым дифференциальным уравнением Левнера – Куфарова.

Проинтегрируем (1.1.3):

$$a_1(z) = e^{\int \frac{p_1(z)}{z} dz}$$

или

$$a_1(z) = z^{p_1(0)} e^{\int \frac{p_1(z)-p_1(0)}{z} dz} . \tag{1.1.5}$$

Из (1.1.4), с учетом (1.1.5), имеем

$$a_0(z) = \int_0^z \frac{p_0(z)}{z} a_1(z) dz$$

$$\text{или} \quad a_0(z) = \int_0^z p_0(z) \cdot z^{p_1(0)-1} \cdot e^{\int_0^z \frac{p_1(z)-p_1(0)}{z} dz} dz. \quad (1.1.6)$$

Объединяя вышеизложенное, сформулируем утверждение.

Утверждение 1. Пусть

1) функции $p_0(z), p_1(z) \in C$;

2) функции $a_1(z), a_0(z)$ вычисляются по формулам (1.1.5), (1.1.6) соответственно.

Тогда однозначная ветвь функции $g(z, t)$

$$w = g(z, t) = (a_0(z) + a_1(z)t) \frac{1}{p_1(0)} = b_1(t)z + \dots \quad (1.1.7)$$

с фиксированным коэффициентом при z в первой степени в разложении $g(z, t)$ по степеням z регулярна и однолистка в E при каждом фиксированном $t \in T$.

Заметим, что функция

$$\Phi(z, t) = \frac{g(z, t)}{g'_z(0, t)} \in S, z \in E,$$

при каждом фиксированном $t \in T$, где $\Phi(z, 0) = f(z)$, является функцией И.Е. Базилевича, которая хорошо изучена в геометрической теории функций комплексного переменного и для которой указаны функциональные и геометрические свойства. Поэтому в данной статье ограничимся лишь указанием факта, что И.Е. Базилевич получил свой результат рассмотрением первого дифференциального уравнения Левнера – Куфарева. Фундаментальной же основой данной статьи является второе дифференциальное уравнение Левнера – Куфарева.

Укажем, с учетом (1.1.5), (1.1.6), развернутую запись выражения в (1.1.7)

$$w = g(z, t) = \left(\int_0^z p_0(z) \cdot z^{p_1(0)-1} \cdot e^{\int_0^z \frac{p_1(z)-p_1(0)}{z} dz} dz + tz^{p_1(0)} \cdot e^{\int_0^z \frac{p_1(z)-p_1(0)}{z} dz} \right) \frac{1}{p_1(0)}.$$

При $t = 0$ это выражение переписывается в виде

$$g(z, 0) = \left(\int_0^z p_0(z) \cdot z^{p_1(0)-1} \cdot e^{\int_0^z \frac{p_1(z)-p_1(0)}{z} dz} dz \right) \frac{1}{p_1(0)},$$

которое при $p_1(0) = 1$ примет вид

$$g(z, 0) = \int_0^z p_0(z) \cdot e^{\int_0^z \frac{p_1(z)-1}{z} dz} dz$$

$$\text{или} \quad g(z) = \int_0^z h(z) \cdot e^{\int_0^z \frac{p(z)-1}{z} dz} dz$$

при $p_0(z) = h(z), p_1(z) = p(z)$.

З а м е ч а н и е . При $t=0$ выражение в (1.1.7) совпадает с ненормированной формулой Базилевича, являющейся функцией в то время, как в (1.1.7) имеем семейство функций, что является некоторым обобщением.

1.2. Случай множества функций вида

$$w = g(z, t) = (a_0(z) + a_1(z)t + a_2t^2)^\alpha$$

Относительно функции вида

$$w = g(z, t) = (a_0(z) + a_1(z)t + a_2t^2)^\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2p_2(0)}, \quad (1.2.1)$$

составим отношение

$$\frac{zg'_z}{g'_t} = \frac{za'_0 + za'_1t + za'_2t^2}{a_1 + 2a_2t} \equiv p(z, t). \quad (1.2.2)$$

Проблема состоит в построении функции $p(z, t)$ класса $C(T)$.

Полагая

$$\frac{za'_2}{2a_2} = p_2(z) \in C \quad (1.2.3)$$

или

$$za'_2 = 2p_2(z)a_2, \quad (1.2.4)$$

интегрированием (1.2.3), (1.2.4) получим

$$a_2(z) = z^{2p_2(0)} \cdot e^{\int_0^z \frac{2p_2(z) - p_2(0)}{z} dz}. \quad (1.2.5)$$

Пусть

$$a_k(z) = \int_0^z \frac{p_k(z)}{z} a_2(z) dz, \quad k = 0, 1, p_k(z) \in C, \quad (1.2.6)$$

откуда имеем

$$za'_k = p_k a_2. \quad (1.2.7)$$

Используя (1.2.4), (1.2.7), преобразуем правую часть (1.2.2) к виду

$$p(z, t) = \frac{p_0 \cdot a_2 + p_1 \cdot a_2 t + 2p_2 \cdot a_2 t^2}{a_1 + 2a_2 t}. \quad (1.2.8)$$

Разделим на a_2 числитель и знаменатель в (1.2.8)

$$p(z, t) = \frac{p_0 + p_1 t + 2p_2 t^2}{\frac{a_1}{a_2} + 2t}.$$

Разделим теперь числитель на знаменатель последнего выражения

$$p(z, t) = p_2 t + \frac{\left(p_1 - \frac{a_1}{a_2} p_2\right) t + p_0}{2t + \frac{a_1}{a_2}}. \quad (1.2.9)$$

Приравнявая к нулю выражение в скобках в правой части данного выражения

$$p_1 - \frac{a_1}{a_2} p_2 = 0,$$

получим соотношение

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

подставив которое в (1.2.9), получим

$$p(z, t) = p_2 t + \frac{p_0}{2t + \frac{p_1}{p_2}} = p_2 t + \frac{1}{2 \frac{t}{p_0} + \frac{p_1}{p_0 p_2}}.$$

Это выражение при $p_0 = \frac{1}{p_2}$ примет вид

$$p(z, t) = p_2 t + \frac{1}{2p_2 t + p_1}.$$

Построенная функция $p(z, t)$ принадлежит классу $C(T)$ и, следовательно, уравнение (1.2.2) является вторым дифференциальным уравнением Левнера – Куфарева.

Объединяя вышеизложенное, сформулируем утверждение.

Утверждение 2. Пусть

- 1) функции $p_1(z), p_2(z) \in C, p_0 = \frac{1}{p_2}$;
- 2) функция a_2 определяется по формуле (1.2.5);
- 3) функции $a_1(z), a_0(z)$ вычисляются по формуле (1.2.6) с учетом того, что $p_0 = \frac{1}{p_2}$.

Тогда однозначная ветвь функции $g(z, t)$ в (1.2.1) при $\alpha = \frac{1}{2p_2(0)}$ с фиксированным коэффициентом при z в первой степени в разложении $g(z, t)$ по степеням z регулярна и однолистка в E при каждом фиксированном $t \in T$.

З а м е ч а н и е. При $\frac{p_1}{p_0 p_2} = h_0 \in C$ имеем также $p(z, t) \in C(T)$.

1.3. Случай множества функций вида

$$w = g(z, t) = (a_0(z) + a_1(z)t + a_2 t^2 + a_3 t^3)^\alpha$$

Построим биективные интегралы вида

$$w = g(z, t) = \left(\sum_{k=0}^2 a_k(z) t^k + a_3(z) t^3 \right)^\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{3p_3(0)}, \quad (1.3.1)$$

дифференциального уравнения

$$\frac{zg'_z}{g'_t} = \frac{z \sum_{k=0}^2 a'_k(z)t^k + za'_3(z)t^3}{\sum_{k=1}^2 ka_k(z)t^{k-1} + 3a_3(z)t^2} \equiv p(z,t). \quad (1.3.2)$$

Проблема сводится к построению функции $p(z,t)$ класса $C(T)$.

При

$$\frac{za'_3}{3a_3} = p_3(z) \in C \quad (1.3.3)$$

или при

$$za'_3 = 3p_3(z)a_3, \quad (1.3.4)$$

в результате интегрирования (1.3.4), имеем

$$a_3(z) = z^{3p_3(0)} e^{\int_0^z \frac{p_3(z)-p_3(0)}{z} dz}. \quad (1.3.5)$$

Пусть

$$a_k(z) = \int_0^z \frac{p_k(z)}{z} a_3(z) dz, \quad p_k \in C, \quad k = \overline{0,2}. \quad (1.3.6)$$

Откуда имеем

$$za'_k = p_k a_3. \quad (1.3.7)$$

Подставляя (1.3.4) и (1.3.7) в (1.3.2), с последующим делением на a_3 , выражение в правой части (1.3.2) приведем к виду

$$p(z,t) = \frac{\sum_{k=0}^2 p_k t^k + 3p_3 t^3}{\sum_{k=1}^2 k \frac{a_k}{a_3} t^{k-1} + 3t^2}. \quad (1.3.8)$$

Разделим числитель на знаменатель в (1.3.8)

$$p(z,t) = p_3 t + \frac{p_0 + \sum_{k=1}^2 \left(p_k - kp_3 \frac{a_k}{a_3} \right) t^k}{3t^2 + \sum_{k=1}^2 k \frac{a_k}{a_3} t^{k-1}}. \quad (1.3.9)$$

Приравнивая к нулю выражение в скобках, получим соотношения

$$k \frac{a_k}{a_3} = \frac{p_k}{p_3}, \quad k = 1, 2. \quad (1.3.10)$$

При условии (1.3.10), выражение в (1.3.9) примет вид

$$p(z,t) = p_3 t + \frac{p_0}{3t^2 + \frac{p_2}{p_3} t + \frac{p_1}{p_3}}$$

или вид

$$p(z, t) = p_3 t + \frac{p_0 \cdot p_3}{3p_3 t^2 + p_2 t + p_1},$$

а также вид

$$p(z, t) = p_3 t + \frac{1}{3p_3 t^2 + p_2 t + p_1}, \quad (1.3.11)$$

при $p_0 = \frac{1}{p_3}$.

Построенная функция $p(z, t)$ в (1.3.11) принадлежит классу $C(T)$.

Объединяя вышеизложенное, сформулируем утверждение.

Утверждение 3. Пусть

1) функции $p_1(z), p_2(z), p_3(z) \in C, p_0 = \frac{1}{p_3}$;

2) функция a_3 определяется по формуле (1.3.5);

3) функции a_0, a_1, a_2 определяются по формулам (1.3.6), с учетом того, что

$$p_0 = \frac{1}{p_3}.$$

Тогда однозначная ветвь функции $g(z, t)$ в (1.3.1) при $\alpha = \frac{1}{3p_3(0)}$ с фиксированным коэффициентом при z в первой степени в разложении $g(z, t)$ по степеням z , регулярна и однолистка в E при каждом фиксированном $t \in T$.

1.4. Случай множества функций вида

$$w = g(z, t) = \left(\sum_{k=0}^3 a_k(z) t^k + a_4(z) t^4 \right)^\alpha$$

Построим биективные интегралы вида

$$w = g(z, t) = \left(\sum_{k=0}^3 a_k(z) t^k + a_4(z) t^4 \right)^\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{4p_4(0)}, \quad z \in E, \quad (1.4.1)$$

дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{z g'_z}{g'_t} = \frac{z \sum_{k=0}^3 a'_k(z) t^k + z a'_4(z) t^4}{\sum_{k=1}^3 k a_k(z) t^{k-1} + 4 a_4(z) t^3} \equiv p(z, t). \quad (1.4.2)$$

Проблема сводится к построению функции $p(z, t)$ класса $C(T)$.

При

$$\frac{z a'_4}{4 a_4} = p_4(z) \in C \quad (1.4.3)$$

или при

$$za'_4 = 4p_4(z)a_4 \tag{1.4.4}$$

в результате интегрирования (1.4.4) имеем

$$a_4(z) = z^{4p_4(0)} e^{\int_0^z \frac{4p_4(z) - p_4(0)}{z} dz} . \tag{1.4.5}$$

Пусть

$$a_k(z) = \int_0^z \frac{p_k(z)}{z} a_4(z) dz, \quad p_k \in C, \quad k = \overline{0,3} . \tag{1.4.6}$$

Откуда

$$za'_k = p_k a_4, \quad k = \overline{0,3} . \tag{1.4.7}$$

Подстановкой (1.4.4), (1.4.7) в (1.4.2), с последующим делением на a_4 , выражение в правой части (1.4.2) приведем к виду

$$p(z,t) = \frac{\sum_{k=0}^3 p_k t^k + 4p_4 t^4}{\sum_{k=1}^3 k \frac{a_k}{a_4} t^{k-1} + 4t^3} . \tag{1.4.8}$$

Делением числителя на знаменатель в (1.4.8) получим

$$p(z,t) = p_4 t + \frac{p_0 + \sum_{k=1}^3 \left(p_k - kp_4 \frac{a_k}{a_4} \right) t^k}{4t^3 + \sum_{k=1}^3 k \frac{a_k}{a_4} t^{k-1}} . \tag{1.4.9}$$

Полагая равными нулю выражения в скобках в числителе (1.4.9), последующими арифметическими операциями находим соотношения

$$k \frac{a_k}{a_4} = \frac{p_k}{p_4}, \quad k = \overline{1,3} . \tag{1.4.10}$$

При условии (1.4.10), выражение в (1.4.9) преобразуем к виду

$$p(z,t) = p_4 t + \frac{p_0}{4t^3 + \frac{p_3}{p_4} t^2 + \frac{p_2}{p_4} t + \frac{p_1}{p_4}}$$

или к виду

$$p(z,t) = p_4 t + \frac{p_0 \cdot p_4}{4p_4 t^3 + p_3 t^2 + p_2 t + p_1}, \tag{1.4.11}$$

при $p_0 = \frac{1}{p_4}$.

Функция $p(z,t)$ в (1.4.11) принадлежит классу $C(T)$.

Объединяя вышеизложенное, сформулируем утверждение.

Утверждение 4. Пусть

1) функции $p_1(z), p_2(z), p_3(z), p_4(z) \in C, p_0 = \frac{1}{p_4}$;

2) функция a_4 определяется по формуле (1.4.5);

3) функции a_0, a_1, a_2, a_3 определяются по формулам (1.4.6) с учетом того, что $p_0 = \frac{1}{p_4}$.

Тогда однозначная ветвь функции $g(z, t)$ в (1.4.1) при $\alpha = \frac{1}{4p_4(0)}$ с фиксированным коэффициентом при z в первой степени в разложении $g(z, t)$ по степеням z регулярна и однолистка в E при каждом фиксированном $t \in T$.

1.5. Случай множества функций вида

$$w = g(z, t) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k(z)t^k + a_n(z)t^n \right)^{\frac{1}{np_n(0)}}$$

Построим биективные интегралы вида

$$w = g(z, t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z)t^k + a_n(z)t^n, \quad z \in E, \quad t \in T \quad (1.5.1)$$

дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{zg'_z}{g'_t} = \frac{z \sum_{k=0}^{n-1} a'_k(z)t^k + za'_n(z)t^n}{\sum_{k=1}^{n-1} ka_k(z)t^{k-1} + na_n(z)t^{n-1}} \equiv p(z, t). \quad (1.5.2)$$

Проблема сводится к построению функции $p(z, t)$ класса $C(T)$.

При

$$\frac{za'_n}{na_n} = p_n(z) \in C \quad (1.5.3)$$

или при

$$za'_n = np_n(z)a_n \quad (1.5.4)$$

в результате интегрирования (1.5.4) получаем

$$a_n(z) = z^{np_n(0)} \cdot e^{\int_0^z \frac{p_n(z) - p_n(0)}{z} dz}. \quad (1.5.5)$$

Пусть

$$a_k(z) = \int_0^z \frac{p_k(z)}{z} a_n(z) dz, \quad p_k \in C, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (1.5.6)$$

Откуда имеем

$$za'_k = p_k a_k, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (1.5.7)$$

Подстановкой (1.5.4), (1.5.7) в (1.5.2) с последующим делением на a_n выражение в правой части (1.5.2) приведем к виду

$$p(z, t) = \frac{np_n t^n + \sum_{k=0}^{n-1} p_k t^k + p_0}{nt^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{a_k}{a_n} t^{k-1}}. \quad (1.5.8)$$

Делением числителя на знаменатель в (1.5.8) получим

$$p(z, t) = p_n t + \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \left(p_k - k p_n \frac{a_k}{a_n} \right) t^k + p_0}{nt^n + \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{a_k}{a_n} t^{k-1}}. \quad (1.5.9)$$

Приравнявая к нулю выражения в скобках в числителе (1.5.9), с последующими арифметическими операциями, находим соотношения

$$k \frac{a_k}{a_n} = \frac{p_k}{p_n}, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (1.5.10)$$

При условии (1.5.10), выражение в (1.5.9) преобразуем к виду

$$p(z, t) = p_n t + \frac{p_0}{nt^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{p_k}{p_n} t^{k-1}}.$$

Откуда умножением на p_n числителя и знаменателя последнего выражения, полагая $p_0 = \frac{1}{p_n}$, будем иметь

$$p(z, t) = p_n t + \frac{1}{np_n t^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} p_k t^{k-1}}. \quad (1.5.11)$$

Функция $p(z, t)$ в (1.5.11) принадлежит классу $C(T)$.

Объединяя вышеизложенное, сформулируем общее утверждение.

Утверждение (общее). Пусть

1) функции $p_k(z) \in C, k = \overline{1, n} \in C, p_0 = \frac{1}{p_n}$;

2) функция a_n определяется по формуле (1.5.5);

3) функции $a_k, k = \overline{0, n-1}$ определяются по формулам (1.5.6) с учетом того,

что $p_0 = \frac{1}{p_n}$.

Тогда однозначная ветвь функции $g(z, t)$ в (1.5.1) при $\alpha = \frac{1}{np_n(0)}$ с фиксированным коэффициентом при z в первой степени в разложении $g(z, t)$ по степеням z , регулярна и однолистка в E при каждом фиксированном $t \in T$.

§ 2. Подмножество функций типа Базилевича с фиксированной выпуклой функцией и некоторые его свойства

Обозначим через:

B – ненормированное в E множество функций вида

$$g(z) = \int_0^z h(z) e^{\int_0^z \frac{p(z)-1}{z} dz} dz, \quad (2.2.1)$$

где $h(z) \in C, p(z) \in P$;

B_φ – множество функций $g(z) \in B$ с фиксированной производной

$$\varphi'(z) = e^{\int_0^z \frac{p(z)-1}{z} dz} \quad (2.2.2)$$

выпуклой функции

$$\varphi(z) = \int_0^z e^{\int_0^z \frac{p(z)-1}{z} dz} dz. \quad (2.2.3)$$

Заметим, что записанная как определенный интеграл функция $g(z)$ в (2.2.1) может быть представлена как неопределенный интеграл в виде

$$g(z) = \int \frac{h(z)}{z} e^{\int \frac{p(z)}{z} dz} dz. \quad (2.2.4)$$

Аналогично, в случае (2.2.2) имеем

$$\varphi'(z) = \frac{e^{\int \frac{p(z)}{z} dz}}{z}. \quad (2.2.5)$$

Запись в виде (2.2.4), (2.2.5) удобна при выкладках.

Приведем доказательство однолиственности функции $g(z)$ в (2.2.1), отличное от ранее известных вариантов.

Теорема 2.1. Пусть $h(z) \in C, p(z) \in P$. Тогда функция $g(z)$ вида (2.2.1) регулярна и однолистна в E .

Доказательство. Пусть $w = \varphi(z) : E \rightarrow D_w$ есть выпуклая функция вида (2.2.3), отображающая единичный круг $E = \{z : |z| < 1\}$ на выпуклую область D_w . Так как функция $w = \varphi(z)$ однолистна в E , то существует обратная функция $z = \varphi^{-1}(w) : D_w \rightarrow E$, которая определена и однолистна в выпуклой области D_w .

Пусть точкам $z_1, z_2 \in E, z_1 \neq z_2$ соответствуют точки $w_1 = \varphi(z_1) \in D_w, w_2 = \varphi(z_2) \in D_w, w_1 \neq w_2$.

Обратно, точкам $w_1, w_2 \in D_w, w_1 \neq w_2$ соответствуют точки $z_1 = \varphi^{-1}(w_1), z_2 = \varphi^{-1}(w_2), z_1 \neq z_2$ (в силу однолиственности).

С учетом (2.2.1), (2.2.2) рассмотрим разность при $z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in E$,

$$g(z_2) - g(z_1) = \int_{w_1}^{w_2} h(\varphi^{-1}(\varphi)) d\varphi. \quad (2.2.6)$$

В силу регулярности подынтегральных функций, интеграл в правой части (2.2.6) не зависит от пути интегрирования в D_w , а зависит только от конечных точек w_1, w_2 , соответствующих z_1, z_2 . В качестве пути интегрирования в D_w возьмем отрезок с концевыми точками w_1, w_2 :

$$w(t) = (1-t)w_1 + tw_2, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.2.7)$$

Заметим, что $w(0) = w_1, w(1) = w_2$ и

$$d\varphi = dw(t) = (w_2 - w_1)dt. \quad (2.2.8)$$

С учетом (2.2.7), (2.2.8) выражение в (2.2.6) переписывается в виде

$$g(z_2) - g(z_1) = (w_2 - w_1) \int_0^1 \tilde{h}(t) dt. \quad (2.2.9)$$

Так как по условию $h(z) \in C$, то $\operatorname{Re}[h(z)] > 0$ в E (по определению). В этом случае $\operatorname{Re}[\tilde{h}(z)] > 0$ и, следовательно, правая часть в (2.2.9) отлична от нуля. В силу этого, с учетом (2.2.9), имеем

$$g(z_2) - g(z_1) \neq 0, \quad g(z_2) \neq g(z_1),$$

при любых $z_1, z_2 \in E, z_1 \neq z_2$, а это означает, что функция $g(z)$ вида (2.2.2) однолистка в E . Теорема 2.1. доказана.

Линейность класса B_φ

Известно, что в общем случае класс однолистных функций не является линейным множеством, что является препятствием при решении некоторых экстремальных задач геометрической теории функций комплексного переменного, теории однолистных функций и конформных отображений. Поэтому указание и исследование линейных подклассов класса однолистных функций представляет научный интерес.

Теорема 2.2. Класс B_φ является линейным подмножеством.

Доказательство. Пусть $g_1(z), g_2(z) \in B_\varphi, c_1, c_2$ – произвольные неотрицательные числа.

Рассмотрим

$$c_1 g_1(z) + c_2 g_2(z) = c_1 \int_0^z p_1(z) d\varphi + c_2 \int_0^z p_2(z) d\varphi = \int_0^z (c_1 p_1(z) + c_2 p_2(z)) d\varphi. \quad (2.2.10)$$

Полагая

$$c_1 p_1(z) + c_2 p_2(z) = p(z), \quad (2.2.11)$$

имеем $p(z) \in C$. В этом случае, с учетом (2.2.11), правая часть в (2.2.10) принадлежит классу B_φ . Следовательно, левая часть тоже принадлежит классу B_φ , что означает линейность множества B_φ . Теорема 2.2 доказана.

Следствие 1. Сумма

$$g(z) = \sum_{k=0}^n c_k g_k(z), \quad c_k \geq 0, \quad z \in E,$$

функций $g_k(z) \in B_\varphi, k = \overline{0, n}$, является функцией класса B_φ .

Следствие 2. Сумма сходящегося в E ряда

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g_k(z), c_k \geq 0, k = \overline{0, \infty},$$

функций $g_k(z) \in B_{\varphi}, k = \overline{0, \infty}$, является функцией класса B_{φ} .

Следствие 3. Сумма

$$g(z, t) = \sum_{k=0}^n c_k g_k(z) t^k, 0 \leq t \leq t_0 < \infty, c_k > 0,$$

функций $g_k(z) \in B_{\varphi}, k = \overline{0, n}$, является функцией класса B_{φ} при каждом $t, 0 \leq t \leq t_0 < \infty$.

§ 3. Альтернативные методы построения однопараметрического множества

однолистных функций вида $w = g(z, t) = \left(\sum_{k=0}^3 a_k t^k \right)^{\alpha}$

Для функции вида

$$w = g(z, t) = \left(\sum_{k=0}^3 a_k t^k \right)^{\alpha} \quad (3.3.1)$$

составим соотношение

$$\frac{zg'_z}{g'_t} = \frac{\sum_{k=0}^3 za'_k t^k}{s} = p(z, t), \quad (3.3.2)$$

где

$$s = \sum_{k=1}^3 ka_k t^{k-1}. \quad (3.3.3)$$

Проблема состоит в построении функции $p(z, t)$ класса $C(T)$.

Полагая

$$\frac{za'_3}{3a_3} = p_3 \in C, \quad (3.3.4)$$

$$\frac{za'_2 - 2a_2 p_3}{3a_3} = p_2 \in C, \quad (3.3.5)$$

$$za'_1 - a_1 p_3 - 2a_2 p_2 = a, \quad (3.3.6)$$

$$za'_0 - a_1 p_2 = b, \quad (3.3.7)$$

делением числителя на знаменатель в (3.3.2) получим, с учетом (3.3.3), (3.3.6), (3.3.7),

$$p(z, t) = p_3 t + p_2 + \frac{at + b}{s}. \quad (3.3.8)$$

Очередная проблема состоит в построении функции

$$p_1(z, t) = \frac{at + b}{s} \tag{3.3.9}$$

класса $C(T)$ при $a \neq 0, b \neq 0$.

Рассмотрим сначала выражение в (3.3.8) при $a = 0, b = 0$.

При

$$a = za'_1 - a_1 p_3 - 2a_2 p_2 = 0 ; \tag{3.3.10}$$

$$b = za'_0 - a_1 p_2 = 0 \tag{3.3.11}$$

выражение в (3.3.8) переписывается в виде

$$\frac{zg'_z}{g'_t} = p_3 t + p_2 \in C(T). \tag{3.3.12}$$

В данном случае уравнение (3.3.2) в виде (3.3.12) является уравнением Левнера – Куфарова. Функции $a_3(z), a_2(z), a_1(z), a_0(z)$ в (3.3.1) определяются простейшим интегрированием выражений в (3.3.4), (3.3.5), (3.3.10), (3.3.11).

Пусть теперь выражения a и b отличны от нуля $a \neq 0, b \neq 0$.

Проблема построения функции класса $C(T)$ в случае функции $p_1(z, t) = \frac{at + b}{s}$

решаема и имеет несколько вариантов. В обзорной форме укажем один из них.

Преобразуем

$$p_1(z, t) = \frac{1}{\frac{s}{at + b}}. \tag{3.3.13}$$

Делением s на $at + b$ и введением новой функции $h_1 \in p$ построим выражение вида

$$\frac{s}{at + b} = h_1 t + \frac{\alpha t + \beta}{at + b}. \tag{3.3.14}$$

Делением $\alpha t + \beta$ на $at + b$, преобразованием и введением новых функций $h_2, h_3, h_4 \in p$ строим с учетом (3.3.14) выражение вида

$$\frac{s}{at + b} = h_1 t + h_2 + \frac{1}{h_3 t + h_4}. \tag{3.3.15}$$

Подставляя (3.3.15) в (3.3.13), получим

$$p_1(z, t) = \frac{1}{h_1 t + h_2 + \frac{1}{h_3 t + h_4}}. \tag{3.3.16}$$

Таким образом, выражение (3.3.8), с учетом (3.3.16), запишется как

$$p(z, t) = p_3 t + p_2 + \frac{1}{h_1 t + h_2 + \frac{1}{h_3 t + h_4}}.$$

З а м е ч а н и е . В дополнение к сказанному, заметим, что конструирование $p_1(z, t)$ в (3.3.9) можно рассмотреть в случае, когда $a = 0, b \neq 0$, получим

$$p_1(z, t) = \frac{b}{s},$$

а также в случае, когда $a \neq 0, b = 0$,

и также в виде
$$p_1(z, t) = \frac{at+b}{s} = \frac{k}{h_1t+h_2}, \quad k > 0,$$

где $h_1, h_2 \in P, a \neq 0, b \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А. Методы геометрической теории аналитических функций. Томск.: Томский государственный университет, 2001. 220 с.
2. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1976. – 344 с.
3. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: МЦНМО, 2009. 672 с.
4. Базилевич И.Е. Об одном случае интегрируемости в квадратурах уравнения Левнера – Куфарева // Матем. сб. – 1995. – Т. 37. – № 3. – С. 471–476.
5. Горяйнов В.В. Эволюционные семейства конформных отображений с неподвижными точками и уравнение Левнера – Куфарева // Матем. сб. 2015. Т. 206. № 1. С. 39–68.
6. Десятский С.П. О достаточных признаках интегрируемости в квадратурах дифференциального уравнения Левнера – Куфарева // Тезисы докладов VIII региональной научно-технической конференции, посвящ. 10-летию независимости Украины / ПГТУ. Мариуполь, 2001. Т. 2. С. 105. – URL: <http://eir.pstu.handle/123456789/32751>.
7. Задорожная О.В., Кочетков В.К. Структура интегралов второго дифференциального уравнения Левнера – Куфарева в частном случае // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С. 12–21. DOI: 10.17223/19988621/55/2.
8. Задорожная О.В., Кочетков В.К. Некоторые методы исследования интегрируемости обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка специального вида // Математика и математическое моделирование. 2019 – № 2. – С. 48–62. DOI: 10.24108/mathm.0219.0000177.
9. Задорожная О.В., Кочетков В.К. Альтернативные методы интегрируемости обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с полиномиальной частью // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2019. Т. 16. № 2. С. 6–14. DOI: 10.31429/vestnik-16-2-6-14.
10. Задорожная О.В., Кочетков В.К. Интегральное представление решений одного обыкновенного дифференциального уравнения и уравнения Левнера – Куфарева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 67. С. 28–39. DOI 10.17223/19988621/67/3.
11. Сорокин А.С. Распространение обобщённого уравнения Левнера на отображения, однолистные в конечноствязных областях // Вестник КузГТУ. 2014. № 1. С. 104–105.
12. Gutlyanskii V.Ya., Ryzanov V. On recent advances in boundary value problems in the plane // Укр. мат. вісник. 2016. Т. 13. № 2. С. 167–212.

Статья поступила 06.10.2021

Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2022) APPLICATION OF THE LOEWNER–KUFAREV THEORY TO THE CONSTRUCTION OF A PARAMETRIC SET OF UNIVALENT FUNCTIONS OF A CERTAIN FORM *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 5–22

DOI 10.17223/19988621/75/1

Keywords: differential equations, integral representations of solutions, one-leaf functions, conformal mappings.

This work relates to the theory of Loewner–Kufarev differential equations, which are a part of the geometric function theory. We apply the well-known second Loewner–Kufarev differential equation to construct a parametric family of univalent functions in the unit disk $g(z, t)$ for each fixed non-negative value of the parameter t generalizing the known parametric families. The article also uses various alternative approaches and provides their comparative analysis. The results of the study can be considered as one sufficient condition for the uniqueness of regular functions in a unit disk. Leading Russian scientists made a great contribution to the development of the geometric function theory based the variational-parametric method for studying functionals and found some Loewner–Kufarev differential equations.

There are three sections in the work. The first one applies the Loewner–Kufarev equation to construct a parametric set of univalent functions of a certain type. In the second section, we introduce a special class of regular functions in the unit disk with a fixed convex function, and prove the univalence property for functions of this class. Here we also show one more method for constructing a parametric family of univalent functions different from the methods described in the first paragraph. The third section is devoted to alternative methods for constructing one-parameter sets of univalent functions.

AMS Mathematical Subject Classification: 35C15

Olga V. ZADOROZHNAJA (Institute for the Development of Education of the Krasnodar Territory, Krasnodar, Russia). E-mail: ovz_70@mail.ru

Vladimir K. KOCHETKOV (Doctor of Physics and Mathematics, Kalmyk State University, Elista, Russia). E-mail: kvk1106@mail.ru

REFERENCES

1. Aleksandrov I.A. (2001) *Metody geometricheskoy teorii analiticheskikh funktsiy* [Methods of the geometric function theory]. Tomsk: Tomsk State University.
2. Aleksandrov I.A. (1976) *Parametricheskiye prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy* [Parametric continuations in the theory of univalent functions]. Moscow: Nauka.
3. Arnold V.I., Gusein-Zade S.M., Varchenko A.N. (1985) *Singularities of Differentiable Maps*. Springer.
4. Bazilevich I.E. (1955) Ob odnom sluchaye integriruyemosti v kvadraturakh uravneniya Lëvnera – Kufareva [On a case of integrability in quadratures of the Loewner–Kufarev equation] *Matematicheskii Sbornik*. 37(3). pp. 471–476.
5. Goryaynov V.V. (2015) Evolyutsionnyye semeystva konformnykh otobrazheniy s nepodvizhnymi tochkami i uravneniye Levnera–Kufareva [Evolutionary families of conformal maps with fixed points and the Loewner–Kufarev equation]. *Matematicheskii Sbornik*. 206(1). 39–68.
6. Desyatsky S.P. (2001) On sufficient criteria of integrability in quadratures of the Loewner–Kufarev differential equation. *Abstracts of the 8th Regional Scientific and Technical Conference Dedicated to the 10th Anniversary of Independence of Ukraine, vol. 2. Mariupol, 2001. Mariupol: Pryazovskyi State Technical University*, p. 105. Access mode: <http://eir.pstu/handle/123456789/32751>.

7. Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2018) Struktura integralov vtorogo differentsial'nogo uravneniya Lëvnera – Kufareva v chastnom sluchaye [The structure of integrals of the second Loewner–Kufarev differential equation in a particular case]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp. 12–21. DOI: 10.17223/19988621/55/2.
8. Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2019) Nekotoryye metody issledovaniya integriruyemosti obyknovennogo nelineynogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka spetsial'nogo vida [Some methods of studying integrability of an ordinary nonlinear second order differential equation of a special kind]. *Matematika i matematicheskoye modelirovaniye*. 2. pp. 48–62. DOI: 10.24108/mathm.0219.0000177.
9. Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2019) Al'ternativnyye metody integriruyemosti obyknovennogo nelineynogo differentsial'nogo uravneniya pervogo poryadka s polinomial'noy chast'yu [Alternative methods of integrability of an ordinary nonlinear differential equation of the first order with a polynomial part]. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 16(2). pp. 6–14. DOI: 10.31429/vestnik-16-2-6-14.
10. Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2020) Integral'noye predstavleniye resheniy odnogo obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya i uravneniya Levnera – Kufareva [Integral representation of solutions of an ordinary differential equation and the Loewner–Kufarev equation] *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 67. pp. 28–39. DOI: 10.17223/19988621/67/3.
11. Sorokin A.S. (2014) Rasprostraneniye obobshchënnogo uravneniya Lëvnera na otobrazheniya, odnolistnyye v konechnosvyaznykh oblastiakh [Extension of the generalized Loewner equation to univalent maps in finitely connected domains]. *Vestnik Kuzbasskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 1. pp. 104–105.
12. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V. (2017) On recent advances in boundary-value problems in the plane. *Journal of Mathematical Sciences*. 221(5). pp. 638–670.

Received: October 6, 2021

В.М. Зюзьков**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЁ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ**

Показаны полезность и особенности экспериментальной математики. Рассматриваются два исследования в теории чисел, сделанные с помощью Wolfram Mathematica. Первое, уже прежде опубликованное, содержало доказательства сравнений вида $F(A(p)) \equiv \varepsilon F(S) \pmod{p}$. Используются обозначения: $F(n)$ – n -е число Фибоначчи, p – простое число, ε равно ± 1 , $A(p)$ есть произвольный многочлен от p с целыми коэффициентами и S – более простое выражение, содержащее только коэффициенты многочлена $A(p)$ и не содержащее p . Второе исследование заканчивается новым результатом – теоремой о том, что асимптотическая плотность интервалов, кратных b , между соседними простыми числами равна $\frac{1}{2}$. Первое исследование упоминается с целью сравнить роли экспериментов для этих двух задач. В первом исследовании эксперименты были необходимы – они помогли, начиная с известных фактов, сформулировать цепочки достоверных догадок, доказать которые оказалось уже нетрудно. Во втором исследовании первоначально не было даже уверенности в том, что проделываемые вычисления могут к чему-то привести. И для доказательства теоремы о значении $\frac{1}{2}$ для предела проделанные эксперименты не нужны. Нужна только догадка о формулировке теоремы. Но эксперименты дополнительно привели к гипотезе о том, каким образом осуществляется предельный переход на протяжении первых 80 миллионов простых чисел.

Ключевые слова: *экспериментальная математика, числа Фибоначчи, интервалы между простыми числами, система Mathematica.*

Имеются два взгляда на природу математики. Большинство математиков (и физиков) являются сторонниками математического платонизма – математика есть высшее проявление объективной реальности, данностью существующей вне времени, места и, конечно же, вне нас самих.

Противоположной точкой зрения является конвенционализм: математика – плод человеческого воображения, исключительно продукт человеческого интеллекта, искусственная умственная конструкция, хотя и достаточно прочная, но такая же не вечная, как все конструкции, созданные нами, людьми.

Нужна ли математикам философия? Возможно, многие математики никогда и не думали об этом. Но философии математиков важны для понимания того, как математики понимают свою деятельность. Они философы по жизни. Философия каждого математика имеет смысл для индивида, но противоположные философии могут, однако, приводить к различию в том, как математики учат своему предмету. Платонисты начинают с абстрактных теорий (структуры у Бурбаки), конвенционалисты начинают с частных случаев.

Различие в философских взглядах проявляется и по-другому – в отношениях к математическим экспериментам, что является предметом настоящей статьи.

Платонический подход отчасти превращает нас в физиков. Для физика нет большого смысла в том, чтобы изучать предмет, просто создавая понятия путем чистого измышления. На самом-то деле предполагается, что физик описывает окружающий мир. Физики не считают делом чести доказывать то, что утверждают в своих исследовательских статьях. Они часто прибегают к другим способам рассуждения – от описания и аналогии до эксперимента и вычислений.

Если мы, математики, – платоники, описывающие мир, который «уже есть», то почему нам нельзя пользоваться теми же методами, которые применяют физики? Почему мы обречены доказывать?

На самом деле экспериментированием математики занимаются. Математические идеи хорошо путешествуют и переносят проверку временем потому, что записываются в виде доказательств. Но открытие математических фактов происходит совсем иначе. Практикующие математики делают открытия методом проб и ошибок: они работают над примерами, разговаривают с коллегами, выдвигают гипотезы, читают лекции, пытаются сформулировать результаты, меняют доказательства, выводят частичные результаты и ошибаются.

Своими достижениями прославились знаменитые математики-экспериментаторы: Пьер Ферма, Леонард Эйлер, Карл Гаусс, Бернхард Риман, Рамануджан Сриниваса.

Много математических открытий с помощью экспериментов было сделано и в XX веке. Эдвард Лоренц обнаружил в компьютерном эксперименте явление хаоса – аттрактор Лоренца (1962 г.). Универсальное поведение при итерации одномерных отображений, наиболее известным из которых является логистическое отображение $f: x \rightarrow \lambda x(1 - x)$, было открыто Митчеллом Фейгенбаумом в 1975 г. с помощью электронного калькулятора. Многие аспекты фракталов были найдены Бенуа Мандельбротом в 1970-х годах с использованием компьютерной графики. Понятия «фрактал» и «хаос» возникли на основании визуализации без предшествующего теоретического обоснования. Методы экспериментальной математики при изучении простых математических систем, таких как клеточные автоматы, простые программы, бесконечные последовательности и др., показывающие сложное поведение, описываются в книге Стивена Вольфрама [1].

Экспериментальная математика – это недавно структурированная область математики, которая использует компьютер и передовые вычислительные технологии в качестве инструментов для проведения экспериментов, таких как анализ примеров, проверка новых идей и поиск закономерностей. Разработка широкого спектра математических программных продуктов, таких как Mathematica [2] с языком программирования Wolfram, позволила математикам с разным опытом и интересами использовать компьютер в качестве важного инструмента в своей повседневной работе. Использование вычислений варьируется от стремления исключить участие человека в решении проблемы до традиционных математических вопросов, для которых вычисление является важным инструментом.

Современной экспериментальной математике свойственно изложение результатов, следуя Эйлеру. Эйлер в своих работах показывал все подробности, каким образом он приходил к формулировкам теорем, на каких предположениях он основывался, примеры смотрите в [3, глава VI]. Как и в экспериментальной науке, экспериментальная математика может быть использована для составления математических предсказаний, которые затем могут быть подтверждены или опровергнуты на основе дополнительных вычислительных экспериментов. Эти исследования должны завершаться доказательством.

Но математика больше чем доказательство. Много работ этому посвятил Дьердь Пойа [3, 4], показывая как важны в математике догадки и правдоподобные рассуждения. Имре Лакатос в своей работе [5] высказывает мнение, что никакой результат в математике не может быть окончательным и что эвристики не менее важны, чем само доказательство.

Из интервью, данного Юрием Маниным [6]: «Но теперь то, что умели Эйлер и Гаусс, может делать любой математик, сидя за своим письменным столом. И если у него не хватает воображения, чтобы различить какие-то контуры в этой платоновской реальности, он может поэкспериментировать. <...> Более того, появились люди с математическим, но компьютерно-ориентированным умом. Точнее сказать, это люди, которые были и раньше, но без компьютера им чего-то не хватало».

Современное состояние экспериментальной математике изложено в [7]. Примеры экспериментов в теории чисел, подтверждений и опровержений, смотрите в [8]. Остановимся на двух результатах автора.

1. Сравнения с числами Фибоначчи по простому модулю

Обозначим через $F(n)$ число Фибоначчи с номером n , где $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ и при $n > 1$ имеем равенство $F(n) = F(n - 1) + F(n - 2)$. Это равенство остается в силе, если числа Фибоначчи доопределяются для отрицательных номеров с помощью известного правила $F(-n) = (-1)^{n-1}F(n)$.

В работе [9] доказываются сравнения вида $F(A(p)) \equiv \varepsilon F(S) \pmod{p}$. Используются обозначения: $F(n)$ – число Фибоначчи с номером n , p – нечетное простое число, ε равно ± 1 , $A(p)$ есть произвольный многочлен от p с целыми коэффициентами и S – более простое выражение, содержащее только коэффициенты многочлена $A(p)$ и не содержащее p .

Теорема 1. Пусть для простого p выполнено $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$, $k > 0$ – натуральное число и целые числа $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ – коэффициенты многочлена $A(x)$. Тогда имеем

$$F(A(p)) \equiv F(a_k + a_{k-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0) \pmod{p}.$$

Теорема 2. Пусть для простого нечетного p выполнено $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$, $k > 0$ – натуральное число и целые числа $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ – коэффициенты многочлена $A(x)$. Тогда имеем

$$F(A(p)) \equiv (-1)^R F(S),$$

где

$$S = \sum_{i=1}^k (-1)^i a_i, \quad R = \sum_{i=1}^k i a_i.$$

Эти результаты первоначально были обнаружены при проведении экспериментов с помощью *Mathematica*. Промежуточные доказательства проводились с частными случаями многочленов, начиная с простейших многочленов вида $p + b$, потом переходя к видам $ap + b$, $ap^n + b$, $A(p)$. Для многочленов видов $ap + b$ и $ap^n + b$ проводилось несколько вычислений с небольшими числами a , b и p , приводящих к догадке, какой вид имеет правая часть искомого сравнения. Предположения проверялись программным путем для 200 первых простых чисел и для тысячи случайных значений пар a и b в диапазоне от -50 до 50 . При получении сразу для всех рассмотренных вариантов подтверждения предполагаемого вида сравнения проводилось строгое доказательство.

2. Экспериментальное исследование динамики интервалов между последовательными простыми числами

Постановка задачи. Сначала введем обозначения: p_n – n -е по порядку простое число, через $d_n = p_{n+1} - p_n$ обозначим интервал между соседними простыми числами. Имеем $d_1 = 3 - 2 = 1$ и d_n – четное число для всех $n > 1$. Известен легко доказываемый факт, что интервал между соседними простыми числами может быть как угодно велик. С другой стороны, неизвестно, бесконечно ли множество простых чисел p_n , для которых $d_n = 2$. Изучению интервалов между соседними простыми числами посвящено много работ [10]. На рис. 1 показано типичное поведение зависимости d_n от n .

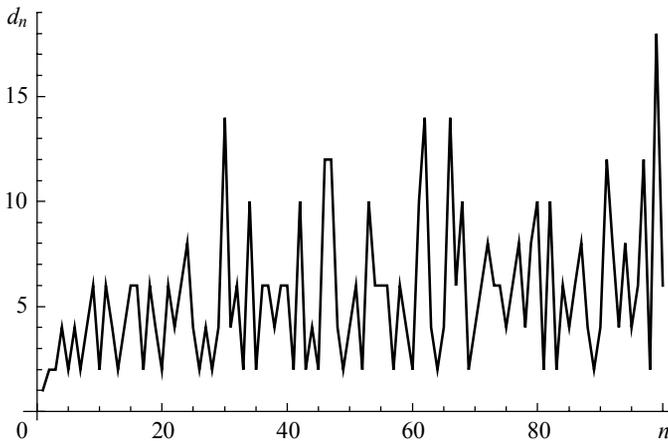


Рис. 1. Первые 100 интервалов между соседними простыми числами
Fig. 1. First 100 prime gaps

Положим $D(m)$ – список пар чисел $\{d, r(d)\}$, где d пробегает все различные значения d_n , а $r(d)$ – соответствующее количество повторений значения d , при $n + 1 \leq m$. Пары в $D(m)$ упорядочены в порядке возрастания d . Например, первые 11 простых чисел – $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$, соответствующие значения интервалов – $\{1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2\}$ и $D(10) = \{\{1, 1\}, \{2, 5\}, \{4, 3\}, \{6, 1\}\}$. На рис. 2 показан график зависимости частоты $r(d)$ появления значения d интервала среди первых 3000 простых чисел. Наибольшее значение $d = 52$, оно повторилось дважды.

На рис. 3 мы можем наблюдать случай для большего значения $m = 30000$. Причем, в этом случае показываем только часть графика для значений $d \leq 52$, хотя наибольшее значение интервала между соседними простыми числами от 2 до $p_{30000} = 350377$ есть 86 и $r(86) = 2$.

Оба графика на рис. 2 и 3 на одинаковом промежутке до $d = 52$ выглядят похожими. По-видимому, что-то сохраняется при увеличении m . Приступим к выяснению, что же является в каком-то смысле инвариантом. Графики выглядят изломанными, на них присутствуют пики. Вот и изучение распределения этих пиков привело к неожиданным результатам. Назовем *локальным максимумом* значение $d \neq 2$, для которого выполнено условие: в списке $D(m)$ имеется три соседних пары $\{d_1, r(d_1)\}, \{d, r(d)\}, \{d_2, r(d_2)\}$, где $r(d_1) < r(d)$ и $r(d) > r(d_2)$. Каждому локальному максимуму d соответствует пик, высота которого равна $r(d)$.

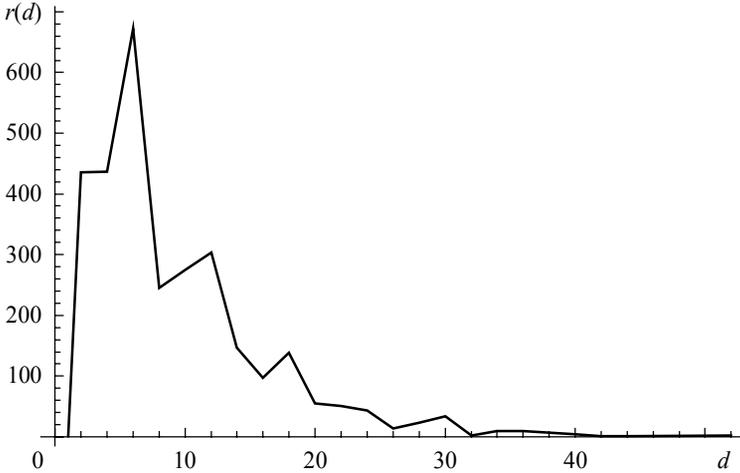


Рис. 2. Частота значений интервалов между простыми числами до $p_{3000} = 27449$
Fig. 2. Prime gaps frequency before $p_{3000} = 27449$

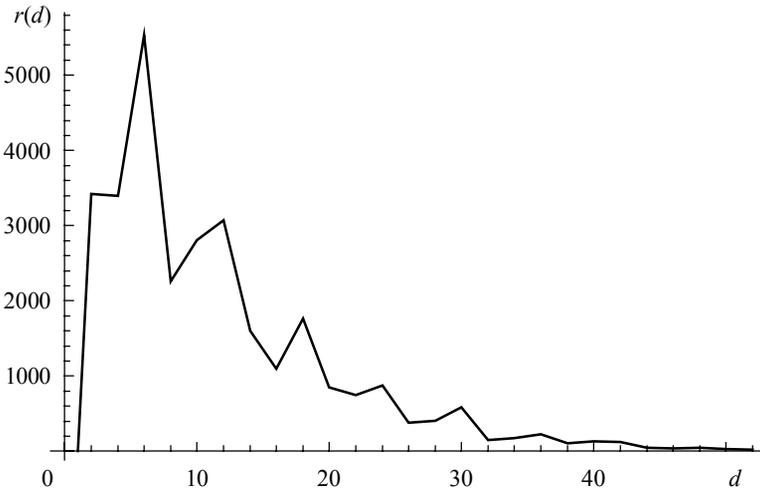


Рис. 3. Частота значений интервалов между простыми числами до $p_{30000} = 350377$
Fig. 3. Prime gaps frequency before $p_{30000} = 350377$

В списке $D(3000)$ присутствуют 23 различных значений d . Причем локальные максимумы с соответствующей частотой суть $\{6, 672\}$, $\{12, 303\}$, $\{18, 138\}$, $\{30, 34\}$, $\{36, 10\}$. Обратите внимание, что все значения локальных максимумов кратны 6. Также заметим, что $d = 24$ отсутствует в этом перечне.

В списке $D(30000)$ имеется 41 значение $\{d, r(d)\}$: $\{1,1\}$, $\{2,3423\}$, $\{4,3397\}$, $\{6,5536\}$, $\{8,2259\}$, $\{10,2810\}$, $\{12,3072\}$, $\{14,1604\}$, $\{16,1093\}$, $\{18,1760\}$, $\{20,847\}$, $\{22,750\}$, $\{24,874\}$, $\{26,376\}$, $\{28,405\}$, $\{30,582\}$, $\{32,150\}$, $\{34,178\}$, $\{36,223\}$, $\{38,107\}$, $\{40,135\}$, $\{42,125\}$, $\{44,41\}$, $\{46,38\}$, $\{48,46\}$, $\{50,25\}$, $\{52,18\}$, $\{54,39\}$, $\{56,9\}$, $\{58,14\}$, $\{60,26\}$, $\{62,6\}$, $\{64,3\}$, $\{66,10\}$, $\{68,3\}$, $\{70,7\}$, $\{72,1\}$, $\{76,2\}$, $\{78,2\}$, $\{82,1\}$, $\{86,2\}$. Локальными максимумы суть $\{6,5536\}$, $\{12,3072\}$, $\{18,1760\}$, $\{24,874\}$, $\{30,582\}$, $\{40,135\}$, $\{48,46\}$, $\{54,39\}$, $\{60,26\}$, $\{66,10\}$, $\{70,7\}$.

Из них значения d не кратные 6 – только 40 и 70, и все локальные максимумы кратные 6 из списка $D(3000)$ остались и добавились еще шесть максимумов, кратных 6.

Для наглядности на рис. 4 приведены сразу два графика с рис. 2 и 3. Поскольку масштабы по оси r на исходных графиках 2 и 3 сильно различаются, то значения частоты $r(d)$ с рис. 2 увеличено в 6 раз на рис. 4 (это нижняя ломаная).

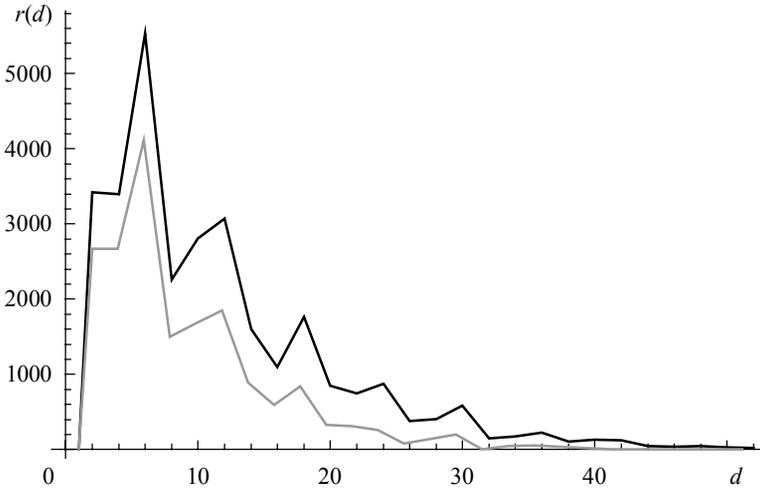


Рис. 4. Два графика с рис. 2 и рис. 3 вместе
Fig. 4. Two plots from Figs. 2 and 3 together

Теперь будем рассматривать, что получается с локальными максимумами при дальнейшем увеличении m . Вычисления осуществлялись в системе Wolfram Mathematica 12.1. Возьмем $m = 100\,000$. В данном случае список локальных максимумов следующий: $\{6, 16989\}$, $\{12, 10159\}$, $\{18, 6304\}$, $\{24, 3538\}$, $\{30, 2507\}$, $\{36, 1032\}$, $\{42, 661\}$, $\{48, 290\}$, $\{54, 197\}$, $\{60, 131\}$, $\{66, 65\}$, $\{70, 35\}$, $\{78, 21\}$, $\{84, 10\}$, $\{90, 7\}$, $\{96, 3\}$. В этом списке идут все числа кратные 6 из первой сотни, за исключением $d = 72$, вместо него присутствует 70. Дальнейшая проверка очевидного предположения продолжалась. Для больших значений m использовались параллельные вычисления. При $m = 80\,000\,000$ в качестве локальных максимумов присутствуют все числа кратные 6 от 6 до 246, включительно, и после этого еще идут два числа 250 и 260, не делящиеся на 6, а потом 270 и 282, которые делятся на 6. Получаем следующее предположение.

Гипотеза 1. По мере увеличения m все числа кратные 6, и только они, становятся локальными максимумами. Это означает следующее.

1) Если при каком-то m_1 число d из списка $D(m_1)$ является локальным максимумом и d делится на 6, то число d остается локальным максимумом в списке $D(m)$ и при всех $m > m_1$.

2) Если же d кратно 6 и не является локальным максимумом, то оно станет таковым в списке $D(m_2)$ при некотором $m_2 > m$.

3) Если d не кратно 6 и является локальным максимумом в списке $D(m)$ при некотором m , то, начиная с некоторого $m_1 > m$, d уже не будет локальным максимумом в $D(m_1)$.

Утверждение 1) теоретически можно опровергнуть с помощью вычислений. Утверждения 2) и 3) нельзя опровергнуть с помощью вычислений даже теоретически. Помогает ли гипотеза 1 высказать какую-нибудь догадку, более простую и более полезную, о динамике частоты интервалов между простыми числами?

Да, мы приходим к естественному предположению, что по мере роста рассматриваемых простых чисел все более часто между простыми числами встречаются интервалы кратные 6. Всего различных остатков от деления четных чисел на 6 может быть три: 0, 2, 4. Поэтому выскажем новую гипотезу в самой слабой форме.

Гипотеза 2. Начиная с некоторого n_0 и для любого $n > n_0$, доля количества интервалов, кратных 6, среди первых n простых чисел, составляет более $1/3$.

Были проведены вычисления отношения $k(n)/n$, где $k(n)$ – количество интервалов кратных 6 среди первых n простых чисел и n изменялось от 1 до 3 000 000. В указанном интервале гипотеза 2 подтвердилась. В качестве n_0 можно взять 2000. Доля интервалов кратных 6 среди первых трех миллионов интервалов составляет приблизительно 43.6%.

На графике (рис. 5) показаны значения $k(n)/n$ для всех простых чисел с номерами от 2000 до 3 000 000. Используемый алгоритм требовал много оперативной памяти компьютера, и также невозможно было применить параллельные вычисления. Поэтому дальнейшая проверка поведения $k(n)/n$ стала возможной только при изменении алгоритма.

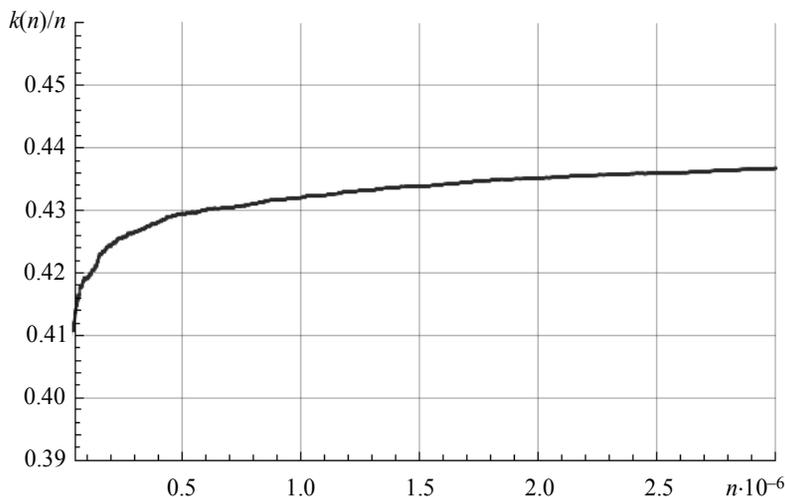


Рис. 5. Изменения отношения $k(n)/n$ при изменении n от 2 000 до 3 000 000

Fig. 5. Variation in the $k(n)/n$ ratio when n varies from 2,000 to 3,000,000

Были проделаны вычисления только для нескольких больших значений n . Точнее, вычислялись отношения $k(n)/n$ только для простых чисел с номерами 5 000 000, 10 000 000, 15 000 000, 20 000 000, 25 000 000, 30 000 000, 35 000 000, 40 000 000, 45 000 000, 50 000 000, 60 000 000, 70 000 000 и 80 000 000. Соответствующие значения $k(n)/n$, равные 0.438461, 0.440758, 0.441873, 0.442697, 0.443279, 0.443764, 0.444177, 0.444509, 0.444798, 0.445071, 0.445507, 0.445858 и 0.446166, представлены на рис. 6.

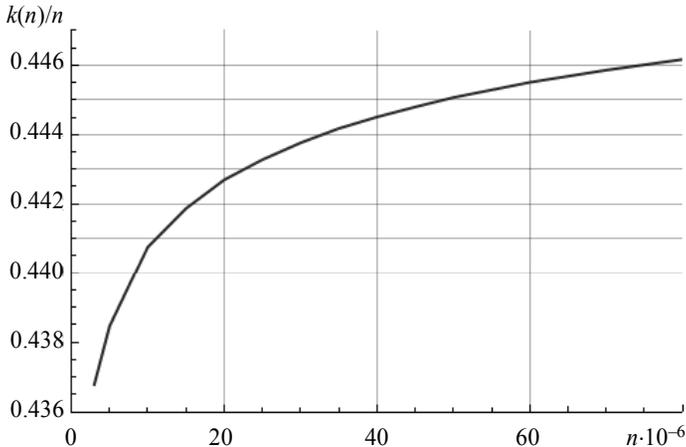


Рис. 6. Изменения отношения $k(n)/n$ при изменении n от 3 000 000 до 80 000 000
Fig. 6. Variation in the $k(n)/n$ ratio when n varies from 3,000,000 to 80,000,000

На рис. 5 и 6 видно, что значения $k(n)/n$ растут с замедлением при увеличении n . Доля интервалов кратных 6 среди первых 80 миллионов интервалов составляет приблизительно 44.6%. Это значительно больше числа $1/3$ – ожидаемого значения до проделанных экспериментов, если учесть что допускаются только четные остатки при делении на 6. Возможно, для больших значений n наблюдаемая тенденция в изменениях $k(n)/n$ сохраняется.

В действительности, справедливо следующее утверждение, более сильное, чем гипотеза 2.

Теорема 3. Среди всех интервалов между соседними простыми числами доля интервалов с длиной кратной 6 составляет половину в асимптотическом смысле.

Доказательство следует из теоремы Дирихле и её уточнения.

Теорема Дирихле [11, р. 16]. Пусть целые числа a и $d > 0$ взаимно просты. Тогда арифметическая прогрессия $\{a, a + d, a + 2d, \dots\}$ содержит бесконечно много простых чисел.

Теорема о простых числах в классах вычетов [12, с. 25]. Обозначим через $\pi(x; d, a)$ количество простых чисел данной прогрессии, не превосходящих x , тогда справедливы следующие соотношения:

$$\pi(x; d, a) \sim \frac{1}{\varphi(d)} \pi(x) \sim \frac{1}{\varphi(d)} \frac{x}{\ln x} \sim \frac{1}{\varphi(d)} \text{li}(x),$$

где φ обозначает функцию Эйлера и $\text{li}(x)$ – интегральный логарифм от x . Запись $f(x) \sim g(x)$ обозначает «асимптотическую эквивалентность функций f и g при x , стремящемся к бесконечности», и означает существование определенного предела

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1.$$

Доказательство асимптотических эквивалентностей см. в [13, с. 88].

Таким образом, предыдущая теорема говорит, что множества простых чисел $\{p \mid p \bmod 6 = 1\}$ и $\{p \mid p \bmod 6 = 5\}$ имеют одинаковую асимптотическую плотность. Очевидно, что $d_i \bmod 6 = 0$ равносильно тому, что $p_{i+1} \equiv p_i \pmod{6}$. Из равновероятности $p \bmod 6 = 1$ и $p \bmod 6 = 5$ следует, что для $(p_i \bmod 6, p_{i+1} \bmod 6)$ различные пары значений $(1, 1)$, $(5, 5)$, $(1, 5)$ и $(5, 1)$ равновероятны. Поэтому сре-

ди всех интервалов между соседними простыми числами доля интервалов с длиной кратной 6 составляет половину в асимптотическом смысле.

Сравним теперь роль экспериментов, проводимых при решении двух задач: первая – сравнения с числами Фибоначчи по простому модулю и вторая – исследование динамики интервалов между последовательными простыми числами. В первой задаче эксперименты были необходимы – они помогли, начиная с известных фактов, сформулировать цепочки достоверных догадок, доказать которые оказалось уже нетрудно с помощью математической индукции. Во втором исследовании первоначально не было даже уверенности в том, что проделываемые вычисления могут к чему-то привести. И для доказательства теоремы о значении $\frac{1}{2}$ для предела проделанные эксперименты не нужны. Нужна только догадка о формулировке теоремы. Но проделанные эксперименты имеют самостоятельную ценность. Они дополнительно показали, каким образом осуществляется предельный переход на протяжении первых 80 миллионов простых чисел. Об этом говорит гипотеза 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wolfram S.* A New Kind of Science. Wolfram Media, 2002. 1197 p.
2. *Wolfram Mathematica.* URL: <http://www.wolfram.com/mathematica>.
3. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975. 464 с.
4. *Пойа Д.* Математическое открытие: Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание: пер. с англ. 3-е изд. М.: КомКнига, 2010. 448 с.
5. *Лакатос И.* Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы. 2-е изд. М.: Изд-во ЛКИ, 2010. 152 с.
6. *Троицкий вариант.* № 13(839). 30 сентября 2008.
7. *Weisstein Eric W.* Experimental Mathematics // From MathWorld – A Wolfram Web Resource. URL: <https://mathworld.wolfram.com/ExperimentalMathematics.html>
8. *Зюзьков В.М.* Эксперименты в теории чисел. Томск: Изд-во НТЛ, 2019. 348 с. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000658998>.
9. *Зюзьков В.М.* Сравнения с числами Фибоначчи по простому модулю // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. С. 15–21. DOI: 10.17223/19988621/69/2.
10. *Weisstein Eric W.* Prime Gaps // From MathWorld – A Wolfram Web Resource. URL: <https://mathworld.wolfram.com/PrimeGaps.html>.
11. *Hardy G.H., Wright E.M.* An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford, England: Clarendon Press, 2008. 642 p.
12. *Крэндалл Р., Померанс К.* Простые числа. Криптографические и вычислительные аспекты. М.: УРСС; Книжный дом «Либроком», 2011. 664 с.
13. *Гельфанд А.О., Линник Ю.В.* Элементарные методы в аналитической теории чисел. М.: Физматгиз, 1962. 272 с.

Статья поступила 16.09.2021.

Zyuz'kov V.M. (2022) EXPERIMENTAL MATHEMATICS AND ITS USE IN NUMBER THEORY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 23–32

DOI 10.17223/19988621/75/2

Keywords: experimental mathematics, Fibonacci numbers, prime gaps, Mathematica system.

The purpose of the work is to show the usefulness and features of experimental mathematics. Two number theory problems are solved using Wolfram Mathematica. The solution to the first problem has already been published. Congruencies of the form $F(A(p)) \equiv \varepsilon F(S) \pmod{p}$ by prime

modulo p are proved, whenever $A(p)$ is a polynomial respect p with integer coefficients. Here, $F(n)$ is an n th Fibonacci number, ε is 1 or -1 , and S is a simple expression which contains only coefficients of the polynomial $A(p)$. The second problem examines the behavior of prime gaps. It is proved that if G is the set of all prime gaps whose length is a multiple of 6, the asymptotic density of G is $1/2$. The first study is mentioned to compare the role of experimentation for these two tasks. In the first study, experiments were necessary – they helped, starting with known facts, to formulate chains of reliable guesses which turned out to be easy to prove. In the second study, it was not certain that the calculations being done could lead to anything. It was possible to arrive at the formulation of a theorem on the value of $1/2$ for the limit without experimental calculations. Only a conjecture about the formulation of the theorem is required. However, the experiments additionally led to a hypothesis on how the passage to the limit is implemented for the first 80 million primes.

AMS Mathematical Subject Classification: MSC 11A41, 11A07, 11B39

Valentin M. ZYUZ'KOV (Senior Researcher, Associate Professor of chair of Computational Mathematics and Computer Modeling, Tomsk State University, Professor of chair of computer systems in control and design of the Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vmz@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Wolfram S. (2002) *A New Kind of Science*. Wolfram Media.
2. *Wolfram Mathematica*. Access mode: <http://www.wolfram.com/mathematica>.
3. Polya G. (1954) *Mathematics and Plausible Reasoning. Vol. 1. Induction and Analogy in Mathematics. Vol. 2. Patterns of Plausible Inference*. Princeton, N. J.: Princeton University Press.
4. Polya G. (1981) *Mathematical Discovery*. New York: Wiley.
5. Lakatos I. (1963–64) Proofs and Refutations. *British Journal for the Philosophy of Sciences*, 14, pp. 1–25, 120–139, 221–245, 296–342.
6. Access mode: <https://trv-science.ru/2008/09/you-i-manin-ne-my-vybiraem-matematiku-svoejj-professiejj-a-ona-nas-vybiraet/>.
7. Weisstein E.W. *Experimental Mathematics*. From MathWorld – A Wolfram Web Resource. Access mode: <https://mathworld.wolfram.com/ExperimentalMathematics.html>.
8. Zyuz'kov V.M. (2019) *Eksperimenty v teorii chisel* [Experiments in the number theory]. Tomsk: Izd-vo NTL. Access mode: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vts:000658998>.
9. Zyuz'kov V.M. (2021) Sravneniya s chislami Fibonachchi po prostomu modulyu [Congruencies of the Fibonacci numbers modulo a prime]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 69. pp. 15–21. DOI6 10.17223/19988621/69/2.
10. Weisstein E.W. *Prime Gaps*. From MathWorld – A Wolfram Web Resource. Access mode: <https://mathworld.wolfram.com/PrimeGaps.html>.
11. Hardy G.H., Wright E.M. (2008) *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford, England: Clarendon Press.
12. Crandall R., Pomerance C. (2005) *Prime numbers. A Computation perspective*. Springer Science.
13. Gelfand A.O., Linnik Yu.V. (1962) *Elementarnyye metody v analiticheskoy teorii chisel* [Elementary Methods in Analytical Number Theory] Moscow: Fizmatgiz.

Received: September 16, 2021

Е.А. Молчанова

ВАРИАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, являющееся нулевым приближением краевой задачи на собственное значение, решается вариационным методом с целью получения приближенных формул для собственных значений. Применяется вариационное уравнение Галеркина при разных вариантах граничных условий. Получены приближенные формулы для анализа многопараметрической задачи. Исследованы зависимости меньших собственных значений от других параметров задач.

Ключевые слова: моделирование, спектральная задача, вариационные методы, формальное асимптотическое разложение, собственные значения, собственные функции.

Целью работы является приближенное решение спектральной задачи.

Задачи, описываемые системами дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка, не имея точного решения, требуют применения методов приближенного анализа. Значительным упрощением исходного уравнения является близкое к нему уравнение более низкого порядка. Так, для уравнения с малым параметром μ при старшей производной, применяя асимптотический метод [1, 2], можно иметь решение, близкое к решению исходной задачи уже из задачи нулевого приближения, которое является частью формального асимптотического разложения

$$Hw = H_0 w_0 + \mu(H_0 w_1 + H_1 w_0) + \dots, \quad (1)$$

в котором

$$H_0 w_0 \equiv w_0^{IV} + 2q^2 f''(w_0)'' + q^4 (q^4 - \lambda_0 + f''^2) w_0. \quad (2)$$

Обыкновенное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка (2) является нулевым приближением задачи о колебании цилиндрических и близких к ним оболочек [3].

Исходная система имеет восьмой порядок и является системой дифференциальных уравнений в частных производных. Уравнение (2), являясь обыкновенным дифференциальным уравнением, имеет четвертый порядок и содержит несколько параметров. В частности, функция f определяет отклонение от прямолинейной образующей цилиндра, λ_0 – нулевое приближение параметра частоты, значение которого и является решением спектральной задачи. Как уравнение четвертого порядка уравнение (2) можно решать разными способами. При некотором соотношении параметров можно получить даже точные решения, которые, впрочем, могут иметь громоздкие выражения.

Имея ввиду получение явной формулы для собственных значений λ_0 , перейдем от задачи дифференциальной (2) к задаче вариационной. Однако соответствующих формул для функционала и его вариации в явном виде выписывать не будем, предполагая использование вариационного уравнения Галеркина [4–7].

В соответствии с этим умножим обе части (2) на функцию $w_0(x)$ и проинтегрируем по $x \in [0, l]$. Получим уравнение, выражающее вариационный принцип возможных перемещений

$$\int_0^l w_0 H_0 w_0 dx = 0. \quad (3)$$

Применяя в (3) к вычислению интеграла способ интегрирования по частям и решая полученное выражение относительно искомого параметра λ_0 , получим

$$\lambda_0 = q^4 + \frac{(w_0^{IV} w_0 - w_0' w_0'') \Big|_0^l + \int_0^l w_0''^2 dx}{q^4 \int_0^l w_0^2 dx} +$$

$$+ \frac{\int_0^l (f'' w_0)'' w_0 dx - \int_0^l w_0'^2 dx + w_0 w_0' \Big|_0^l}{q^2 \int_0^l w_0^2 dx} + \frac{\int_0^l f''^2 w_0 dx}{\int_0^l w_0^2 dx}. \quad (4)$$

Для завершения вывода формул надо подставить в (4) функции $w_0(x)$ и $f(x)$. Функция $f(x)$ задается, а функция $w_0(x)$, являясь нулевым приближением исходной задачи, выбирается в известном смысле произвольно, но в соответствии с вариационным уравнением Галеркина обязательно должна удовлетворять граничным условиям. Для простоты далее считаем функцию $f(x)$ квадратичной, тогда вторая производная $f''(x) = \text{const}$.

Зададим, например, граничные условия

$$w_0(0) = w_0(l) = 0, \quad w_0'(0) = w_0'(l) = 0. \quad (5)$$

Выберем функцию $w_0(x) = \sin^2 n(\pi/l)x$, удовлетворяющую граничным условиям. Подставим $w_0(x)$ в выражение (4) и после вычисления входящих в него интегралов получим

$$\lambda_0 = q^4 + [(16/3)(n\pi/ql)^4 - (8/3)(f''/q^2(n\pi/l)^2 + f''^2)]. \quad (6)$$

Полученная формула является приближенной, так как выбранная функция $w_0(x)$, точно удовлетворяя граничным условиям, дифференциальному уравнению (2) удовлетворяет приближенно.

Аналогично для граничных условий $w_0(0) = w_0(l) = 0, w_0'(0) = w_0'(l) = 0$ при помощи функции получим $w_0(x) = \sin(\pi n/l)x + \sin(\pi n/2l)x$

$$\lambda_0 = q^4 + [(41/16)(\pi n/ql)^4 - (5/2)f''(\pi n/ql)^2 + f''^2]. \quad (7)$$

Для граничных условий $w_0(0) = w_0''(0) = w_0(l) = w_0''(l) = 0$, используя функцию $w_0(x) = \sin(\pi n/l)x$, получим

$$\lambda_0 = q^4 + [(\pi n/ql)^2 - f''^2]. \quad (8)$$

В отличие от предыдущих граничных условий принятая здесь собственная функция $w_0(0)$ точно удовлетворяет и граничным условиям, и дифференциальному уравнению (1). Если в полученных формулах положить $f'' = 0$, то будем иметь частотные параметры чисто цилиндрических оболочек. Формулы (6) – (8) удобны для анализа зависимости основного параметра λ_0 от параметра кривизны f'' и параметра волнообразования q . Дифференцируя (8) по f'' , получаем равенство $\partial\lambda_0/\partial f'' = 2[(\pi n/ql)^2 - f'']^2$, из которого определяются значения параметра $f'' = (\pi n/ql)^2$, такие, которые доставляют минимум λ_0 , а уравнение (2) приводится к известному балочному уравнению [3].

На рис. 1 изобразим две зависимости λ_0 от $f''(x)$ при фиксированных $q = 2$, $l = 3$ по формуле (8). Штрих-пунктирная кривая соответствует значению $n = 1$, сплошная – значению $n = 2$. Из рисунка видно, что обе кривые достигают минимума на одном и том же уровне $\lambda_0 = q^4$, обозначенном горизонтальной пунктирной линией.

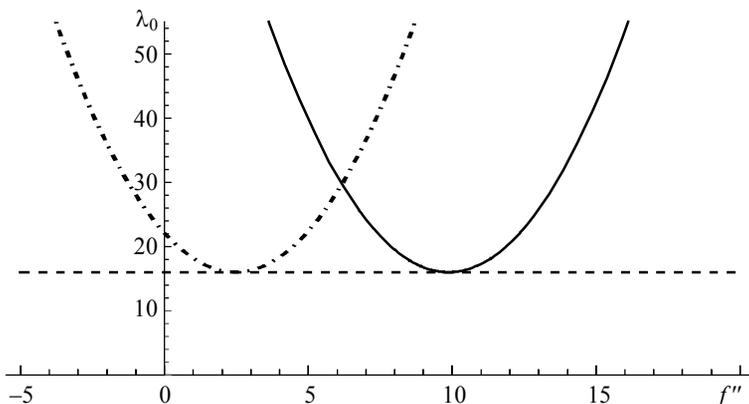


Рис. 1. График зависимостей собственного значения λ_0 от $f''(x)$ по формуле (8) при фиксированных значениях $q = 2$, $l = 3$

Fig. 1. Graph of dependencies of eigenvalues λ_0 with $f''(x)$ by formula (8) at fixed values $q = 2$, $l = 3$

Явные формулы (6) – (8) удобны для исследования зависимости λ_0 от параметров. Так, например, из формулы (6) можно установить значения (здесь постоянной) кривизны $f''(x)$, такие, при которых λ_0 достигает минимума

$$f''_k = \frac{4}{3} \left(\frac{n\pi}{ql} \right)^2 \text{ и далее } \lambda_0 = q^4 + \frac{32}{9} \left(\frac{n\pi}{ql} \right)^4. \quad (9)$$

Подобные результаты можно получить менее наглядным путем прямо из (2). Действительно, продифференцируем (2) по $f''(x)$, полагая $w_0 = w_0(x, f'')$, $f''(x) = \text{const}$.

Так как полученная производная

$$\frac{\partial}{\partial f''} (H_0 w_0) = H_0 \frac{\partial w_0}{\partial f''} + \frac{\partial H_0}{\partial f''} w_0, \quad (10)$$

то условие существования минимума функции $\lambda_0(f'')$ выражается равенством

$$\int_0^l w_0 H_0 \frac{\partial w_0}{\partial f''} dx + \int_0^l w_0 \frac{\partial H_0}{\partial f''} w_0 dx = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\partial \lambda_0}{\partial f''} = 0. \quad (11)$$

В силу самосопряженности оператора H_0 с граничными условиями (5) первый интеграл в (11) равен нулю. Тогда

$$\int_0^l w_0 \frac{\partial H_0}{\partial f''} w_0 dx = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\partial \lambda_0}{\partial f''} = 0, \quad (12)$$

что равносильно уравнению

$$\int_0^l w_0 (w_0'' + q^2 f'' w_0) dx = 0. \quad (13)$$

Подставляя сюда выбранную функцию $w_0(x) = \sin^2(\pi/l)kx$, получаем снова, как в (9), значения $f''(x)$ и далее из (2) значения λ_0 .

На рис. 2 изобразим две зависимости λ_0 от $f''(x)$ по формуле (6) при фиксированных $q=2, l=3$. Штрих-пунктирная кривая соответствует значению $n=1$, сплошная – значению $n=2$. Из рисунка, так же, как и из формул (6), видно, что значение минимума λ_0 зависит от номера n , увеличиваясь с ростом n .

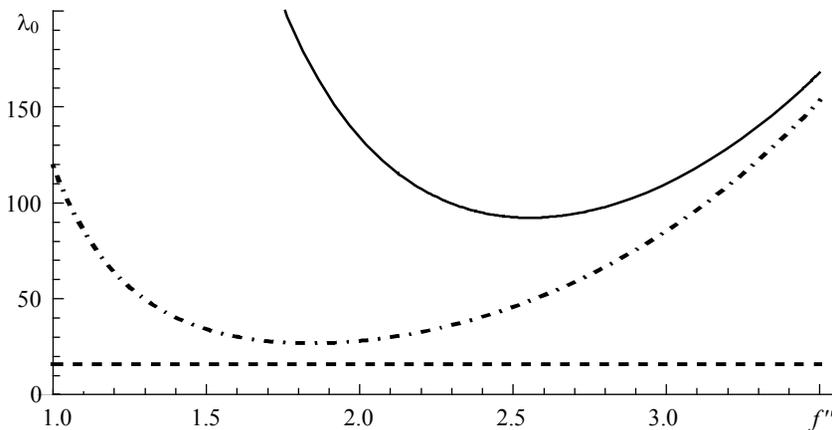


Рис. 2. График зависимостей собственного значения λ_0 от $f''(x)$ по формуле (6) при фиксированных значениях $q=2, l=3$

Fig. 2. Graph of dependencies of eigenvalues λ_0 with $f''(x)$ by formula (6) at fixed values $q=2, l=3$

Таким образом, имеем следующие результаты: из построения вариационной модели получены приближенные формулы для нулевого приближения собственных значений и собственных функций спектральной задачи. Явные формулы являются удобным инструментом анализа многопараметрических зависимостей. В частности, дифференцируя по параметру, можно производить исследования на экстремум. При необходимости можно строить области изменения параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Асимптотический метод в теории оболочек // Успехи механики. 1982. Т. 5. Вып. 1. С. 137–182.
2. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
3. Гольденвейзер А.Л., Лидский Б.В., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
4. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
6. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука, 1966. 176 с.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. IV. М.: Наука, 1974. 336 с.

Статья поступила 22.09.2021

Molchanova E.A. (2022) VARIATIONAL SIMULATION OF THE SPECTRAL PROBLEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 33–37

DOI 10.17223/19988621/75/3

Keywords: simulation, spectral problem, variation methods, formal asymptotic decomposition, eigenvalues, eigenfunctions.

The ordinary fourth-order differential equation which is the zero approximation of the eigenvalue boundary problem is solved by the variational method to produce approximate formulas for eigenvalues. To obtain an explicit formula for eigenvalues, a transition is made from the differential problem to the variational problem in the Galerkin form. Calculating integrals in it gives a general formula for eigenvalues. The selection of functions satisfying certain boundary conditions yields approximate formulas suitable for the analysis of multiparameter dependencies. In particular, it is shown how the lowest eigenvalues are determined.

AMS Mathematical Subject Classification: 41A60

Evgeniya. A. MOLCHANOVA (Candidate of Physics and Mathematics, Khakas State University, Abakan, Russian Federation). E-mail: mevgen2001@mail.ru

REFERENCES

1. Gol'denveizer A.L. (1982) Asimptoticheskiy metod v teorii obolochek [The asymptotic method in the theory of shells]. *Uspekhi mekhaniki*. 5(1). pp. 137–182.
2. Fedoryuk M.V. (1983) *Asimptoticheskiye metody dlya lineynykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Asymptotic methods for linear ordinary differential equations]. Moscow: Nauka.
3. Gol'denveyzer A.L., Lidskiy B.V., Tovstik P.E. (1979) *Svobodnyye kolebaniya tonkikh uprugikh obolochek* [Free vibrations of thin elastic shells], Moscow: Nauka.
4. Mikhlin S.G. (1970) *Variatsionnyye metody v matematicheskoy fizike* [Variational methods in mathematical physics]. Moscow: Nauka.
5. El'sgol'ts L.E. (1969) *Differentsial'nyye uravneniya i variatsionnoye ischisleniye* [Differential equations and variational calculus]. Moscow: Nauka.
6. Tslaf L.Ya. (1966) *Variatsionnoye ischisleniye i integral'nyye uravneniya* [Variational calculus and integral equations]. Moscow: Nauka.
7. *A Course of Higher Mathematics. Vol. 4* (1964). Ed. by V.I. Smirnov. Elsevier.

Received: September 22, 2021

В.И. Паньженский, А.О. Растрепина**ЛЕВОИНВАРИАНТНАЯ ПАРАСАСАКИЕВА СТРУКТУРА
НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА**

Доказано, что на группе Гейзенберга существует левоинвариантная параконтактная метрическая структура, которая является нормальной и, следовательно, парасасакиевой. На этой группе имеется единственная контактная метрическая связность с кососимметрическим кручением, инвариантная относительно группы автоморфизмов парасасакиевой структуры. Установлено, что обнаруженная связность является контактной метрической связностью для любого парасасакиева многообразия. Введено понятие линейной связности, согласованной с распределением. Доказано, что связность Леви-Чивиты и контактная метрическая связность группы Гейзенберга согласованы с контактным распределением и их контактные геодезические совпадают с геодезическими усечённой связности.

Ключевые слова: *параконтактная структура, контактная метрическая связность, связность, согласованная с распределением, усечённая связность.*

1. Введение

Среди трёхмерных групп Ли группа Гейзенберга является одним из наиболее известных и простых примеров в исследовании теории динамических систем, теории управления, субримановой геометрии, а также других нильпотентных групп [1–5]. В работах [6–8] на группе Гейзенберга и её многомерном аналоге исследуется левоинвариантная каноническая сасакиева структура. Кроме левоинвариантных контактных метрических структур на группах Ли изучаются и левоинвариантные параконтактные метрические структуры. В частности, в работах [9, 10] дана классификация левоинвариантных парасасакиевых структур на пятимерных группах Ли.

В данной работе среди всех левоинвариантных параконтактных структур на группе Гейзенберга выделяется структура, аналогичная канонической сасакиевой структуре, фиксируя псевдориманову метрику, которая получается с помощью левых сдвигов из псевдоевклидовой, заданной в касательном пространстве единицы группы. Требуя инвариантность контактной формы относительно группы движений псевдоримановой метрики, однозначно определяются контактная структура и структурный эндоморфизм. Полученная таким образом левоинвариантная параконтактная метрическая структура является парасасакиевой. На группе Гейзенберга имеется единственная контактная метрическая связность с кососимметрическим кручением, инвариантная относительно группы автоморфизмов парасасакиевой структуры. Доказано, что обнаруженная связность является контактной метрической связностью для любого парасасакиева многообразия. Введено понятие связности, согласованной с распределением. Установлено, что на группе Гейзенберга, наделённой парасасакиевой структурой, связность Леви-Чивиты и контактная метрическая связность согласованы с контактным распреде-

лением, а их контактные геодезические совпадают с геодезическими усечённой связности. Исследовано строение контактных геодезических. Полученные в работе результаты справедливы и для многомерной группы Гейзенберга.

2. Параконтактная метрическая структура

Пусть M – гладкое многообразие нечетной размерности $m = 2n + 1$. Контактной формой на M называется дифференциальная 1-форма η , удовлетворяющая условию

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0.$$

Контактная форма η определяет вполне неголомомное $2n$ -мерное распределение $H = \ker \eta$, которое называется контактной структурой на M . Гладкое многообразие, наделенное контактной структурой, называется контактным многообразием. Контактное распределение $H = \ker \eta$ называется первым фундаментальным распределением, или горизонтальным, а 1-мерное распределение $V = \ker d\eta$ – вторым фундаментальным распределением, или вертикальным. Существует единственное векторное поле $\xi \in V$, такое, что $\eta(\xi) = 1$. Поле ξ называется характеристическим, или вектором Роба [11–12].

Параконтактной метрической структурой на контактном многообразии M называется четвертка тензорных полей (η, ξ, φ, g) , где η – контактная форма, ξ – вектор Роба, g – псевдориманова метрика, φ – структурный эндоморфизм модуля векторных полей на M . При этом требуется выполнение следующих условий [9]:

$$\varphi^2 = id - \eta \otimes \xi; \tag{1}$$

$$d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y); \tag{2}$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y). \tag{3}$$

Кроме того, предполагается, что ограничение J структурного эндоморфизма φ на контактное распределение H определяет на H паракомплексную структуру: $J^2 = id$, собственные распределения которой H^+ и H^- , отвечающие собственным значениям ± 1 , имеют одинаковую размерность: $\dim H^+ = \dim H^- = n$, а $g(JX, JY) = -g(X, Y)$ для векторных полей $X, Y \in H$. Ограничение псевдоримановой метрики g на распределение H имеет сигнатуру (n, n) . Нетрудно убедиться, что выполняются ещё и следующие равенства:

$$\eta(\xi) = 1, \quad d\eta(X, \xi) = 0, \quad \varphi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad g(X, \xi) = \eta(X). \tag{4}$$

Параконтактная метрическая структура называется k -контактной, если вектор Роба ξ является киллинговым. Нормальная параконтактная метрическая структура называется парасасакиевой. В работе [9] доказано, что параконтактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) является парасасакиевой тогда и только тогда, когда обращается в нуль следующий тензор:

$$[\varphi, \varphi](X, Y) - d\eta(X, Y)\xi = 0, \tag{5}$$

где
$$[\varphi, \varphi](X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

– кручение Нейенхейса.

Если M – группа Ли, то естественно рассматривать левоинвариантные параконтактные метрические структуры. Параконтактная метрическая структура называется левоинвариантной, если левоинвариантны определяющие её тензорные поля η, ξ, φ, g .

3. Парасасакиева структура на группе Гейзенберга

Среди групповых трехмерных многообразий Тёрстона имеется нильпотентная группа Ли вещественных матриц вида

$$Nil = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{R}^3.$$

Данную группу называют также группой Гейзенберга. Левые сдвиги на группе Nil определяются следующими формулами:

$$\bar{x} = x + c_1, \quad \bar{y} = y + c_2, \quad \bar{z} = z + c_2x + c_3. \quad (6)$$

Дифференцируя (6) по параметрам c_1, c_2, c_3 , находим левоинвариантные векторные поля на Nil – базис её алгебры Ли

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2 + x\partial_3, \quad X_3 = \partial_3, \quad (7)$$

где $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$ – естественный базис векторных полей на группе Nil .

В касательном пространстве единицы группы рассмотрим псевдоевклидову метрику

$$ds^2 = dx^2 - dy^2 + dz^2$$

и сдвинем её в произвольную точку $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Так как $dx = d\bar{x}$, $dy = d\bar{y}$, $dz = d\bar{z} - c_2 d\bar{x}$, то

$$ds^2 = d\bar{x}^2 - d\bar{y}^2 + (d\bar{z} - c_2 d\bar{x})^2.$$

Поскольку единица группы $e(0, 0, 0)$ сдвигается в точку $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, то $c_2 = \bar{y}$. Опуская черту над произвольной точкой, получаем следующую инвариантную псевдориманову метрику:

$$ds^2 = dx^2 - dy^2 + (dz - ydx)^2. \quad (8)$$

Теорема 1. На группе Гейзенберга существует единственная левоинвариантная параконтактная метрическая структура с псевдоримановой метрикой (8), инвариантная относительно группы движений, причем эта структура является парасасакиевой.

Доказательство. Хорошо известно, что размерность группы движений трехмерного риманова или псевдориманова пространства с непостоянной кривизной не превосходит четырех. Чтобы выяснить, допускает ли метрика (8) кроме операторов сдвигов (7) и оператор вращения, необходимо проинтегрировать уравнения инвариантности (уравнения Киллинга)

$$X^p \partial_p g_{ij} + \partial_i X^p g_{pj} + \partial_j X^p g_{ip} = 0.$$

Для метрики (8) общее решение этих уравнений имеет следующий вид:

$$X^1 = c_4 y + c_1, \quad X^2 = c_4 x + c_2, \quad X^3 = c_2 x + \frac{1}{2} c_4 (x^2 + y^2) + c_3,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – произвольные постоянные. Это означает, что размерность группы движений равна четырем, причем постоянным c_1, c_2, c_3 соответствуют левоинвариантные векторные поля (7), а постоянной c_4 – оператор вращения

$$X_4 = y\partial_1 + x\partial_2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\partial_3. \tag{9}$$

Интегрируя уравнения левоинвариантности дифференциальной 1-формы

$$X_\alpha^p \partial_p \eta_i + \partial_i X_\alpha^p \eta_p = 0 \quad \alpha = \overline{1, 4}$$

относительно векторных полей (7) и (9), находим, что $\eta = c(-ydx + dz)$, где $c = const \neq 0$. Так как $d\eta = cdx \wedge dy$ и $\eta \wedge d\eta = c^2 dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$, то форма η является контактной, а поскольку η и $c\eta$ определяют одну и ту же контактную структуру, то полагая $c = 1$, имеем искомую контактную форму

$$\eta = -ydx + dz. \tag{10}$$

Из условий $d\eta(X, \xi) = 0$ и $\eta(\xi) = 1$ следует, что векторное поле Рибба имеет вид

$$\xi = \partial_3. \tag{11}$$

Структурный эндоморфизм ϕ теперь однозначно определяется условием (2). Действительно, в координатах имеем

$$d\eta_{ij} = g_{ip} \phi_j^p,$$

откуда

$$\phi_j^k = g^{ks} d\eta_{sj}.$$

Так как

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & -1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ks} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & -1 & 0 \\ y & 0 & 1+y^2 \end{pmatrix}, \quad d\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$\phi_j^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Условия (1) и (3) в координатах имеют вид

$$\phi_p^k \phi_i^p = \delta_i^k - \eta_i \xi^k,$$

$$g_{ps} \phi_i^p \phi_j^s = -g_{ij} + \eta_i \eta_j$$

и легко проверяются. Так как, очевидно, $L_\xi g = 0$, то параконтактная структура является k -контактной. Более того, данная структура является парасасакиевой. Действительно, условие (5) в координатах имеет вид

$$\phi_i^p \partial_p \phi_j^k - \phi_j^p \partial_p \phi_i^k + \phi_p^k \partial_j \phi_i^p - \phi_p^k \partial_i \phi_j^p - (d\eta)_{ij} \xi^k = 0,$$

и для параконтактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) (10) – (12) и (8) выполняется тождественно. ■

Так как группа движений псевдоримановой метрики (8) сохраняет контактную форму η , а следовательно, и ξ , то она сохраняет и эндоморфизм φ , т.е. группа движений является группой автоморфизмов парасасакиевой структуры.

4. Контактная метрическая связность

Линейная связность $\tilde{\nabla}$ называется контактной метрической связностью [13], если в этой связности контактная форма η и метрический тензор g ковариантно постоянны: $\tilde{\nabla}\eta = 0$, $\tilde{\nabla}g = 0$. Из $\tilde{\nabla}\eta = 0$ следует, что связность $\tilde{\nabla}$ необходимо имеет кручение, а из $\tilde{\nabla}g = 0$ следует, что ковариантный тензор деформации T связности Леви-Чивиты ∇ кососимметричен по последним двум аргументам. Если тензор T кососимметричен по всем своим аргументам, то имеем связность с кососимметрическим кручением. В этом случае $T = \frac{1}{2}S$ и

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2}S_{ij}^k,$$

где $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ – коэффициенты контактной метрической связности $\tilde{\nabla}$, Γ_{ij}^k – коэффициенты связности Леви-Чивиты, S_{ij}^k – компоненты тензора кручения, а $S_{ijk} = S_{ij}^p g_{kp}$ – кососимметричны по всем индексам и, следовательно, определяют дифференциальную 3-форму – форму кручения.

Теорема 2. На группе Гейзенберга с левоинвариантной парасасакиевой структурой существует единственная контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ с кососимметрическим кручением. Эта связность инвариантна относительно группы автоморфизмов парасасакиевой структуры и определяется следующей формулой:

$$g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2}d\eta(X, Y) \wedge \eta(Z). \quad (13)$$

Доказательство. Так как $g^{kp}\eta_p = \xi^k$ и $S_{ij}^k = S_{ijp}g^{kp}$, то условие ковариантного постоянства контактной формы в связности $\tilde{\nabla}$ примет вид

$$\tilde{\nabla}_i \eta_j = \partial_i \eta_j - \tilde{\Gamma}_{ij}^k \eta_k = \partial_i \eta_j - \Gamma_{ij}^k \eta_k - \frac{1}{2}S_{ijk} \xi^k = 0, \quad (14)$$

где

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}y & 0 \\ \frac{1}{2}y & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} y & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(y^2 - 1) & 0 \\ \frac{1}{2}(y^2 - 1) & 0 & -\frac{1}{2}y \\ 0 & -\frac{1}{2}y & 0 \end{pmatrix}$$

– коэффициенты связности Леви-Чивиты псевдоримановой метрики (8). Если индексы i, j принимают значения $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$, а также $(1, 3)$ и $(2, 3)$, то левая часть в (14) тождественно равна нулю. Если $i = 1, j = 2$ или $i = 2, j = 1$, то

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} S_{123} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} + S_{213} = 0,$$

откуда следует, что

$$S_{123} = S_{231} = S_{312} = -S_{213} = -S_{321} = -S_{132} = 1.$$

Таким образом,

$$S = dx \wedge dy \wedge dz = (d\eta) \wedge \eta,$$

откуда следует, что связность $\tilde{\nabla}$ определяется формулой (13). Так как в силу перестановочности внешнего дифференцирования и дифференцирования Ли, 2-форма $d\eta$ инвариантна относительно группы автоморфизмов, то инвариантен и тензор кручения и, следовательно, инвариантна и связность $\tilde{\nabla}$. ■

Вычислительная формула для коэффициентов $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ контактной метрической связности $\tilde{\nabla}$ имеет вид

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kp} (\partial_i g_{pj} + \partial_j g_{ip} - \partial_p g_{ij} + (d\eta \wedge \eta)_{ijp}).$$

Компоненты тензора кручения и связности $\tilde{\nabla}$ определяются следующими матрицами:

$$S_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ -y & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1+y^2 & 0 \\ -(1+y^2) & 0 & y \\ 0 & -y & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & y^2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -y & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в связности $\tilde{\nabla}$ все структурные тензоры парасасакиевой структуры ковариантно постоянны.

Теорема 3. Линейная связность $\tilde{\nabla}$, определённая формулой (13), является контактной метрической связностью для любого парасасакиева многообразия.

Доказательство. Так как связность $\tilde{\nabla}$ имеет кососимметрическое кручение, то она является метрической. Известно (см., например, [11, 12]), что на контактном многообразии существует атлас Дарбу, в каждой карте которого контактная форма η имеет вид

$$\eta = -x^{n+1} dx^1 - \dots - x^{2n} dx^n + dx^m.$$

В координатах Дарбу

$$d\eta = dx^1 \wedge dx^{n+1} + \dots + dx^n \wedge dx^{2n}, \quad \xi = \partial_m.$$

Найдем ковариантную производную от контактной формы

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_i \eta_j &= \partial_i \eta_j - \tilde{\Gamma}_{ij}^k \eta_k = \partial_i \eta_j - \frac{1}{2} g^{kp} (\partial_i g_{pj} + \partial_j g_{ip} - \partial_p g_{ij}) \eta_k - \frac{1}{2} S_{ijp} g^{pk} \eta_k = \\ &= \partial_i \eta_j - \frac{1}{2} (\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}) - \frac{1}{2} S_{ijm}.\end{aligned}$$

Так как $(d\eta \wedge \eta)_{ijm} = 0$, а $\eta_m = 1$, то $S_{ijm} = (d\eta)_{ij}$. Поскольку парасасакиева структура является k -контактной, то вектор ξ является киллинговым и, следовательно, уравнения Киллинга

$$\xi^k \partial_k g_{ij} + \partial_i \xi^k g_{kj} + \partial_j \xi^k g_{ik} = 0$$

обращаются в тождество, откуда следует, что $\partial_m g_{ij} = 0$. Теперь ковариантная производная от формы η примет вид

$$\tilde{\nabla}_i \eta_j = \partial_i \eta_j - \frac{1}{2} (\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{im}) - \frac{1}{2} (d\eta)_{ij}.$$

Из условия (3) следует, что

$$g(X, Y) = -h(X, Y) + \eta(X)\eta(Y),$$

где $h(X, Y) = g(\varphi X, \varphi Y)$. Структурный эндоморфизм определяется условием (2), поэтому

$$h_{ij} = g_{sp} \varphi_i^s \varphi_j^p = g_{sp} g^{sl} (d\eta)_{li} g^{pk} (d\eta)_{kj}.$$

Но $(d\eta)_{im} = 0$, тогда и $h_{im} = 0$, следовательно,

$$g_{mj} = \eta_m \eta_j = \eta_j, \quad g_{im} = \eta_i \eta_m = \eta_i,$$

и

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_i \eta_j &= \partial_i \eta_j - \frac{1}{2} (\partial_i \eta_j + \partial_j \eta_i) - \frac{1}{2} (\partial_i \eta_j - \partial_j \eta_i) = \\ &= \frac{1}{2} \partial_i \eta_j - \frac{1}{2} \partial_j \eta_i - \frac{1}{2} \partial_i \eta_j + \frac{1}{2} \partial_j \eta_i = 0. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Замечание 1. Из доказательства данной теоремы следует, что связность $\tilde{\nabla}$ является контактной метрической для любой k -контактной параконтактной метрической структуры.

5. Связность, согласованная с распределением. Геодезические

Пусть M – гладкое n -мерное многообразие и H – распределение на M , т.е. совокупность $\{H_p\}$ r -мерных подпространств касательных пространств $T_p M$, гладко зависящих от $p \in M$. *Линейную связность ∇ назовём согласованной с распределением H , если через каждую точку p в каждом касательном направлении $v_p \in H_p$ проходит единственная геодезическая, касающаяся распределения H .* Такие геодезические назовём контактными геодезическими связности ∇ .

Пусть g – (псевдо) риманова метрика на M , ∇ – связность Леви-Чивиты. Ортогональная проекция $\bar{\nabla}$ связности ∇ на распределение H называется усеченной

связностью [1, 2]. В неголономной механике считается, что механическая система с лагранжианом L и неголономным распределением H на конфигурационном пространстве движется по траектории, которая, вообще говоря, не является решением вариационной задачи на минимум. В [1] доказано, что траектории движения такой системы с квадратичным лагранжианом являются геодезическими усеченной связности.

Теорема 4. На группе Гейзенберга, наделенной парасасакиевой структурой (η, ξ, φ, g) , связность Леви-Чивиты ∇ является связностью, согласованной с контактным распределением $H = \ker \eta$, а её контактные геодезические совпадают с геодезическими усеченной связности $\bar{\nabla}$.

Доказательство. Рассмотрим неголономное поле реперов $\{p, e_i\}$, адаптированных к структуре почти произведения $H \oplus V$:

$$e_1 = \partial_1 + y\partial_3, \quad e_2 = \partial_2, \quad e_3 = \partial_3,$$

где первые два векторных поля e_1, e_2 принадлежат контактному распределению H , а $e_3 = \xi$ принадлежит распределению V . Разложения коммутаторов координатных векторных полей

$$[e_i, e_j] = \Omega_{ij}^k e_k$$

являются структурными уравнениями поля реперов $\{p, e_i\}$, а коэффициенты разложения Ω_{ij}^k определяют объект неголономности. Для рассматриваемого поля реперов имеем

$$[e_1, e_2] = -e_3, \quad [e_1, e_3] = 0, \quad [e_2, e_3] = 0.$$

Таким образом, $\Omega_{21}^3 = -\Omega_{12}^3 = -1$, остальные компоненты равны нулю. Дуальный реперу $\{p, e_i\}$ корепер $\{p, \theta^j\}$ определяется условием $\theta^j(e_i) = \delta_i^j$, откуда следует, что

$$\theta^1 = dx, \quad \theta^2 = dy, \quad \theta^3 = -ydx + dz.$$

Репер $\{p, e_i\}$ является ортонормированным относительно псевдоримановой метрики (8): $e_i \cdot e_j = 0, \quad e_1^2 = 1, \quad e_2^2 = -1, \quad e_3^2 = 1$, поэтому в этом репере метрика (8) имеет стандартный вид

$$g(X, X) = X^{1^2} - X^{2^2} + X^{3^2},$$

где X^i – неголономные координаты вектора $X = X^i e_i$.

Вычислим неголономные коэффициенты γ_{ij}^k связности Леви-Чивиты ∇ : $\nabla_{e_i} e_j = \gamma_{ij}^k e_k$. Применяя известную вычислительную формулу (см., например, [14]), находим, что

$$\gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \delta^{ks} \left(\Omega_{ij}^l \delta_{sl} + \Omega_{si}^l \delta_{jl} + \Omega_{sj}^l \delta_{il} \right),$$

где $\delta_{ij} = \delta^{ij} = 0$, если $i \neq j$, $\delta^{11} = \delta^{33} = \delta_{11} = \delta_{33} = 1$, а $\delta^{22} = \delta_{22} = -1$. Имеем следующие ненулевые коэффициенты связности ∇ :

$$\gamma_{23}^1 = \gamma_{32}^1 = -\frac{1}{2}, \quad \gamma_{13}^2 = \gamma_{31}^2 = -\frac{1}{2}, \quad \gamma_{12}^3 = -\gamma_{21}^3 = -\frac{1}{2}.$$

Ортогональная проекция связности ∇ на контактное распределение, т.е. усечённая связность $\bar{\nabla}$ определяется коэффициентами $\bar{\gamma}_{ij}^k : \bar{\nabla}_{e_i} e_j = \bar{\gamma}_{ij}^k e_k$, где $\bar{\gamma}_{ij}^k = \gamma_{ij}^k$ ($i, j, k = 1, 2$), поэтому $\bar{\nabla}_{e_i} e_j = 0$. Горизонтальная кривая $\gamma : x^i = x^i(s)$ ($x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, s – естественный параметр) называется горизонтальной геодезической, если она является геодезической относительно усечённой связности $\bar{\nabla} : \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$, где $\dot{\gamma}$ – поле касательных векторов кривой γ . Пусть \dot{x}^i ($i = 1, 3$) – естественные координаты поля $\dot{\gamma} : \dot{\gamma} = \dot{x}^i \partial_i$, а v^i ($i = 1, 2$) – неголономные координаты поля $\dot{\gamma}$ в базисе $\{e_1, e_2\} : \dot{\gamma} = v^i e_i$. Так как

$$\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = v^i \bar{\nabla}_{e_i} (v^k e_k) = v^i e_i (v^k) e_k + v^i v^k \bar{\nabla}_{e_i} e_k = v^i e_i (v^k) e_k,$$

то уравнения геодезических примут вид

$$v^i e_i (v^k) = 0. \quad (15)$$

Переписав уравнения (15) в естественных координатах, получим дифференциальные уравнения геодезических усечённой связности $\bar{\nabla} :$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{ds^2} = 0, \quad \frac{dz}{ds} = y \frac{dx}{ds}. \quad (16)$$

Интегрируя уравнения (16), находим параметрические уравнения геодезических

$$x = a_1 s + b_1, \quad y = a_2 s + b_2, \quad z = \frac{1}{2} a_1 a_2 s^2 + a_1 b_2 s + b_3. \quad (17)$$

Дифференциальные уравнения геодезических связности Леви-Чивиты имеют вид

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + y \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + y \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 - \frac{dx}{ds} \frac{dz}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + (y^2 - 1) \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} - y \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} = 0.$$

Для контактных геодезических $\frac{dz}{ds} = y \frac{dx}{ds}$, поэтому они определяются следующей системой:

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} = 0,$$

откуда $x = a_1 s + b_1, \quad y = a_2 s + b_2, \quad z = \frac{1}{2} a_1 a_2 s + a_3 s + b_3.$

Но $\frac{dz}{ds} = a_1 a_2 s + a_3 = (a_2 s + b_2) a_1$, поэтому $a_3 = a_1 b_2$, и, следовательно, контактные

геодезические связности ∇ совпадают с геодезическими усеченной связности $\bar{\nabla}$. ■

Замечание 2. Контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ с кососимметрическим кручением имеет такие геодезические, что и связность Леви-Чивиты ∇ . Оказывается, что и проекции связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ совпадают. Действительно, так как

$$d\eta \wedge \eta = \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3,$$

то имеем следующие ненулевые компоненты $\tilde{S}_{ij}^k = \delta^{ks} \tilde{S}_{ijs}$ ($\delta^{22} = -1$) тензора кручения \tilde{S} :

$$\tilde{S}_{12}^3 = \tilde{S}_{23}^1 = -\tilde{S}_{31}^2 = 1, \quad \tilde{S}_{21}^3 = \tilde{S}_{32}^1 = -\tilde{S}_{13}^2 = -1.$$

Так как $\tilde{\gamma}_{ij}^k = \gamma_{ij}^k + \frac{1}{2} \tilde{S}_{ij}^k$, то $\tilde{\gamma}_{31}^2 = \tilde{\gamma}_{32}^1 = -1$, остальные нули, то $\bar{\nabla}_{e_i} e_j = 0$ ($i, j = 1, 2$),

т.е. $\bar{\nabla} = \bar{\bar{\nabla}}$. Таким образом, контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ также согласована с контактным распределением, и её контактные геодезические совпадают с геодезическими усеченной связности $\bar{\nabla} = \bar{\bar{\nabla}}$. Заметим, что $\tilde{\nabla}\eta = 0$, а $\nabla\eta \neq 0$.

Примером связности, несогласованной с контактным распределением, может служить полусимметрическая связность, определенная контактной формой (10) и метрическим тензором (8).

При исследовании строения контактных геодезических, в силу левоинвариантности парасасакиевой структуры и связности ∇ , можно ограничиться геодезическими, выходящими из единицы группы

$$x = a_1 s, \quad y = a_2 s, \quad z = \frac{1}{2} a_1 a_2 s. \tag{18}$$

Кроме того, мы отождествим группу Гейзенберга Nil с \mathbf{R}^3 , поставив в соответствие каждой матрице из Nil с определяющими элементами x, y, z точку $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, при этом ортонормированному реперу $\{p, e_1, e_2, e_3\}$ в единице группы будет соответствовать репер $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ в \mathbf{R}^3 , где $O = (0, 0, 0)$, $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Этот репер является ортонормированным относительно стандартной евклидовой метрики ρ_E в \mathbf{R}^3 . Контактной плоскости в единице группы соответствует координатная плоскость Oxy . Единичный вектор $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ этой плоскости определяет направление геодезической. Обозначим направленный угол между \mathbf{i} и \mathbf{a} через θ . Тогда уравнения геодезических (18) примут вид

$$x = s \cos \theta, \quad y = s \sin \theta, \quad z = \frac{1}{2} s^2 \cos \theta \sin \theta. \tag{19}$$

Если $\cos \theta \sin \theta \neq 0$, первые два уравнения (19) в плоскости Oxy определяют прямую l с направляющим вектором \mathbf{a} , а третье уравнение – параболу в плоскости Oxz . Если $\cos \theta \sin \theta = 0$, то при $\sin \theta = 0$ геодезической является ось Ox , если $\cos \theta = 0$, то ось Oy . При малых θ $\sin \theta \rightarrow 0$, коэффициент $\cos \theta \sin \theta > 0$ мал и

ветви параболы расположены в подпространстве $z \geq 0$ и парабола мало отличается от прямой Ox . С возрастанием θ это различие растёт и при $\theta = \frac{\pi}{4}$ достигает своего максимума. При $\theta > \frac{\pi}{4}$ происходит «распрямление» параболы и при $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\cos \theta = 0$ парабола «превращается» в прямую Oy . При $\theta > \frac{\pi}{2}$ ветви параболы «опускаются вниз» ($z \leq 0$). С увеличением θ парабола становится «круче», достигает своего максимума при $\theta = \frac{3\pi}{4}$, затем опять распрямляется и становится прямой Ox при $\theta = \pi$. Далее ветви параболы опять поднимаются вверх. В третьем координатном угле $\left(\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$ имеем те же параболы, что и в первом $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$, а в четвертом $\left(\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi\right)$ те же самые что и во втором $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$, т.е. направления \mathbf{a} и $-\mathbf{a}$ определяют одну и ту же геодезическую. Заметим, что ортогональные проекции парабол на соответствующие контактные плоскости являются прямыми линиями.

Ограничение псевдоримановой метрики (8) на контактное распределение является псевдоевклидовой метрикой

$$ds^2|_H = dx^2 - dy^2. \quad (20)$$

В контактной плоскости Oxy направления $y = \pm x$ являются изотропными относительно метрики (20). Именно геодезическая в изотропном направлении имеет максимальное отклонение от прямой линии.

Замечание 3. Результаты данной работы справедливы и для многомерной группы Гейзенберга [6–8]

$$Nil = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \mathbf{0}^t & \mathbf{E}_n & \mathbf{x}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{x}^t = (x^1 \dots x^n)^t$, $\mathbf{y} = (x^{n+1} \dots x^{2n})$, $\mathbf{0} = (\mathbf{0} \dots \mathbf{0}) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbf{R}$, \mathbf{E}_n – единичная матрица размера $n \times n$. Структурные тензоры (η, ξ, φ, g) парасасакиевой метрической структуры на Nil имеют следующий вид

$$\eta = -x^{n+1} dx^1 - \dots - x^{2n} dx^n + dx^m, \quad \xi = \partial_m,$$

$$ds^2 = dx^{1^2} + \dots + dx^{n^2} - dx^{(n+1)^2} - \dots - dx^{(2n)^2} + (-x^{n+1} dx^1 - \dots - x^{2n} dx^n + dx^m)^2,$$

$$\varphi_j^k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_n^* & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{E}_n^* & \mathbf{0} & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{y}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

где $y^* = (x^{2n} \dots x^{n+1})$, O – нулевая $n \times n$ -матрица, E_n^* – $n \times n$ -матрица, ненулевыми элементами которой являются единицы по побочной диагонали. Аналогичное поведение геодезических мы наблюдаем и в многомерном случае. Если допустимые направления лежат в координатных плоскостях $(e_\alpha, e_{n+\alpha})$, $\alpha \in \overline{1, n}$, то геодезические ведут себя так же, как и в трехмерном случае. Все координатные прямые репера $\{O, e_i\}$, $i \in \overline{1, 2n}$ являются геодезическими. Кроме того, все прямые, лежащие в координатных плоскостях, отличных от $(e_\alpha, e_{n+\alpha})$, также являются геодезическими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вершик А.М., Фадеев Л.Д. Лагранжева механика в инвариантном изложении // Проблемы теоретической физики. Л.: Издательство ЛГУ, 1975. С. 129–141.
2. Вершик А.М., Гершкович В.Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1987. Т. 16. С. 5–85.
3. Сачков Ю.Л. Теория управления на группах Ли // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 26. С. 5–59. DOI: 10.1007/s10958-008-9275-0.
4. Agrachev A., Barilari D., Boscain U. Introduction to Riemannian and sub-Riemannian geometry. Trieste, Italy: SISSA, 2012. 179 p.
5. Alvarez M.A., Rodriguez-Vallarte M.C., Salgado G. Contact nilpotent Lie algebras // Proceedings of the American Mathematical Society. 2017. V. 145. No. 4. P. 1467–1474. DOI: 10.1090/proc/13341.
6. Gonzalez J.C., Chinea D. Quasi-Sasakian homogeneous structures on the generalized Heisenberg group $H(p,1)$ // Proceedings of the American Mathematical Society. 1989. V. 105. No. 1. P. 173–184. DOI: 10.1090/S0002-9939-1989-0973843-9.
7. Binz E., Pods S. The Geometry of Heisenberg Groups: Mathematical Surveys and Monographs (V. 151). Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2008. 321 p.
8. Boyer C.P. The Sasakian geometry of the Heisenberg group // Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie. 2009. V. 52. No. 3. P. 251–262.
9. Смоленцев Н.К. Левоинвариантные пара-сасакиевы структуры на группах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 62. С. 27–37. DOI: 10.17223/19988621/62/3.
10. Смоленцев Н.К., Шагабудинова И.Ю. О парасасакиевых структурах на пятимерных алгебрах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. С. 37–52. DOI: 10.17223/19988621/69/4.
11. Blair D.E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1976. 148 p. DOI: 10.1007/BFb0079307.
12. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса: Печатный дом, 2013. 458 с.
13. Panzhensky V.I., Klimova T.R. Contact metric connection on the Heisenberg group // Russian Mathematics. 2018. V. 62. No. 11. P. 45–52. DOI: 10.3103/S1066369X18110051.
14. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом / пер. с нем. Ю.Д. Бурого; под ред. и с доп. В.А. Топоногова. М.: Мир, 1971. 343 с.

Статья поступила 11.08.2021

Pan'zhenskii V.I., Rastrepina A.O. (2022) LEFT-INVARIANT PARA-SASAKIAN STRUCTURE ON THE HEISENBERG GROUP. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 38–51

DOI 10.17223/19988621/75/4

Keywords: paracontact structure, contact metric connection, connection compatible with a distribution, truncated connection.

Among the eight three-dimensional Thurston geometries, there is the Heisenberg group, the nilpotent Lie group of real 3×3 matrices of a special form. It is known that this group has a left-invariant Sasakian structure. This article proves that there is also a paracontact metric structure on the Heisenberg group, which is also Sasakian. This group has a unique contact metric connection with skew-symmetric torsion, which is invariant under the group of automorphisms of the para-Sasakian structure. The discovered connection is proved to be a contact metric connection for any para-Sasakian structure. The concept of a connection compatible with the distribution is introduced. It is found that the Levi-Civita connection and the contact metric connection on the Heisenberg group endowed with a para-Sasakian structure are compatible with the contact distribution. Their orthogonal projections on this distribution determine the same truncated connection. It is proved that Levi-Civita contact geodesics and truncated geodesics coincide. It is found that contact geodesics are either straight lines lying in the contact planes or parabolas the orthogonal projections of which on the contact planes are straight lines. The results obtained in this article are also valid for the multidimensional Heisenberg group.

AMS Mathematical Subject Classification: 53D10, 53C50

Vladimir I. PAN'ZHENSKII (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, prof., Head of the Department "Mathematical Education", Penza State University, Penza, Russian Federation). E-mail: kaf-geom@yandex.ru

Anastasia O. RASTREPINA (senior laboratory assistant of the Department "Mathematical Education" Penza State University, Penza, Russian Federation). E-mail: n.rastrepina@mail.ru

REFERENCES

1. Vershik A.M., Faddeev L.D. (1975) Lagranzheva mekhanika v invariantnom izlozhenii [Lagrangian mechanics in invariant form]. *Problemy teoreticheskoy fiziki – Problems of Theoretical Physics*. pp. 129–141.
2. Vershik A.M., Gershkovich V.Ya. (1987) Negolonomnyye dinamicheskiye sistemy. Geometriya raspredeleniy i variatsionnyye zadachi [Nonholonomic dynamical systems. Geometry of distributions and variational problems]. *Itogi Nauki i Tekhniki*. 16. pp. 5–85. Moscow: VINITI.
3. Sachkov Y.L. (2009) Control theory on Lie groups. *Journal of Mathematical Sciences*. 156(3). 381–439. DOI: 10.1007/s10958-008-9275-0.
4. Agrachev A., Barilari D., Boscain U. (2012) *Introduction to Riemannian and sub-Riemannian geometry*. Trieste: SISSA.
5. Alvarez M.A., Rodríguez-Vallarte M.C., Salgado G. (2017) Contact nilpotent Lie algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 145(4). pp. 1467–1474. DOI: 10.1090/proc/13341.
6. Gonzalez J.C., Chinea D. (1989) Quasi-Sasakian homogeneous structures on the generalized Heisenberg group $H(p,1)$. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 105(1). pp. 173–184. DOI: 10.1090/S0002-9939-1989-0973843-9.
7. Binz E., Pods S. (2008) *The Geometry of Heisenberg Groups: Mathematical Surveys and Monographs (V. 151)*. Providence, R.I.: American Mathematical Society.
8. Boyer C.P. (2009) The Sasakian geometry of the Heisenberg group. *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*. 52(3). pp. 251–262.

9. Smolentsev N.K. (2019) Levoinvariantnyye para-sasakiyevy struktury na gruppakh Li [Left-invariant para-Sasakian structures on Lie groups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 62. pp. 27–37. DOI: 10.17223/19988621/62/3.
10. Smolentsev N.K., Shagabudinova, I.Y. (2021) O parasasakiyevykh strukturakh na pyatimernykh algebrakh Li [On parasasakian structures on five-dimensional Lie algebras]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 69. pp. 37–52. DOI: 10.17223/19988621/69/4.
11. Blair D.E. (1976) *Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics*. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/BFb0079307.
12. Kirichenko V.F. (2013) *Differentsial'no-geometricheskiye struktury na mnogoobraziyakh* [Differential-Geometric Structures on Manifolds]. Odessa: Pechatnyi Dom.
13. Pan'zhenskii V.I., Klimova T.R. (2018) The contact metric connection on the Heisenberg group. *Russian Mathematics*. 62(11). pp. 45–52. DOI: 10.3103/S1066369X18110051.
14. Gromoll D., Klingenberg W., Meyer W. (1971) *Rimanova geometriya v tselom* [Global Riemannian Geometry]. Moscow: Mir.

Received: August 11, 2021

МЕХАНИКА

УДК 539.3+551.24

DOI 10.17223/19988621/75/5

А.Ж. Ахметов, И.Ю. Смолин

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТУНГУССКОЙ СИНЕКЛИЗЫ И ЯКУТСКО-ВИЛЮЙСКОЙ КРУПНОЙ ИЗВЕРЖЕННОЙ ПРОВИНЦИИ¹

Рассматривается численное моделирование напряженно-деформированного состояния участков литосферы в некоторых областях месторождений полезных ископаемых. В качестве объектов исследования выбраны двумерные структурные модели Вилюйской и Тунгусской синеклиз на основе профиля «Кимберлит-1981». Для описания процессов деформирования применена модель упругопластической среды с неассоциированным законом течения в форме Друкера – Прагера – Николаевского, которая была адаптирована с использованием модели «jelly sandwich». Локализация пластической деформации, области положительных горизонтальных напряжений соответствуют местонахождениям полезных ископаемых.

Ключевые слова: распределения напряжений и деформаций, численное моделирование, метод конечных разностей, континентальная литосфера, упругопластическая среда, Вилюйская синеклиза, Тунгусская синеклиза, модель «jelly sandwich», геологический профиль «Кимберлит-1981».

Природа формирования литосферы является одной из основных научных проблем современной геодинамики [1]. В настоящее время решение многих фундаментальных проблем осуществляется на основе междисциплинарного подхода, который требует привлечения сведений и методов из разных областей наук. При таком подходе к указанной проблеме одной из задач ее комплексного анализа является изучение напряженно-деформированного состояния (НДС) литосферы. Эта задача геомеханики сводится к решению задачи механики деформируемого твердого тела с учетом геолого-геофизических особенностей регионов и механизмов неупругого деформирования геологических сред [2]. При этом структурная модель геосреды определяется геологическим строением исследуемого объекта. Важнейшее значение для получения достоверных результатов имеет также выбор адекватной модели геосреды. Развитие численных методов и вычислительной техники позволяет решать данный класс задач с достаточно детальным рассмотрением неоднородности структуры земной коры и с учетом сложной реологии геологических сред.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90034. Компьютерная программа для выполнения исследований была модифицирована в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2022-0003.

Одним из крупных и важных геологических объектов на территории Российской Федерации является Сибирский кратон, который представляет собой древнюю стабильную платформу, сложенную из разных геологических структур. На его территории отмечается большое количество месторождений разнообразных полезных ископаемых [3]. Геологическая структура данного региона была хорошо изучена с помощью экспериментальных методов, начиная от полевых экспедиций и заканчивая анализом и обработкой космических съёмок [4]. Из-за большой протяженности Сибирского кратона на его границах происходят разные геомеханические процессы, такие, как сжатия, сдвиги, растяжения, которые сильно влияют на внутренние процессы преобразования горных пород. Анализ влияния геотектонических процессов сжатия и растяжения на формирование НДС срединной части Енисейского кряжа и северной части Вилюйской синеклизы был проведен нами в предыдущих работах [5, 6]. Данная статья является дальнейшим этапом этих исследований. В этой работе в качестве объектов исследования были выбраны южная часть Вилюйской синеклизы и срединная часть Тунгусской синеклизы, где проходит геологический профиль «Кимберлит-1981» [7, 8]. Геологическая структура Тунгусской синеклизы представляет собой впадину округлой формы, вызванную опусканием кристаллического фундамента на глубину порядка 3–5 км. При этом стоит заметить, что по данным геофизиков на территории Тунгусской синеклизы происходит возникновение мантийного плюма на ранней стадии, которая в дальнейшем приведёт к высокой деформации земной коры. Вилюйская синеклиза которую в ряде источников называют Якутско-Вилюйской крупной изверженной провинцией, является областью массового проявления внутриплитного магматизма, которая сформировалась в результате внедрения огромных объемов мантийных магм за относительно короткое время [9, 10].

Цель данной статьи – анализ НДС Вилюйской и Тунгусской синеклиз на основе разработанных структурных моделей изучаемых объектов и физико-математической модели деформирования литосферы. В рамках данного анализа предполагалось выявить связь между особенностями НДС участков литосферы и местоположениями полезных ископаемых в них.

Структурные модели Вилюйской и Тунгусской синеклиз

В 80-е и 90-е годы XX века на территории бывшего СССР и современной России была проведена глобальная работа по исследованию литосферы на предмет поиска полезных ископаемых и анализа фундаментальных геологических особенностей структуры горных массивов в рамках проекта «Комплексного освоения земных недр СССР». Итогом данной работы было получение данных для геофизических профилей, которые проходили по многим ключевым геологическим областям бывшего СССР [7]. По интересующим нас областям проходит геологический профиль «Кимберлит-1981», ориентация которого представлена на рис. 1.

Геологический профиль «Кимберлит-1981» проходит по территориям Тунгусской синеклизы и южной части Вилюйской синеклизы, которые являются частями Лено-Вилюйской и Лено-Тунгусской нефтегазоносных провинций – крупнейших месторождений нефти и газа в Сибири [11, 12]. Часть геологического профиля «Кимберлит-1981», представлена на рис. 2 вместе с геофизическими данными, которые получены на основе метода глубинного сейсмического зондирования. Представленные на рис. 2 данные по Вилюйской и Тунгусской синеклизам содержат значения скоростей продольных и поперечных волн, выделенные границы

осадочного чехла и границы Мохо, а также зоны разломов. Протяженность выбранного участка Вилуйской синеклизы составляет 360 км, а Тунгусской синеклизы – 879 км, глубина обоих объектов равна 60 км.



Рис. 1. Ориентация профиля «Кимберлит-1981» на геолого-структурной карте России [7]
Fig. 1. Orientation of the Kimberlit-1981 profile on the geological and structural map of Russia [7]

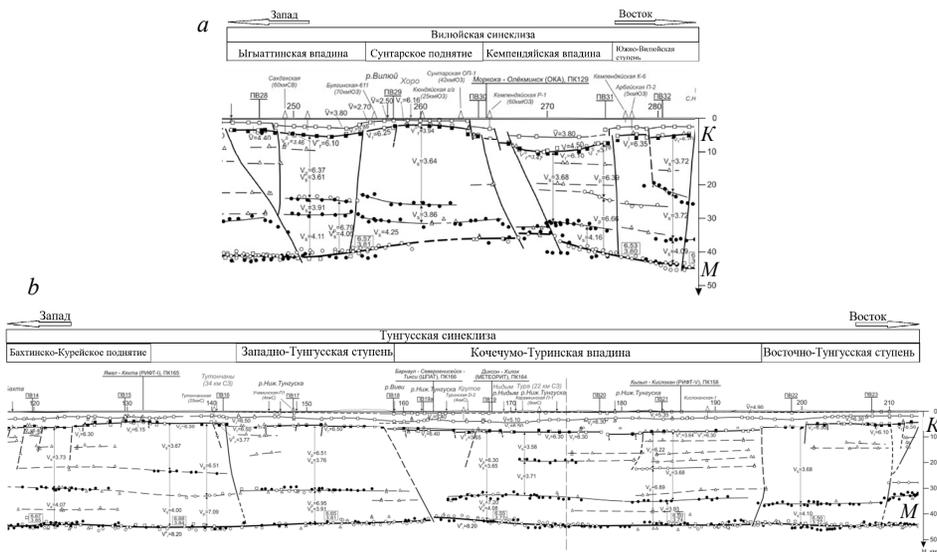


Рис. 2. Части геологического профиля «Кимберлит-1981», охватывающие территории Вилуйской (а) и Тунгусской (б) синеклиз
Fig. 2. Parts of the Kimberlit-1981 geological profile comprising the areas of (a) Vilyui and (b) Tunguska synecises

Вилуйская синеклиза разделяется на серию геологических объектов, таких как Ыгыаттинская впадина, Сунтарское поднятие, Кемпендяйская впадина и Южно-Вилуйская ступень (рис. 2, а). Здесь наблюдается сильная деформация кристаллического фундамента, нижняя граница которого обозначена на рис. 2, а буквой *K* справа у вертикальной оси координат, в виде прогиба, который уходит на глубину порядка 10 км в районе Кемпендяйской впадины. Далее в западном направлении фундамент поднимается в районе Сунтарского поднятия и снова опускается до

глубины 5 км в Ыгыаттинской впадине. Верхний слой литосферы, который граничит с кристаллическим фундаментом, является южной оконечностью Виллюйского осадочного бассейна, осадочные породы которого накапливались в течение многих миллионов лет. На основе геофизических данных профиля, литосфера составлена из серии блоков, разделенных субвертикальными фронтальными разломами, которые доходят до границы Мохо, обозначенной буквой *M* справа у вертикальной оси координат, – линии раздела земной коры и мантии.

Схожую геологическую картину имеет Тунгусская синеклиза, в составе которой выделяют следующие геологические объекты: Бахтинско-Курейское поднятие, Западно-Тунгусская ступень, Кочечумо-Туринская впадина и Восточно-Тунгусская ступень. На рис. 2, *b* можно увидеть небольшую деформацию кристаллического фундамента, нижняя граница которого также обозначена буквой *K*. Глубина верхней границы фундамента колеблется в диапазоне 3–8 км, максимальное осаднение фундамента наблюдается в районе Кочечумо-Туринской впадины, а наименьшее осаднение – в районах Восточно-Тунгусской ступени и Бахтинско-Курейского поднятия. Здесь, также как и на рис. 2, *a*, наблюдаются субвертикальные разломы, которые проявляются между границами геологических областей. Кроме указанных геологических областей и разломов, на геологических профилях приведены границы, разделяющие слои земной коры, в которых отмечаются различные скорости продольных и поперечных волн. Это свидетельствует о том, что плотностные и упругие свойства в них также отличаются. На основе вышеуказанных геолого-геофизических данных были созданы двумерные структурные модели исследуемых регионов, которые представлены на рис. 3.

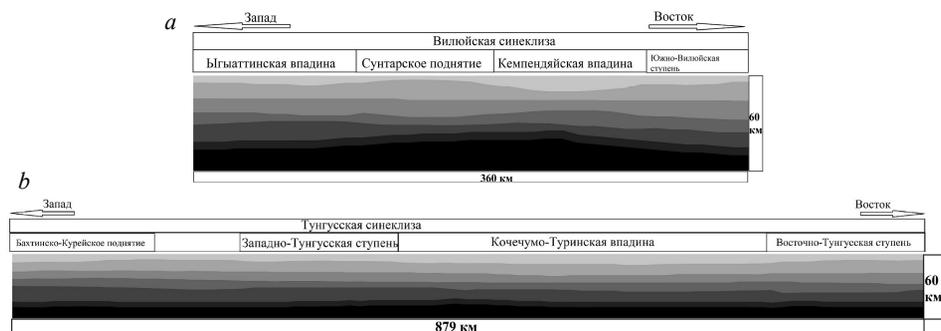


Рис. 3. Компьютерные структурные модели Виллюйской (*a*) и Тунгусской (*b*) синеклиз вдоль геологического профиля «Кимберлит-1981»

Fig. 3. Computer structural models of the (*a*) Vilyui and (*b*) Tunguska synclises along the Kimberlit-1981 geological profile

Представленные модели отражают слоистую неоднородность литосферы. Каждый из слоёв отличается индивидуальными физико-механическими свойствами, что оказывает влияние на распределения напряжений и деформаций в литосфере под воздействием гравитации, а также тектонических напряжений. Упругие свойства были определены на основе данных о плотности геосреды и скоростях продольных и поперечных упругих волн, полученных на основе геофизических данных профиля «Кимберлит-1981». Об определении прочностных свойств в рамках модели упругопластической среды речь пойдет в следующем разделе статьи.

Таблица 1

**Упругие и прочностные свойства слоёв земной коры и верхней мантии
Вилюйской синеклизы вдоль геологического профиля «Кимберлит-1981»**

Свойства	осадочный слой	слой 2	слой 3	слой 4	слой 5	верхняя мантия (слой 1)	верхняя мантия (слой 2)
Плотность, г/см ³	2.785	2.880	2.965	3.05	3.136	3.26	3.26
Модуль сдвига, ГПа	33.62	39.855	39.776	44.748	54.07	47.16	47.16
Модуль всестороннего сжатия, ГПа	51.455	60.987	71.221	75.64	80.681	77.13	77.13
Когезия, МПа	5	$5 \times Y(H)$	10	10	$10 \times Y(H)$	3	$3 \times Y(H)$
Коэффициент внутреннего трения	0.2	0.005	0.2	0.2	0.005	0.2	0.001
Коэффициент дилатансии	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.001

Таблица 2

**Упругие и прочностные свойства слоёв земной коры и верхней мантии
Тунгусской синеклизы вдоль геологического профиля «Кимберлит-1981»**

Свойства	осадочный слой	слой 2	слой 3	слой 4	слой 5	верхняя мантия (слой 1)	верхняя мантия (слой 2)
Плотность, г/см ³	2.821	2.91	2.99	3.077	3.163	3.25	3.25
Модуль сдвига, ГПа	32.19	39.54	41.07	48.10	46.47	45.92	45.92
Модуль всестороннего сжатия, ГПа	52.51	64.5	67.22	88.93	78.59	76.42	76.42
Когезия, МПа	5	$5 \times Y(H)$	10	10	$10 \times Y(H)$	3	$3 \times Y(H)$
Коэффициент внутреннего трения	0.2	0.005	0.2	0.2	0.005	0.2	0.001
Коэффициент дилатансии	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.001

Математическая постановка задачи

В основу математической постановки, позволяющей описать НДС участков литосферы в условиях геодинамического влияния, лежат фундаментальные уравнения механики деформируемого твердого тела и определяющие соотношения [6, 13]. К фундаментальным уравнениям относятся законы сохранения массы, импульса и энергии. К определяющим соотношениям относятся уравнения, позволяющие описать особенности механического поведения геосреды, в данном случае – упругопластического. Поскольку применяется модель баротропной среды, закон сохранения энергии не является необходимым для замыкания системы уравнений и может быть рассмотрен отдельно. Для описания упругопластическо-

го деформирования применена гипотеза аддитивного разложения полного тензора деформаций и тензора скоростей деформации на упругую и пластическую составляющие. Таким образом, два класса представленных уравнений позволяют получить замкнутую систему уравнений. Описание нелинейного упругого отклика среды производится с помощью модели гипоупругости (связь между скоростями напряжений и скоростями деформаций) [13].

Для описания пластических течений в геосреде, была использована модель Друкера – Прагера – Николаевского с неассоциированным законом течения, которая позволяет независимо описать процессы дилатансии и внутреннего трения. Предельная поверхность напряжений записана в виде условия Друкера – Прагера:

$$f = \frac{\alpha}{3} J_1 + J_2^{1/2} - Y = 0, \quad (1)$$

где $f(\sigma_{ij})$ – поверхность текучести; J_1 – первый инвариант тензора напряжений; J_2 – второй инвариант девиатора тензора напряжений; Y – когезия; α – коэффициент внутреннего трения. В случае неассоциированного закона течения пластический потенциал не совпадает с функцией пластичности и в соответствии с теорией Николаевского принимается в виде

$$g(\sigma_{ij}) = J_2 + \frac{\Lambda}{3} J_1 \left(2Y - \frac{\alpha}{3} J_1 \right) + const, \quad (2)$$

где Λ – коэффициент дилатансии.

Для описания процессов пластического деформирования в геосредах на рассматриваемых глубинах необходимо задать параметры рассмотренной модели с учетом влияния геодинамических факторов на реологические свойства среды. В настоящее время для оценки напряженного состояния литосферы применяются теоретические модели, которые учитывают геофизические особенности геосреды в разных регионах [14]. В качестве характеристики предельного напряженного состояния в моделях подобного типа используются так называемые «дифференциальные напряжения» (differential stress) $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_3$, т.е. разность максимального и минимального главных нормальных напряжений. Также данная разность равна удвоенным максимальным главным касательным напряжениям 2τ . Зависимость «дифференциальных напряжений» от глубины имеет ряд особенностей, обусловленных неявным учетом таких параметров, как температура, флюиды и метаморфизм горных пород. В нашем случае была выбрана модель «jelly sandwich», отвечающая требованиям геодинамической обстановки и геофизического состояния, характерным для Сибирского кратона [15–17]. Чтобы соблюсти условие равновесного напряженного состояния геосреды, в рамках модели «jelly sandwich» принимается, что прочные слои земной коры уравниваются упроченным слоем верхней мантии. Она предполагает также наличие ослабленного слоя внизу земной коры, что и обусловило ее название. Для использования модели «jelly sandwich» нам необходимо найти связь параметров модели Друкера – Прагера с «дифференциальными напряжениями». Для этого перепишем условие текучести Друкера – Прагера в виде

$$J_2^{1/2} = Y + \alpha P. \quad (3)$$

Здесь вместо первого инварианта тензора напряжений используется гидродинамическое давление $P = -J_1/3$. Воспользуемся выражением, связывающим второй инвариант девиатора тензора напряжений с максимальными главными касатель-

ными напряжениями и связью максимальных главных касательных напряжений с «дифференциальными напряжениями»

$$J_2 = (1 - \mu_\sigma^2/3)\tau^2; \quad (4)$$

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \Delta\sigma/2. \quad (5)$$

Здесь $\mu_\sigma = 2(\sigma_2 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3) - 1$ – параметр Лоде – Надаи. Подставляя в выражение (4) выражения (3) и (5), получим искомую зависимость дифференциальных напряжений от параметров модели Друкера – Прагера (когезии и коэффициента внутреннего трения)

$$\Delta\sigma = 2(Y + \alpha P)(1 - \mu_\sigma^2/3)^{-1/2}. \quad (6)$$

В это выражение также входят давления и параметр Лоде – Надаи. Формула (6) позволяет путём варьирования когезии и коэффициента внутреннего трения получать напряженное состояние, соответствующее изменению «дифференциальных напряжений» с глубиной, которое соответствует модели «jelly sandwich».

На рис. 4 представлены распределения «дифференциальных напряжений» с изменением глубины геосреды по теоретической модели «jelly sandwich», а также соответствующие этой модели изменения коэффициента внутреннего трения и когезии в зависимости от глубины слоёв земной коры и верхней мантии. Как видно из рис. 4, *a*, зависимость «дифференциальных напряжений» характеризуется чередованием зон упрочнения и разупрочнения слоёв земной коры и верхней мантии. Как можно заметить, зоны упрочнения и разупрочнения имеют разную протяженность. Размеры этих зон определяются толщинами слоёв земной коры и верхней мантии, которые мы получаем на основе геофизических данных геологических профилей. Важным параметром, определяющим линейное упрочнение в определенных слоях литосферы, является общее давление, которое также линейно растет с увеличением глубины. Поэтому величины когезии и коэффициента внутреннего трения, представленные на рис. 4, *b* и 4, *c* соответственно, в зонах упрочнения имеют постоянное значение. Разупрочнение в двух слоях земной коры на глубинах около 10 и 40 км обусловлено наличием флюидов и фазовыми переходами в горных породах под действием общего давления и температуры [16, 17]. В этих зонах разупрочнения когезия падает с ростом глубины по квадратичному закону, а коэффициенты трения имеют минимальное значение.

Выбор граничных условий для расчетов обусловлен геодинамической ситуацией на территориях Вилуйской и Тунгусской синеклиз, где происходит процесс растяжения, возникающий в результате возникновения суперплюма в мантийном слое [9, 10]. Построенные структурные модели находятся под действием гравитационных сил, и так как математическая постановка задачи осуществляется в скоростной форме, то на левой и правой границах моделей заданы горизонтальные скорости, моделирующие процесс геодинамического растяжения. На нижней горизонтальной границе заданы нулевые значения вертикальной скорости, а в районе земной поверхности (верхняя граница расчетной области) заданы условия свободной поверхности. Сначала решалась задача установления НДС под действием силы тяжести, а затем проводилось моделирование геодинамического процесса растяжения. Для снижения влияния динамических эффектов применяемого конечно-разностного метода Уилкинса при расчете равновесного НДС исследуемой области при задании силы тяжести и горизонтальных скоростей на боковых границах были использованы плавные функции их роста во времени [18].

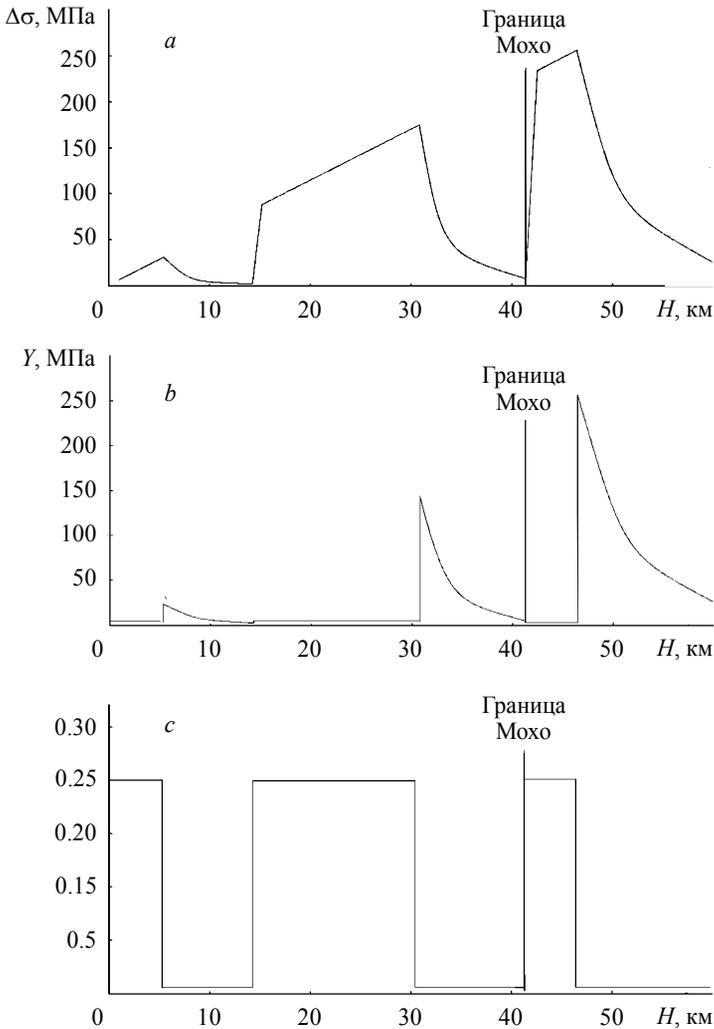


Рис. 4. Распределение прочности литосферы (а), когезии (b) и коэффициента внутреннего трения (с) в зависимости от глубины слоёв земной коры и верхней мантии

Fig. 4. Distribution of the (a) strength of the lithosphere, (b) cohesion, and (c) internal friction coefficient depending on the depth of layers of the earth's crust and upper mantle

Результаты моделирования и их обсуждение

На основе проведенных ранее исследований на сеточную сходимость [6] была взята расчётная сетка с размером ячейки 500×500 м. С использованием выбранной расчётной сетки было выполнено численное моделирование процесса растяжения выбранных участков литосферы Виллойской и Тунгусской синеклиз. Для оценки влияния блочной структуры земной коры на деформирование верхнего слоя земной коры было проведено сравнение рельефа, полученного в ходе численного моделирования, с реальным рельефом, полученным с помощью программы

Google Earth [19]. На рис. 5 представлены результаты сравнения для Вилуйской синеклизы.

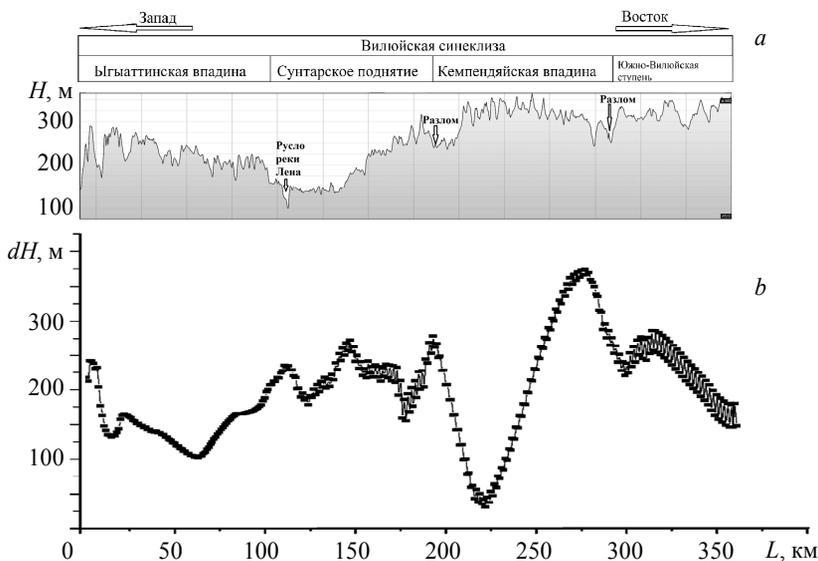


Рис. 5. Реальный рельеф (a) и рельеф, полученный в ходе компьютерного моделирования (b) на территории Вилуйской синеклизы
Fig. 5. (a) Real relief and (b) relief obtained during computer modelling for the region of the Vilyui syncline

Оценивая рис. 5, можно наблюдать, что рельеф, полученный в ходе численного моделирования, в подробностях не совпадает с реальным рельефом, но грубые его изменения соответствуют геологическим обозначениям областей, а именно поднятиям и впадинам, зонам разломов и местонахождению русла реки Лена. Это означает, что кроме геодинамических воздействий блочной структуры литосферы на формирование реального рельефа оказали влияние и другие процессы, например эрозия горных пород.

Представленные на рис. 6 распределения интенсивности пластических деформаций свидетельствуют о том, что локализация пластической деформации возникает вдоль границы Мохо, а также в виде наклонных полос в некоторых регионах, определяемых кривизной слоёв земной коры и верхней мантии. Некоторые полосы локализованной пластической деформации располагаются в местах субвертикальных разломов, что свидетельствует о возможном влиянии кривизны кристаллического фундамента на их появление. Следует отметить, что часть полос локализованной пластической деформации формируются только в одном слое земной коры (например, в Кемпендяйской впадине), а часть – пересекают всю литосферу. Среди приповерхностных слоев земной коры более подвержена пластическому деформированию область Сунтарского поднятия, на территории которой расположена Лено-Вилуйская нефтегазоносная провинция. В районах Кочечумо-Туринской впадины и Западно-Тунгусской ступени, на территориях которых расположена Лено-Тунгусская нефтегазоносная провинция, также отмечается высокая концентрация полос локализованной пластической деформации.

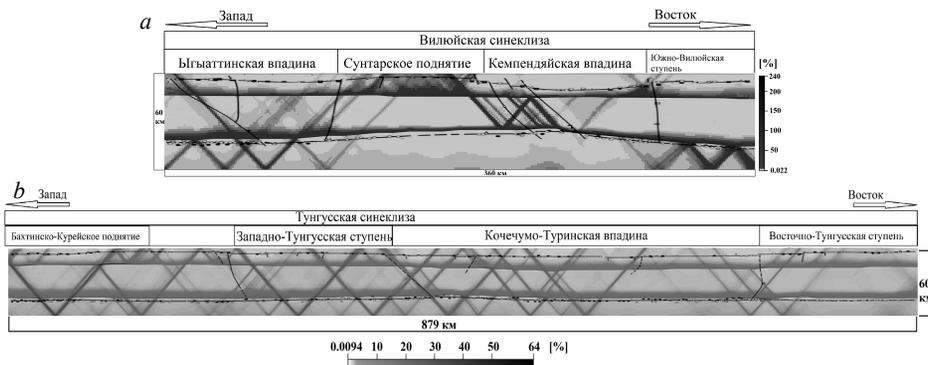


Рис. 6. Распределение пластической деформации в слоях литосферы на территориях Вилуйской (а) и Тунгусской (б) синеклиз вдоль геологического профиля «Кимберлит-1981»
Fig. 6. Distribution of plastic strain in lithosphere layers in the areas of the (a) Vilyui and (b) Tunguska synecclises along the Kimberlit-1981 geological profile

Распределения горизонтальных напряжений, представленные на рис. 7, определяются слоистой неоднородностью литосферы, а также сложением гравитационного вертикального сжатия с геодинамическим процессом горизонтального растяжения. Положительные значения горизонтальных напряжений сосредоточены вблизи земной поверхности в тех местах, где проявляются зоны разломов – на территориях Сунтарского поднятия, Ыгыаттинской впадины и на границе Кейпедянской впадины и Южно-Вилуйской ступени, а также Кочечумо-Туринской впадины и Западно-Тунгусской ступени. Эти районы выделены прямоугольниками на рис. 7. На протяжении всей глубинной структуры геологического объекта наблюдается неоднородность распределения горизонтальных напряжений, которая определяется изменением прочностных свойств литосферы с глубиной.

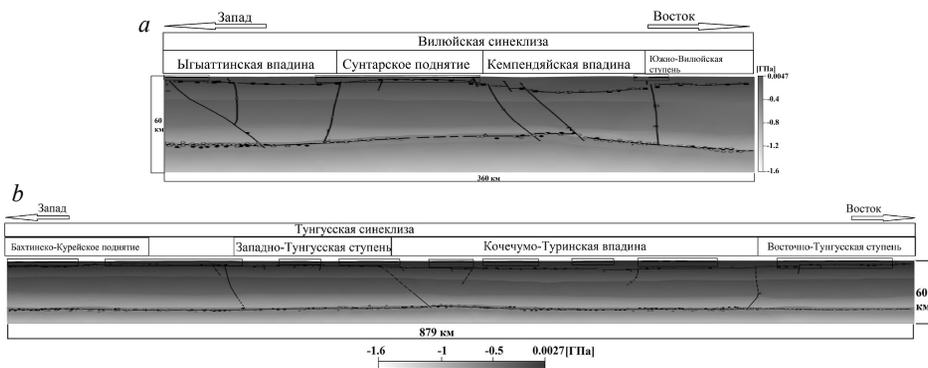


Рис. 7. Распределение горизонтальных напряжений в слоях земной коры и верхней мантии на территориях Вилуйской (а) и Тунгусской (б) синеклиз вдоль геологического профиля «Кимберлит-1981»
Fig. 7. Distribution of horizontal stresses in layers of the Earth's crust and upper mantle in the areas of the (a) Vilyui and (b) Tunguska synecclises along the Kimberlit-1981 geological profile

На рис. 8 представлено распределение отклонения рассчитанных значений давления от литостатического давления. Неравномерность распределения давления обусловлена не только слоистой неоднородностью земной коры и верхней мантии, но и зонами локализации неупругой деформации, что обусловлено следствием дилатансионных процессов при пластическом деформировании горных пород. На рис. 8, *a* наблюдаются отрицательные значения отклонений давления в районе границы Мохо, где она имеет максимальную кривизну, которая соответствует группе крупных разломов на границе Кемпендяйской впадины и Сунтарского поднятия. На территории Тунгусской синеклизы отрицательные значения отклонений давления наблюдаются в районах земной поверхности, соответствующих зонам положительных горизонтальных напряжений на рис. 7, *b*. Зоны пониженных давлений могут вызывать концентрацию флюидов и соответствующих природных ископаемых.

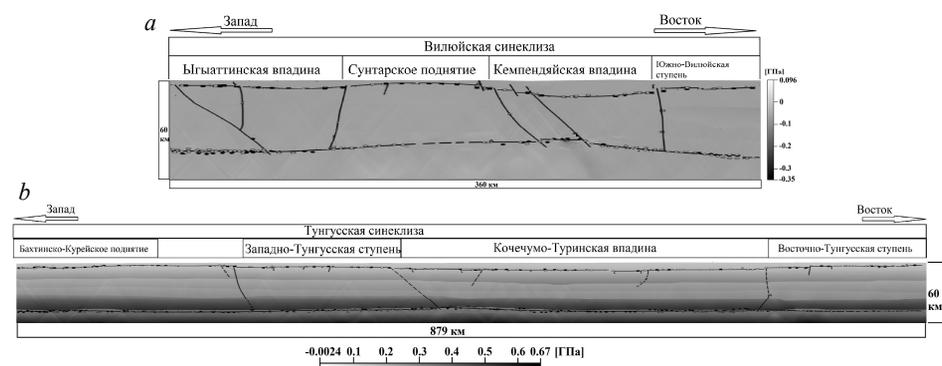


Рис. 8. Отклонение давления от литостатического давления в слоях литосферы на территориях Вилуйской (*a*) и Тунгусской (*b*) синеклиз вдоль геологического профиля «Кимберлит-1981»

Fig. 8. Deviation of pressure from lithostatic pressure in the lithosphere layers in the areas of the (*a*) Vilyuy and (*b*) Tungus synclises along the Kimberlit-1981 geological profile

Заключение

Представлена математическая модель, позволяющая исследовать НДС и геотектонические процессы в литосфере. Для задания изменения параметров модели пластичности Друкера – Прагера – Николаевского с глубиной была использована прочностная модель «jelly sandwich», которая описывает сдвиговую прочность литосферы в условии равновесного состояния в соответствии с современными геофизическими данными. В результате компьютерного моделирования был выявлен ряд особенностей НДС, которые подтверждаются геофизическими данными в исследованных регионах. В ходе процесса растяжения на территории Вилуйской синеклизы в районах Сунтарского поднятия и на границе между Кейпендяйской впадиной и Южно-Вилуйской ступенью наблюдается локализация пластических деформаций, соответствующих местонахождению Лено-Вилуйской нефтегазовой провинции. На территории Тунгусской синеклизы в областях Западно-Тунгусской ступени, Кочечумо-Туринской впадины и Восточно-Тунгусской ступени локализация пластических деформаций соответствуют местонахождению Лено-Тунгусской нефтегазовой провинции. Положительные значения горизон-

тальных напряжений отмечены в верхних слоях земной коры также в районах залегания нефти и газа, которые относятся к Лено-Вилуйской и Лено-Тунгусской нефтегазовым провинциям. Стоит отметить, что наибольшие отрицательные отклонения вычисленного давления от литостатического давления в случае Вилуйской синеклизы наблюдаются в районе границы Мохо около системы крупных разломов на границе между Сунтарским поднятием и Кемпендйской впадиной. В случае Тунгусской синеклизы отрицательные отклонения давления соответствуют зонам концентрации положительных горизонтальных напряжений, которые в свою очередь соответствуют местоположениям полезных ископаемых. Полученный в результате моделирования рельеф земной поверхности соответствует по основным географическим особенностям (поднятия и впадины) реальному рельефу исследованных регионов, но отличается в деталях. Это свидетельствует о связи структурной неоднородности литосферы с формированием рельефа и существенном влиянии на него других факторов в ходе эволюции литосферы. Полученные в результате моделирования распределения давления могут частично дополнить геологическую информацию для анализа возможности фазовых превращений в горных породах в различных участках исследуемых регионов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gerya T.* Precambrian geodynamics: Concepts and models // *Gondwana Research*. 2014. V. 25. P. 442–463. DOI: 10.1016/j.gr.2012.11.008.
2. *Stefanov Yu.P., Tataurova A.A.* Effect of friction and strength properties of the medium on shear band formation in thrust structures // *Physical Mesomechanics*. 2019. V. 22. No. 6. P. 463–472. DOI: 10.1134/S1029959919060031.
3. *Геологическое строение СССР и закономерности размещения полезных ископаемых.* Т. 4. Сибирская платформа / под ред. Н.С. Малича, В.Л. Масайтиса, В.С. Суркова. Л.: Недра, 1987. 448 с.
4. *Makarov P.V., Smolin I.Yu., Peryshkin A.Yu., Kulkov A.S., Bakeev R.A.* Experimental and numerical investigation of the catastrophic stage of failure on different scales from rock sample to coal mine // *Physical Mesomechanics*. 2021. V. 24. No. 2. P. 155–165. DOI: 10.1134/S1029959921020053.
5. *Akhmetov A.Zh., Smolin I.Yu., Peryshkin A.Yu.* Numerical analysis of the state of stress and strain in the Yenisei Ridge based on the regional tectonic state in the Asian continent // *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2019. V. 49. P. 190–200. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.49.20.
6. *Ахметов А.Ж., Смолин И.Ю.* Численное моделирование напряженно-деформированного состояния Якутско-Вилуйской изверженной провинции для анализа геотектонических процессов в Сибирском кратоне // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 69. С. 53–68. DOI: 10.17223/19988621/69/5.
7. *Проект КИМБЕРЛИТ-1981 – 1979.* Профиль г. Ханты-Мансийск – р. Лена // Атлас «Опорные геолого-геофизические профили России». Глубинные сейсмические разрезы по профилям ГСЗ, отработанным в период с 1972 по 1995 год. СПб.: ВСЕГЕИ, 2013. С. 23–225. URL: <ftp://ftp.vsegei.ru/seism23.pdf>.
8. *Cherepanova Yu., Artemieva I.M., Thybo H., Chemia Z.* Crustal structure of the Siberian craton and the West Siberian basin: An appraisal of existing seismic data // *Tectonophysics*. 2013. V. 609. P. 154–183. DOI: 10.1016/j.tecto.2013.05.004.
9. *Polyansky O.P., Prokopiev A.V., Koroleva O.V., Tomshin M.D., Reverdatto V.V., Selyatitsky A.Yu., Travin A.I., Vasiliev D.A.* Temporal correlation between dyke swarms and crustal extension in the middle Palaeozoic Vilyui rift basin, Siberian platform // *Lithos*. 2017. V. 282–283. P. 45–64. DOI: 10.1016/j.lithos.2017.02.020.
10. *Ismail-Zadeh A.T., Naimark B.M., Kostyuchenko S.L.* Quantitative modelling of the Tunguska basin evolution in the palaeozoic: a role of eclogitization within the uppermost mantle // *J. Geodynamics*. 1997. V. 23. No. 1. P. 47–64. DOI: 10.1016/S0264-3707(96)00019-1.

11. Мельников Н.В., Вымятнин А.А., Мельников П.Н., Смирнов Е.В. Возможности открытия новых крупных залежей нефти в главном поясе газонефтегазоносности Лено-Тунгусской провинции // Геология и геофизика. 2014. Т. 55. № 5–6. С. 701–720. DOI: 10.15372/GiG20140502.
12. Фролов С.В., Карнюшина Е.Е., Коробова Н.И., Бакай Е.В., Курдина Н.С., Крылов О.В., Тарасенко А.А. Особенности строения, осадочные комплексы и углеводородные системы Лено-Вилуйского нефтегазоносного бассейна // Георесурсы. 2019. Т. 21. № 2. С. 13–30. DOI: 10.18599/grs.2019.2.13-30.
13. Макаров П.В., Смолин И.Ю., Стефанов Ю.П., Кузнецов П.В., Трубицын А.А., Трубицына Н.В., Ворошилов С.П., Ворошилов Я.С. Нелинейная механика геоматериалов и геосред. Новосибирск: Академич. изд-во «Гео», 2007. 240 с.
14. Ребецкий Ю.Л. Современное напряженное состояние коры Кавказа по данным объединенного каталога механизмов очагов землетрясений // Геодинамика и тектонофизика. 2020. Т. 11. № 1. С. 17–29. DOI: 10.5800/GT-2020-11-1-0459.
15. Vurov E.B. Rheology and strength of lithosphere // Marine and Petroleum Geology. 2011. V. 28. Iss. 8. P. 1402–1443. DOI: 10.1016/j.marpetgeo.2011.05.008.
16. Turcotte D., Schubert G. Geodynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. 636 p.
17. Перчук А.Л., Плечов П.Ю., Сазонова Л.В., Сафонов О.Г., Тихомиров П.Л., Шур М.Ю. Основы петрологии магматических и метаморфических процессов. М.: КДУ; Университетская книга, 2015. 472 с.
18. Wilkins M.L. Computer simulation of dynamic phenomena. Berlin: Springer-Verlag, 1999. 246 p.
19. Google Earth Pro: [сайт]. URL: <https://earth.google.com/>

Статья поступила 03.08.2021

Akhmetov A.Z., Smolin I.Yu. (2022) COMPUTER MODELLING OF THE STATE OF STRESS AND STRAIN OF THE TUNGUSKA AND VILYUI SYNECLISES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 52–66

DOI 10.17223/19988621/75/5

Keywords: stresses and strain allocation, numerical modelling, finite difference method, continental lithosphere, elastic-plastic media, Vilyui syncline, Tunguska syncline, “jelly sandwich” model, Kimberlit-1981 geological profile.

The states of stress and strain are numerically analyzed under conditions of the geodynamic process of tension in the south part of the Vilyui syncline and the middle part of the Tunguska syncline. Two-dimensional models of geological structures of the south part of the Vilyui syncline and the middle part of the Tunguska syncline are constructed based on the Kimberlit-1981 geological profile obtained using deep seismic sounding. To describe the plastic strain in the geomeia, the model of elastic-plastic media with the non-associated plastic flow rule based on the Drucker–Prager–Nikolaevskii model is used. In this model, the “jelly sandwich” strength model is adopted for the analysis of the stress state of the lithosphere. The results of the numerical modeling of the state of the stress and strain of the chosen parts of the Siberian Craton are presented. The localization of plastic strain, the region of positive values of horizontal stresses, and the negative deviation of the calculated pressure from the lithostatic pressure correspond to mineral deposits.

Financial support. The reported study was funded by the RFBR, project no. 19-31-90034. The computer program for realization of the study was performed according to the Government research assignment for the Institute of Strength Physics and Materials Science, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, project FWRW-2022-0003.

Ayan Zh. AKHMETOV (Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ayan.akhmetov93@gmail.com

Igor Yu. SMOLIN (Head of laboratory, Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: smolin@ispms.ru

REFERENCES

1. Gerya T. (2014) Precambrian geodynamics: Concepts and models. *Gondwana Research*. 25(2). pp. 442–463.
2. Stefanov Yu.P., Tataurova A.A. (2019) Effect of friction and strength properties of the medium on shear band formation in thrust structures. *Physical Mesomechanics*. 22(6). pp. 463–472. DOI: 10.1134/S1029959919060031.
3. *Geologicheskoye stroyeniye SSSR i zakonmernosti razmeshcheniya poleznykh iskopayemykh. Tom 4. Sibirskaya platforma* [Geological structure of the USSR and regularities in the localization of mineral deposits. Vol. 4. Siberian craton] (1987) Ed. by Malich N.S., Masaytis V.L., Surkov V.S. Leningrad: Nedra.
4. Makarov P.V., Smolin I.Yu., Peryshkin A.Yu., Kulkov A.S., Bakeev R.A. (2021) Experimental and numerical investigation of the catastrophic stage of failure on different scales from rock sample to coal mine. *Physical Mesomechanics*. 24(2). pp. 155–165. DOI: 10.1134/S1029959921020053.
5. Akhmetov A.Zh., Smolin I.Yu., Peryshkin A.Yu. (2019) Numerical analysis of the state of stress and strain in the Yenisei Ridge based on the regional tectonic state in the Asian continent. *Frattura ed Integrità Strutturale*. 49. pp. 190–200. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.49.20.
6. Akhmetov A.Zh., Smolin I.Yu. (2021) Chislennoye modelirovaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya Yakutsko-Vilyuyskoy izverzhennoy provintsii dlya analiza geotektonicheskikh protsessov v Sibirskom kratone [Numerical modeling of the stress-strain state of the Yakutsk-Vilyui large igneous province for the analysis of geotectonic processes in the Siberian Craton] *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 69. pp. 53–68. DOI: 10.17223/19988621/69/5.
7. Проект KIMBERLIT-1981 – 1979. Profil' g. Khanty-Mansiysk – r. Lena. Atlas «Opornyye geologo-geofizicheskiye profili Rossii». [Kimberlit-1981 project. Khanty-Mansiysk city–Lena River profile. Reference geophysical profiles of Russia]. St. Petersburg: VSEGEI, 2013. pp. 23–225. URL: <ftp://ftp.vsegei.ru/seism23.pdf>
8. Cherepanova Yu., Artemieva I.M., Thybo H., Chemia Z. (2013) Crustal structure of the Siberian craton and the West Siberian basin: An appraisal of existing seismic data. *Tectonophysics*. 609. pp. 154–183. DOI: 10.1016/j.tecto.2013.05.004.
9. Polyansky O.P., Prokoviev A.V., Koroleva O.V., Tomshin M.D., Reverdatto V.V., Selyatitsky A.Yu., Travin A.I., Vasiliev D.A. (2017) Temporal correlation between dyke swarms and crustal extension in the middle Palaeozoic Vilyui rift basin, Siberian platform. *Lithos*. 282–283. pp. 45–64. DOI: 10.1016/j.lithos.2017.02.020.
10. Ismail-Zadeh A.T., Naimark B.M., Kostyuchenko S.L. (1997) Quantitative modelling of the Tunguska basin evolution in the palaeozoic: a role of eclogitization within the uppermost mantle. *Journal of Geodynamics*. 23(1). pp. 47–64. DOI: 10.1016/S0264-3707(96)00019-1.
11. Mel'nikov N.V., Vymyatnin A.A., Mel'nikov P.N., Smirnov E.V. (2014) Predicted new large oil pools in the main petroliferous belt of the Lena-Tunguska province. *Russian Geology and Geophysics*. 55(5–6). pp. 544–561. DOI: 10.1016/j.rgg.2014.05.003.
12. Frolov S.V., Karnyushina E.E., Korobova N.I., Bakay E.A., Kurdina N.S., Krylov O.V., Tarasenko A.A. (2019) Osobennosti stroyeniya, osadochnyye kompleksy i uglevodorodnyye sistemy Leno-Vilyuyskogo neftegazonosnogo basseyna [Features of the structure, sedimentary complexes, and hydrocarbon systems of the Leno-Vilyui oil and gas basin]. *Georesursy – Georesources*. 21(2). pp. 13–30. DOI: 10.18599/grs.2019.2.13-30.

13. Makarov P.V., Smolin I.Yu., Stefanov Yu.P., Kuznetsov P.V., Trubitsyn A.A., Trubitsyna N.V., Voroshilov S.P., Voroshilov Ya.S. (2007) *Nelineynaya mekhanika geomaterialov i geosred* [Nonlinear mechanics of geomaterials and geomedial]. Novosibirsk: Geo.
14. Rebetsky Yu.L. (2020) Sovremennoye napryazhennoye sostoyaniye kory Kavkaza po dannym ob"yedinennogo kataloga mekhanizmov ochagov zemletryaseniya [The current state of crustal stresses in the Caucasus according to the unified catalogue of earthquake focal mechanisms]. *Geodinamika i tektonofizika – Geodynamics and Tectonophysics*. 11(1). pp. 17–29. DOI: 10.5800/GT-2020-11-1-0459.
15. Burov E.B. (2011) Rheology and strength of lithosphere. *Marine and Petroleum Geology*. 28(8). pp. 1402–1443. DOI: 10.1016/j.marpetgeo.2011.05.008.
16. Turcotte D., Schubert G. (2014) *Geodynamics (3rd ed.)*. Cambridge: Cambridge University Press.
17. Perchuk A.L., Plechov P.Yu., Sazonova L.V., Safonov O.G., Tikhomirov P.L., Shur M.Yu. (2015) *Osnovy petrologii magmaticheskikh i metamorficheskikh protsessov* [Foundations of petrology of magmatic and metamorphic processes]. Moscow: KDU, Universitetskaya kniga.
18. Wilkins M.L. (1999) *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*. Berlin: Springer-Verlag.
19. *Google Earth Pro*: [site]. URL: <https://earth.google.com/>

Received: August 3, 2021

УДК 623.451

DOI 10.17223/19988621/75/6

В.И. Биматов, В.Ю. Куденцов, В.И. Трушляков**МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ
КОЭФФИЦИЕНТА СИЛЫ ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ
НЕУСТОЙЧИВЫХ В ПОЛЕТЕ ТЕЛ**

Решается задача расчета коэффициента лобового сопротивления тел с использованием траекторных данных об их соосном движении. Во время баллистического испытания последовательно фотографируется тело относительно неподвижной системы координат, регистрируются координаты его характерных точек, время между моментами фотографирования и одновременно измеряются перемещения характерных точек тела относительно подвижной системы координат, связанной с базовым телом, совершающим прямолинейное движение с нулевым углом атаки. При этом базовое тело связано с исследуемым телом аксиально и подвижно. Показано, что применяемый эффект группового движения позволяет в рамках принятых допущений повысить точность и упростить определение коэффициента силы лобового сопротивления тел сложной геометрической формы.

Ключевые слова: *аэродинамические характеристики, соосное движение, математическая модель, экспериментальные данные, исследуемое тело, базовое тело.*

Одной из наиболее важных проблем при проектировании современных летательных аппаратов является изучение силовых воздействий высокоэнергетических потоков на элементы их конструкций и на летательный аппарат в целом. В качестве инструмента исследования широко используются аэробаллистические установки [1, 2]. Определение коэффициента силы лобового сопротивления представляет основную задачу экспериментальной баллистики, с которой начинаются аэродинамические исследования. Они предназначены для определения коэффициента лобового сопротивления метаемых тел, имеющих различную аэродинамическую форму и могут быть использованы в ракетостроении, артиллерии и других областях техники, занимающихся изучением движения тел в газообразных и жидких средах. Недостатком аэробаллистического способа определения коэффициента силы лобового сопротивления является то, что для получения значений C_{x0} заданной точности эксперименты можно проводить только с телами, являющимися устойчивыми во все время движения на исследуемом участке траектории. При проведении экспериментов с неустойчивыми в полете телами сложной геометрической формы требуется разработка специальных приемов их ведения по каналу ствола и сообщение им устойчивого движения на исследуемом участке траектории [2].

Постановка задачи

Целью разработанной методики является повышение точности и упрощение алгоритма определения коэффициента силы лобового сопротивления неустойчивых в полете тел сложной геометрической формы. Поставленная цель достигается тем, что во время баллистического испытания последовательно фотографируется тело относительно неподвижной системы координат, регистрируются координаты его характерных точек, время между моментами фотографирования и одновременно измеряются перемещения характерных точек тела относительно подвижной системы координат, связанной с базовым телом, совершающим прямолинейное движение с нулевым углом атаки. При этом базовое тело связано с исследуемым телом аксиально и подвижно.

На рис. 1 дана схема реализации данной методики. Здесь OXY – неподвижная система координат, $O_1\xi\eta$ – подвижная, 1 – исследуемое тело, 2 – базовое тело, с которым связана подвижная система координат $O_1\xi\eta$. Исследуемое тело 1 вместе с базовым телом 2 как единое целое выстреливаются с помощью метательной установки. На измерительном участке траектории производится их фотографирование в двух точках A и B относительно неподвижной системы координат OXY , производится регистрация координат характерных точек тела 1 и базового тела 2 в системе координат OXY и времени между моментами фотографирования $\Delta t = t_2 - t_1$, где t_1 – время фотографирования в точке A траектории, t_2 – время фотографирования в точке B траектории. Затем определяется величина перемещения $\Delta l = l_1 - l_2$ тела 1 относительно подвижной системы координат $O_1\xi\eta$, связанной с базовым телом 2, за время Δt , где l_1 – расстояние между характерными точками тела 1 и подвижной системой координат $O_1\xi\eta$ в точке A траектории, l_2 – расстояние между характерными точками тела 1 и подвижной системой координат $O_1\xi\eta$ в точке B траектории. Определяется расстояние L , пройденное подвижной системой координат $O_1\xi\eta$, связанной с базовым телом, относительно неподвижной

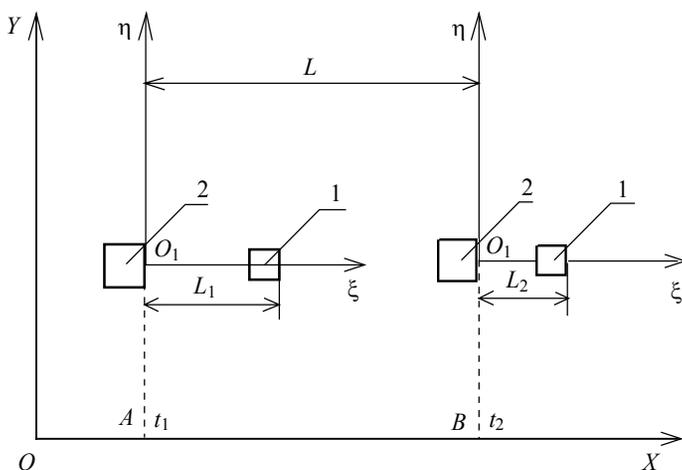


Рис. 1. Схема реализации методики определения силы лобового сопротивления

Fig. 1. Diagram of the implementation of the method for determining the force of the frontal resistance

системы координат OXY за время Δt . Базовое тело 2 на измерительном участке траектории будет двигаться прямолинейно с нулевым углом атаки при соответствующем подборе его массово-геометрических характеристик. Поэтому тело 1, которое с базовым телом 2 связано аксиально и подвижно, будет на измерительном участке траектории совершать движение прямолинейно и без угла атаки. Подвижная система координат $O_1\xi\eta$, связанная с базовым телом, также будет совершать прямолинейное движение, а ее оси будут взаимно параллельны на измерительном участке траектории осей системы OXY . При выборе соответствующих расстояний между телом 1 и базовым телом 2, массово-геометрических и аэродинамических характеристик базового тела 2 и условий движения тела 1 и базового тела 2 коэффициент силы лобового сопротивления тела 1 остается постоянным в присутствии тела 2 [3]. То есть выбором указанных условий можно добиться того, что присутствие базового тела 2 не окажет влияния (в пределах заданной ошибки) на коэффициент силы лобового сопротивления тела 1 на измерительном участке траектории. Кроме того, массово-геометрические и аэродинамические характеристики базового тела 2 можно выбрать таким образом, чтобы ускорение базового тела 2 на измерительном участке траектории было пренебрежимо мало по сравнению с ускорением исследуемого тела 1. Поэтому можно считать, что система координат $O_1\xi\eta$ движется равномерно. С учетом этого, а также того, что на измерительном участке траектории можно предположить, что скорость тела 1 изменяется по линейному закону, можно считать, что на тело 1 действует постоянная сила, под действием которой тело 1 движется равноускоренно как относительно неподвижной системы координат OXY , так и относительно подвижной $O_1\xi\eta$. Это предположение выполняется при условии: $a_2/a_1 \leq \delta$ где a_2 – ускорение базового тела 2, a_1 – ускорение тела 1, δ – заданная относительная ошибка определения коэффициента силы лобового сопротивления тела 1. Это условие можно записать в другом виде: $(n_x)_2/(n_x)_1 \leq \delta$, где $(n_x)_2$ – тангенциальная перегрузка базового тела 2, $(n_x)_1$ – тангенциальная перегрузка тела 1. Тогда значение коэффициента силы лобового сопротивления C_X можно получить, используя уравнение движения тела 1, указанные выше условия и результаты эксперимента:

$$C_X = \frac{4m}{\rho S} \frac{\Delta l}{V^2 \Delta t^2}. \quad (1)$$

Здесь $\Delta l = l_1 - l_2$; $\Delta t = t_2 - t_1$; m – масса тела 1; S – площадь миделя тела 1 на измерительном участке траектории; t_1, t_2 – моменты времени фотографирования в точках A и B траектории соответственно.

Так как исследования проводятся на небольшом участке траектории, то можно предположить, что тело 1 будет двигаться с постоянным ускорением. Тогда скорость тела 1 на измерительном участке траектории будет изменяться по линейному закону и ее можно заменить средней скоростью V_{cp} , которая вычисляется по формуле $V_{cp} = (L - \Delta l)/\Delta t$ и относится к середине участка траектории $(L - \Delta l)$, где L – расстояние, пройденное подвижной системой координат $O_1\xi\eta$, связанной с базовым телом 2, относительно неподвижной системы координат OXY за время Δt . Учитывая это, коэффициент силы лобового сопротивления C_X определим по формуле

$$C_X = \frac{4m}{\rho S} \frac{\Delta l}{(L - \Delta l)^2}. \quad (2)$$

Полученное значение коэффициента лобового сопротивления во время баллистического испытания соответствует числу $M = V_{cp}/C$, C – скорость звука в условиях эксперимента. Таким образом, для определения коэффициента C_X необходимо провести прямые измерения величин L и $\Delta l = l_1 - l_2$ с точностью, определяемой разрешающей способностью фотоматериалов, юстировки баллистической трассы [4–6], а также методической ошибкой, обусловленной предположением о малости ускорения базового тела 2 по сравнению с ускорением тела 1 и отсутствием влияния базового тела 2 на коэффициент силы лобового сопротивления C_X тела 1.

Более точное решение поставленной задачи получим следующим образом. Находим решение уравнения движения тела

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -C_X \frac{\rho V^2}{2} S \quad (3)$$

в виде
$$x = \frac{2m}{\rho S C_X} \ln \left(\frac{\rho S C_X}{2m} V_0 t + 1 \right) \quad (4)$$

или
$$x b C_X = \ln (b C_X V_0 t + 1), \quad (5)$$

где $b = \frac{\rho S}{2m}$.

Запишем решение (5) для положений тела x_1 и базового тела $x_{\delta 1}$ в момент времени t_1 , соответствующий точке A на рис. 1:

$$\begin{aligned} x_1 b C_X &= \ln (b C_X V_0 t_1 + 1), \\ x_{\delta 1} b_6 C_{X\delta} &= \ln (b_6 C_{X\delta} V_0 t_1 + 1). \end{aligned} \quad (6)$$

где $b_6 = \frac{\rho S_6}{2m_6}$.

Потенцируя систему (6), получим следующее уравнение:

$$\frac{e^{x_1 b C_X} - 1}{b C_X} = \frac{e^{x_{\delta 1} b_6 C_{X\delta}} - 1}{b_6 C_{X\delta}}. \quad (7)$$

Аналогично (6) составляем систему уравнений для положений тела x_2 и базового тела $x_{\delta 2}$ в момент времени t_2 , соответствующий точке B на рис. 1, которая после преобразований имеет вид

$$\frac{e^{x_2 b C_X} - 1}{b C_X} = \frac{e^{x_{\delta 2} b_6 C_{X\delta}} - 1}{b_6 C_{X\delta}}. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными коэффициентами лобового сопротивления тела C_X и базового тела $C_{X\delta}$.

Полученное значение коэффициента лобового сопротивления тела относят к скорости V_0 :

$$V_0 = \frac{e^{x_1 b C_X} - e^{x_{\delta 1} b_6 C_{X\delta}}}{t_1 (b C_X - b_6 C_{X\delta})}. \quad (9)$$

Величины, входящие в систему уравнений (7), (8), ρ, m, m_6, S, S_6 определяются до опыта.

Заключение

Сравнение предложенного способа с традиционным подходом дало следующие результаты. В качестве исследуемого тела было выбрано тело, которое имело большое положительное значение момента тангажа. Это приводило к нелинейному изменению скорости на измерительном участке траектории и зависимости ускорения тела от угла атаки. Угол атаки в некоторых опытах достигал величин более 20° , что затрудняло применение линейной теории при обработке результатов эксперимента. Точность определения скорости в опытах была на уровне 1–1.5%, что приводило к ошибке в определении коэффициента силы лобового сопротивления в 10–12%. Предлагаемая методика определения коэффициента силы лобового сопротивления C_{X0} позволила при проведении экспериментов с длинными телами отказаться от поддонов и обеспечила движение исследуемого тела с углами атаки $\alpha \approx 0^\circ$. Ошибка в определении скорости исследуемого тела оказалась на уровне 0.2–0.4%, что приводило к ошибке в определении C_X в 1.5–2.0%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях* / под ред. Н.А. Златина, Г.И. Мишина. М.: Наука, 1974. 344 с.
2. *Биматов В.И.* Обобщенный алгоритм решения обратной задачи траекторной баллистики // Изв. вузов. Физика. 2005. № 11. С. 30–36.
3. *Краснов Н.Ф., Кошевой В.Н.* Управление и стабилизация в аэродинамике. М.: Высшая школа, 1978. 480 с.
4. *Герасимов С.И., Лысенков В.Е., Тотьшев К.В.* Система теневого фотографирования быстропротекающего процесса. Патент RU № 96288U1, бюллетень № 20 от 20.07.2010 г.
5. *Герасимов С.И., Кикеев В.А., Тотьшев К.В., Фомкин А.П., Яненко Б.А.* Визуализация сверхзвукового движения сферы в воздухе и в воде // Научная визуализация. 2017. Т. 9. № 1. С. 1–25.
6. *Оптические методы исследований в баллистическом эксперименте* / под ред. Г.И. Мишина. Л.: Наука, 1979. 230 с.

Статья поступила: 30.12.2021

Bimatov V.I., Kudentsov V.Yu., Trushlyakov V.I. (2022) TECHNIQUE FOR THE EXPERIMENTAL DETERMINATION OF THE FORCE COEFFICIENT OF THE FRONTAL CO-RESISTANCE OF UNSTABLE IN FLIGHT BODIES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp.

DOI 10.17223/19988621/75/6

Keywords: aerodynamic characteristics, coaxial motion, mathematical model, experimental data, investigated body, base body.

One of the most important problems in the design of modern aircrafts is the study of the force effects of high-energy flows on the elements of their structures and on the aircraft as a whole. Aeroballistic installations are widely used as a research tool. Determination of the drag force coefficient is the main task of experimental ballistics from which aerodynamic studies begin. The studies are designed to determine the drag coefficient of missiles having different aerodynamic shapes, which can be used in rocket science, artillery, and other areas of technology involved in the study of the movement of bodies in gaseous and liquid media. A feature of the aeroballistic method for determining the coefficient of drag force is that, in order to obtain values of C_{X0} of a given accuracy, experiments can be carried out only with bodies that are stable during the whole time of movement in the studied section of the trajectory. The research is aimed at solving the

problem of calculating the drag coefficient of bodies using trajectory data on their coaxial movement. During the ballistic test, the body is sequentially photographed relative to a fixed coordinate system, coordinates of its characteristic points and the time between the moments of photographing are recorded, and the displacements of the characteristic points of the body relative to the moving coordinate system associated with the base body performing a rectilinear motion with a zero angle of attack, are simultaneously measured. In this case, the base body is axially and movably connected to the body under study. It is shown that the applied group motion effect allows, within the framework of the accepted assumptions, to increase the accuracy and simplify the determination of the drag force coefficient of bodies of a complex geometric shape.

Vladimir I. BIMATOV (Doctor of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vbimatov@mail.ru

Vladimir Yu. KUDENTSOV (Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Aviation and Rocket Engineering, Omsk State Technical University, Omsk, Russian Federation). E-mail: kvu_om@mail.ru

Valery I. TRUSHLYAKOV (Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Aviation and Rocket Engineering, Omsk State Technical University Omsk, Russian Federation). E-mail: vatrushlyakov@yandex.ru

REFERENCES

1. *Ballisticheskiye ustanovki i ikh primeneniye v eksperimentalnykh issledovaniyakh* [Ballistic installations and their application in experimental researches]. Ed. by Zlatin N.A., Mishin G.I. (1974) Moscow: Nauka.
2. Bimatov V.I. (2005) Obobshchenny algoritm resheniya obratnoy zadachi traektornoy ballistiki [Generalized algorithm for solving the inverse problem of trajectory ballistics] *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Fizika*. 48(11). pp. 30–36.
3. Krasnov N.F., Koshevoy V.N. (1978) *Upravleniye i stabilizatsiya v aerodinamike* [Control and stabilization in aerodynamics]. Moscow: Vysshaya Shkola.
4. Gerasimov S.I., Lysenkov V.E., Totyshev K.V. (2010) *Sistema tenevogo fotografirovaniya bystroprotekayushchego protsessa* [A system of shadow photography of a high-speed process]. RF Patent 96288U1.
5. Gerasimov S.I., Kikeev V.A., Totyshev K.V., Fomkin A.P., Yanenko B.A. (2017) Vizualizatsiya sverkhzvukovogo dvizheniya sfery v vozdukh i v vode [Visualization of the supersonic motion of a sphere in air and in water] *Nauchnaya vizualizatsiya – Scientific Visualization*. 9(1). pp. 1–25.
6. *Opticheskiye metody issledovaniy v ballisticheskoy eksperimente* [Optical research methods in a ballistic experiment]. Ed. by Mishin G.I. (1979) Leningrad: Nauka.

Received: December 30, 2021

УДК 539.3
DOI 10.17223/19988621/75/7

Д.А. Иваницhev

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ КРУЧЕНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ¹

Представлена методика определения напряженно-деформированного состояния анизотропных тел вращения, возникающего от действия скручивающих поверхностных сил. Теория представляет собой развитие метода граничных состояний. Решены задачи кручения для тел вращения разнообразной формы, когда на поверхности заданы усилия, перемещения или совокупность того и другого. Полученные характеристики упругого поля зависят от двух координат и имеют аналитический вид.

Ключевые слова: *метод граничных состояний, трансверсально-изотропные материалы, задача кручения, пространство состояний, краевые задачи.*

Большинство задач кручения для анизотропных тел решаются с использованием принципа Сен-Венана, т.е. характеристики напряженно-деформированного состояния вблизи мест приложения нагрузок в рассмотрение не берутся. Однако для расчета напряжений для проверки прочности материала на различные виды поверхностного разрушения необходимо иметь точную картину распределения напряжений вблизи поверхности тела.

Задачи кручения в механике твердого тела изучены в полной мере. В области решения задач для усложненных сред, можно выделить следующие работы. Так, авторами [1] исследовалась задача кручения радиально-неоднородной транслопной оболочки. Асимптотические решения получены с помощью метода однородных решений. В работе [2] представлены соотношения теории трансляционной анизотропии при кручении. Исследовались деформации тела.

Задачам кручения для неоднородных, нелинейных и слоистых тел посвящен ряд работ. Так, в [3] получено аналитическое решение задачи о действии крутящего момента и осевой силы на цилиндрически ортотропный цилиндр. Авторами [4] проведено исследование распределения напряжений в задаче кручения для сплошного нелинейного цилиндрически ортотропного цилиндра с зажатыми торцами. В работе [5] рассмотрена осесимметричная контактная задача о кручении штампа о транслопное полупространство с неоднородным покрытием. С помощью интегральных преобразований задача сводится к решению интегрального уравнения. В [6] приведены основные соотношения теории идеальной пластичности при кручении анизотропных призматических и цилиндрических стержней.

Конечно-элементное представление решения просматривалось в следующих работах. Авторы [7] численно исследовали кручение сплошных круговых анизотропных цилиндров, вырезанных из сплавов с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести. Моделирование показало, что возникает депланация

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003 "p_a".

поперечных сечений. Также рассмотрено кручение пластин. В работе [8] с помощью МКЭ разработан алгоритм, позволяющий определять НДС многослойных стержней произвольного сечения при кручении. Рассмотрены задачи деформирования стержней ромбовидной формы и формы компрессорной лопатки.

Для трансверсально-изотропных тел вращения методом граничных состояний решены осесимметричные краевые задачи с участием массовых сил [9–11]. Решения строятся на основе вариационного принципа Лагранжа. Полученные упругие поля одновременно удовлетворяют условиям на поверхности тела и массовым силам.

Целью данной работы является развитие метода граничных состояний на класс задач кручения ограниченных трансверсально-изотропных тел вращения. В качестве скручивающих условий на границе тела задаются усилия (первая основная задача), перемещения (вторая основная задача) и усилия или перемещения на разных частях границы (основная смешанная задача).

1. Постановка задачи

Рассматривается упругое равновесие трансверсально-изотропного тела, ограниченного одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения под действием скручивающих условий: поверхностных усилий $p_{vi} = \{0, p_\theta, 0\}$ (рис. 1),

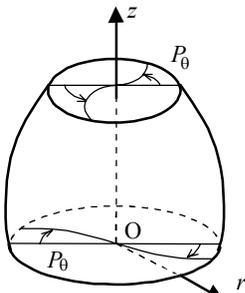


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения
Fig. 1. Transversely isotropic body of revolution

перемещений точек границы $v_{vi} = \{0, v, 0\}$ или когда на одной части поверхности S_p заданы усилия, а на части поверхности S_u – перемещения. Заданные условия не зависят от угла θ в цилиндрической системе координат r, θ, z . Ось анизотропии совпадает с геометрической осью вращения z .

В первой основной задаче усилия на поверхности тела могут быть распределены по различным законам, но должны быть уравновешены в интегральном смысле.

Необходимо восстановить напряженно-деформированное состояние, возникающее в теле под действием внешних факторов.

2. Определяющие соотношения

В случае кручения трансверсально-изотропного тела вращения происходит только деформация меридиональных сечений, перемещения точек тела вдоль осей r и z не происходит: $\mathbf{u} = \{0, v, 0\}$, поэтому компоненты тензора напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{zr}$ и компоненты тензора деформации $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{zr}$ равны нулю. В связи с этим определяющие соотношения [12] для транслопной среды упрощаются. Компоненты упругого поля (не зависят от угла θ) при отсутствии объемных сил должны удовлетворять следующим соотношениям.

Уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r} = 0. \quad (1)$$

Соотношения Коши:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (2)$$

Уравнения совместности деформаций:

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r \varepsilon_{z\theta})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z} \right) = 0; \quad (3)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial z^2} = 0.$$

Обобщенный закон Гука:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_r} \tau_{r\theta}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_z} \tau_{z\theta}. \quad (4)$$

Здесь v – компонента вектора перемещения \mathbf{u} вдоль оси θ ; $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{z\theta}$ – компоненты тензора деформаций; $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$ – компоненты тензора напряжений; G_r и G_z – модули сдвига в плоскости изотропии и перпендикулярной к ней.

3. Метод решения

Для решения задачи кручения используется метод граничных состояний (МГС) [13]. Основу метода составляют пространства внутренних Ξ и граничных Γ состояний

$$\Xi = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots \}; \quad \Gamma = \{ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots \}.$$

Внутреннее состояние определяется наборами компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений (индекс k в правой части перенесен вверх)

$$\xi_k = \{ u_i^k, \varepsilon_{ij}^k, \sigma_{ij}^k \}. \quad (5)$$

Скалярное произведение в пространстве Ξ внутренних состояний выражается через внутреннюю энергию упругого деформирования. Например, для 1-го и 2-го внутреннего состояния тела, занимающего область V

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV; \quad (\xi_2, \xi_1) = (\xi_2, \xi_1) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV = \int_V \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1 dV. \quad (6)$$

Граничное состояние γ_k определяется наборами компонент вектора перемещения точек границы u_i и поверхностными усилиями p_i :

$$\gamma_k = \{ u_i^k, p_i^k \}; \quad p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j, \quad (7)$$

где n_j – компонента нормали к границе.

В пространстве граничных состояний Γ скалярное произведение выражает работу внешних сил по поверхности тела S , например для 1-го и 2-го состояний:

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_S p_i^1 u_i^2 dS; \quad (\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2, \gamma_1) = \int_S p_i^1 u_i^2 dS = \int_S p_i^2 u_i^1 dS.$$

Пространства внутренних и граничных состояний являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом. Каждому элементу $\xi_k \in \Xi$ взаимно однозначно соответствует единственный элемент $\gamma_k \in \Gamma$. Это позволяет поиск внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния.

Основную сложность формирования решения в МГС составляет конструирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды, также возможно использование каких-либо частных или специальных решений.

После построения базиса внутренних состояний, методика которого описана ниже, проводится его ортонормирование, используя рекурсивно-матричный алгоритм ортогонализации [14]. Алгоритм реализует процесс ортогонализации Грама – Шмидта, в котором перекрестные скалярные произведения вычисляются по формуле (6). Алгоритм автоматически удаляет нулевые и линейно-зависимые элементы исходного базиса и формирует ортонормированный базис внутренних состояний, для которого $(\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} – дельта Кронекера).

Ортонормированный базис Γ редуцируется из ортонормированного базиса внутренних состояний, используя предельный переход к границе тела для перемещений и выражения (7) для усилий на границе.

Окончательно, проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье, разложения искомого внутреннего ξ и граничного γ состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса:

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k; u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k; \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k; \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k. \quad (8)$$

Если на поверхности тела заданы скручивающие усилия (первая основная задача), то коэффициенты Фурье c_k определяются из выражения

$$c_k = \int_S p_{vi} u_i^k dS; k = 1, 2, 3 \dots N, \quad (9)$$

где p_{vi} – компоненты заданного вектора усилия на границе и u_i^k – вектор перемещения в k -м базисном элементе пространства граничных (7) состояний.

Кручение тела вращения можно обеспечить и заданием перемещения точек границы тела (вторая основная задача). В этом случае коэффициенты Фурье рассчитываются так:

$$c_k = \int_S u_{vi} p_i^k dS, \quad (10)$$

где u_{vi} – компоненты заданного вектора перемещения на границе тела; p_i^k – компоненты вектора усилия в k -м базисном элементе пространства граничных (7) состояний.

Если на части поверхности S_p тела заданы усилия p_{vi} , а на другой части S_u перемещения u_{vi} (основная смешанная задача), то возникает необходимость в решении системы алгебраических уравнений [15]:

$$\beta_{lm} = \int_{S_p} p_i^l u_i^m dS_p + \int_{S_u} p_i^m u_i^l dS_u; \mathbf{B} = [\beta_{lm}]_{N \times N}; \quad (11)$$

$$\alpha_m = 2 \int_{Sp} p_{vi} u_i^m dS_p + 2 \int_{Su} p_i^m u_{vi} dS_u; \quad A = [\alpha_m]_N,$$

где B – матрица коэффициентов β_{lm} ; A – матрица-столбец коэффициентов α_m .

Матрица-столбец коэффициентов Фурье $C = \{c_k\}_N$ рассчитывается так:

$$C = B^{-1}A.$$

Во всех задачах тестирование коэффициентов Фурье осуществляется подстановкой одного из базисных элементов с соответствующими ГУ в качестве заданного, при этом должны выполняться условия $c_n = 1$, n – номер тестируемого элемента, остальные коэффициенты Фурье должны равняться нулю.

4. Формирование базиса внутренних состояний

В работе [12] методом интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженно-деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела вращения и некоторыми вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которого зависят от двух координат z и y (переменных). Ось η перпендикулярна плоскости zy .

В задаче кручения, где происходит только депланация меридиональных сечений тела вращения, в качестве вспомогательных двумерных состояний используется депланация плоских сечений трансверсально-изотропного тела [12]:

$$u_{\eta}^{pl} = -\operatorname{Re}[i q_3 \Phi_3(\zeta_3)]; \quad \tau_{z\eta}^{pl} = \operatorname{Re}[i \gamma_3 \Phi_3(\zeta_3)]; \quad \tau_{y\eta}^{pl} = -\operatorname{Re}[\Phi_3(\zeta_3)], \quad (12)$$

где u_{η}^{pl} – компонента вектора перемещения плоского вспомогательного состояния вдоль оси η ; q_3 , γ_3 – комплексные константы: $\gamma_3 = \sqrt{G_z / G_r}$, $q_3 = -1 / G_r$; $\zeta_3 = z / \gamma_3 + iy$; функции $\Phi_j(\zeta_j)$ – аналитические по своим переменным.

Базисный набор плоских вспомогательных состояний (12) можно сконструировать, последовательно придавая аналитической функции $\Phi_3(\zeta_3)$ следующие значения:

$$\Phi_3(\zeta_3) \in \{c_3^n, i c_3^n, \dots\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Переход к трехмерному состоянию осуществляется по формулам

$$v = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_{\eta}^{pl} \cos \beta \, d\beta; \quad \tau_{r\theta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tau_{y\eta}^{pl} \cos 2\beta \, d\beta; \quad \tau_{z\theta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tau_{z\eta}^{pl} \cos \beta \, d\beta; \quad y = r \cos \beta.$$

Совокупность всех пространственных состояний образует конечномерный базис внутренних состояний (5).

5. Решение задач

Первая основная задача

Исследуем упругое равновесие трансверсально-изотропного тела в форме усеченного конуса (рис. 2) из горной породы алевролита крупного темно-серого [16]. После процедуры обезразмеривания параметров задачи (с масштабным коэффициентом $\eta^* = 10^5$ кгс/см²), аналогия которой представлена в работе [17], упругие

характеристики материала составили: $E_z = 6.21$; $E_r = 5.68$; $G_r = 2.29$ $G_z = 2.55$; $\nu_z = 0.22$; $\nu_r = 0.24$.

На поверхностях S_3 и S_4 зададим распределенные усилия, различающиеся по форме (рис. 2).

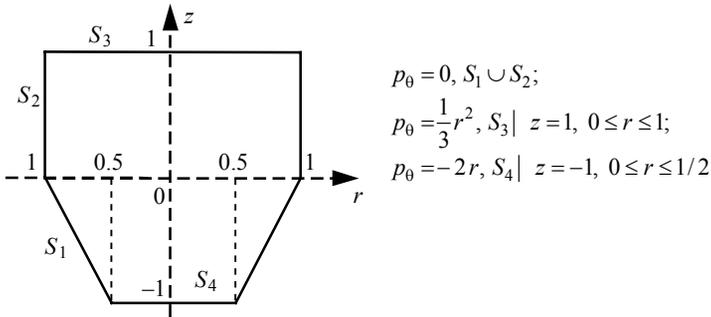


Рис. 2. Меридиональное сечение тела в форме усеченного конуса и граничные условия
Fig. 2. Meridional cross section of a truncated cone-shaped body and boundary conditions

После построения базиса внутренних состояний (5), процедуры его ортонормирования и исключения линейно зависимых элементов базисный набор для компоненты ν вектора перемещения представлен в табл. 1 (показано 3 элемента).

Таблица 1

Ортонормированный базисный набор для перемещения ν

	ν
ξ_1	$-0.42418rz$
ξ_2	$0.11804r^3 + 0.23305rz - 0.42408rz^2$
ξ_3	$-0.0706r^3 + 0.0095rz + 0.37338r^3z + 0.2537rz^2 - 0.4471rz^3$

При решении задачи использовался базис из 58 элементов с соответствующими коэффициентами Фурье (9). Приведем значения первых трех: $c_1 = -0.26097$, $c_2 = 0.08046$, $c_3 = -0.10764$.

Искомые характеристики НДС рассчитываются по зависимостям (8). Оценка точности решения осуществляется сопоставлением заданных граничных условий (ГУ) с восстановленными граничными условиями в результате решения (рис. 4). Здесь и далее, заданные (| | | |) и восстановленные (—) ГУ изображены на графиках в масштабе; истинное значение на графиках рисунка 4 равно значению на графике, умноженному на коэффициент k . Восстановленные компоненты поверхностных сил $p_r = p_z = 0$, так как $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = 0$.

Как видно из первого графика для участка границы S_1 , восстановленная компонента p_θ имеет максимальное отклонение от заданной 0.042, т.е. максимальная погрешность составила 4.2%.

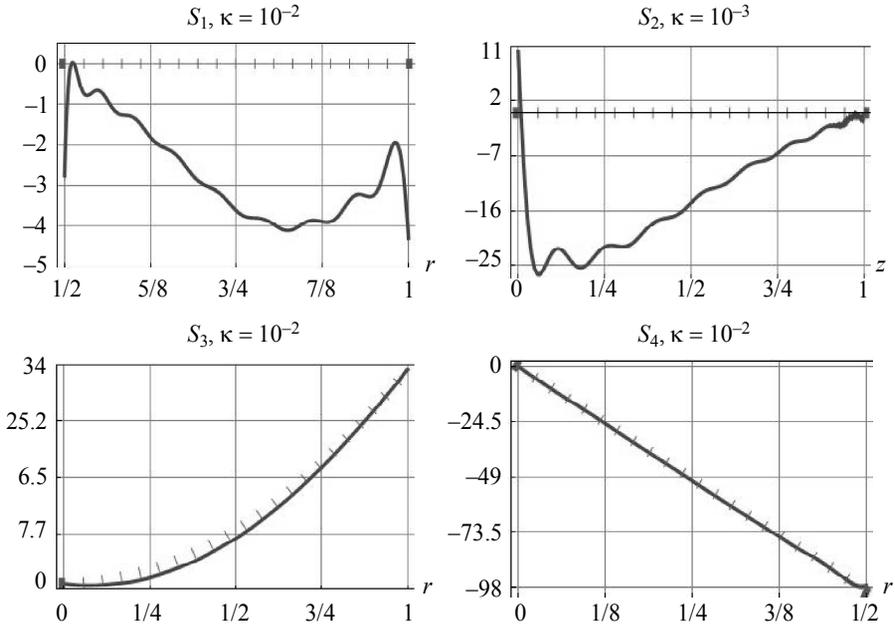


Рис. 4. Верификация усилия p_0 на участках границы в задаче для тела вращения
Fig. 4. Verification of force p_0 on boundary sections in the problem for a body of revolution

Компоненты напряженно-деформированного состояния, имеющие полиномиальный вид, представлены в виде изолиний (в явном виде необозримы) (рис. 5). В силу осевой симметрии показана область $0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1$.

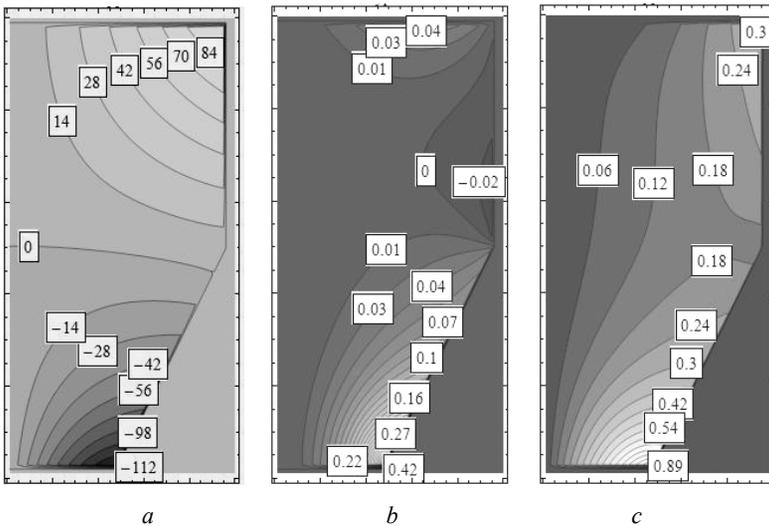


Рис. 5. Изолинии: a – перемещение $v, \kappa = 10^{-3}$,
 b – напряжение $\tau_{r0}, \kappa = 1$, c – напряжение $\tau_{z0}, \kappa = 1$
Fig. 5. Isolines: (a) displacement $v, \kappa = 10^{-3}$,
 (b) stresses $\tau_{r0}, \kappa = 1$, and (c) stresses $\tau_{z0}, \kappa = 1$

Следует отметить, что сходимость решения сильно зависит от геометрии тела, поэтому для решения данной задачи требуется довольно большой базис.

Вторая основная задача

Рассмотрим теперь краевую задачу для кругового цилиндра из того же материала, что и предыдущей задаче. В качестве ГУ зададим следующие перемещения точек границы:

$$\begin{aligned} v &= z^3, S_1 | r=1, -1 \leq z \leq 1; \\ v &= -r^2, S_2 | z=-1, 0 \leq r \leq 1; \\ v &= r^3 + r^2 - r, S_3 | z=1, 0 \leq r \leq 1. \end{aligned}$$

Цилиндр занимает область

$$V = \{(z, r) | 0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}.$$

Изменение геометрии тела вынуждает проводить ортогонализацию заново, однако исходный базис внутренних состояний зависит только от физических свойств материала и остается тем же, что и в задаче для тела в форме усеченного конуса.

Для решения данной задачи потребовалось 30 элементов ряда Фурье с соответствующими коэффициентами (10). Сопоставление заданных ГУ на участках поверхности тела с полученными ГУ в результате решения приведено на рис. 6.

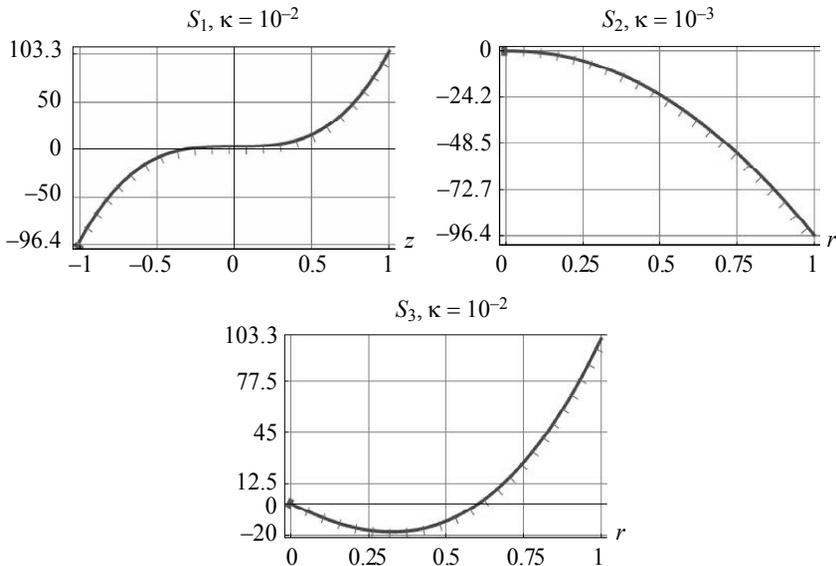


Рис. 6. Верификация перемещения v на участках границы в задаче для цилиндра
Fig. 6. Verification of displacement v on sections of the boundary in the problem for a cylinder

Максимальная погрешность вычислений составила 3.6% и определяется на ребре цилиндра $r=1, z=-1$.

Полученные компоненты упругого поля представлены в виде изолиний на рис. 7 (показана область $0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1$; для всех изолиний $\kappa=1$).

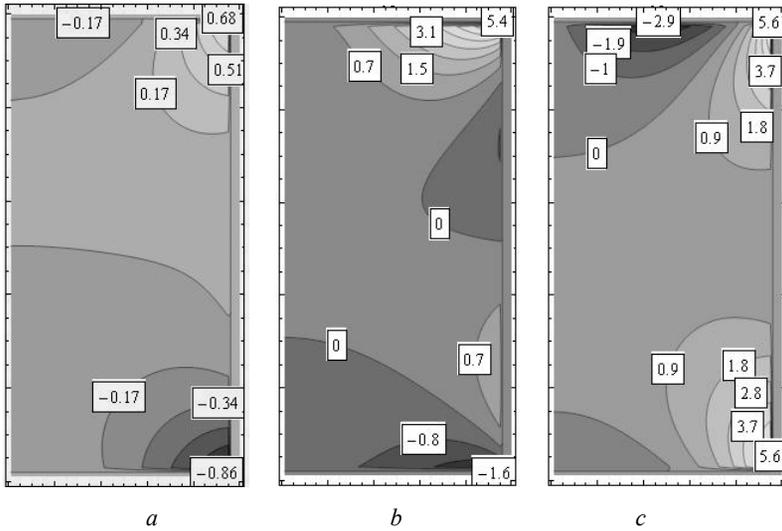
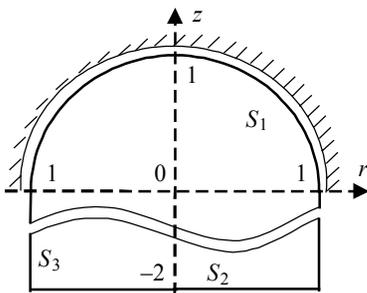


Рис. 7. Изолинии: *a* – перемещение v , *b* – напряжение τ_{r0} , *c* – напряжение τ_{z0}
 Fig. 7. Isolines, (*a*) displacement v , (*b*) stresses τ_{r0} , and (*c*) stresses τ_{z0}

Упругое поле во второй основной задаче восстанавливается гораздо быстрее, чем в первой основной задаче, здесь требуется удерживать более короткий ортонормированный базис.

Основная смешанная задача

При постановке ГУ в смешанной задаче кручения на одной части границы задаются перемещения, а на другой усилия. Рассмотрим тело вращения неканонической формы (рис. 8). Материал тот же.



$$\begin{aligned}
 v=0, S_1 | z = \sqrt{1-r^2}, 0 \leq r \leq 1; \\
 p_0 = r^2 - r, S_2 | z = -2, 0 \leq r \leq 1; \\
 p_0 = 0, S_3 | r = 1, -2 \leq z \leq 0.
 \end{aligned}$$

Рис. 8. Меридиональное сечение тела неканонической формы и граничные условия
 Fig. 8. Meridional cross section of a non-canonical body and boundary conditions

Если в первой и второй основных задачах наиболее трудоемким является только процесс ортогонализации, то в смешанной задаче возникает необходимость еще и в вычислении матрицы коэффициентов В (11). Данный процесс наиболее энергозатратен в силу того, что вычисляются квадратуры от скалярного произведения довольно громоздких элементов ортогонализированного базиса пространства граничных состояний.

Для решения данной задачи использовался базис из 16 элементов. Верификация граничных условий представлена на рис. 9.

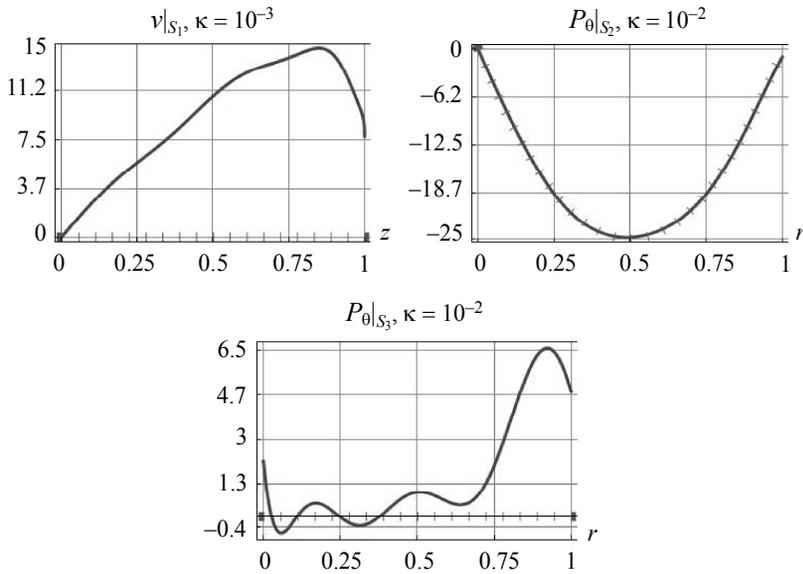


Рис. 9. Верификация граничных условий в смешанной задаче
Fig. 9. Verification of boundary conditions in the mixed problem

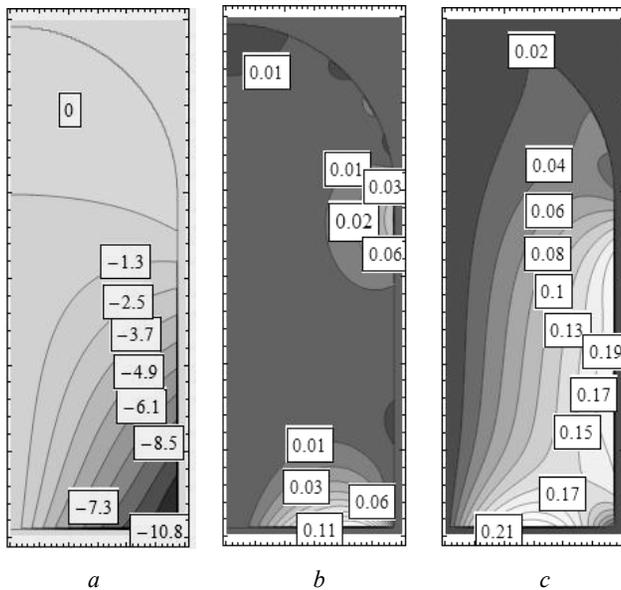


Рис. 10. Изолинии: a – перемещение v , $\kappa = 10^{-2}$,
 b – напряжение $\tau_{r\theta}$, $\kappa = 1$, c – напряжение $\tau_{z\theta}$, $\kappa = 1$
Fig. 10. Isolines: (a) displacement v , $\kappa = 10^{-2}$,
 (b) stresses $\tau_{r\theta}$, $\kappa = 1$, and (c) stresses $\tau_{z\theta}$, $\kappa = 1$

В смешанной задаче погрешность составила 6.5%. в точках, близких к месту смены типа граничных условий (рис. 6). Для снижения погрешности следует увеличить число используемых элементов базиса.

На рисунке 10 показаны изолинии компонент упругого поля для области $0 \leq r \leq 1$, $-2 \leq z \leq 1$.

Как видно из графиков, восстановленные усилия на границе совпадают с заданными в диапазоне определенной точности ($\pm 5\%$ от значения заданной величины в любой точке на границе тела).

Полученные упругие поля во всех задачах строго удовлетворяют уравнениям (1) – (4).

Заключение

Методом граничных состояний решены задачи кручения и для анизотропных цилиндрических тел произвольного поперечного сечения [18]. Причем материал обладал полной анизотропией упругих свойств (21 независимая константа). Однако использовалось общее решение задачи Сен-Венана, полученное С.Г. Лехницким. В связи с этим восстановленные усилия удовлетворяли заданным лишь в интегральном смысле. В качестве достоверных, можно было принять напряжения на участках, достаточно удаленных от мест приложения нагрузки.

В данной работе полученные напряжения достоверны во всей области тела, естественно, с определенной точностью. Количество базисных элементов, которое необходимо использовать при решении задач сильно зависит от геометрии тела, например от расстояния между торцами на которых заданы усилия и, естественно, от сложности ГУ.

Таким образом, метод граничных состояний показал свою эффективность в решении задач кручения трансверсально-изотропного тела вращения, в котором след полученного упругого поля на границе полностью удовлетворяет заданным ГУ, а не удовлетворяет только в интегральном смысле. Это позволяет получить более точное НДС, возникающее в теле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахметов Н.К., Мамедова Т.Б.* Асимптотическое поведение решения задачи кручения радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферической оболочки // Вестник ДГТУ. 2011. Т. 11. № 4(55). С. 455–461.
2. *Миронов Б.Г., Митрофанова Т.В.* Деформированное состояние трансляционно-анизотропных тел при кручении // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. 2011. № 4(72). Ч. 1. С. 57–60.
3. *Соколова М.Ю., Рудаков В.В.* Конечные деформации сплошного цилиндра из несжимаемого упругого анизотропного материала // Известия ТулГУ. Технические науки. 2016. Вып. 11. Ч. 1. С. 253–266.
4. *Соколова М.Ю., Христинич Д.В., Чиков В.С.* Кручение сплошного цилиндра из нелинейного цилиндрически ортотропного материала // Известия ТулГУ. Технические науки. 2017. Вып. 10. С. 156–164.
5. *Васильев А.С., Садырин Е.В., Федотов И.А.* Контактная задача о кручении круглым штампом трансверсально-изотропного упругого полупространства с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием // Вестник ДГТУ. 2013. № 1-2(70-71). С. 25–34.
6. *Миронов Б.Г., Деревянных Е.А.* Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. 2012. № 4 (76). С. 108–112.

7. Банщикова И.А., Цвелодуб И.Ю., Петров Д.М. Деформирование элементов конструкций из сплавов с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в сдвиговом направлении // Ученые записки казанского университета. Физико-математические науки. 2015. Т. 157. Кн. 3. С. 34–41.
8. Нуримбетов А.У. Напряженно-деформированное состояние слоистых композиционных стержней и лопаток при кручении // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 1. С. 59–66.
9. Иванов Д.А. Метод граничных состояний в решении первой основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 66. С. 96–111. DOI: 10.17223/19988621/66/8.
10. Иванов Д.А. Метод граничных состояний в решении второй основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 61. С. 45–60. DOI: 10.17223/19988621/61/5.
11. Иванов Д.А. Решение контактной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения с массовыми силами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 2. С. 49–62. DOI: 10.15593/pern.mech/2019.2.05.
12. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). – М.: Наука, 1978, 464 с.
13. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2. № 2. С. 115–137.
14. Саталкина Л.В. Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. 2007. С. 130–131.
15. Ivanychev D.A. Solving the mixed problem of elasticity theory with mass forces for transversal-isotropic body // Proceedings – 2020 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA 2020. P. 56–61.
16. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 416 с.
17. Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник ЛГТУ. 2016. № 2 (28). С. 16–24.
18. Ivanychev D.A., Levina E.Yu., Abdullakh L.S., Glazkova Yu.A. The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length // International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies. 2019. V. 10. No. 2. P. 183–191. DOI: 10.14456/ITJEMAST.2019.18.

Статья поступила: 15.02.2021

Ivanychev D.A. (2022) BOUNDARY STATE METHOD IN SOLVING TORSION PROBLEMS FOR TRANSVERSELY ISOTROPIC BODIES OF REVOLUTION *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 73–86

DOI 10.17223/19988621/75/7

Keywords: boundary state method, transversely isotropic materials, torsion problem, state space, boundary value problems.

The aim of this work is to develop the method of boundary states for the class of torsion problems as applied to transversely isotropic elastic bodies of revolution. Efforts, displacements, or a combination of both are used as twisting conditions at the border. Proceeding from the general solution to the problem of cross section warping, the basis of the space of internal states is

formed. The search for an internal state is reduced to the study of the boundary state isomorphic to it. The solution is a Fourier series.

The proposed technique is implemented in solving the first main problem for a body in the form of a truncated cone; the second main problem for a circular cylinder; and the main mixed problem for a non-canonical body of revolution. The solution was verified and the calculation accuracy was assessed. The obtained characteristics of the elastic field have a polynomial form. The elastic field in each problem satisfies the specified boundary conditions in the form of their distribution over the surface and does not satisfy them only in the integral sense.

Financial support. The study was carried out with the financial support of RFBR and the Lipetsk Region as part of the research project No. 19-41-480003.

Dmitriy A. IVANYCHEV (Candidate of Physics and Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation). E-mail: lsivdml@mail.ru

REFERENCES

1. Akhmetov N.K., Mamedova T.B. (2011) Asimptoticheskoye povedeniye resheniya zadachi krucheniya radial'no-neodnorodnoy transversal'no-izotropnoy sfericheskoy obolochki [Asymptotic behavior of the solution of the torsion problem for a radially inhomogeneous transversely isotropic spherical shell]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskkiye nauki.* 11(4). pp. 455–461.
2. Mironov B.G., Mitrofanova T.V. (2011) Deformirovannoye sostoyaniye translyatsionno-anizotropnykh tel pri kruchenii [The deformed state of translational anisotropic bodies under torsion]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva.* 4(72). Part 1. pp. 57–60.
3. Sokolova M.Yu., Rudakov V.V. (2016) Konechnyye deformatsii sploshnogo tsilindra iz neszhimayemogo uprugogo anizotropnogo materiala [Finite deformations of a solid cylinder made of an incompressible elastic anisotropic material]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskkiye nauki.* 11. pp. 253–266.
4. Sokolova M.Yu., Khristich D.V., Chikov V.S. (2017) Krucheniye sploshnogo tsilindra iz nelineynogo tsilindricheskogo ortotropnogo materiala [Torsion of a solid cylinder from a nonlinear cylindrically orthotropic material]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskkiye nauki.* 11. pp. 156–164.
5. Vasiliev A.S., Sadyrin E.V., Fedotov I.A. (2013) Kontaktnaya zadacha o kruchenii kruglym shtampom transversal'no-izotropnogo uprugogo poluprostranstva s neodnorodnym transversal'no-izotropnym pokrytiyem [The contact problem on the torsion of a transversely isotropic elastic half-space with a non-uniform transversely isotropic coating by a round stamp]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskkiye nauki.* 1–2(70–71). pp. 25–34.
6. Mironov B.G., Derevyannykh E.A. (2012) Ob obshchikh sootnosheniyakh teorii krucheniya anizotropnykh stержней [On general relations of the theory of torsion of anisotropic rods]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva.* 4(76). pp. 108–112.
7. Banshchikova I.A., Tselodub I.Yu., Petrov D.M. (2015) Deformirovaniye elementov konstruksiy iz splavov s ponizhennoy soprotivlyayemost'yu deformatsiyam polzuchesti v sdvigovom napravlenii [Deformation of structural elements made of alloys with reduced resistance to creep deformations in the shear direction]. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki – Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series.* 157(3). pp. 34–41.
8. Nurimbetov A.U. (2015) Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye sloistnykh kompozitsionnykh stержней i lopatok pri kruchenii [Stress-strain state of laminated composite rods and blades during torsion]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy.* 1. pp. 59–66.

9. Ivanychev D.A. (2020) Metod granichnykh sostoyaniy v reshenii pervoy osnovnoy zadachi teorii anizotropnoy uprugosti s massovymi silami [The method of boundary states in solving the first main problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 66. pp. 96–111. DOI: 10.17223 / 19988621/66/8.
10. Ivanychev D.A. (2019) Metod granichnykh sostoyaniy v reshenii vtoroy osnovnoy zadachi teorii anizotropnoy uprugosti s massovymi silami [The method of boundary states in the solution to the second fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 61. pp. 45–60. DOI: 10.17223/19988621/61/5.
11. Ivanychev D.A. (2019) Resheniye kontaktnoy zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnykh tel vrashcheniya s massovymi silami [Solution of the contact problem of the elasticity theory for anisotropic rotation bodies with mass forces]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 2. pp. 49–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05.
12. Aleksandrov A.Ya., Solov'ev Yu.I. (1978) *Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti (primeneniye metodov teorii funktsii kompleksnogo peremennogo)* [Spatial problems of the elasticity theory (application of methods of the theory of functions of a complex variable)]. Moscow: Nauka.
13. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. (2001) Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineynoy mekhaniki [The method of boundary states for solving problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal*. 2(2). pp. 115–137.
14. Satalkina L.V. (2007) Narashchivaniye bazisa prostranstva sostoyaniy pri zhestkikh ogranicheniyakh k energoyemkosti vychisleniy [Expansion of the basis of the state space under severe limitations on the energy consumption of computations]. *Sbornik tezisov dokladov nauchnoi konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. pp. 130–131.
15. Ivanychev D.A. (2020) Solving the mixed problem of elasticity theory with mass forces for transversal-isotropic body. *2020 2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*. pp. 56–60.
16. Lekhnitskiy S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [The theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow: Nauka.
17. Levina L.V., Novikova O.S., Pen'kov V.B. (2016) Polnoparametricheskoye resheniye zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ogranichennogo tela [Full-parameter solution of the elasticity theory problem for a simply connected bounded body]. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2(28). pp. 16–24.
18. Ivanychev D.A., Levina E.Yu., Abdullakh L.S., Glazkova Yu.A. (2019) The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length. *International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies*. 10(2). pp. 183–191. DOI: 10.14456/ITJEMAST.2019.18.

Received: February 15, 2021

УДК 534.222
DOI 10.17223/19988621/75/8

MSC 35M10, 35M12

Х.Х. Имомназаров, А.Э. Холмуродов, А.Т. Омонов

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ПОРОУПРУГОСТИ¹

Получено фундаментальное решение системы уравнений теории пороупругости для бездиссипативного случая. Показано, что при исчезновении пористости полученное фундаментальное решение переходит к фундаментальному решению системы уравнений теории упругости. Также рассмотрена обратная задача об определении распределенного источника из системы уравнений теории пороупругости по режиму колебаний свободной поверхности. Используя метод сферических средних, получена формула решений рассматриваемой обратной динамической задачи теории пороупругости.

Ключевые слова: *нелинейная математическая модель, прямая задача, пороупругость, линеаризованная модель, обратная задача, распределенный источник, динамическая задача, фундаментальное решение.*

В прикладных задачах распространения упругих волн часто возникает потребность учесть пористость, флюидонасыщенность среды и гидродинамический фон. В частности, эти вопросы возникают в разведочной геофизике при поиске нефтяных слоев и при выборе параметров волнового воздействия на месторождения нефти и газа с целью интенсификации добычи. Аналогичные вопросы имеются и в сейсмологии при геофизическом мониторинге свойств очаговой зоны с целью прогноза землетрясений.

В геофизике динамические и кинематические характеристики упругих волн, распространяющихся в фрагментированных флюидонасыщенных горных породах, несут в себе информацию о строении, составе и условиях залегания пород, они также содержат сведения о литологии пород и характере их границ, трещиноватости, пористости, наличии различного рода нарушений и локальных включений, а также о составе и фазовом состоянии флюидов-заполнителей порового пространства коллекторов. Математические модели в теории волн дают инструмент для определения численных значений скоростей распространения и коэффициентов поглощения упругих сейсмических волн в зависимости от вещественного состава флюидозаполненного коллектора, его строения и влияния окружающей среды. Определяемые значения скорости распространения и коэффициента поглощения упругих сейсмических волн тем точнее, чем реалистичнее и адекватнее математическая модель.

Выявленные в настоящее время особенности поглощения сейсмических волн в трещиновато-пористых средах с одновременным проявлением множественных электросейсмических эффектов не удастся согласовать с простейшими моделями идеально упругой гуковской среды и среды Био. Реальные геологические среды

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (18-51-41002). Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства инновационного развития Республики Узбекистан (OT-Atex-2018-340).

являются многофазными, электропроводящими, трещиноватыми, пористыми и т.д. При распространении сейсмических волн происходит их диссипация, связанная с поглощением энергии.

Квазилинейная система уравнений теории пороупругости

В работе [1] построена нелинейная математическая модель насыщенной жидкостью пористой упругодеформируемой среды. Модель основана на трех основных принципах: выполнение законов сохранения, принцип относительности Галилея, согласованность уравнений движения насыщающей жидкости с условиями термодинамического равновесия.

Обозначим через u – скорость движения упругой пористой среды; g_{ik} – метрический тензор упругой деформации; v – скорость движения жидкости, заполняющей пористую среду; ρ, ρ_s, ρ_l – плотность континуума, парциальная плотность пористого тела, парциальная плотность жидкости соответственно; e, S – энергия и энтропия единицы объема; μ – химический потенциал; T – температура; p – давление.

Пусть плотность равна сумме парциальных плотностей

$$\rho = \rho_s + \rho_l,$$

для которой выполняется закон сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0, \quad j = \rho_s u + \rho_l v. \quad (1)$$

Должна сохраняться энтропия всей системы. Имея в виду, что поток энтропии равен $\frac{S}{\rho} j$, запишем уравнение сохранения энтропии в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{S}{\rho} j \right) = 0. \quad (2)$$

Деформацию пористого пространства опишем уравнением для метрического тензора деформации g_{ik}

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial t} + g_{kj} \partial_i u_j + g_{ij} \partial_k u_j + u_j \partial_j g_{ik} &= 0, \\ \rho_s &= \operatorname{const} \sqrt{\det(g_{ik})}. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) второе соотношение означает, что парциальную плотность ρ_s упругодеформируемого континуума следует связать с определителем метрического тензора деформации g_{ik} .

Закон сохранения импульса имеет вид

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k \Pi_{ik} = 0; \quad (4)$$

поток импульса Π_{ik} определяется по формуле

$$\Pi_{ik} = \rho_s u_i u_k + \rho_l v_i v_k + p \delta_{ik} + h_{ij} g_{jk},$$

где h_{ik} – тензор напряжений.

Одновременно в уравнение движения насыщающей жидкости следует включить силу, обусловленную термодинамическими условиями равновесия,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla)v = -\nabla\mu - \frac{S}{\rho}\nabla T. \quad (5)$$

Законы сохранения (1), (2) и уравнения (3) – (5) в качестве следствия допускают тождественное выполнение закона сохранения энергии, выраженного уравнением вида

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} Q = 0, \quad (6)$$

где поток энергии Q определяется формулой

$$Q_k = \left(\mu + \frac{v^2}{2} + \frac{TS}{\rho} \right) j_k + \rho_s (u, u - v) u_k + u_l h_{km} g_{ml}.$$

При этом выполняется первое начало термодинамики для рассматриваемой системы

$$de_0 = TdS + \mu d\rho + (u - v, dj_0) + \frac{1}{2} h_{ik} dg_{ik}. \quad (7)$$

Здесь «0» помечены величины, относящиеся к системе отсчета, в которой насыщающая жидкость покоится.

Давление для системы определяется стандартным способом

$$p = -e_0 + TS + \mu\rho + (u - v, j_0).$$

Уравнение движения жидкости принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla)v = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\rho_s}{2\rho}\nabla(u - v)^2 - \frac{h_{ik}}{2\rho}\nabla g_{ik}.$$

Распространение нелинейных акустических волн в насыщенной жидкостью пористых средах можно записать как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j &= 0, \quad j = \rho_s u + \rho_l v, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{S}{\rho} j \right) &= 0, \\ \frac{\partial g_{ik}}{\partial t} + g_{kj} \partial_l u_j + g_{ij} \partial_k u_j + u_j \partial_j g_{ik} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\rho_s = \operatorname{const} \sqrt{\det(g_{ik})}, \quad \rho_l = \rho - \rho_s,$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} Q = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla)v = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\rho_s}{2\rho}\nabla(u - v)^2 - \frac{h_{ik}}{2\rho}\nabla g_{ik}.$$

Система уравнений (8) замыкается уравнением состояния

$$e_0 = e_0(\rho, S, j_0, g_{ik}).$$

Линейная система уравнений теории пороупругости

Показана гиперболичность линейризованной относительно произвольного гидродинамического фона системы уравнений в обратимом гидродинамическом приближении (в отсутствие диссипации энергии). Эта линейризованная система уравнений для произвольного гидродинамического фона в случае однородной среды имеет вид [3–5]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta u - (a_1 - c_t^2) \nabla \operatorname{div} u + a_2 \nabla \operatorname{div} v = f, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a_4 \nabla \operatorname{div} v + a_3 \nabla \operatorname{div} u = f, \quad (10)$$

где f – массовая сила.

Основным отличием линейризованной модели Доровского от хорошо известных моделей Френкеля – Био [6–9] является то, что модель Доровского описывается тремя упругими постоянными [1–3]. Как показано в [10, 11], коэффициенты a_k , $k = \overline{1, 4}$, выражаются через скорости поперечной c_s , продольных c_{p_m} ($m = 1, 2$) волн, а также отношения парциальной плотности жидкости ρ_l к парциальной плотности упругого пористого тела ρ_s с помощью формул

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\rho_l}{\rho} (c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2) + \frac{4}{3} \frac{\rho_s^2}{\rho^2} c_s^2 + \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho} \tilde{z}, \\ a_2 &= \frac{\rho_l}{\rho} \left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - 2\tilde{z} - \frac{4}{3} c_s^2 \right), \\ a_3 &= \frac{\rho_s}{\rho} \left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - 2\tilde{z} - \frac{4}{3} c_s^2 \right), \\ a_4 &= \frac{\rho_s}{\rho} \left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{4}{3} c_s^2 \right) - \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho} \tilde{z}, \\ \tilde{z} &= \frac{1}{2} \left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_s}{\rho} c_s^2 \right) + \sqrt{\frac{1}{4} (c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2)^2 - \frac{16}{9} \frac{\rho_l \rho_s}{\rho^2} c_s^4}, \quad \rho = \rho_s + \rho_l. \end{aligned}$$

Следует отметить, что, в принципе, нельзя использовать теорию Френкеля – Био для постановки обратных задач и замкнутого численного моделирования различных процессов в пористой среде, зная распределения скоростей распространения сейсмических волн c_s, c_{p_1}, c_{p_2} и плотностей ρ_l, ρ_s [12].

Фундаментальное решение системы уравнений пороупругости

При изучении свойств решений уравнений в частных производных большое значение имеет фундаментальное решение. Анализ свойств этих волн представляет интерес для изучения сложных геофизических процессов, протекающих в геологических средах с присутствием пористости и флюидонасыщенности. Для проведения таких исследований может оказаться полезным использование явных формул для изучаемых волновых полей. Эти формулы могут быть получены из фундаментального решения системы уравнений теории пороупругости.

В данном разделе построено фундаментальное решение системы уравнений теории пороупругости для однородной среды с использованием подхода, предложенного в работе В.Г. Романова [13].

Для удобства напомним систему уравнений теории пороупругости (9), (10) в матричном виде

$$L w(t, x) = 0,$$

где
$$L w(t, x) = \begin{cases} \partial_t^2 u - c_t^2 \Delta u + a_1 \nabla \operatorname{div} u + a_2 \nabla \operatorname{div} v \\ \partial_t^2 v + a_3 \nabla \operatorname{div} u - a_4 \nabla \operatorname{div} v \end{cases}$$

Здесь $w(t, x) = (u(t, x), v(t, x))^T$, а знак T означает транспонирование.

Пусть $t \in R^1$, $x \in R^3$; матрица $G(t, x) = (G_{ij}(t, x))_{6 \times 3}$ – фундаментальное решение задачи Коши для системы уравнений теории пороупругости, т.е. вектор $G_j(t, x) = (G_{1j}(t, x), G_{2j}(t, x), \dots, G_{6j}(t, x))$ есть решение системы уравнений теории пороупругости

$$\begin{aligned} (G_{1j}(t, x), G_{2j}(t, x), G_{3j}(t, x)) &= u_j(t, x), \\ (G_{4j}(t, x), G_{5j}(t, x), G_{6j}(t, x)) &= v_j(t, x), \\ L G_j(t, x) &= e_j \delta(t) \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3), \end{aligned} \tag{11}$$

удовлетворяющее условию

$$G_j(t, x)|_{t < 0} = 0. \tag{12}$$

В системе (11) e_j – базисный вектор в R^3 ; $\delta(\cdot)$ – функция Дирака. Далее через $\theta(\cdot)$ обозначим функцию Хевисайда.

Теорема. Фундаментальное решение системы уравнений теории пороупругости имеет вид

$$\begin{aligned} (G_{1j}(t, x), G_{2j}(t, x), G_{3j}(t, x)) &= u_j(t, x), \\ (G_{4j}(t, x), G_{5j}(t, x), G_{6j}(t, x)) &= v_j(t, x), \\ u(t, x) &= \frac{1}{4 \pi (c_1^2 - c_2^2)} \left[\frac{(c_1^2 - c_2^2) e}{c_t^2 |x|} \delta(t - |x|/c_t) + \frac{a_4 - c_2^2}{a_3} (c_1^2 - a_4 + a_3) \right. \\ \nabla \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \theta(t - |x|/c_2) \right) &- \frac{a_4 - c_1^2}{a_3} (c_2^2 - a_4 + a_3) \nabla \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \theta(t - |x|/c_1) \right) - \\ &\left. - (c_1^2 - c_2^2) \nabla \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \theta \left(t - \frac{|x|}{c_t} \right) \right) \right]; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \frac{1}{4 \pi (c_1^2 - c_2^2)} \left[(c_1^2 - a_4 + a_3) \nabla \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \theta(t - |x|/c_2) \right) - \right. \\ &\left. - (c_2^2 - a_4 + a_3) \nabla \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \theta(t - |x|/c_1) \right) \right], \quad e = (e_1, e_2, e_3). \end{aligned} \tag{14}$$

Доказательство. Следуя [13], введем скалярные u_l, v_l и векторные u_t, v_t потенциалы

$$u_l = \operatorname{div} u ; \quad (15)$$

$$u_t = \operatorname{rot} u ; \quad (16)$$

$$v_l = \operatorname{div} v ; \quad (17)$$

$$v_t = \operatorname{rot} v . \quad (18)$$

Функции u, v связаны с u_l, v_l, u_t, v_t равенствами

$$\Delta u = \nabla u_l - \operatorname{rot} \operatorname{rot} u_t ; \quad (19)$$

$$\Delta v = \nabla v_l - \operatorname{rot} \operatorname{rot} v_t . \quad (20)$$

Используя перестановочность волновых операторов с операторами $\operatorname{rot}, \nabla$, получим относительно u_t, v_t, u_l, v_l задачу Коши с нулевыми данными. Решая полученную задачу Коши, находим

$$v_t = 0, \quad u_t = \frac{1}{4\pi c_t^2} \operatorname{rot} \left(\frac{e}{|x|} \delta(t - |x|/c_t) \right); \quad (21)$$

$$v_l = \frac{c_1^2 - a_4 + a_3}{4\pi(c_1^2 - c_2^2)c_2^2} \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \delta(t - |x|/c_2) \right) - \frac{c_2^2 - a_4 + a_3}{4\pi(c_1^2 - c_2^2)c_1^2} \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \delta(t - |x|/c_1) \right); \quad (22)$$

$$u_l = \frac{a_4 - c_2^2}{4\pi a_3 c_2^2} \frac{c_1^2 - a_4 + a_3}{c_1^2 - c_2^2} \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \delta(t - |x|/c_2) \right) - \frac{a_4 - c_1^2}{4\pi a_3 c_1^2} \frac{c_2^2 - a_4 + a_3}{c_1^2 - c_2^2} \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \delta(t - |x|/c_1) \right). \quad (23)$$

Используя формулы (15) – (18), запишем системы (19), (20) для u, v в виде

$$\Delta \left(u - \frac{e}{4\pi c_t^2 |x|} \delta(t - |x|/c_t) \right) = \frac{1}{4\pi(c_1^2 - c_2^2)} \left[\frac{a_4 - c_2^2}{a_3 c_2^2} (c_1^2 - a_4 + a_3) \nabla \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \delta(t - |x|/c_2) \right) - \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_t^2} \nabla \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \delta(t - |x|/c_t) \right) \right]; \quad (24)$$

$$\Delta v = \frac{1}{4\pi(c_1^2 - c_2^2)} \left[\frac{c_1^2 - a_4 + a_3}{c_2^2} \nabla \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \delta(t - |x|/c_2) \right) \right] - \frac{c_2^2 - a_4 + a_3}{c_1^2} \nabla \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \delta(t - |x|/c_1) \right). \quad (25)$$

Решением уравнений (24), (25) являются функции [13]

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{4\pi(c_1^2 - c_2^2)} \left[\frac{(c_1^2 - c_2^2)e}{c_1^2 |x|} \delta(t - |x|/c_1) + \frac{a_4 - c_2^2}{a_3} (c_1^2 - a_4 + a_3) \right. \\
 \nabla \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \theta(t - |x|/c_2) \right) &- \frac{a_4 - c_1^2}{a_3} (c_2^2 - a_4 + a_3) \nabla \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \theta(t - |x|/c_1) \right) - \\
 &\left. - (c_1^2 - c_2^2) \nabla \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \theta(t - |x|/c_1) \right) \right]; \quad (26) \\
 v &= \frac{1}{4\pi(c_1^2 - c_2^2)} \left[(c_1^2 - a_4 + a_3) \nabla \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \theta(t - |x|/c_2) \right) - \right. \\
 &\left. - (c_2^2 - a_4 + a_3) \nabla \operatorname{div} \left(\frac{e}{|x|} \theta(t - |x|/c_1) \right) \right].
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Отметим, что при исчезновении пористости формула (26) переходит к фундаментальному решению системы уравнений теории упругости [13, 14].

Обратная динамическая задача для системы уравнений пороупругости

Пусть полупространство $R_+^3 = \{x: (x_1, x_2) \in R^2, x_3 > 0\}$ заполнено изотропной пористой средой.

Задача А. Требуется по режиму колебаний свободной поверхности

$$u|_{x_3=0} = u^0(t, x'), \quad t > 0, \quad x' = (x_1, x_2) \in R^2 \quad (27)$$

определить вектор-функцию $f(x)$ в системе уравнений теории пороупругости

$$\begin{aligned}
 L_1(u, v) &\equiv \partial_t^2 u - c_t^2 \Delta u + (c_t^2 - a_1) \nabla \nabla \cdot u + a_2 \nabla \nabla \cdot v = g(t) \cdot f(x), \\
 L_2(u, v) &\equiv \partial_t^2 v + a_3 \nabla \nabla \cdot u - a_4 \nabla \nabla \cdot v = g(t) \cdot f(x)
 \end{aligned} \quad (28)$$

с начальными и граничными условиями

$$u|_{t<0} = v|_{t<0} \equiv 0; \quad (29)$$

$$\bar{h}_{13} = \bar{h}_{23} = 0, \quad \bar{h}_{33} + \bar{P} = 0, \quad \frac{\rho_{0l}}{\rho_0} \bar{P} = 0, \quad x_3 = 0; \quad (30)$$

$$\bar{P} = (K - \rho \rho_s \alpha) \nabla \cdot u - \rho \rho_l \alpha \nabla \cdot v, \quad \bar{h}_{k3} = -\mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_k} \right), \quad k = 1, 2;$$

$$\bar{h}_{33} = -2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \left(\lambda - \frac{\rho_s}{\rho} K \right) \nabla \cdot u + \frac{\rho_l}{\rho} K \nabla \cdot v, \quad K = \lambda + \frac{2}{3} \mu.$$

Здесь функция $g(t)$ известна; $g(t)$ – параметры Ламе; $\rho^3 \cdot \alpha_3$ – второй модуль всестороннего сжатия; $\Delta, \nabla, \nabla \cdot$ и ∇_x – операторы Лапласа, градиента, дивергенции и ротора по $x = (x_1, x_2, x_3)$ соответственно; $\alpha = \rho \alpha_3 + K/\rho^2$.

Удобно представить систему дифференциальных уравнений (28) в виде

$$\begin{aligned} L_1(u, v) &\equiv \partial_t^2 u + c_1^2 \nabla_x \nabla_x u - a_1 \nabla \nabla \cdot u + a_2 \nabla \nabla \cdot v = g(t) \cdot f(x), \\ L_2(u, v) &\equiv \partial_t^2 v + a_3 \nabla \nabla \cdot u - a_4 \nabla \nabla \cdot v = g(t) \cdot f(x). \end{aligned} \quad (28')$$

Здесь мы воспользовались хорошо известной формулой векторного анализа

$$\Delta u = \nabla \nabla \cdot u - \nabla_x \nabla_x u.$$

Пусть $w = (u, v)^T$, $u, v \in C^3(t \geq 0, x_3 \geq 0)$ есть решение задачи А. Из условий (27), (30) находятся функции

$$u|_{(x_3=0)} = u^1(t, x'), \quad v|_{(x_3=0)} = v_3^1(t, x').$$

Положим $u = u - x_3 u^1$, $v = v - x_3 v^1$, где $v_k^1 = (v_k)_{(x_3)}|_{(x_3=0)}$, $k=1, 2$. Тогда $w \in C^2(t \geq 0, x_3 \geq 0)$ и $Lw = g \cdot f - G$, где $f = (f, f)^T$, $G = L[x_3 \cdot w^1] = (L_1(x_3 u^1, x_3 v^1), L_2(x_3 u^1, x_3 v^1))^T$, причем $w|_{x_3=0} \equiv 0$. Обозначим через w четное продолжение w в полупространстве $x_3 < 0$. Положим $\omega = w + q$, где $Lq = G$, $q|_{t < 0} \equiv 0$. Тогда приходим к следующей задаче (задача В):

$$\begin{aligned} L[\omega] &= g(t) \cdot f(x), \quad x \in R^3 \\ \omega|_{t < 0} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Требуется по известной функции $u|_{x_3=0} = u^0(t, x')$ восстановить $f(x)$ ($g(t)$ – заданная функция).

Прежде чем сформулировать результаты, введем ряд понятий и обозначений: P_u – ортогональный проектор $P_u w = u$, $P_v = I - P_u$, $\tilde{T} = (\tilde{t}_{ij})$, $\tilde{T}^{-1} = (\tilde{t}_{ij}^{-1})$, $i, j = 1, 2$ такие, что

$$\tilde{T} \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ -a_3 & a_4 \end{bmatrix} \tilde{T}^{-1} = \text{diag}(c_1^2, c_2^2).$$

Далее, следуя [15], определим $C^{\infty, 0}$ – класс вектор-функций со следующими условиями:

$$f(x) \in C^\infty(R^3), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \cdot |f(x)| < \infty; \quad (31)$$

$$\nabla \cdot f, \quad \nabla_x f \in C_0^\infty(R^3); \quad (32)$$

$$(\text{supp} \nabla \cdot f \cup \text{supp} \nabla_x f) \cap \{x \mid x_3 = 0\} = \emptyset. \quad (33)$$

Класс функций, удовлетворяющих первым двум условиям, обозначим через $C_1^{\infty, 0}$.

Пусть F_0 – множество матриц $F(x) = (F_{ij}(x))$, ($i, j = 1, 2$, F_{1j} – вещественные функции, $F_{2j} = (F_{2j}^1, F_{2j}^2, F_{2j}^3)$) – вектор-функции, такие, что

$$F_{ij}(x', x_3) = F_{ij}(x', -x_3), \quad F_{ij} \in C_0^\infty, \quad x' = (x_1, x_2), \quad (34)$$

$$JF = 0, \quad (35)$$

$$J F = \left(\int_0^\infty F_{12} dx_3, \int_0^\infty F_{22} dx_3, \nabla \cdot F_2 \right),$$

$$F_k(x) = F_{k1}(x) + \int_0^\infty F_{k2} dx_3, \quad k = 1, 2,$$

$$\text{supp } F \cap \{x \mid x_3 = 0\} = \emptyset.$$

Класс матриц, удовлетворяющих условиям (34), (35), обозначим $F_{0,1}$.

Для произвольной вектор-функции $f \in C^1(R^3)$ положим

$$f_+(x) = (f(x', x_3) + f(x', -x_3))/2. \tag{36}$$

Тогда функция f восстанавливается по функциям $f_+, (f_{x_3})_+$ по формуле

$$f(x) = f_+(x) + \int_0^{x_3} (f_{x_3})_+ dx_3. \tag{37}$$

$L_{2,\rho}(R_+^3, \rho(x))$ – пространство функций, суммируемых с квадратом на R_+^3 с весом $\rho(x) = x_3^{-1}$.

Обозначим через F замыкание $F_0 \subseteq L_{2,\rho}$ по норме ($F \in F_0$)

$$\|F\| = \sum_{i,j=1}^2 \|F_{ij}\|_{L_{2,\rho}}^2.$$

Введем также операторы $H_c, S_c, \hat{H}, \hat{S}, A$:

$$(H_c u)(x) = i 2 \sqrt{\pi} c x_3 \int \delta'(|x' - y'|^2 - c^2 t^2 - x_3^2) u(t, y') dy' dt; \tag{38}$$

$$(S_c f)(t, x') = -2 \pi c t \int \delta'(|x' - y'|^2 - c^2 t^2 + y_3^2) f(y) dy; \tag{39}$$

$$\hat{H} = t_{11} H_{c_{h_1}} \oplus t_{12} H_{c_{h_2}} \oplus H_{c_t}, \quad \hat{S} = t_{11} S_{c_{h_1}} \oplus t_{12} S_{c_{h_2}} \oplus S_{c_t};$$

$$A f = F, \quad F(x) = \begin{bmatrix} (\nabla \cdot f)_+ & (\nabla \cdot f_{x_3})_+ \\ (\nabla x f)_+ & (\nabla x f_{x_3})_+ \end{bmatrix}, \quad f \in C^\infty. \tag{40}$$

Лемма 1. Имеет место тождество $A L_j = \hat{L}_j A, \quad j = 1, 2$, где

$$\hat{L}_1 = t_{11} H_{c_{h_1}} \oplus t_{12} H_{c_{h_2}} \oplus H_{c_t}, \quad \hat{L}_2 = t_{21} H_{c_{h_1}} \oplus t_{22} H_{c_{h_2}} \oplus \partial_t^2.$$

Доказательство леммы следует, из коммутруемости операторов $\nabla \cdot, \nabla x, H_c, \partial_t^2$ и "+".

Рассмотрим задачу Коши:

$$L[w] = 0, \quad x \in R^3, \quad t > 0; \tag{41}$$

$$w|_{t=0} = f(x), \quad \partial_t w|_{t=0} = 0. \tag{42}$$

Лемма 2. Для любой $f \in C^{\infty,0}$ существует единственное решение задачи Коши (41), (42) $w(t, x)$ из класса $C_1^{\infty,0}$ для любого $t > 0$.

Доказательство леммы 2 следует из леммы 1 [15], следствий 3 [15] и решения волнового уравнения при фиксированном t с начальными данными из C_0^∞ .

Введем оператор S с областью определения F_0 переводящий матрицу $F \in F_0$ в матрицу

$$U(t, x') = \left[\begin{array}{cc} (\nabla \cdot u)_+ & (\nabla \cdot u_{x_3})_+ \\ (\nabla x u)_+ & (\nabla x u_{x_3})_+ \end{array} \right] \Big|_{x_3=0, t>0} \quad (43)$$

где $u = P_u w$, $w(t, x)$ – решение задачи Коши (41), (42) и $f = A^{-1} F$.

Таким образом задача В свелась к следующей задаче C : по заданной матрице $U(t, x')$ найти F из уравнения $A F = U$. Для этой задачи справедлива.

Теорема [15]. Имеют место утверждения:

1. Оператор S продолжается по непрерывности до изометрического оператора $S : F \rightarrow L_{2,p}$, т.е.

$$\|SF\| = \|F\| \quad \forall F \in F.$$

2. Матрица $U(t', x)$ из $L_{2,p}$ принадлежит области значения оператора $S \Leftrightarrow \hat{H}U = 0$ и $\hat{J}\hat{S}^*U = 0$.

3. Если $SF = U$, то $F = \hat{S}^*U$ (формула обращения).

Пусть

$$(Wu) = \partial_t u^g(t, x),$$

где $u^g = P_{u^g} w^g$, $w^g(t, x)$ – решение задачи $L w^g = g \cdot f$, $w^g|_{t<0} \equiv 0$.

По вектору $(\partial_t u^g, \partial_t u_{x_3}^g)|_{x_3=0}$ можно найти

$$(u, u_{x_3})|_{x_3=0} = W^{-1}(\partial_t u^g, \partial_t u_{x_3}^g)|_{x_3=0}. \quad (44)$$

Следовательно из $L w = 0$, с учетом (44), найдем $u_{x_3 x_3}|_{x_3=0}$. Для этого достаточно вектор w представить в виде суммы потенциальной и соленоидальной части. Тем самым $Au|_{x_3=0}$. Из теоремы вытекает

Следствие [16]. Если $g \in C(0, \infty)$, $g \neq 0$, $f \in C^{\infty,0}$, то решение задачи В единственно, причем вектор-функция f определяется следующей цепочкой отображений:

$$\begin{aligned} (u^g, u_{x_3}^g)|_{x_3=0} &\xrightarrow{\partial_t} (\partial_t u^g, \partial_t u_{x_3}^g)|_{x_3=0} \xrightarrow{W^{-1}} (u, u_{x_3})|_{x_3=0} \rightarrow \\ &\xrightarrow{S^{-1}} A u|_{x_3=0} \xrightarrow{A^{-1}} A u|_{t=0} \rightarrow f(x). \end{aligned}$$

Замечание. Задача А возникает при рассмотрении коэффициентных обратных задач для системы уравнений теории пороупругости с помощью метода линеаризации.

Заключение

В данной работе моделирование ведется в терминах c_s, c_{p_1}, c_{p_2} и парциальных плотностях ρ_l, ρ_s с использованием факта установленного существования взаимно-однозначного соответствия между упругими параметрами λ, μ, α теории В.Н. Доровского [1–3] и скоростями распространения сейсмических волн c_s, c_{p_1}, c_{p_2} в упруго-пористых средах. В первом разделе для полноты изложения приведена полученная в [1–3] квазилинейная система уравнений теории пороупругости.

Во втором – получена линейная система уравнений теории пороупругости для однородной среды.

В третьем разделе построено фундаментальное решение для системы уравнений теории пороупругости в случае однородной среды.

В четвертом – рассмотрена обратная задача об определении источника в полупространстве из системы уравнений теории пороупругости по дополнительной информации о режиме свободной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Доровский В.Н. Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. Т. 30. № 7. С. 39–45.
2. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В., Роменский Е.И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // Физика горения и взрыва. 1993. Т. 29. № 1. С. 93–103.
3. Блохин А.М., Доровский В.Н. Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. Новосибирск, 1994. 183 с.
4. Imomnazarov Kh.Kh. Uniqueness of determination of a source in the Cauchy problem for the system of equations of continual filtration theory // Appl. Math. Lett. 1998. V. 11(2). P. 75–79.
5. Алексеев А.С., Имомназаров Х.Х., Грачев Е.В., Рахмонов Т.Т., Имомназаров Б.Х. Прямые и обратные динамические задачи для системы уравнений континуальной теории фильтрации // Сибирский журн. индустр. матем. 2004. Т. 7. № 1. С. 3–8.
6. Imomnazarov SH., Imomnazarov Kh, Kholmurodov A., Dilmurodov N. On a problem arising in a two-fluid medium // International Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2018. V. 11(3). P. 49–57.
7. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // J. Acoust. Soc. Am. 1956. V. 28 (2). P.168–178. DOI: 10.1121/1.1908239.
8. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range // J. Acoust. Soc. Am. 1956. V. 28(2). P.179–191. DOI: 10.1121/1.1908241.
9. Pride S.R. Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media // Phys. Rev. B. 1994. V. 50(21). P. 15678–15696. DOI: 10.1103/PhysRevB.50.15678.
10. Имомназаров Х.Х. Несколько замечаний для системы уравнений Био, описывающей пористую среду // Материалы международной конференции «Выпускник НГУ и научно-технический прогресс». Часть 1. Новосибирск, 1999. С. 46–47.
11. Imomnazarov Kh.Kh. Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium // Appl. Math. Lett. 2000. V. 13(3). P. 33–35.
12. Imomnazarov K.K., Imomnazarov S.K., Korobov P.V., Kholmurodov A.E. Direct and inverse problems for nonlinear one-dimensional poroelasticity equations // Doklady RAS. 2014. V. 89(2). P. 250–252
13. Романов В.Г. Структура решения задачи Коши для системы уравнений электродинамики и упругости в случае точечных источников // Сибирский матем. журнал. 1995. Т. 36. № 3. С. 628–649.
14. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. М.: Мир, 1983. 830 с.

15. Холмуродов А.Э., Дилмуродов Н. Математическое моделирование одной нелинейной динамической системы, возникающей в насыщенной жидкостью пористой среде // Проблемы вычислительной и прикладной математики. ТУИТ. 2017. № 2(8). С. 56–61.
16. Холмуродов А.Э., Дильмуродов Н. Математическое моделирование одномерного нелинейного движения в насыщенной жидкостью пористой среде // Математическое моделирование и численные методы. МГТУ. 2018. № 1. С. 21–34. DOI: 10.18698/2309-3684-2018-1-315.
17. Имомназаров Х.Х., Туйчиева С.Т. Обратная задача для системы уравнений пороупругости // Доклады АН Республики Узбекистан. 2015. № 2. С. 33–36.

Статья поступила 11.08.2020

Imomnazarov Kh.Kh., Kholmurodov A.E., Omonov A.T. (2022) DIRECT AND INVERSE DYNAMIC PROBLEMS OF POROELASTICITY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 87–99

DOI 10.17223/19988621/75/8

Keywords: direct problem, poroelasticity, distributed source, inverse problem, fundamental solution.

In applied problems related to propagation of elastic waves, it is often necessary to take into account porosity, fluid saturation of the media, and the hydrodynamic background. Real geological media are multiphase, electrically conductive, fractured, porous, etc. When propagating, seismic waves dissipate due to the absorption of energy. In this paper, the wave propagation process occurs in terms of partial densities of phases, stress tensor, pore pressure, and velocities of the corresponding phases. In the first section, for completeness, the presentation presents a quasilinear system of equations of the poroelasticity theory [1–3]. In the second section, the corresponding linear system of equations of the poroelasticity theory for a homogeneous medium is obtained. In the third section, we construct a fundamental solution for the system of equations of the poroelasticity theory obtained in the second section. In the final section, the inverse poroelasticity problem of determining the distributed source in a half-space using additional information about the free surface mode is considered.

Financial support. This work was carried out with partial financial support from the Russian Foundation for Basic Research (18-51-41002) and the Ministry of Innovative Development of the Republic of Uzbekistan (OT-Atex-2018-340).

Kholmatjon Kh. IMOMNAZAROV (Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Laboratory of Computational Problems of Geophysics of the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: imom@omzg.ssc.ru

Abdulhamid E. KHOLMURODOV (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Dean of the Physics and Mathematics Faculty of Karshi State University, Karshi, Uzbekistan). E-mail: abishx@mail.ru

Alisher T. OMONOV (Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics, Tashkent State Economic University, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: alisher.omonov1992@mail.ru

REFERENCES

1. Dorovsky V.N. (1989) Kontinual'naya teoriya fil'tratsii [Continuous theory of filtration]. *Geologiya i Geofizika – Soviet Geology and Geophysics*. 30(7). pp. 39–45.
2. Dorovsky V.N., Perepechko Yu.V., Romensky E.I. (1993) Volnovyye protsessy v nasyshchennykh poristykh uprugodeformiruyemykh sredakh [Wave processes in saturated porous elastically deformed media]. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 29 (1). pp. 93–103.

3. Blokhin A.M., Dorovskiy V.N. (1994) *Problemy matematicheskogo modelirovaniya v teorii mnogokorstnogo kontinuum* [Problems of mathematical modeling in the theory of multispeed continuum]. Novosibirsk: Siberian Branch of the Russian Academy of Science.
4. Imomnazarov Kh.Kh. (1998) Uniqueness of determination of a source in the Cauchy problem for the system of equations of continual filtration theory. *Applied Mathematics Letters*. 11(2). pp. 75–79.
5. Alekseyev A.S., Imomnazarov Kh.Kh., Grachev E.V., Rakhmonov T.T., Imomnazarov B.Kh. (2004) Pryamye i obratnyye dinamicheskiye zadachi dlya sistemy uravneniy kontinual'noy teorii fil'tratsii [Direct and inverse dynamical problems for the system of equations of the continuous filtration theory]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*. 7(1). pp. 3–8.
6. Imomnazarov Sh., Imomnazarov Kh., Kholmurodov A., Dilmuradov N. (2018) On a Problem Arising in a Two-Fluid Medium. *International Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 11(3). pp. 49–57.
7. Biot M.A. (1956) Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*. 28(2). pp. 168–178. DOI: 10.1121/1.1908239.
8. Biot M.A. (1956) Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*. 28(2). pp. 179–191. DOI: 10.1121/1.1908241.
9. Pride S.R. (1994) Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media. *Physical Review B, Condensed Matter*. 50(21). pp. 15678–15696. DOI: 10.1103/PhysRevB.50.15678.
10. Imomnazarov Kh. (1999) Neskol'ko zamechaniy dlya sistemy uravneniy Bio, opisvyayushchey poristuyu sredu [Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium]. *Materialy mezhdunarodnoy konferentsii "Vypusknik NGU i nauchno-tehnicheskii progress". Part 1. Novosibirsk, 1999*. pp. 46–47.
11. Imomnazarov Kh. (2000) Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium. *Applied Mathematics Letters*. 13(3). pp. 33–35.
12. Imomnazarov K.K., Imomnazarov S.K., Korobov P.V., Kholmurodov A.E. (2014) Direct and inverse problems for nonlinear one-dimensional poroelasticity equations. *Doklady RAS*. 89(2). pp. 250–252
13. Romanov V.G. (1995) Structure of a solution to the Cauchy problem for the system of the equations of electrodynamics and elasticity in the case of point sources. *Siberian Mathematical Journal*. 36(3). pp. 541–561.
14. Aki K., Richards P. (1983) *Quantitative Seismology*. San Francisco: Freeman.
15. Kholmurodov A.E., Dilmurodov N. (2017) Matematicheskoe modelirovanie odnoy nelineynoy dinamicheskoy sistemy, vznikayushchey v nasyshchennoy zhidkost'yu poristoy srede [Mathematical modeling of a nonlinear dynamical system arising in a fluid-saturated porous medium]. *Problemy vychislitel'noy i prikladnoy matematiki – Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(8). pp. 56–61.
16. Kholmurodov A.E., Dilmuradov N. (2018) Matematicheskoe modelirovanie odnomernogo nelineynogo dvizheniya v nasyshchennoy zhidkost'yu poristoy srede [Mathematical modeling of one-dimensional non-linear motion in a fluid-saturated porous medium]. *Matematicheskoye modelirovaniye i chislennyye metody – Mathematical modeling and numerical methods*. 1(1). pp. 21–34. DOI: 10.18698/2309-3684-2018-1-315.
17. Imomnazarov Kh., Tuychiyeva S. (2015) Obratnaya zadacha dlya sistemy uravneniy porouprugosti [An inverse problem for a system of equations of poroelasticity]. *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan*. 2(2). pp. 33–36.

Received: August 11, 2020

УДК 532.546
DOI 10.17223/19988621/75/9

Д.Ф. Исламов, А.Ш. Рамазанов

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ДВУМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В СЛОИСТОМ ПЛАСТЕ¹

Исследована задача о нестационарном температурном поле при двумерной фильтрации жидкости в слоистом пласте с учетом баротермического эффекта, радиальной и вертикальной неоднородности по проницаемости. Приводятся результаты сравнения аналитического и численного решения для температуры притекающей из пласта жидкости для двух различных моделей неоднородности пласта. Из полученных результатов следует, что для расчета нестационарной температуры в слоистом пласте с радиальной неоднородностью в прискважинной зоне необходимо использовать двумерную модель фильтрации для корректного учета перетоков флюида между слоями.

Ключевые слова: *термометрия, двумерная фильтрация, скважина, слоистый пласт, радиальная неоднородность, внутрислоистый переток.*

Методика интерпретации данных термогидродинамических исследований (ТГДИ) основывается на моделях одномерной фильтрации жидкости в однородном по вертикали пласте [1–4]. На самом деле пласт может быть существенно слоистым и каждый слой может иметь свои индивидуальные параметры радиальной неоднородности. Характер течения жидкости к эксплуатационной скважине в слоистом пласте зависит от параметров слоев. В связи с этим есть необходимость исследования влияния перетока жидкости между пропластками на нестационарную температуру притекающей в скважину жидкости. Совершенствование моделей термогидродинамических процессов и методов определения фильтрационных параметров пластовых систем является актуальным и имеет важное значение для практики скважинной термометрии.

Изучению термогидродинамических процессов с учетом баротермического эффекта в пластах посвящены многочисленные публикации отечественных и зарубежных исследователей [5–10]. В работе [5] представлена численная модель для оценки проницаемости и скин-фактора пласта по температурным замерам в скважине. Установлено, что температурный отклик чувствителен к радиусу и проницаемости зоны загрязнения пласта. Аналогичная модель рассматривается в работе [6], где показано использование численной модели для интерпретации полевых данных. Сделан вывод, что для корректной интерпретации термогидродинамических исследований пласта требуется привлекать дополнительную информацию о предыстории работы скважины. В работе [7] рассматривается модель термогидродинамического процесса при фильтрации жидкости в квазистационарном поле давления. Пропластки слоистого пласта при этом считаются гидродинамически изолированными, фильтрация жидкости в них одномерная. Температур-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-11-2021-061).

ное поле двумерное, на модельных примерах демонстрируется важность учета вертикальной теплопроводности.

В работе [8] представлена термогидродинамическая модель, которая позволяет учесть нестационарность поля давления при исследовании баротермического эффекта, слоистую неоднородность залежи, вклад теплообмена пласта с окружающими породами, вклад анизотропии пласта и окружающих пород в температурное поле, а также вертикальные распределения температуры в пласте и окружающих породах.

Авторами [9] методом регуляризации решается обратная задача об определении фильтрационных параметров слоистого пласта по измеренным давлению и температуре в скважине после пуска ее в работу. Используются одномерные модели теплопереноса в пласте и скважине, перетоки между отдельными слоями не рассматриваются.

В работе [10] представлена аналитическая модель для расчета температурного поля в слоистом пласте с учетом перетоков между слоями. Для расчета нестационарной температуры притекающей жидкости из отдельного пропластка предлагается использовать одномерную модель фильтрации, а для учета перетоков использовать поправку к дебиту из этого пропластка, учитывающую вертикальную и радиальную неоднородности пласта, на основе алгоритма, описанного в [11]. В работе [11] отмечается, что поправки к дебиту справедливы для достаточно больших времен эксплуатации скважины.

Как показывает обзор опубликованных работ, несмотря на то, что нестационарные температурные поля при фильтрации в насыщенной пористой среде с учетом термодинамических эффектов достаточно хорошо исследованы как в России, так и за рубежом, остается слабо изученным вопрос, связанный с влиянием перетоков между отдельными пропластками в слоистом пласте на измеряемую в скважине нестационарную температуру. Этот вопрос особенно важен при зондировании прискважинной зоны пласта, при определении границ изменения проницаемости в пласте по нестационарной температуре в скважине.

В данной работе исследуется численная модель нестационарной неизоэтермической двумерной фильтрации жидкости в слоистом пласте с учетом радиальной и вертикальной неоднородности по проницаемости.

Постановка задачи

Приняты следующие допущения:

- пласт горизонтальный, пористый, насыщен однофазной слабосжимаемой жидкостью;
- массо- и теплоперенос (конвективный и кондуктивный) в радиальном и вертикальном направлениях;
- учитывается зависимость проницаемости от координат r и z .

Давление в пласте рассчитывается из уравнения пьезопроводности [12]:

$$\beta^* \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right), \quad r_w \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq h, \quad (1)$$

где β^* – упругоємкость насыщенного жидкостью пласта ($\beta^* = \phi\beta_f + \beta_s$); p – давление; t – время; r – радиальная координата, расстояние в пласте от оси скважины; z – вертикальная координата; k_r , k_z – проницаемость пласта по r и по z ; μ – вязкость флюида; r_w – радиус скважины; R – радиус контура питания пласта.

Здесь проницаемость $k(r, z)$ является функцией координаты [12]

$$k(r, z) = \begin{cases} k_{0i}, & r \geq r_{di}, \quad z_{ii} \leq z \leq z_{bi}, \\ k_{di}, & r < r_{di}, \quad z_{ii} \leq z \leq z_{bi}, \end{cases} \quad (2)$$

где k_{0i} – проницаемость дальней, ненарушенной зоны i -го пропластка; k_{di} – проницаемость нарушенной зоны i -го пропластка; r_d – радиус границы зоны нарушения i -го пропластка; z_{ii}, z_{bi} – кровля и подошва пропластка.

Давление в начальный момент времени

$$p|_{t=0} = P_0. \quad (3)$$

Давление на внешней границе пласта

$$p|_{r=R} = P_0. \quad (4)$$

Граничные условия на стенке скважины в интервале перфорации

$$p_w(t) = p|_{r=r_w}; \quad (5)$$

$$Q(t) = 2\pi \int_0^h \left(r \frac{k_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w} dz. \quad (6)$$

Здесь p_w – давление в скважине; Q – суммарный дебит жидкости из пласта.

Внутренняя граница r_w (вне интервала перфорации), а также верхняя и нижняя границы пласта непроницаемые;

$$v_r|_{r=r_w} = 0, \quad v_z|_{z=z_t} = 0, \quad v_z|_{z=z_b} = 0, \quad (7)$$

где v_r, v_z – радиальная и вертикальная составляющие скорости фильтрации.

Изменение температуры в пласте за счет конвекции, теплопроводности и баротермического эффекта описывается уравнением [1]

$$\frac{C_{res}}{C_f} \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\lambda_r}{C_f} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\lambda_z}{C_f} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \varphi \eta \frac{\partial p}{\partial t} - \varepsilon v_r \frac{\partial p}{\partial r} - \varepsilon v_z \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (8)$$

где C_{res} – объемная теплоемкость насыщенной жидкостью пористой среды ($C_{res} = \varphi c_f \rho_f + (1-\varphi)c_s \rho_s$); C_f – объемная теплоемкость флюида ($C_f = c_f \rho_f$); λ_r, λ_z – теплопроводность насыщенной жидкостью пласта по r и по z ; ε, η – коэффициент Джоуля – Томсона и адиабатический коэффициент для флюида.

В качестве начального условия и условия на внешней границе пласта задается геотермическое распределение температуры:

$$T|_{t=0} = T_0; \quad (9)$$

$$T|_{r=R} = T_0. \quad (10)$$

Граничное условие на стенке скважины ($r = r_w$):

$$-\lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_w} = \Omega (T_w(z, t) - T|_{r=r_w}). \quad (11)$$

Здесь T_w – средняя по сечению температура в стволе скважины; Ω – коэффициент теплообмена между жидкостью в стволе скважины и стенкой скважины.

Скорость фильтрации определяется из закона Дарси:

$$v_r = -\frac{k_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad v_z = -\frac{k_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (12)$$

Методика решения

Задача (1) – (13) решена численно. Дискретизация уравнений осуществлена методом контрольного объема. Сетка в радиальном направлении неравномерная, сгущающаяся к скважине, а в направлении вертикальной координаты z равномерная. Полученные системы линейных алгебраических уравнений для давления и температуры решаются итерационным методом Гаусса – Зейделя [13].

Корректность численного решения проверена путем сравнения с известными аналитическими решениями [1, 15] и с результатами моделирования в программном пакете Ansys.

Для проверки, разработанной модели была создана идентичная модель в программном пакете Ansys. Моделируется случай отбора жидкости из неоднородного по проницаемости пласта при постоянном дебите.

Расчетная область состоит из пяти чередующихся горизонтальных пропластков (рис. 1). Толщина каждого пропластка 2 м. В центральной части, в интервале $4 \leq z \leq 6$ м, находится пропласток с нарушенной прискважинной зоной. Радиус нарушения $r_d = 0.5$ м.

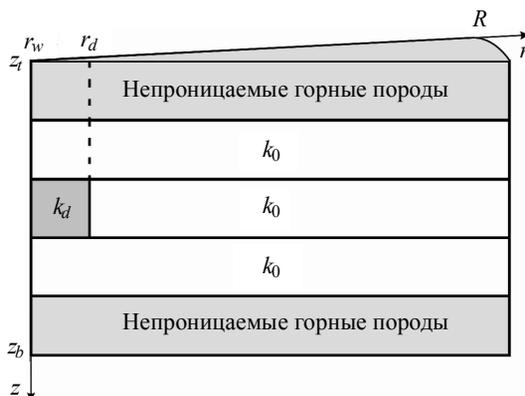


Рис. 1. Модель слоистого пласта ($k_0 = 100 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$, $k_d = 10 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$)

Fig. 1. Layered reservoir model ($k_0 = 100 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$, $k_d = 10 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$)

Так как модель двумерная, сравнению подверглись профили температур: 1 – через 1 ч, 2 – через 10 ч после начала отбора (Непрерывные серые линии на рис. 2 соответствуют результатам численного решения, а черные точки соответствуют Ansys).

Из графиков на рис. 2 видно:

- Профили температур, рассчитанные численно и в Ansys полностью повторяют друг друга. Максимальное отклонение между кривыми не превышает $0.01 \text{ }^\circ\text{C}$, что приемлемо для моделирования температурных полей в пласте. Совпадение было достигнуто при количестве разбиений по радиальной координате $N_r = 1000$, при количестве разбиений по вертикальной координате $N_z = 100$ и при постоянном шаге по времени $\Delta t = 1$ с.

- В распределении температуры по толщине пласта видны характерные признаки перетока из среднего пропластка в соседние пропластки. Переток приводит к немонотонному распределению температуры в пределах среднего пропластка с загрязненной прискважинной зоной.

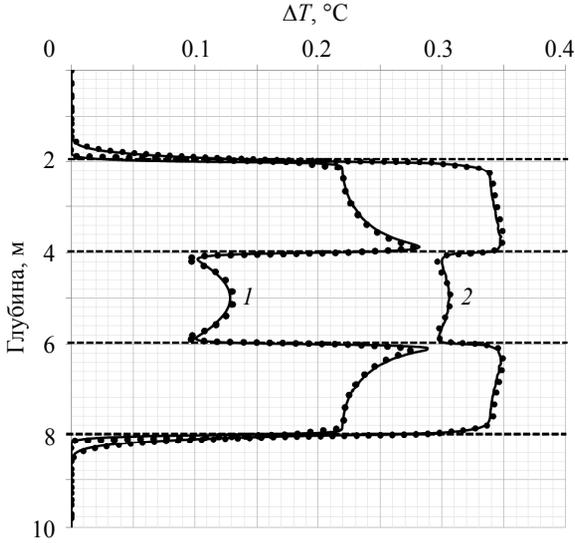


Рис. 2. Профили температуры на стенке скважины ($r = r_w$)
 Fig. 2. Temperature profiles on the borehole wall ($r = r_w$)

• С увеличением времени притока различие в изменении температуры по толщине пласта уменьшается. Для уверенного выделения радиальной неоднородности, которая приводит к перетоку в соседние пропластки, необходимо регистрировать нестационарные температурные профили температуры в начальный период притока.

Результаты сравнения с аналитической моделью

Результаты расчетов на численной двумерной модели сравниваются с расчетами по аналитической модели, описанной в [10]. Была проведена серия расчетов для двух моделей пласта: 1 – модель радиально неоднородного, но однородного по z пласта (рис. 3); 2 – модель слоистого пласта с радиально неоднородными пропластками (рис. 4).

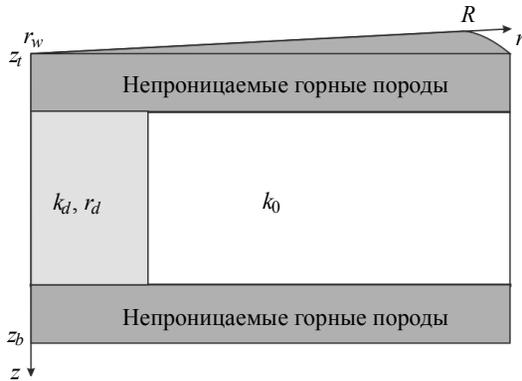


Рис. 3. Модель однородного по вертикали пласта
 Fig. 3. Vertical homogeneous reservoir model

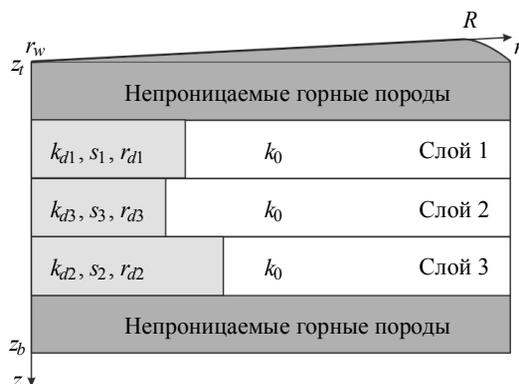


Рис. 4. Модель слоистого пласта

Fig. 4. Layered reservoir model

Для первой модели вертикальная фильтрация в пласте, перетоки исключаются, а для 2-й модели пласта перетоки возможны.

Расчеты для первой модели приведены на рис. 5 (1 – аналитическое решение [10], 2 – численное решение) для параметров модели, приведенных в табл. 1. Сравниваются графики изменения температуры притекающей жидкости.

Таблица 1

Параметры, используемые в расчетах

Параметр	Значение
Дебит – Q , м ³ /сут	100
Начальное давление – P_0 , МПа	20.265
Начальная температура – T_0 , °С	10
Проницаемость дальней зоны – k_0 , м ²	$100 \cdot 10^{-15}$
Проницаемость прискважинной зоны – k_d , м ²	$10 \cdot 10^{-15}$
Радиус нарушенной зоны – r_{d1} , м	0.5
Скин-фактор – s	0
Толщина – h , м	5
Пористость – ϕ	0.2
Общая сжимаемость – β^* , 1/Па	$3 \cdot 10^{-10}$
Плотность скелета пласта – ρ_s , кг/м ³	2200
Плотность жидкости – ρ_f , кг/м ³	900
Теплоемкость скелета пласта – c_s , Дж/кг·К	800
Теплоемкость жидкости – c_f , Дж/кг·К	2000
Коэффициент Джоуля-Гомсона – ε , К/МПа	0.4
Коэффициент адиабатического расширения – η , К/МПа	0.16
Вязкость – μ , Па·с	0.001
Радиус скважины – r_w , м	0.1
Радиус контура питания – R , м	100

Как и ожидалось, аналитическая модель в случае одномерной фильтрации в однородном по вертикали пласте (при отсутствии перетоков по вертикали) верно описывает поведение нестационарной температуры. Результаты расчетов по чис-

ленному и аналитическому решениям близки, для малых времен отличаются не более чем на 0.2 градуса и практически совпадают на поздних временах. Излом на кривых объясняется радиальной неоднородностью проницаемости [1].

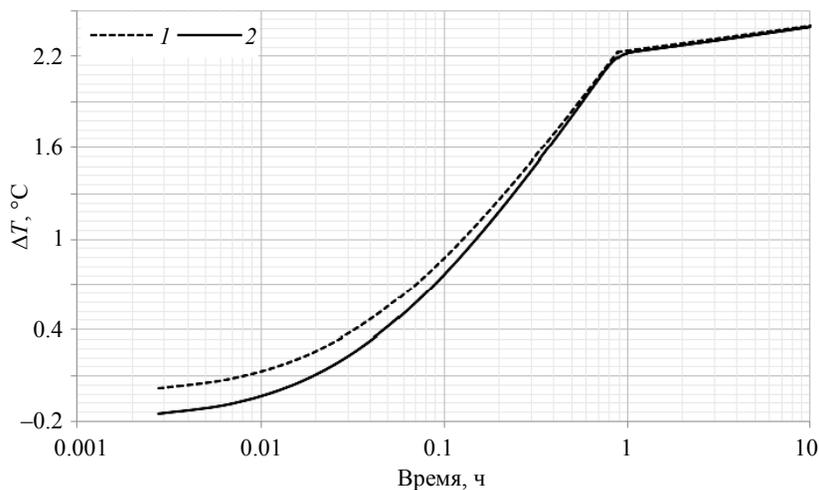


Рис. 5. Сопоставление численного решения с аналитическим:
1 – аналитическое решение; 2 – численное решение

Fig. 5. Comparison of the (1) analytical and (2) numerical solutions

Сравнительные расчеты для модели слоистого пласта приведены на рис. 6 – 8 для параметров модели из табл. 1. Пласт по вертикали разбит на три равных слоя толщиной 2 м. Радиусы r_d , проницаемости нарушенной зоны и дальней зоны слоев (k_d , k_0) задавались как в табл. 2. Скин-факторы для отдельных слоев, необходимые для расчетов по аналитическому решению, рассчитывались по формуле Хоукинса [14]

$$s = \left(\frac{k_0}{k_d} - 1 \right) \ln \left(\frac{r_d}{r_w} \right). \quad (13)$$

Таблица 2

Параметры, используемые в расчетах

Параметр	Значение
Проницаемость дальней зоны – k_0 , м^2	$100 \cdot 10^{-15}$
Проницаемость прискважинной зоны – k_{d1} , м^2	$50 \cdot 10^{-15}$
Проницаемость прискважинной зоны – k_{d2} , м^2	$55 \cdot 10^{-15}$
Проницаемость прискважинной зоны – k_{d3} , м^2	$45 \cdot 10^{-15}$
Скин-фактор – s_1	1.61
Скин-фактор – s_2	0.9
Скин-фактор – s_3	2.19
Радиус прискважинной зоны – r_{d1} , м	0.5
Радиус прискважинной зоны – r_{d2} , м	0.3
Радиус прискважинной зоны – r_{d3} , м	0.6

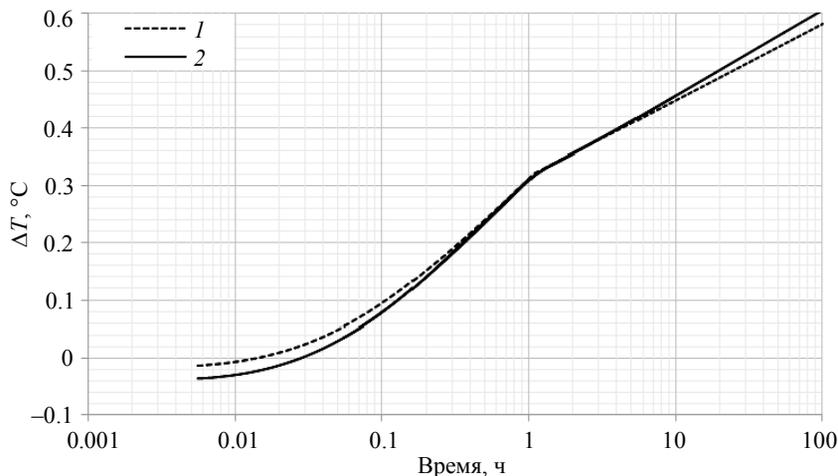


Рис. 6. Сопоставление численного решения с аналитическим для слоя 1:

1 – аналитическое решение; 2 – численное решение

Fig. 6. Comparison of the (1) analytical and (2) numerical solutions for layer 1

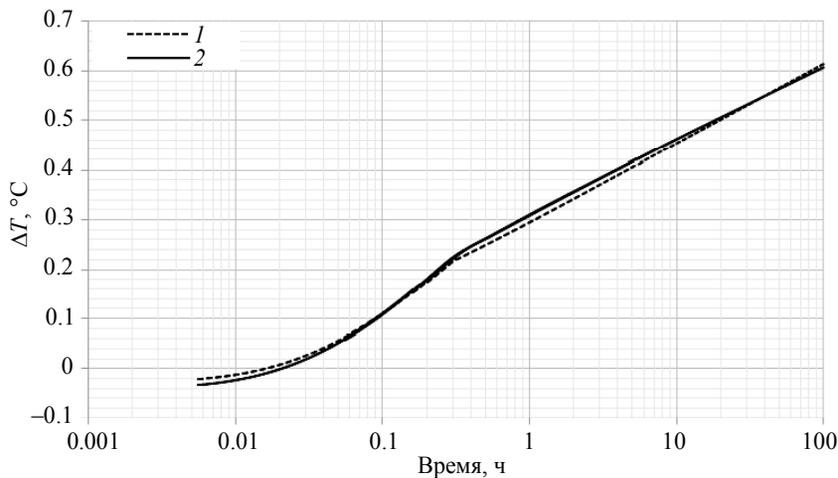


Рис. 7. Сопоставление численного решения с аналитическим для слоя 2:

1 – аналитическое решение; 2 – численное решение

Fig. 7. Comparison of the (1) analytical and (2) numerical solutions for layer 2

Алгоритм следующий:

- 1) Рассчитываются поля давления и температуры по численной модели с заданными параметрами k_0 , k_d , r_d .
- 2) Затем по формуле Хоукинса (13) рассчитываем скин-факторы отдельных слоев.
- 3) Полученные скин-факторы используются для расчета полей давления и температуры по аналитическому решению [10].

Сравниваются графики изменения во времени температуры притекающей из слоя жидкости. В численном решении рассчитывается среднemasовая по толщине соответствующего слоя температура для того, чтобы учесть неоднородность дебита по толщине слоя из-за внутрислоевых перегородок.

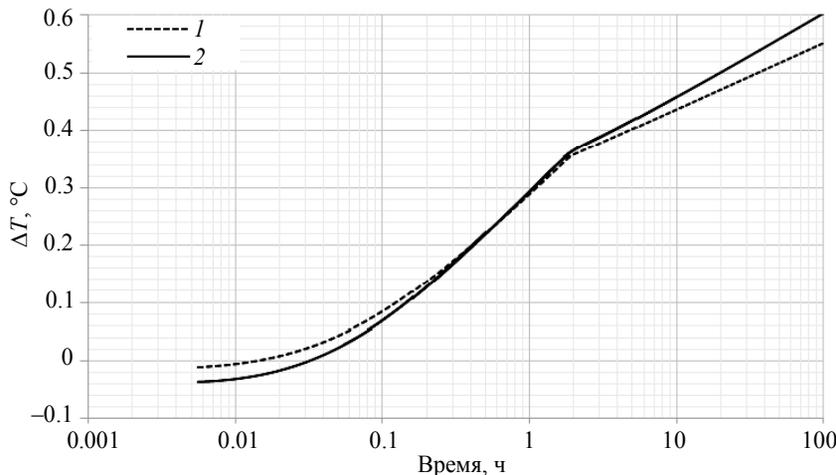


Рис. 8. Сопоставление численного решения с аналитическим для слоя 3:
1 – аналитическое решение; 2 – численное решение

Fig. 8. Comparison of the (1) analytical and (2) numerical solutions for layer 3

Рассчитанные численно и по аналитическому решению дебиты слоев представлено в табл. 3, отличие между ними менее 10%, что вполне приемлемо для практики.

Таблица 3

Сравнение дебитов

Параметр	Значение		
	Численный расчет	Аналитическое решение [10]	Разница, %
Дебит слоя 1, м ³ /сут	30.57	32.63	6.74
Дебит слоя 2, м ³ /сут	38.76	39.26	1.29
Дебит слоя 3, м ³ /сут	30.67	28.12	8.31

Как видно из рисунков, результаты расчетов температуры по аналитическому [10] и по численному решениям значительно отличаются. До и после излома графики температуры имеют разные наклоны к оси времени. Зная угловой коэффициент a линейных участков изменения температуры до и после излома, рассчитаны проницаемости ближней и дальней зоны [1]

$$k = \frac{\varepsilon Q_l \mu}{4\pi h_l a} \quad (14)$$

Здесь Q_l – дебит слоя, h_l – толщина слоя, a – угловой коэффициент линейного участка изменения температуры.

Радиус прискважинной зоны рассчитан по следующей формуле [1]

$$r_d = \sqrt{r_w + \frac{C_f}{C_{res}} \frac{Q_l t_d}{\pi h_l}} \quad (15)$$

Здесь t_d – время, соответствующее точке пересечения аппроксимирующих прямолинейные участки изменения температуры прямых.

Проницаемости ближней и дальней зон (k_d и k_0) и радиус прискважинной зоны (r_d), найденные по этому алгоритму по среднемассовым температурам для отдельных слоев из численного решения, представлены в табл. 4.

Таблица 4

Сравнение проницаемостей

Слой	k_d , $\text{м}^2 \cdot 10^{-15}$	Разница с заданным k_d , %	k_0 , $\text{м}^2 \cdot 10^{-15}$	Разница с заданным k_0 , %	r_d , м	Разница с заданным r_d , %
слой 1	51.24	2.49	85.8	14.2	0.48	4.66
слой 2	65.28	18.69	108.8	8.8	0.32	7.42
слой 3	51.04	13.43	86.1	13.9	0.62	3.72

Значение проницаемости дальней зоны для слоев 1 и 3 занижено на 14%, а для слоя 2 завышено на 9% по сравнению с заданными величинами k_0 . Наилучший результат показал расчет радиуса зоны загрязнения. Рассчитанные значения отличаются от заданных всего лишь на 2 см, что соответствует погрешности от 4 до 7%.

Расхождение в скорости изменения температуры в моделях объясняется прежде всего тем, что в аналитической модели поток жидкости считается одномерным вдоль всего слоя, дебит слоя и скорость фильтрации для учета перетока увеличиваются или уменьшаются на всем протяжении по r . А как показали расчеты на численной модели, перетоки между слоями наблюдаются только в прискважинной зоне пласта, а на удалении от нарушенной зоны в однородной по толщине зоне пласта наблюдается одномерный поток с постоянной для всех слоев скоростью фильтрации и, следовательно, с одинаковым темпом изменения температуры во времени.

Заключение

Из анализа полученных результатов следует, что:

1. Наличие радиальной неоднородности проницаемости в прискважинной зоне слоистого пласта приводит к перетокам жидкости между слоями, что отражается на скорости изменения температуры притекающей из отдельных слоев жидкости.

2. Нестационарные профили температуры по толщине слоистого пласта при малых временах притока содержат информацию о перетоках между слоями, обусловленными радиальной неоднородностью в прискважинной зоне пласта.

3. Перетоки между слоями приводят к большим погрешностям при решении обратной задачи по оценке распределения проницаемости в пласте по данным нестационарной температуры.

4. Наличие перетоков между слоями не исключает возможность оценки радиуса зоны загрязнения.

5. При расчете нестационарной температуры в слоистом пласте с нарушенной прискважинной зоной для корректного учета влияния перетоков между слоями необходимо использовать либо двумерную численную модель неизо термической фильтрации, либо в одномерной аналитической модели изменить алгоритм внесения поправки к дебиту слоя для малых и больших времен притока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чекалюк Э.Б. Термодинамика нефтяного пласта. М.: Недра, 1965. 238 с.
2. Рамазанов А.Ш., Валиуллин Р.А., Садретдинов А.А. и др. Термогидродинамические исследования в скважине для определения параметров прискважинной зоны пласта и дебитов многопластовой системы. SPE 136256-RU, 2010. 23 с.
3. Шарафутдинов Р.Ф., Садретдинов А.А., Шарипов А.М. Численное исследование температурного поля в пласте с трещиной гидроразрыва // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 4. С. 153–162. DOI: 10.15372/PMTF20170415.
4. Muradov K., Davies D., Durham C., Waterhouse R. Transient Pressure and Temperature Interpretation in Intelligent Wells of the Golden Eagle Field. SPE 185817-MS, 2017.
5. Sui W. Determining multilayer formation properties from transient temperature and pressure measurements: PhD dissertation. Texas A&M University, 2009.
6. Валиуллин Р.А., Рамазанов А.Ш., Хабиров Т.Р. и др. Интерпретация термогидродинамических исследований при испытании скважины на основе численного симулятора. SPE 176589, 2015.
7. Исламов Д.Ф., Садретдинов А.А. Исследование температурного поля в слоистом пласте // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2019. Т. 330. № 8. С. 27–36.
8. Ахметова О.В. Нестационарное температурное поле в слоисто-неоднородном ортотропном пористом пласте // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2016. Т. 2. № 3. С. 10–23.
9. Бадертдинова Е.Р. Определение фильтрационных и теплофизических параметров слоистого пласта по результатам термогидродинамических и гидродинамических исследований вертикальных скважин на основе теории регуляризации // Вестник Казанского технологического университета. 2015. Т. 18. № 5. С. 194–198.
10. Mao Y., Zeidouni M. Temperature Transient Analysis of Characterization of Multilayer Reservoirs with Crossflow. SPE 185654, 2017.
11. Park H. Well Test Analysis of a multilayered reservoir with formation crossflow: PhD dissertation. Stanford University, 1989.
12. Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. 488 с.
13. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982. 407 с.
14. Hawkins M.F.Jr. A note on the skin effect // Trans. AIME. 1956. V. 207. P. 356–357.
15. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.

Статья поступила: 05.10.2020

Islamov D.F., Ramazanov A.Sh. (2022) INVESTIGATION OF NONISOTHERMAL TWO-DIMENSIONAL FILTRATION IN MULTYLAYER RESERVOIR. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 100–112

DOI 10.17223/19988621/75/9

Keyword: thermometry, two-dimensional filtration, well, heterogeneous reservoir, permeability, crossflow.

The problem of an unsteady temperature field during two-dimensional fluid filtration in a multilayer reservoir is investigated taking into account the barothermal effect, radial and vertical permeability inhomogeneities. The results of comparing the analytical and numerical calculations of the temperature changes of the fluid flowing from the reservoir for two various models of reservoir heterogeneity are presented.

From the obtained results it follows that

1. The presence of radial inhomogeneity of permeability in the near-well zone of the layered formation leads to fluid flows between the layers, which affects the temperature change rate of the liquid flowing from individual layers.

2. Non-stationary temperature profiles over the thickness of the layered formation at low inflow times contain information about the flows between the layers due to radial inhomogeneity in the near-well zone of the formation.

3. Flows between layers lead to large errors in solving the inverse problem of estimating the distribution of permeability in the reservoir based on non-stationary temperature data.

4. The presence of flows between the layers does not exclude the possibility of estimating the radius of the contamination zone.

5. To correctly account for the influence of flows between layers when calculating the non-stationary temperature in a layered formation with a disturbed near-well zone, it is necessary either to use a two-dimensional numerical model of non-isothermal filtration or to change the algorithm for correcting the layer's flow rate for short and long inflow times in the one-dimensional analytical model.

Financial support. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement No. 075-11-2021-061)

Denis F. ISLAMOV (Senior Teacher, Bashkir State University, Ufa, Russian Federation). E-mail: islamovden@rambler.ru

Ayrat Sh. RAMAZANOV (Doctor of Technical Sciences, Bashkir State University, Ufa, Russian Federation). E-mail: ramaz@bsunet.ru

REFERENCES

1. Chekalyuk E.B. (1965) *Termodinamika neftyanogo plasta* [Thermodynamics of an oil reservoir]. Moscow: Nedra.
2. Ramazanov A.Sh., Valiullin R.A., Sadretdinov A.A., Shako V.V., Pimenov V.P., Fedorov V.N., Belov K.V. Thermal Modeling for Characterization of Near Wellbore Zone and Zonal Allocation. *SPE Russian Oil and Gas Conference and Exhibition, Moscow, 2010. SPE*. 23 p. DOI: 10.2118/136256-ms.
3. Sharafutdinov R.F., Sadretdinov A.A., Sharipov A.M. (2017) Numerical investigation of the temperature field in a reservoir with a hydraulic fracture. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 58(4). pp. 702–709. DOI: 10.1134/S0021894417040150.
4. Muradov, K., Davies, D., Durham, C., Waterhouse, R. (2017) Transient Pressure and Temperature Interpretation in Intelligent Wells of the Golden Eagle Field. *SPE Europec featured at 79th EAGE Conference and Exhibition, Paris, 2017. SPE*. DOI: 10.2118/185817-ms.
5. Sui W. (2009) *Determining multilayer formation properties from transient temperature and pressure measurements*. Dissertation. Texas A&M University.
6. Valiullin R.A., Ramazanov A.Sh., Khabirov T.R. (2015) Interpretation of Non-Isothermal Testing Data based on the Numerical Simulation. *SPE Russian Petroleum Technology Conference, Moscow, 2015. SPE*. DOI: 10.2118/176589-ms.
7. Islamov D.F., Sadretdinov A.A. (2019) Issledovanie temperaturnogo polya v sloistom plaste [Analysis of the temperature field in a layered reservoir]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University, Geo Assets Engineering*. 330(8). pp. 27–36. DOI: 10.18799/24131830/2019/8/2209.
8. Akhmetova O.V. (2016) Nestatsionarnoye temperaturnoye pole v sloisto-neodnorodnom ortotropnom poristom plaste [Nonsteady temperature field in orthotropic layered porous medium]. *Vestnik Tyumenskogo gosudarstvennogo universiteta. Fiziko-matematicheskoye modelirovaniye. Nefi', gaz, energetika – Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*. 2(3). pp. 10–23.

9. Badertdinova E.R. (2015) Opredeleniye fil'tratsionnykh i teplofizicheskikh parametrov sloistogo plasta po rezul'tatam termogidrodinamicheskikh i gidrodinamicheskikh issledovaniy vertikal'nykh skvazhin na osnove teorii regularizatsii [Determination of filtration and thermophysical parameters of a layered formation based on the results of thermohydrodynamic and hydrodynamic studies of vertical wells based on the theory of regularization]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta*. 18(5). pp. 194–198.
10. Mao Y., Zeidouni M. (2017) Temperature transient analysis of characterization of multilayer reservoirs with crossflow. *SPE Western Regional Meeting, Bakersfield, 2017*. SPE. DOI: 10.2118/185654-ms.
11. Park H. (1989) *Well Test Analysis of a Multilayered Reservoir with Formation Crossflow*. Dissertation. Stanford University.
12. Basniev K.S., Kochina I.N., Maksimov V.M. (2006) *Podzemnaya gidromekhanika* [Underground Fluid Mechanics]. Moscow: Institute of Computer Research.
13. Aziz Kh. (1982) *Petroleum Reservoir Simulation*. London: Applied Science Publishers.
14. Hawkins M.F.Jr. (1956) A note on the skin effect. *Transactions of the AIME*. 207. pp. 356–357.
15. Carslaw H., Jaeger D. (1964) *Conduction of Heat in Solids*. Oxford, UK: Oxford University Press.

Received: October 5, 2020

УДК: 536.46+536.24
DOI 10.17223/19988621/75/10

В.А. Порязов, Д.А. Крайнов, А.А. Блохина

ГОРЕНИЕ ЗАРЯДА МЕТАЛЛИЗИРОВАННОГО СМЕСЕВОГО ТВЕРДОГО ТОПЛИВА С ПЛОСКИМ КАНАЛОМ В ПОЛЕ МАССОВЫХ СИЛ¹

Представлены результаты математического моделирования горения канального заряда смесового металлизированного твердого топлива в поле массовых сил. Рассматривается горение двух параллельных пластин металлизированного твердого топлива. Проведен расчетно-теоретический анализ влияния величины поля массовых сил и состава топлива на суммарный приход массы с поверхности горения.

Ключевые слова: *моделирование, горение, металлизированное смесовое твердое топливо, канальный заряд, скорость горения, перегрузка, поле массовых сил.*

Перегрузка (массовые силы), направленная по нормали к поверхности, влияет на скорость горения смесовых металлизированных топлив. Для исследования горения конденсированных систем в поле тяжести было проведено множество экспериментов по изучению топлив в центрифугах, которые показали заметное влияние центробежных массовых сил на процесс горения [1–5]. При горении в условиях больших перегрузок вещества с различным механизмом горения ведут себя различным образом [6, 7]. В основе влияния массовых сил на горение конденсированных систем лежит действие перегрузок на конденсированные частицы в зоне химической реакции [1]. В ряде случаев, благодаря приложению инерционных сил к горящему веществу, происходит увеличение скорости горения. В работе [3] это объясняется тем, что инерционные силы прижимают частицы, образующиеся в процессе горения, к горячей поверхности. Характер и степень влияния перегрузок зависят как от их величины и направления, так и от типа самой системы [4, 5]. Большинство работ направлены на изучение горения смесовых твердых топлив с добавлением порошка алюминия [8–15]. Перегрузки являются одним из важных факторов, влияющих на агломерацию частиц алюминия [12, 13]. В основном, под действием перегрузок, направленных по нормали к поверхности топлива, происходит увеличение скорости горения. Это явление вызывается удержанием вблизи поверхности горения частиц, образующихся в процессе горения [7]. Под действием перегрузок, направленных по нормали от поверхности топлива, происходит уменьшение скорости горения. Механизм влияния перегрузки на скорость горения металлизированного твердого топлива исследован в работе [10].

В реальных двигательных установках на твердом топливе практически не встречаются заряды торцевого горения [17–19]. Часто встречающиеся формы зарядов не предполагают воздействие перегрузок, ориентированных по нормали к поверхности горения при их поступательном движении. При этом распространенным элементом конструкции заряда твердого топлива является «зонтик», кото-

¹ Исследование выполнено при поддержке Гранта Президента РФ (МК-96.2020.8).

рый, с поправкой на угол раствора, испытывает перегрузки, ориентированные по нормали к поверхности горения. Представляет интерес исследовать влияние перегрузки на суммарный массоприход с поверхности горения элемента типа «зонтик», который может влиять на основные тяговые характеристики РДТТ на этапах разгона и торможения [20].

В работе исследовано горение смесового металлизированного твердого топлива (МСТТ) с плоским каналом в поле массовых сил. Проведен расчетно-теоретический анализ влияния величины поля массовых сил и состава топлива на суммарный приход массы с единичной поверхности горения канального заряда смесового металлизированного твердого топлива.

Постановка задачи

Для построения физико-математической модели рассматривается горение двух параллельных плоских поверхностей металлизированного смесового твердого топлива единичной площади в поле массовых сил. Схема процесса представлена на рис. 1.

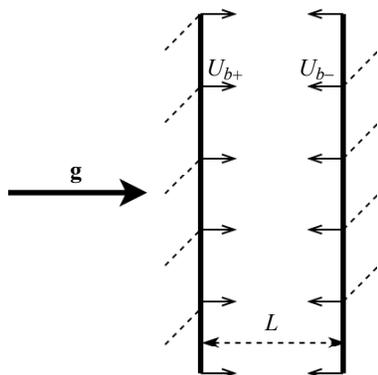


Рис. 1. Схема расположения двух поверхностей металлизированного смесового твердого топлива в поле массовых сил

Fig. 1. Scheme of the chunk fuel with a flat channel under the mass forces

Модель горения заряда металлизированного смесового твердого топлива с плоским каналом в поле массовых сил строилась на основе нестационарной модели горения металлизированного твердого топлива [16]. Учет влияния массовых сил основан на постановке, представленной в работе [10], в которой влияние массовых сил учитывается через слагаемое в правой части уравнения движения частиц алюминия. Используемая сопряженная модель горения [16] учитывает процессы в конденсированной и газовой фазе. Для описания процессов в металлизированном твердом топливе под поверхностью горения записываются уравнения переноса тепла и разложения топлива. Для описания процессов в газовой фазе над поверхностью горения записываются уравнения течения двухфазной реагирующей среды,

учитывающие межфазный обмен массой и энергией, конвективный и кондуктивный теплоперенос. В расчетах использовались теплофизические и формально-кинетические параметры из [16].

Как показано в [10], влияние перегрузок не симметрично – одинаковые по модулю, но разные по знаку перегрузки приводят к разному отклику скорости горения. Однако эти результаты получены на упрощенной модели, не учитывающей процессы в конденсированной фазе. Представляет интерес исследовать процесс горения двух параллельных плоских поверхностей металлизированного смесового твердого топлива единичной площади в поле массовых сил для определения суммарного массового потока с поверхностей горения на основе сопряженной модели горения. Предполагается, что поверхности горения находятся на достаточном удалении друг от друга и не оказывают взаимного влияния.

Результаты расчетов

Значения перегрузки менялись в диапазоне от -650 м/с^2 до 650 м/с^2 . Предполагалось, что перегрузка направлена по нормали к поверхности горения или рассматривается проекция перегрузки на нормаль к поверхности горения. Принималось, что при значении перегрузки больше 0 она направлена от поверхности горения (уносящие перегрузки), если меньше 0 – к поверхности (прижимающие перегрузки).

На рис. 2 представлена зависимость скорости горения МСТТ от размера частиц алюминия, вылетающих с поверхности при $P = 4.5 \text{ МПа}$.

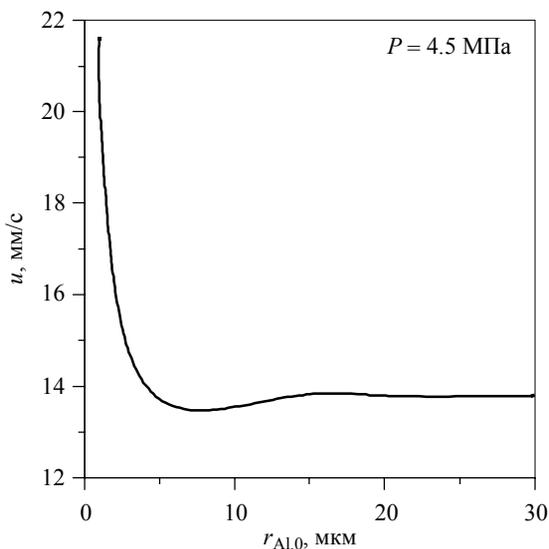


Рис. 2. Зависимость скорости горения МСТТ от $r_{Al,0}$, $P = 4.5 \text{ МПа}$

Fig. 2. Fuel combustion rate as a function of the particle radius $r_{Al,0}$, $P = 45 \text{ atm}$

На рис. 3 – 5 скорость горения приводится в виде безразмерной переменной U_b от величины перегрузки g , где $U_b = u/u_0$, u – скорость горения при заданной величине перегрузки, а u_0 – скорость горения без перегрузки, рассчитанные для каждого значения дисперсности частиц алюминия, аналогично [10]. Под безразмерной величиной массоприхода подразумевается величина $U_{b-} \rho_p S_p + U_{b+} \rho_p S_p$, что, в силу одинаковых плотностей и площадей поверхности горения параллельных поверхностей МСТТ, зависит только от скорости горения. На рис. 3 представлена зависимость безразмерной скорости горения от времени при разных перегрузках.

Влияние перегрузок не симметрично и для задачи в сопряженной постановке – одинаковые по модулю, но разные по знаку перегрузки приводят к разному отклику скорости горения, рис. 3, что качественно соответствует зависимостям, полученным в [10].

На рис. 4 представлена скорость горения МСТТ в поле массовых сил в зависимости от дисперсности порошка алюминия, вылетающего с поверхности.

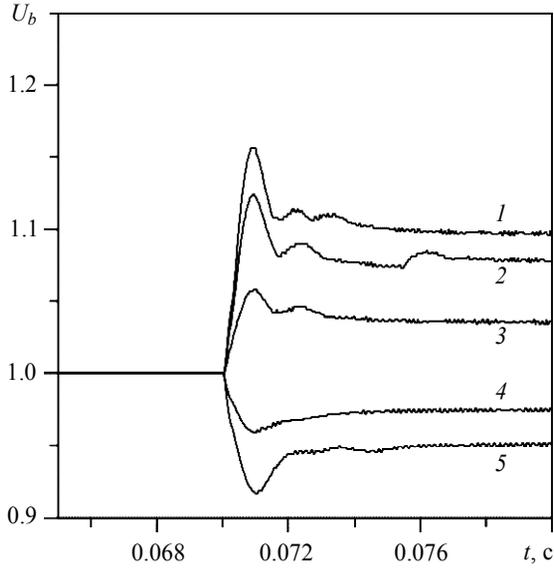


Рис. 3. Зависимость безразмерной скорости горения от времени при мгновенном изменении величины перегрузки в момент времени $t = 0.07$ с; $r_{Al,0} = 10$ мкм; $P = 4.5$ МПа: 1 – $a = -600$ м/с², 2 – $a = -500$ м/с², 3 – $a = -250$ м/с², 4 – $a = 400$ м/с², 5 – $a = 500$ м/с²

Fig. 3. Dimensionless combustion rate as a function of time under instantaneous change in the overcharge at the instant $t = 0.07$ s; $r_{Al,0} = 10$ μ m, $P = 4.5$ МПа: $a = (1) -600$, (2) -500 , (3) -250 , (4) 400 , and (5) 500 м/с²

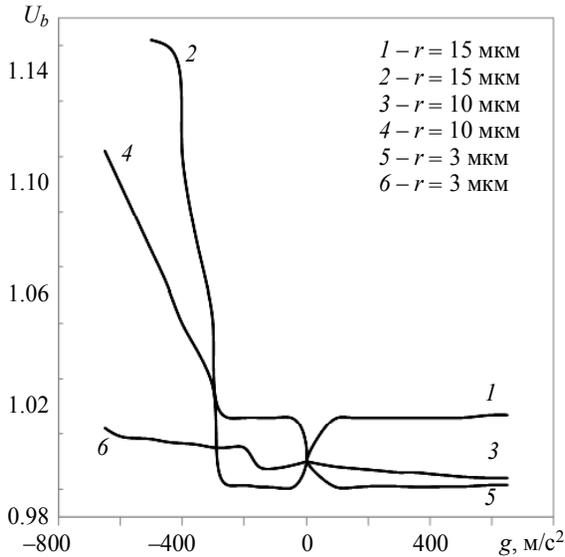


Рис. 4. Зависимость скорости горения МСТТ от перегрузки при различных значениях размера частиц алюминия $r_{Al,0}$, $P = 4.5$ МПа

Fig. 4. Dimensionless combustion rate as a function of the g-force value for different particle radii $r_{Al,0}$, $P = 4.5$ МПа

Видно, что влияние перегрузок не симметрично – одинаковые по модулю, но разные по знаку перегрузки приводят к разному отклику скорости горения, что аналогично результатам, полученным в [10]. При больших перегрузках, направленных от поверхности горения, относительная скорость стремится к некоторому постоянному значению, по всей видимости, к скорости горения безметалльного топлива соответствующего состава. Это хорошо видно для частиц радиусом 10 и 15 мкм. Очевидно, для более мелких частиц выполняется эта же закономерность, но при больших значениях перегрузки.

На рис. 5 представлен суммарный массовый поток двух параллельных поверхностей МСТГ единичной площади в поле массовых сил. Видно, что чем больше размер частиц алюминия, вылетающих с поверхности горения, тем выше суммарный массовый поток с поверхности горения канального заряда МСТГ.

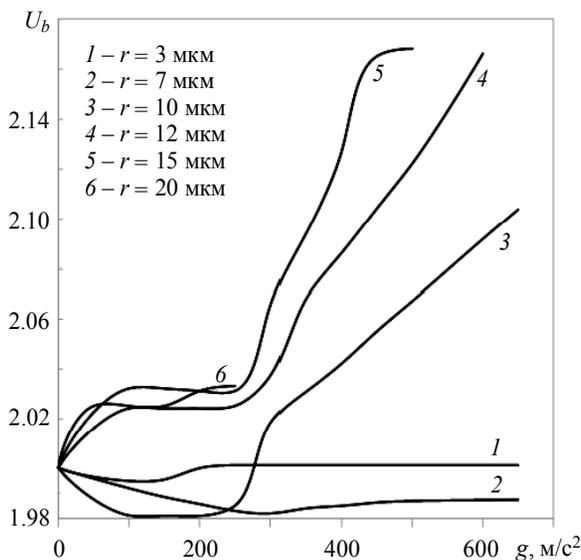


Рис. 5. Суммарный массоприход с поверхности горения канального заряда МСТГ единичной площади при различных значениях размера частиц алюминия $r_{Al,0}$, $P = 4.5$ МПа

Fig. 5. Total mass influx per unit area from the combustion surface of the chunk fuel for different aluminum particle radii $r_{Al,0}$, $P = 4.5$ MPa

На рис. 5 видно, что кривые зависимости массоприхода от перегрузки прерываются до достижения заданного диапазона. Это вызвано тем, что с определенного значения перегрузки сила трения между газом и частицей, уносящая частицы от поверхности горения, становится меньше либо равна массовым силам, на поверхности возрастает концентрация частиц, которые горят на поверхности топлива, температура поверхности горения начинает неконтролируемо возрастать и получается нерасчетный, в рамках данной физико-математической постановки, режим, который требует отдельного изучения. Так, при давлении 4.5 МПа, для частиц радиусом 3, 7 и 10 мкм критическое значение перегрузки находится за

пределами рассмотренных значений. Для частиц размером 12, 15 и 20 мкм режим «налипания» на поверхность реализуется при значениях перегрузок, равных 600, 500 и 260 м/с² соответственно. Для частиц радиусом 50 мкм налипание на поверхность происходит при 50 м/с².

Для значений перегрузки меньше 200 м/с² отклик скорости горения пренебрежимо мал и не превышает 4%. Сам характер зависимости скорости горения от перегрузки для крупных частиц (радиусом более 7.5 мкм) носит немонотонный характер. Для перегрузки меньше 250 м/с² скорость горения практически не отличается от горения МСТТ при нулевой перегрузке, при превышении этого значения начинается быстрый рост суммарного массоприхода. Это объясняется влиянием перегрузки на расстояние от поверхности топлива, на котором происходит воспламенение частиц за счет изменения скорости их движения. Реакция горения частицы алюминия в газовой фазе начинается на удалении от поверхности. Сразу после входа в газовую фазу частицы алюминия имеют температуру поверхности топлива и не горят, выступая в роли стока тепла от экзотермической реакции продуктов газификации топлива. Затем, прогреваясь в реагирующем потоке газа до температуры начала горения, воспламеняются и выступают в роли источника тепла. Крупные частицы, радиус которых больше 7.5 мкм, воспламеняются на значительном удалении от поверхности горения и не увеличивают тепловой поток к поверхности горения. Более подробно этот механизм рассмотрен в работе [21]. Соответственно, для перегрузки, направленной от поверхности горения, ее рост никак не влияет на скорость горения. А перегрузки, направленные к поверхности горения, при небольших значениях понижают скорость горения. Эффект снижения скорости горения при небольших значениях прижимающей перегрузки объясняется увеличением времени пребывания частиц в качестве стока тепла вблизи поверхности горения. При дальнейшем увеличении перегрузки точка воспламенения смещается достаточно близко к поверхности горения, чтобы увеличить тепловой поток к поверхности горения, тем самым приводя к увеличению скорости горения.

При этом, для МСТТ с радиусом вылетающих частиц алюминия больше 12 мкм при перегрузках больше 450 м/с² массоприход увеличивается более чем на 10%, что показывает важность учета эффекта изменения скорости горения под действием перегрузки при моделировании нестационарных процессов в РДТТ на этапах старта, маневрирования и торможения.

Заключение

Проведен расчетно-теоретический анализ влияния перегрузки на величину прихода массы с горящей поверхности заряда смесового металлизированного твердого топлива с плоским каналом. Величина скорости горения рассчитывалась на основе нестационарной модели горения металлизированного твердого топлива, которая позволяет вычислять не только стационарные зависимости скорости горения от перегрузки, но и мгновенный отклик скорости горения на перегрузки с учетом инерционности конденсированной фазы. Полученные результаты наглядно демонстрируют важность учета влияния перегрузки на скорость горения при моделировании нестационарных процессов в РДТТ на этапах старта, маневрирования и торможения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Максимов Э.И., Максимов Ю.М., Мержанов А.Г. Исследование горения конденсированных веществ в поле массовых сил // Физика горения и взрыва. 1967. Т. 3. № 3. С. 323–327.
2. Юхвид В.И., Максимов Э.И., Козлов В.С. Горение гетерогенных систем в поле массовых сил // Физика горения и взрыва. 1973. № 2. С. 162–168.
3. Юхвид В.И., Максимов Э.И., Мержанов А.Г., Хайкин Б.И., Козлов В.С. О механизме горения конденсированных систем с твердыми добавками в поле массовых сил // Физика горения и взрыва. 1972. № 2. С. 235–240.
4. Серков Б.Б., Максимов Э.И., Мержанов А.Г. Горение конденсированных систем в поле массовых сил // Физика горения и взрыва. 1968. № 4. С. 600–606.
5. Максимов Ю.М., Максимов Э.И. Закономерности горения конденсированных систем в поле массовых сил при средних давлениях // Физика горения и взрыва. 1972. № 4. С. 517–523.
6. Архипов В.А., Коротких А.Г., Третьяков Н.С. Горение баллистических порохов с катализаторами в условиях перегрузок // Химическая физика и мезоскопия. 2006. Т. 8. № 1. С. 600–606.
7. Марголин А.Д., Крупкин В.Г., Хубаев В.Г. и др. Закономерности горения баллистических составов при перегрузках // Физика горения и взрыва. 1978. Т. 14. № 6. С. 29–36.
8. Максимов Ю.М., Максимов Э.И., Вилюнов В.Н. Влияние перегрузок на горение модельных смесевых металлизированных составов // Физика горения и взрыва. 1974. Т. 10. № 2. С. 169–177.
9. Марголин А.Д., Крупкин В.Г. Влияние конденсированных добавок на скорость горения пороха в поле ускорений // Физика горения и взрыва. 1975. № 5. С. 42–49.
10. Порязов В.А., Крайнов А.Ю. Горение твердого топлива с добавлением порошка алюминия при перегрузках // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 45. С. 95–103.
11. Орджоникидзе С.К., Марголин Д.А., Похил П.Ф., Уралов А.С. Горение алюминизированных конденсированных систем при перегрузках // Физика горения и взрыва. 1971. Т. 7. № 4. С. 536–544.
12. Бабук В.А., Васильев В.А., Потехин А.Н. Экспериментальное исследование процесса агломерации при горении алюминизированных твердых топлив в поле // Физика горения и взрыва. 2009. Т. 45. № 1. С. 38–46.
13. Рашковский С.А. Влияние перегрузок на агломерацию частиц алюминия при горении смесевых твердых топлив // Физика горения и взрыва. 2007. Т. 43. № 6. С. 40–50.
14. Марголин А.Д., Крупкин В.Г. Влияние конденсированных добавок на скорость горения пороха в поле ускорения // Физика горения и взрыва. 1974. № 5. С. 702–709.
15. Кирдяшкин А.И., Максимов Ю.М., Некрасов Е.А. Влияние массовых сил на горение гетерогенных систем с конденсированными продуктами реакции // Физика горения и взрыва. 1986. № 1. С. 23–26.
16. Krainov A.Yu., Poryazov V.A., Krainov D.A. Mathematical modelling on extinction of metalized composite solid propellant under a sudden drop in pressure // Propellants, Explosives, Pyrotechnics. 2021. DOI:10.1002/prep.202100123.
17. Соломонов Ю.С., Липанов А.М., Алиев А.В., Дорофеев А.А., Черепов В.И. Твёрдотопливные регулируемые двигательные установки. М.: Машиностроение, 2011. 416 с.
18. Алиев А.В., Амарантов Г.И., Вахрушев А.В. Внутренняя баллистика РДТТ / под ред. А.М. Липанова, Ю.М. Милёхина. М.: Машиностроение, 2007. 504 с.
19. Ерохин Б.Т. Теория внутрикамерных процессов и проектирование РДТТ: Учебник для высших технических учебных заведений. М.: Машиностроение, 1991. 560 с.
20. Костюшин К.В. Численное исследование нестационарных газодинамических процессов при старте твердотопливных ракет // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 67. С. 127–143.
21. Poryazov V.A., Krainov A.Yu., Krainov D.A. Simulating the combustion of n powder with added finely divided aluminum // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2015. V. 88. № 1. P. 94–103. DOI: 10.1007/s10891-015-1171-0.

Poryazov V.A., Krainov D.A., Blokhina A.A. (2022) COMBUSTION OF THE METALLIZED COMPOSITE SOLID CHUNK FUEL CHARGE WITH A FLAT CHANNEL IN A MASS FORCE FIELD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 113–121

DOI 10.17223/19988621/75/10

Keywords: modeling, combustion, metallized composite solid fuel, channel chunk fuel, combustion rate, g-force, mass forces.

In this paper, combustion of a channel charge of a metallized composite solid chunk fuel in the field of mass forces is modeled. We have investigated the influence of the g -force on the total mass influx from the combustion surface of two parallel plates of the metallized solid fuel. The combustion rate of the fuel is calculated based on the nonstationary model of the metallized solid fuel combustion. The conducted computational and theoretical analysis has provided the data on the influence of the mass forces and the composition of the fuel on the total mass influx from the combustion surface. The g -force values are ranged from -650 to 650 m/s². It is assumed that the g -force is directed along the normal to the combustion surface; otherwise, the projection of the g -force onto the normal to the combustion surface is considered. The obtained results have shown that the effect of the g -force is not symmetric – the g -forces, which are identical in magnitude but different in sign, lead to a different response of the combustion rate. The character of the dependence between the combustion rate and g -force for the particles with the radius greater than 7.5 μ m is nonmonotonic. The obtained results demonstrate the importance of taking into account the effect of the g -force on the combustion rate when simulating nonstationary processes in solid propellant engines at the stages of start, maneuvering, and deceleration.

Financial support. This work was supported by the Grant of the President of the Russian Federation (MK-96.2020.8).

Vasily A. PORYAZOV (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: poryazov@ftf.tsu.ru

Dmitry A. KRAINOV (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kraynov@tpu.ru

Anna A. BLOKHINA (Ph.D student, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation) E-mail: nyura.blokhina.97@mail.ru

REFERENCES

1. Maksimov E.I., Maksimov Yu.M., Merganov A.G. (1967) Combustion of condensed substances in a mass force field. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 3(3). pp. 201–203. DOI: 10.1007/BF00791860.
2. Yukhvid V.I., Maksimov E.I., Kozlov V.S. (1974). Combustion of heterogeneous systems in a field of mass forces. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 10(2). pp. 140–145. DOI: 10.1007/BF01464167.
3. Yukhvid V.I., Maksimov E.I., Merzhanov A.G., Khaikin B.I., Kozlov V.S. (1973) Mechanism of the combustion of condensed systems with solid admixtures in a field of body forces. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 9(2). pp. 199–203.
4. Serkov B.B., Maksimov E.I., Merzhanov A.G. (1974). Combustion of condensed systems in a mass-force field. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 4(4). pp. 349–352. DOI: 10.1007/BF01464168.
5. Maksimov Yu.M., Maksimov E.I. (1972). Laws of combustion of condensed systems in a field of mass forces at average pressures. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 8(4). pp. 424–428. DOI: 10.1007/BF00741197.
6. Arkhipov V.A., Barsukov V.D., Berezikov A.P., Tretyakov N.S. (2006) *Osobennosti goreniya kondensirovannykh sistem s katalizatorami v usloviyakh peregruzki* [Features of the

- condensed system combustion with catalysts under overload conditions]. *Khimicheskaya Fizika i Mezoskopiya – Chemical Physics and Mesoscopics*. 8(1). pp. 43–51.
7. Margolin A.D., Krupkin V.G., Khubaev V.G., Baikov V.I., Tokarev N.P., Denisjuk A.P. (1978). Laws governing the combustion of ballistic compositions with overloads. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 14(6). pp. 716–722. DOI: 10.1007/BF00786099.
 8. Maksimov Yu.M., Maksimov E.I., Vilyunov V.N. (1974). Effect of overcharges on the combustion of model mixed metallized compositions. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 10(2). pp. 146–153. DOI: 10.1007/BF01464168.
 9. Margolin A.D., Krupkin V. G. (1975). Influence of condensed admixtures on the powder combustion rate in an acceleration field. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 11(5). pp. 600–605. DOI: 10.1007/BF00751082.
 10. Poryazov V.A., Krainov A.Yu. (2017) *Gorenie tverdogo topliva s dobavleniem poroshka alyuminiya pri peregruzkah* [Combustion of a solid propellant with addition of aluminum powder under an acceleration load]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 45. pp. 95–103. DOI: 10.17223/19988621/45/9.
 11. Ordzhonikidze S.K., Margolin A.D., Pokhil P.F., Uralov A.S. (1971). Combustion of aluminized condensed systems under acceleration loading. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 7(4). pp. 458–464. DOI: 10.1007/BF00740676.
 12. Babuk V.A., Vasil'ev V.A., Potekhin A.N. (2009). Experimental investigation of agglomeration during combustion of aluminized solid propellants in an acceleration field. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 45(1). pp. 32–39. DOI: 10.1007/s10573-009-0005-9.
 13. Rashkovskii S.A. (2007). Effect of acceleration on agglomeration of aluminum particles during combustion of composite solid propellants. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 43(6). pp. 654–663. DOI: 10.1007/s10573-007-0088-0.
 14. Margolin A.D., Krupkin V.G. (1975). Influence of condensed admixtures on the powder combustion rate in an acceleration field. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 11(5). pp. 600–605. DOI: 10.1007/BF00751082.
 15. Kiryashkin A.I., Maksimov Yu.M., Nekrasov E.A. (1986). Effect of mass forces on combustion of heterogeneous systems with condensed combustion products. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 22(1). pp. 20–23. DOI: 10.1007/BF00750700.
 16. Krainov A.Yu., Poryazov V.A., Krainov D.A. (2021) Mathematical modelling on extinction of metallized composite solid propellant under a sudden drop in pressure. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*. 47. DOI: 10.1002/prop.202100123.
 17. Solomonov Yu.S., Lipanov A.M., Aliev A.V., Dorofeev A.A., Cherepov V.I. (2011) *Tverdotoplivnye reguliruemye dvigatel'nye ustanovki* [Solid propellant governed propulsion systems]. Moscow: Mashinostroenie.
 18. Aliev A.V., Amarantov G.N. Vakhrushev A.V. (2007) *Vnutrennyaya ballistika RDTT* [Internal ballistics of solid-propellant rocket motors]. Ed. by Lipanov A.M., Milekhin Yu.M. Moscow: Mashinostroenie.
 19. Erokhin B.T. (1991) *Teoriya vnutrikamernykh protsessov i proektirovaniya RDTT* [Theory of intrachamber processes and design of solid-propellant rocket motors]. Moscow: Mashinostroenie.
 20. Kostyushin K.V. (2020) Chislennoye issledovaniye nestatsionarnykh gazodinamicheskikh protsessov pri starte tverdotoplivnykh raket [Numerical investigation of unsteady gasdynamic processes at the launch of solid-propellant rockets]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 67. pp. 127–143. DOI: 10.17223/19988621/50/9.
 21. Poryazov V.A., Krainov A.Yu., Krainov D.A. (2015) Simulating the combustion of N powder with added finely divided aluminum. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 88(1). pp. 94–103. DOI: 10.1007/s10891-015-1171-0.

УДК 536.46
DOI 10.17223/19988621/75/11

С.А. Рашковский, А.В. Федорычев, Ю.М. Милехин

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ГОРЕНИЯ ЧАСТИЦ БОРА, КАРБИДА БОРА, НИТРИДА БОРА И УГЛЕРОДА В ВОЗДУХЕ¹

Проведен анализ моделей горения основных компонентов конденсированных продуктов сгорания (КПС) борсодержащих твердых ракетных топлив: бора, карбида бора, нитрида бора и углерода. Используя известные экспериментальные данные, определены параметры модели горения частиц карбида бора и нитрида бора. Используя модели горения частиц бора, B_4C , BN и углерода, проведены параметрические расчеты горения, как отдельных указанных частиц, так и их смесей, моделирующих состав КПС борсодержащих топлив.

Ключевые слова: бор, карбид бора, нитрид бора, углерод, горение частиц, полнота сгорания, ракетно-прямоточный двигатель, конденсированные продукты сгорания, математическое моделирование.

Ракетно-прямоточные двигатели (РПД) на твердом топливе являются перспективными двигательными установками высокоскоростных беспилотных летательных аппаратов.

Сжигание твердого топлива в РПД происходит в специальном автономном газогенераторе (ГГ). Образующиеся продукты сгорания поступают в камеру дожигания РПД, где они сгорают в смеси с воздухом, поступающим из внешней среды через воздухозаборники.

В качестве перспективного горючего компонента твердых топлив РПД рассматриваются порошкообразный бор и его соединения с алюминием и магнием (полибориды).

До недавнего времени общепринятым было мнение, что борсодержащее твердое топливо является своеобразным источником порошкообразного бора: при сгорании такого твердого топлива из него «вылетают» частицы бора в практически неизменном виде, и в таком виде они попадают в камеру дожигания РПД. Эта идея стимулировала большое число исследований, посвященных горению частиц бора [1–6], что позволило разработать современную модель этого процесса [1, 2].

Вместе с тем экспериментальные работы последних лет [7–9], посвященные горению борсодержащих топлив и определению состава и свойств конденсированных продуктов сгорания (КПС) борсодержащих твердых топлив, показывают, что эти представления не соответствуют действительности.

Так, для исследованных топлив [7–9] в диапазоне давлений 0.25–8 МПа количество непрореагировавшего бора в КПС изменялось в пределах от 1 до 25%, количество карбида бора в КПС изменялось в пределах от 1 до 40%, количество оксида бора – в пределах 12–25%, количество нитрида бора изменялось в пределах от 2 до 6%, количество углерода – от 10 до 16%. Содержание указанных веществ в КПС зависит от давления в камере сгорания ГГ.

¹ Работа финансировалась за счет гранта Российского научного фонда № 21-19-00541.

Таким образом, математические модели процессов в камере дожигания РПД должны учитывать, наряду с горением элементарного бора, горение таких конденсированных веществ, как B_4C , BN и углерод.

Если изучению горения частиц бора и частиц углерода уделялось много внимания в течение последних 50 лет, то горение частиц B_4C и BN исследовано значительно меньше.

Целью данной работы является анализ имеющихся экспериментальных данных по высокотемпературному окислению частиц карбида бора и нитрида бора, выяснение механизма этих процессов и выбор математической модели, способной описать горение частиц B_4C и BN в условиях камеры дожигания РПД.

В настоящей работе считается, что B, B_4C , BN и C попадают в камеру дожигания РПД в виде отдельных независимых частиц разного размера. Чтобы получить представление о том, как разные вещества участвуют в процессе горения, мы сравниваем горение отдельных частиц B, B_4C , BN и C в одинаковых условиях.

Модель горения частиц бора в воздухе

Окисление бора затруднено наличием на поверхности частицы жидкого слоя оксида бора, который существенно замедляет молекулярную диффузию, а вместе с ней и горение частицы бора.

Обычно выделяют две основные стадии горения частицы бора в кислородсодержащей атмосфере [1, 2]: первая стадия включает нагрев частицы и удаление оксидного слоя. Эту стадию обычно ассоциируют с задержкой воспламенения. Как только с поверхности частицы исчезает оксидный слой, начинается вторая стадия горения, на которой «голая» частица бора активно реагирует с кислородом, беспрепятственно поступающим к поверхности частицы из окружающей среды.

Вследствие высокой температуры кипения бора (3900–4140 К при 1 атм) гетерогенные реакции являются преобладающими в процессе химических превращений, в то время как газофазные реакции играют незначительную роль, что принципиально отличает горение частиц бора от горения капель углеводородов.

Основываясь на экспериментальных данных [1], была разработана модель горения одиночной частицы бора [1, 2], получившая в литературе условное название PSU-модель. PSU-модель стала основой для целого класса новых моделей, с разных точек зрения описывающих горение одиночных частиц бора. Сравнение PSU-модели с экспериментальными данными показало, что она с разумной точностью описывает горение крупных и мелких одиночных частиц бора в разных условиях. В полной PSU-модели учитываются реакции бора с молекулярным кислородом, водяным паром, фтористым водородом и атомарным фтором [1, 2]. В настоящей работе используется «укороченный» вариант PSU-модели [2], в котором рассматриваются только реакции с молекулярным кислородом.

Модель [2] позволяет рассчитать изменение диаметра частицы бора от времени в разных условиях.

Определим полноту сгорания частиц бора как отношение сгоревшей массы частицы к ее начальной массе. Выражая массу через диаметр, для полноты сгорания частицы бора получим соотношение

$$\alpha = 1 - (d/d_0)^3, \quad (1)$$

где d и d_0 – текущий и начальный диаметры частицы бора соответственно.

Окисление частиц карбида бора в воздухе

В отличие от частиц бора горение частиц B_4C исследовано значительно менее подробно. Именно этим объясняется отсутствие детальной информации по горению частиц карбида бора и, как следствие, отсутствие детальной модели горения частиц карбида бора.

В основном эксперименты по окислению карбида бора проводились либо на прессованных, либо на спеченных образцах с низкой пористостью. Перенести результаты этих экспериментов на отдельные частицы карбида бора не представляется возможным. Из всего многообразия имеющихся экспериментальных данных по окислению карбида бора можно выделить только две работы [10, 11], в которых исследовалось окисление частиц карбида бора в воздухе.

Авторы [10] исследовали изотермическое окисление порошкового карбида бора с мелкими (1.52 мкм), средними (22.5 мкм) и крупными (59.6 мкм) частицами на воздухе в диапазоне температур от 500 до 800 °С. Эксперименты продолжались от 15 до 210 мин, с непрерывным взвешиванием образца.

В работе [11] исследовано изотермическое окисление частиц карбида бора со средним размером 10, 32 и 93 мкм и удельной поверхностью 0.705, 0.253 и 0.176 м²/г соответственно. Окисление проводилось на воздухе при температурах 600, 650 и 700 °С в течение 10–120 мин.

Образцы порошка B_4C массой 500±1 мг представляли собой насыпной слой толщиной около 2 мм.

В результате экспериментов [10, 11] определялась степень (полнота) окисления порошка

$$\alpha = \frac{\Delta m / m_0}{(\Delta m)_{\max} / m_0}, \quad (2)$$

где Δm – изменение массы образца в ходе реакции; $(\Delta m)_{\max}$ – максимально возможное изменение массы образца в ходе реакции. Для карбида бора

$$\frac{(\Delta m)_{\max}}{m_0} = \frac{2\mu_{B_2O_3} - \mu_{B_4C}}{\mu_{B_4C}} = 1.52, \quad (3)$$

что соответствует полному превращению карбида бора в оксид бора в предположении, что оксид бора не улетучивается.

Результаты экспериментов [10, 11] обрабатывались с использованием уравнения Джандера [12]

$$\left[1 - (1 - \alpha)^{1/3}\right]^2 = kt, \quad (4)$$

описывающего окисление сферических частиц, контролируемое диффузией, где k – константа скорости окисления, контролируемого диффузией; t – длительность процесса окисления.

В основе модели (4) лежат следующие представления об окислении карбида бора в кислороде [12, 13].

(1) Частица B_4C считается сферической и покрыта пленкой оксида бора, который при рассматриваемых температурах находится в жидком состоянии.

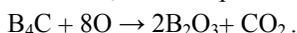
(2) Через пленку расплава B_2O_3 к поверхности частицы происходит диффузия кислорода из окружающей среды за счет растворения кислорода в расплаве.

(3) Кислород растворяется в расплаве оксида бора в атомарном виде; атомарный кислород образуется у свободной поверхности частицы за счет диссоциации молекулярного кислорода, содержащегося в окружающей среде. Концентрация $C_{\text{O}}^{(0)}$ атомарного кислорода в расплаве B_2O_3 у границы раздела расплава с газовой фазой связана с концентрацией кислорода в газовой фазе и с растворимостью кислорода в расплаве B_2O_3 и определяется законом Сиверта

$$C_{\text{O}}^{(0)} = B\sqrt{p_{\text{O}_2}} \exp(E_s / RT), \tag{5}$$

где p_{O_2} – парциальное давление кислорода в окружающем газе; B и $E_s > 0$ – постоянные.

(4) На границе раздела $\text{V}_4\text{C}/\text{B}_2\text{O}_3$ поступающий атомарный кислород взаимодействует с V_4C , образуя жидкий B_2O_3 и газообразный CO_2 согласно реакции



(5) Газообразный CO_2 диффундирует через слой B_2O_3 в окружающую среду.

(6) Испарением расплава B_2O_3 со свободной поверхности частицы пренебрегается.

(7) Наиболее медленной стадией процесса считается диффузия кислорода через расплав B_2O_3 [12, 13], поэтому химическая реакция между V_4C и кислородом на границе раздела $\text{V}_4\text{C}/\text{B}_2\text{O}_3$ лимитируется скоростью диффузии кислорода через слой оксида бора.

В результате обработки экспериментальных данных [10, 11], используя формулу (4), получены зависимости константы скорости окисления k от температуры для частиц V_4C разного диаметра (рис. 1).

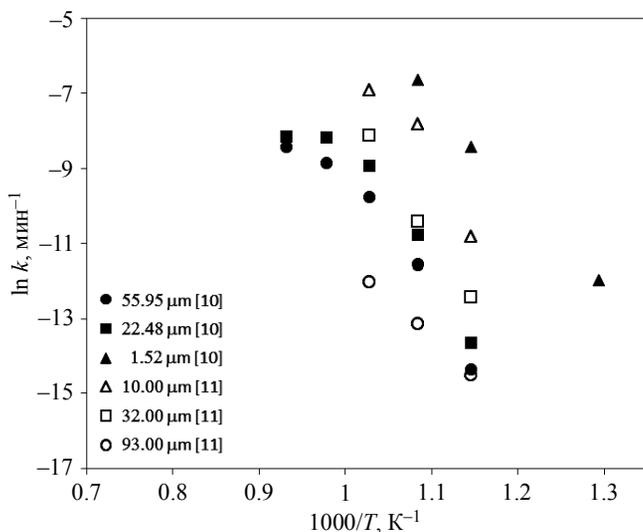


Рис. 1. Зависимости константы скорости окисления k от температуры для частиц V_4C разного диаметра по данным работ [10, 11]

Fig. 1. Dependences of the oxidation rate constant k on temperature for V_4C particles with different diameters according to the data of [10, 11]

Полученные данные (рис. 1) аппроксимировались зависимостью

$$k = 3.56 \cdot 10^9 d_0^{-1.5} \exp(-25860/T), \quad (7)$$

где k измеряется в мин^{-1} ; d_0 – начальный диаметр частиц V_4C в мкм.

На рис. 2 приведено сравнение значений константы скорости окисления k для V_4C , полученной расчетом по формуле (7), с экспериментальными данными [10, 11], приведенными на рис. 1.

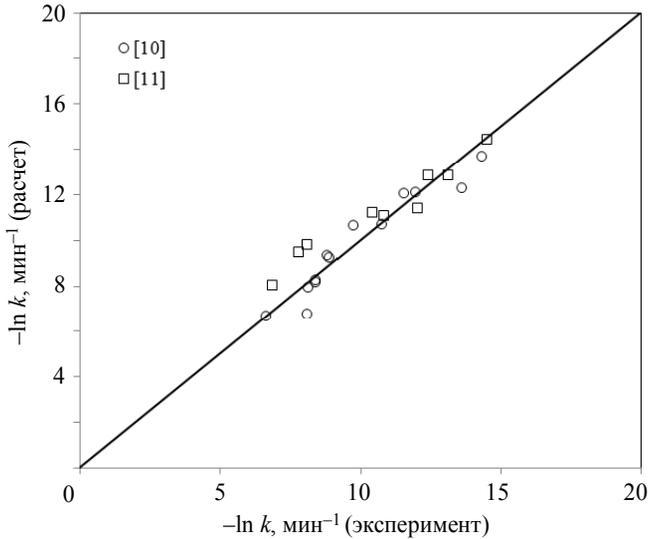


Рис. 2. Сравнение значений константы скорости окисления k для V_4C , полученной расчетом по формуле (7), с экспериментальными данными [10, 11], приведенными на рис. 1

Fig. 2. Comparison of values of the oxidation rate constant k for V_4C obtained by calculation using formula (7) with the experimental data [10, 11] shown in Fig. 1

Видно, что формула (7) удовлетворительно описывает зависимость константы скорости окисления k для V_4C от температуры и размера частиц во всем исследованном диапазоне. Отклонения расчетных значений k от экспериментальных связаны с тем, что понятие «размер частицы», применительно к исследованным порошкам, в достаточной степени условно, так как в экспериментах [10, 11] использовались порошки с широким распределением по размерам. Поэтому корреляция (7) устанавливает связь константы скорости окисления k от некоторого среднего размера частиц, указанного в статьях [10, 11].

Несмотря на это, формула (7) достаточно хорошо (коэффициент корреляции 0.91) отражает связь константы скорости окисления k с характерными размерами частиц и температурой.

Отметим, что формула (4) аппроксимирует только начальный участок экспериментальных зависимостей $\alpha(t)$ [10, 11]. В дальнейшем экспериментальная кривая обычно выходит на постоянный уровень или максимум, не достигая значения 40%. Такое поведение экспериментальной кривой связано с особенностью проведения экспериментов [10, 11], в которых использовался тонкий слой порошка

B_4C . На начальном этапе экспериментов [10, 11] по изотермическому окислению порошков B_4C содержание оксида бора в порошке было малым и частицы в процессе окисления вели себя, как отдельные, однако, по мере увеличения степени (полноты) окисления, содержание оксида в порошке увеличивалось настолько, что происходило слипание частиц. В результате образец превращался в монолитную массу расплава B_2O_3 , внутри которой были капсулированы частицы B_4C . Это затрудняло диффузию кислорода к поверхности частиц B_4C и, как следствие, существенно снижало скорость окисления. В результате процесс окисления замедлялся и кривая $\alpha(t)$ выходила на плато. Если при этом происходило интенсивное испарение оксида бора, то в дальнейшем масса образца (а значит, и рассчитанное по ней значение α) даже уменьшалась. Процесс испарения (уноса) B_2O_3 в рассматриваемых условиях является медленным и далее не учитывается.

Введем время полного окисления частицы t_{ox} , которое соответствует $\alpha = 1$.

Как следует из (7),

$$t_{ox} = k^{-1}. \quad (8)$$

Тогда формулу (7) можно переписать в виде

$$\left[1 - (1 - \alpha)^{1/3}\right]^2 = t / t_{ox}. \quad (9)$$

Учитывая (7) и (8), получим

$$t_{ox} = 1.69 \cdot 10^{-8} d_0^{1.5} \exp(25860/T), \quad (10)$$

где время измеряется в секундах, d_0 – начальный диаметр частиц B_4C в мкм.

Эксперименты [10, 11] проводились в воздухе при давлении 1 атм, что соответствует парциальному давлению кислорода $p_{O_2} = 0.21$ атм.

При других давлениях воздуха константа скорости окисления k и время полного окисления частицы t_{ox} изменятся.

Как показано в [13], константа скорости окисления, контролируемого диффузией кислорода в расплаве, $k \sim C_O^{(0)}$, где $C_O^{(0)}$ – концентрация атомарного кислорода в расплаве B_2O_3 у границы раздела расплава с газовой фазой. Концентрация $C_O^{(0)}$ связана с концентрацией кислорода в газовой фазе и с растворимостью кислорода в расплаве B_2O_3 и определяется законом Сивертса (5).

Тогда, учитывая (5) и (10), при произвольном парциальном давлении кислорода получим [13]

$$t_{ox} = 0.77 \cdot 10^{-8} \frac{d_0^{1.5}}{\sqrt{p_{O_2}}} \exp(25860/T). \quad (11)$$

Отметим, что зависимости (7) и (11) получены при относительно низких температурах (≤ 800 °C).

Предполагая, что при высоких температурах механизм окисления карбида бора не изменится, экстраполируем зависимости (9), (11) на температуры, характерные для камеры дожигания РПД.

Дифференцируя (9) по времени, получим

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{3(1 - \alpha)^{2/3}}{2t_{ox}[1 - (1 - \alpha)^{1/3}]}. \quad (12)$$

Окисления частиц нитрида бора в воздухе

Экспериментальных данных по окислению частиц нитрида бора BN еще меньше, чем для карбида бора. Нам известна только одна работа [16], в которой исследуется окисление порошка нитрида бора с частицами диаметром 1.2 мкм во влажном воздухе. В работе [16] основное внимание уделяется взаимодействию оксида бора с водяным паром и уносу оксида бора с поверхности частицы, что соответствует очень большим длительностям процесса. В то же время, данные, относящиеся к начальному периоду окисления BN, который и представляет наибольший интерес с точки зрения практического приложения к РПД, приведены в масштабе, не позволяющем их проанализировать с достаточной точностью. Вместе с тем, экспериментальные данные [16] показывают, что процесс на начальной стадии окисления BN также хорошо описывается формулой Джандера (9). Это указывает на то, что процесс окисления нитрида бора также контролируется диффузией атомарного кислорода в слое оксида бора, покрывающем частицу. На границе BN/B₂O₃ происходит окисление нитрида бора согласно реакции



Как показано в работах [12–16], лимитирующим фактором в процессе окисления нитрида бора также является диффузия кислорода через слой расплавленного оксида бора. Это указывает на то, что конкретный исходный материал частицы (в данном случае В₄С или BN) играет второстепенную роль и скорость окисления нитрида бора и карбида бора будет одинаковой при одинаковом размере частиц, одинаковом слое оксида бора на их поверхности и одинаковых условиях, в которых происходит окисление.

По этой причине, за неимением других данных, будем считать, что скорость окисления карбида бора и нитрида бора описывается одной и той же моделью (9), (11) и, более того, имеет одинаковое значение в одинаковых условиях.

Следует иметь в виду, что для нитрида бора

$$\frac{(\Delta m)_{\max}}{m_0} = \frac{0.5\mu_{\text{B}_2\text{O}_3} - \mu_{\text{BN}}}{\mu_{\text{BN}}} = 0.4026, \quad (14)$$

что соответствует полному превращению нитрида бора в оксид бора без уноса оксида бора с поверхности частицы.

Окисление частиц углерода в воздухе

Для расчета процесса горения частиц углерода в воздухе в настоящей работе будем использовать упрощенную методику, предложенную в статье [17], основанную на экспериментальных данных [18].

Твердые частицы углерода считаются сферическими с одинаковым диаметром d_p .

Горение частиц углерода происходит в результате поверхностной реакции



Для описания поверхностной реакции углеродной частицы использована диффузионно-кинетическая модель [17]. Скорость диффузии R_d определяется выражением

$$R_d = C_d \frac{[(T_p + T_\infty)/2]^{0.75}}{d_p}, \quad (16)$$

где T_p и T_∞ – температура частицы и окружающей среды соответственно; $C_d = 5.0 \times 10^{-12}$ кг/(м·с·Па·К^{0.75}) – коэффициент скорости диффузии, полученный при сжигании угля между 1200 и 2000 К [18].

Скорость реакции R_k определяется соотношением

$$R_k = C_k \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \quad (17)$$

где коэффициент C_k и энергия активации E скорости реакции могут быть получены из эмпирической формулы для поверхностной реакции полидисперсных частиц угля при различных значениях концентрации кислорода. Экспериментальные данные [18] показывают, что скорость поверхностной реакции не зависит от концентрации кислорода (в диапазоне 5–10%) и размера частиц (в диапазоне от 28 до 105 мкм). В этом случае упрощенное выражение типа Аррениуса, основанное на представленных данных, может быть записано в виде [17]

$$R_k = 0.0016 \exp\left(-\frac{65900}{RT}\right) \text{ (кг/(м}^2\cdot\text{с}\cdot\text{Па))}, \quad R^2 = 0.94. \quad (18)$$

Общая масса углеродных частиц, прореагировавших согласно диффузионно-кинетической модели, описывается уравнением

$$\frac{dm_p}{dt} = -S_p p_{O_2} \frac{R_d R_k}{R_d + R_k}, \quad (19)$$

где p_{O_2} – парциальное давление кислорода в окружающем газе; S_p – площадь поверхности частицы.

Считая частицу углерода сферической и учитывая (19), для изменения диаметра частицы получим уравнение

$$\rho_C \frac{d(d_p)}{dt} = -2p_{O_2} \frac{R_d R_k}{R_d + R_k}, \quad (20)$$

где ρ_C – плотность частиц углерода, которая считается постоянной, равной плотности графита: $\rho_C = 2200$ кг/м³.

Тогда полнота сгорания частицы углерода определяется соотношением

$$\alpha = 1 - (d_p / d_0)^3. \quad (21)$$

Модель горения КПС борсодержащих твердых топлив

До этого мы рассматривали горение отдельных компонентов КПС.

В действительности, в камере дожигания происходит горение КПС, содержащих одновременно несколько компонентов. Рассмотрим горение КПС, содержащих бор, карбид бора, нитрид бора и углерод.

Пусть массовые доли этих компонентов в КПС равны z_B, z_{B_4C}, z_{BN} и z_C соответственно. При этом считается, что

$$z_B + z_{B_4C} + z_{BN} + z_C \leq 1, \quad (22)$$

так как в состав КПС кроме указанных веществ могут входить B_2O_3, Al_2O_3 и др., которые считаются инертными.

Тогда полнота сгорания КПС будет определяться соотношением

$$\alpha = \frac{\alpha_B Q_B z_B + \alpha_{B_4C} Q_{B_4C} z_{B_4C} + \alpha_{BN} Q_{BN} z_{BN} + \alpha_C Q_C z_C}{Q_B z_B + Q_{B_4C} z_{B_4C} + Q_{BN} z_{BN} + Q_C z_C}, \quad (23)$$

где $\alpha_B, \alpha_{B_4C}, \alpha_{BN}$ и α_C – полнота сгорания бора, карбида бора, нитрида бора и углерода соответственно; Q_B, Q_{B_4C}, Q_{BN} и Q_C – теплотворные способности бора, карбида бора, нитрида бора и углерода соответственно, которые приведены в табл. 1.

Таблица 1

Теплотворная способность основных компонентов КПС борсодержащих твердых топлив

Вещество	B	B ₄ C	BN	C
Теплотворная способность, МДж/кг	58.74	51.4	15.17	32.8

Отметим, что формула (23) определяет полноту сгорания КПС, а не полноту сгорания всего топлива. Полнота сгорания всего топлива определяется как

$$\eta = \frac{(1 - z_{\text{КПС}}) Q_g + (\alpha_B Q_B z_B + \alpha_{B_4C} Q_{B_4C} z_{B_4C} + \alpha_{BN} Q_{BN} z_{BN} + \alpha_C Q_C z_C) z_{\text{КПС}}}{(1 - z_{\text{КПС}}) Q_g + (Q_B z_B + Q_{B_4C} z_{B_4C} + Q_{BN} z_{BN} + Q_C z_C) z_{\text{КПС}}}, \quad (24)$$

где Q_g – тепловой эффект газофазных реакций; $z_{\text{КПС}}$ – массовая доля КПС в продуктах сгорания борсодержащего топлива.

Здесь предполагается, что газофазные реакции являются очень быстрыми по сравнению с горением КПС и завершаются мгновенно.

Результаты моделирования

Рассмотрим результаты моделирования горения КПС в воздухе в изотермических условиях.

При моделировании считается, что давление p и температура T воздуха остаются постоянными в течение всего процесса горения, а парциальное давление O_2 в воздухе постоянно и равно $0.21p$.

КПС борсодержащих топлив представляют собой смесь различных веществ, основными из которых являются [7–9] бор, карбид бора, нитрид бора, углерод и оксид бора, при этом последний при высоких температурах может испаряться и взаимодействовать с водяным паром с образованием летучих борных кислот. Процессы высокотемпературного взаимодействия оксида бора с водяным паром и испарение оксида бора в настоящей работе не рассматриваются, поэтому оксид бора в данной работе считается инертным веществом в составе КПС.

Очевидно, процесс горения КПС в воздухе при прочих равных условиях будет зависеть не только от их химического состава, но и от их структуры и дисперсности.

В настоящее время отсутствует детальная информация о структуре КПС, в частности, отсутствуют данные о том, как указанные вещества распределены внутри частиц КПС. По этой причине в данной работе считается, что каждое вещество представляет собой отдельную частицу, имеющую те же размеры, что и наблюдаемые в экспериментах частицы КПС [7–9].

Как следует из экспериментальных данных [7–9], размеры частиц КПС борсодержащих топлив существенно зависят от состава топлива и условий в камере сгорания газогенератора. Так при фиксированном размере 3 мкм частиц порошкообразного бора или полиборидов алюминия в топливе, размеры частиц КПС, попадающих в камеру дожигания РПД, могут составлять от 5 до 20 мкм, при этом отдельные частицы КПС могут иметь размеры до 50 мкм.

Процентное содержание различных компонентов в КПС также существенно изменяется в зависимости от состава топлива и условий в камере сгорания газогенератора.

В связи с этим были проведены расчеты полноты сгорания отдельных частиц КПС в одинаковых условиях и КПС, состоящих из этих веществ в разной пропорции.

Исходя из анализа экспериментальных данных [7–9], рассмотрим два наиболее характерных состава КПС, приведенных в табл. 2. Состав, соответствующий варианту 1, характеризуется малым содержанием в КПС элементного бора и большим содержанием карбида бора, а состав, соответствующий варианту 2, – большим содержанием в КПС элементного бора и малым содержанием B_4C .

Таблица 2

Варианты расчетов

Вариант	B, %	B_4C , %	BN, %	C, %
1	10	25	4	15
2	30	10	5	15

Отметим, что в данной работе рассматривалось горение КПС в изотермических условиях и не учитывалось изменение температуры смеси при горении КПС. Поэтому горение отдельных частиц разных компонентов КПС не зависело от состава КПС, но зависело от давления и температуры окружающей среды, а также от размеров частиц.

В каждом варианте расчета считается, что частицы всех компонентов КПС имеют одинаковые размеры. Учитывая, что окисление частиц B_4C и BN согласно описанной выше модели происходит с одинаковой скоростью, чтобы различать их на графике, начальный размер частиц BN искусственно принимался на 5–10% больше размера остальных частиц.

Результаты расчетов полноты сгорания отдельных компонентов КПС и КПС в целом показаны на рис. 3 – 6.

Видно, что определяющим фактором для полноты сгорания отдельных частиц КПС является температура окружающей среды, а роль давления является второстепенной.

Как следует из результатов моделирования, при низких температурах ($T = 2000$ К, рис. 3) в камере дожигания быстрее всего сгорают частицы углерода и бора, в то время, как частицы карбида бора и нитрида бора горят медленнее и требуется гораздо больше времени (а значит, и большей длины камеры дожигания) для полного их сгорания. Как следует из рис. 3, при низких температурах в камере дожигания можно выделить две стадии горения КПС состава Вар. 1 (см. табл. 2), с малым содержанием элементного бора в КПС: на первой стадии сгорают частицы углерода и бора, а на второй – догорают частицы карбида бора и нитрида бора. Для этого варианта расчетов полнота сгорания КПС быстро достигает

уровня 65–75% (что соответствует полному выгоранию углерода и бора в КПС) и после этого медленно увеличивается, главным образом, за счет сгорания карбида бора. Эти результаты коррелирует с экспериментальными данными для модельных РПД, согласно которым уровень полноты сгорания в 70–75% достигается легко, однако дальнейшее повышение полноты сгорания возможно только за счет специальных конструктивных и технологических мероприятий.

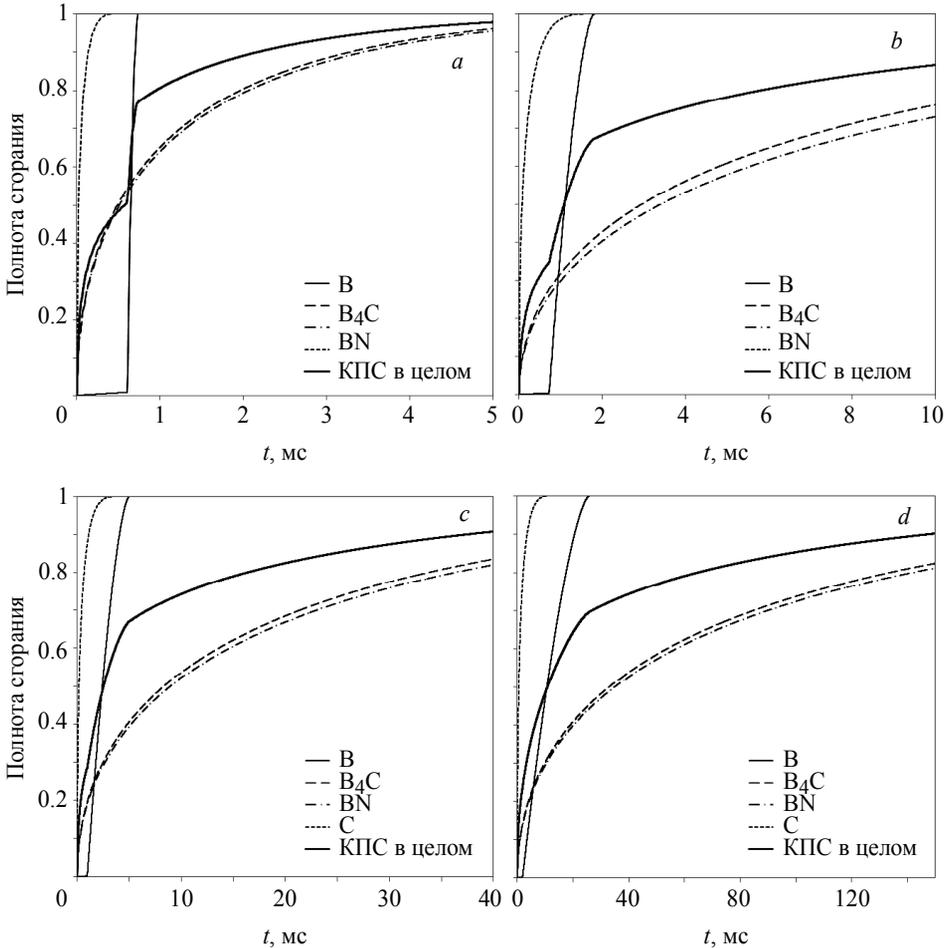


Рис. 3. Полнота сгорания отдельных компонентов КПС и КПС в целом для Вар. 1 (см. табл. 2); $p = 10$ атм.; $T = 2000$ К; а – $d_0 = 3$ мкм; б – $d_0 = 10$ мкм; в – $d_0 = 20$ мкм; г – $d_0 = 50$ мкм

Fig. 3. Completeness of combustion of individual components of the CCP and CCP as a whole for Var. 1 (see Table 2); $p = 10$ atm; $T = 2000$ K; $d_0 =$ (a) 3, (b) 10, (c) 20, and (d) 50 μm

При высоких температурах в камере дожигания ($T = 2500$ К), напротив, частицы бора сгорают медленнее (главным образом, за счет большой длительности первой стадии процесса горения), чем частицы карбида и нитрида бора, при этом, быстрее всего сгорают частицы углерода. В этом случае для состава Вар. 1 полнота сгорания КПС определяется полнотой сгорания частиц карбида бора.

Влияние температуры и давления в камере дожигания на полноту сгорания КПС разного состава показано на рис. 4–6.

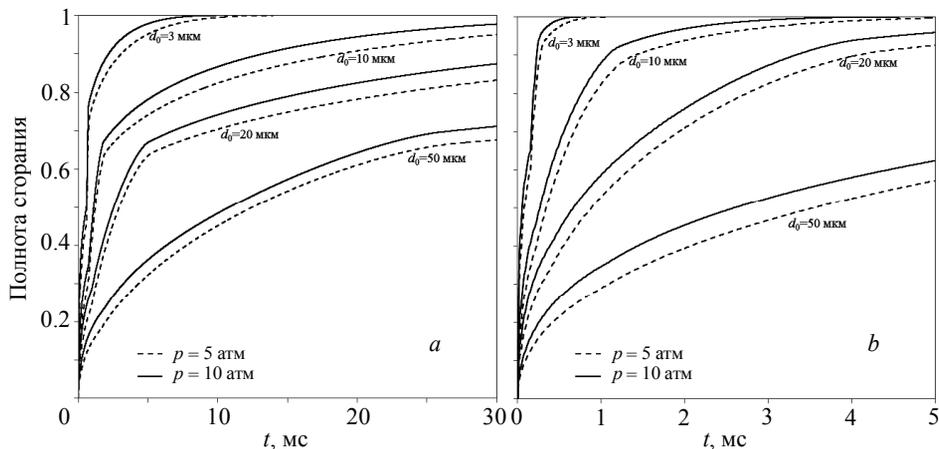


Рис. 4. Полнота сгорания КПС Вар. 1 (см. табл. 2); $a - T = 2000$ К; $b - T = 2500$ К
Fig. 4. Completeness of combustion of CCP Var. 1 (see Table 2); $T = (a) 2000$ and $(b) 2500$ К

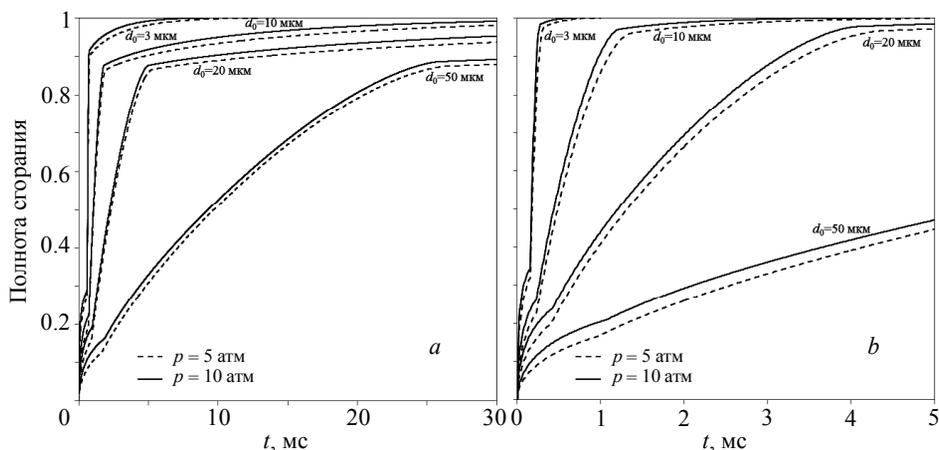


Рис. 5. Полнота сгорания КПС Вар. 2 (см. табл. 2); $a - T = 2000$ К; $b - T = 2500$ К
Fig. 5. Completeness of combustion of CCP Var. 2 (see Table 2); $T = (a) 2000$ and $(b) 2500$ К

Если температуру в камере дожигания можно регулировать, например за счет ступенчатой подачи воздуха [19–20] и повышения теплотворной способности топлива, то влияние на размеры частиц КПС ограничено. Как следует из экспериментальных данных [7–9], размеры частиц КПС, попадающих в камеру дожигания из газогенератора, слабо коррелируют с размерами исходных частиц бора или полиборидов, входящих в состав топлива. Это связано с интенсивными процессами агломерации и химических превращений частиц бора и полиборидов, происходящих на поверхности горения топлива и приводящих к многократному укрупнению частиц, покидающих поверхность горения. В результате этих процессов с поверхности горения вылетают конгломераты, состоящие из слипшихся и/или

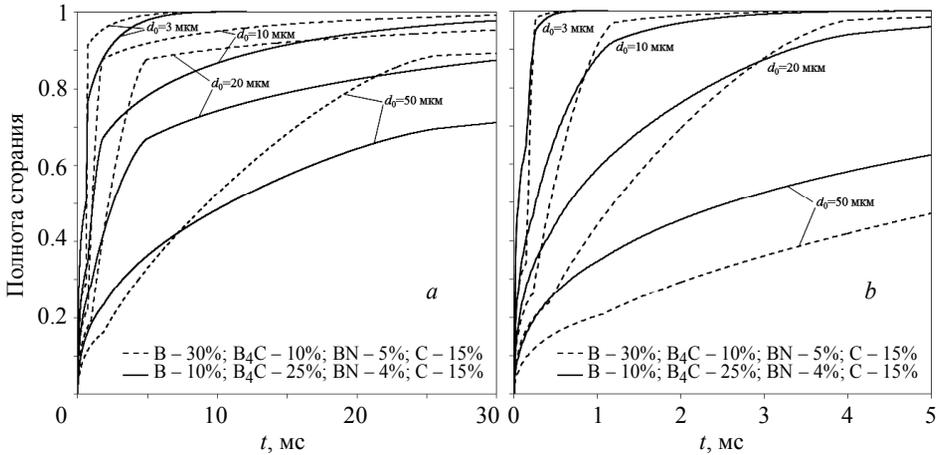


Рис. 6. Полнота сгорания КПС разного состава при $p = 10$ атм;
 а – $T = 2000$ К; б – $T = 2500$ К

Fig. 6. Completeness of combustion of CCP of different composition at $p = 10$ atm;
 $T = (a) 2000$ and $(b) 2500$ K

спекшихся частиц, которые имеют размеры десятки и сотни микрометров. Размеры отдельных конгломератов, покидающих поверхность горения, могут достигать нескольких миллиметров. Вместе с тем отбор КПС за соплом газогенератора показал [7–9], что в камеру дожигания попадают частицы КПС с размерами 5–30 мкм, что существенно меньше размеров частиц КПС, покидающих поверхность горения. Это указывает на интенсивное дробление частиц КПС в сопле газогенератора и на слабую связь частиц, входящих в состав конгломератов. Таким образом, организация потока продуктов сгорания в сопле газогенератора и на входе в камеру дожигания РПД позволяет существенно снизить размеры частиц КПС, попадающих в камеру дожигания РПД, и, тем самым, повысить полноту сгорания твердого топлива в РПД. Экспериментальные данные [7–9] косвенно указывают на роль оксида бора в формировании конгломератов и их прочности: чем больше оксида бора образовалось в камере сгорания газогенератора, тем крупнее и прочнее конгломераты, тем больше размеры частиц на выходе из газогенератора.

Заключение

Проведен анализ моделей горения основных компонентов КПС борсодержащих твердых ракетных топлив: бора, карбида бора, нитрида бора и углерода с использованием известных экспериментальных данных, определены параметры модели горения частиц карбида бора и нитрида бора, а для моделей горения частиц бора, B_4C , BN и углерода проведены параметрические расчеты горения как отдельных указанных частиц, так и их смесей, моделирующих характерный состав КПС борсодержащих топлив.

Проведенный сравнительный анализ горения частиц бора, B_4C , BN и углерода в пропорциях, характерных для КПС борсодержащих топлив, показал, что наименьшее влияние на полноту сгорания КПС оказывает горение BN. Это связано с его низкой теплотворной способностью и малым содержанием в КПС. При прочих равных условиях быстрее всего сгорают частицы углерода, однако их вклад в

полноту сгорания КПС меньше, чем у бора и карбида бора, вследствие более низкой теплотворной способности.

Приведенные данные демонстрируют положительное влияние высокой температуры и малых размеров частиц на полноту сгорания КПС борсодержащих топлив в условиях камеры дожигания РПД. При низких температурах в камере дожигания РПД (менее 2000 К) бор и углерод, содержащиеся в КПС, сгорают быстрее V_4C , что для типичного состава КПС обеспечивает полноту сгорания на уровне 65–75%. Дальнейшее повышение полноты сгорания происходит медленно за счет догорания частиц V_4C . При высоких температурах в камере дожигания РПД (более 2500 К) процесс горения КПС интенсифицируется. Это приводит к тому, что бор и карбид бора вносят примерно одинаковый вклад в полноту сгорания КПС, при этом на начальном этапе горения КПС V_4C может вносить даже больший вклад в полноту сгорания КПС, чем бор.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yeh C., Kuo K.* Ignition and Combustion of Boron Particles // *Progr. Energy Combust. Sci.* 1996. V. 22. P. 511–541.
2. *Hussmann B., Pfitzner M.* Extended combustion model for single boron particles – Part I: Theory // *Combustion and Flame*. 2010. V 157. P. 803–821.
3. *Глотов О.Г., Суродин Г.С.* Горение свободно падающих в воздухе агломератов из алюминия и бора. II. Результаты экспериментов // *Физика горения и взрыва*. 2019. Т. 55. № 3. С. 110–117.
4. *Буланин Ф.К. и др.* Воспламенение аэрозольных боридов металлов // *Физика горения и взрыва*. 2020. Т. 56. № 1. С. 65–71.
5. *Савельев А.М., Тутова Н.С.* Расчетно-теоретический анализ влияния оксидной пленки бората алюминия на условия воспламенения одиночных частиц диборида алюминия // *Физика горения и взрыва*. 2021. Т. 57. № 3. С. 65–78.
6. *Архипов В.А. и др.* Моделирование процессов зажигания и горения борсодержащих твердых топлив // *Физика горения и взрыва*. 2021. Т. 57. № 3. С. 58–64.
7. *Liu L.L., He G.Q., Wang Y.H., Hu S.Q., Liu Y.M.* Factors affecting the primary combustion products of boron-based fuel-rich propellants // *Journal of Propulsion and Power*. 2017. V. 33(2). P. 333–337.
8. *Liu L.L., He G.Q., Wang Y.H., Hu S.Q.* Chemical analysis of primary combustion products of boron-based fuel-rich propellants // *Rsc Advances*. 2015. V. 5(123). P. 101416–101426.
9. *Федорычев А.В., Милехин Ю.М., Рашковский С.А.* Конденсированные продукты сгорания борсодержащих твердых топлив // *Доклады Академии наук*. 2021. Т. 500. С. 56–61. DOI: 10.31857/S2686953521050058.
10. *Li Y.Q., Qiu T.* Oxidation behaviour of boron carbide powder // *Mater. Sci. Eng. A*. 2007. V. 444. – P. 184–191.
11. *Kılıçarslan A., Toptan F., Kerti I., Piskin S.* Oxidation of boron carbide particles at low temperatures // *Materials Letters*. 2014. V. 128. P. 224–226.
12. *Chou K.C., Hou X.M.* Kinetics of high-temperature oxidation of inorganic nonmetallic materials // *Journal of the American Ceramic Society*. 2009. V. 92. No. 3. P. 585–594.
13. *Chou K.C.* A kinetic model for oxidation of Si–Al–O–N materials // *Journal of the American Ceramic Society*. 2006. V. 89. No. 5. P. 1568–1576.
14. *Xinmei H. et al.* Effect of temperature on reaction of hexagonal BN powder in wet air between 1073 and 1373 K // *International Journal of Applied Ceramic Technology*. 2015. V. 12. P. E138–E145.
15. *Hou X.M., Hu X.J., Chou K.C.* Kinetics of thermal oxidation of titanium nitride powder at different oxidizing atmospheres // *Journal of the American Ceramic Society*. 2011. V. 94. No. 2. P. 570–575.

16. Hou X. *et al.* The reaction mechanism and kinetics of α -BN powder in wet air at 1273 K // Journal of the American Ceramic Society. 2013. V. 96. No. 6. P. 1877–1882.
17. Kim S., Natan B. Inlet geometry and equivalence ratio effects on combustion in a ducted rocket // Journal of Propulsion and Power. 2015. V. 31. No. 2. P. 619–631.
18. Field M.A. Rate of combustion of size-graded fractions of char from a low-rank coal between 1200 K and 2000 K // Combustion and Flame. 1969. V. 13. No. 3. P. 237–252. DOI: 10.1016/0010-2180(69)90002-9.
19. Рашковский С.А., Милехин Ю.М., Федорычев А.В. Повышение полноты сгорания частиц бора в ракетно-прямоточном двигателе на твердом топливе за счет распределенной подачи воздуха в камеру дожигания // Доклады Академии наук. 2016. Т. 471. № 6. С. 686–691. DOI: 10.7868/S0869565216360196.
20. Рашковский С.А., Милехин Ю.М., Федорычев А.В. Влияние распределенного подвода воздуха в камеру дожигания ракетно-прямоточного двигателя на полноту сгорания частиц бора // Физика горения и взрыва. 2017. Т. 53. № 6. С. 38–52. DOI: 10.15372/FGV20170605.

Статья поступила: 05.01.2022

Rashkovskiy S.A., Fedorychev A.V., Milekhin Yu.M. (2022) COMPARATIVE ANALYSIS OF COMBUSTION OF PARTICLES OF BORON, BORON CARBIDE, BORON NITRIDE AND CARBON IN AIR. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 122–137

DOI 10.17223/19988621/75/11

Keywords: boron, boron carbide, boron nitride, carbon, particle combustion, combustion efficiency, ducted rocket engine, condensed combustion products, mathematical modeling.

Combustion models of main components of condensed combustion products (CCP) of boron-containing solid propellants: boron, boron carbide, boron nitride, and carbon are analyzed. Using the known experimental data, the parameters of the combustion model of boron carbide and boron nitride particles are determined. Using the models of combustion of boron, B_4C , BN and carbon particles, parametric calculations of the combustion of both individual abovementioned particles and their mixture, which simulates the composition of the CCP of boron-containing solid propellant, have been carried out. Calculations have shown that combustion of BN has the least effect on the completeness of CCP combustion. This is due to its low calorific value and low content in CCP. *Ceteris paribus*, carbon particles burn the fastest; however, their contribution to the completeness of CCP combustion is less than that of boron and boron carbide due to their lower calorific value.

Funding. Funding was provided by the Russian Science Foundation, grant No. 21-19-00541; <https://rscf.ru/en/project/21-19-00541>

Sergey A. RASHKOVSKIY (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Principal Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation; Leading Researcher, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation) E-mail: rash@ipmnet.ru

Alexander V. FEDORYCHEV (Head of Laboratory, The Federal Center for Dual-Use Technologies "Soyuz", Dzerzhinsky, Russian Federation) E-mail: dgr56@mail.ru

Yuri M. MILEKHIN (Doctor of Engineering Sciences, Academician of the Russian Academy of Sciences, General Director and General Designer, The Federal Center for Dual-Use Technologies "Soyuz", Dzerzhinsky, Russian Federation) E-mail: fcdt@mail.ru

REFERENCES

1. Yeh C., Kuo K., (1996) Ignition and combustion of boron particles. *Progress in Energy and Combustion Science*. 22(6). pp. 511–541.
2. Hussmann B., Pfitzner M. (2010) Extended combustion model for single boron particles. Part I: Theory. *Combustion and Flame*. 157(4). pp. 803–821.
3. Glotov O.G., Surodin G.S. (2019) Combustion of aluminum and boron agglomerates free falling in air. II. Experimental results. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 55(3). pp. 345–352.
4. Bulanin F.K., Sidorov A.E., Kiro S.A., Poletaev N.I., Shevchuk V.G. (2020). Ignition of metal boride particle–air mixtures. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 56(1). pp. 57–62.
5. Savel'ev A.M., Titova N.S. (2021) Computational and theoretical analysis of the effect of an aluminum borate oxide film on the ignition conditions of single aluminum diboride particles. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 57(3). pp. 314–325.
6. Arkhipov V.A., Basalaev S.A., Kuznetsov V.T., Poryazov V.A., Fedorychev A.V. (2021) Modeling of ignition and combustion of boron-containing solid propellants. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 57(3). pp. 308–313.
7. Liu L.L., He G.Q., Wang Y.H., Hu S.Q., Liu Y.M. (2017). Factors affecting the primary combustion products of boron-based fuel-rich propellants. *Journal of Propulsion and Power*. 33(2). pp. 333–337.
8. Liu L.L., He G.Q., Wang Y.H., Hu S.Q. (2015) Chemical analysis of primary combustion products of boron-based fuel-rich propellants. *RSC Advances*. 5(123). pp. 101416–101426.
9. Fedorychev A.V., Milekhin Yu.M., Rashkovskii S.A. (2021) Condensed products of combustion of boron-based solid propellants. *Doklady Physical Chemistry*. 500. pp. 79–84. DOI: 10.1134/S0012501621090013.
10. Li Y.Q., Qiu T. (2007) Oxidation behaviour of boron carbide powder. *Materials Science and Engineering A*. 444(1–2). pp. 184–191.
11. Kılıçarslan A., Toptan F., Kerti I., Piskin S. (2014). Oxidation of boron carbide particles at low temperatures. *Materials Letters*. 128(1). pp. 224–226.
12. Chou K.C., Hou X.M. (2009) Kinetics of high-temperature oxidation of inorganic nonmetallic materials. *Journal of the American Ceramic Society*. 92(3). pp. 585–594.
13. Chou K.C. (2006) A kinetic model for oxidation of Si–Al–O–N materials. *Journal of the American Ceramic Society*. 89(5). pp. 1568–1576.
14. Hou X.M., Liu Y.X., Yu Z.Y., Chou K.C. (2015) Effect of temperature on reaction of hexagonal BN powder in wet air between 1073 and 1373 K. *International Journal of Applied Ceramic Technology*. 12(S2). pp. E138–E145.
15. Hou X.M., Hu X.J., Chou K.C. (2011) Kinetics of thermal oxidation of titanium nitride powder at different oxidizing atmospheres. *Journal of the American Ceramic Society*. 94(2). pp. 570–575.
16. Hou X.M., Yu Z.Y., Chou K.C., Zhao B. (2013) The reaction mechanism and kinetics of α -BN powder in wet air at 1273 K. *Journal of the American Ceramic Society*. 96(6). pp. 1877–1882.
17. Kim S., Natan B. (2015) Inlet geometry and equivalence ratio effects on combustion in a ducted rocket. *Journal of Propulsion and Power*. 31(2). pp. 619–631.
18. Field M.A. (1969) Rate of combustion of size-graded fractions of char from a low-rank coal between 1200 K and 2000 K. *Combustion and Flame*. 13(3). pp. 237–252. DOI: 10.1016/0010-2180(69)90002.
19. Rashkovskii S.A., Milekhin Yu.M., Fedorychev A.V. (2016) Improving the completeness of combustion of boron particles in a solid-fuel ducted rocket owing to distributed air supply to the secondary combustor. *Doklady Physical Chemistry*. 471(2). pp. 203–207.
20. Rashkovskii S.A., Milekhin Yu.M., Fedorychev A.V. (2017) Effect of distributed injection of air into the afterburning chamber of a ram-rocket engine on the efficiency of combustion of boron particles. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 53(6). pp. 652–664.

УДК 532.517.2

DOI 10.17223/19988621/75/12

Р.Р. Турубасев, А.В. Шваб

МОДЕЛИРОВАНИЕ АЭРОДИНАМИКИ ГАЗА И ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ВСТРЕЧНЫХ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКОВ¹

Представлена оригинальная вихревая камера, в которой моделируется аэродинамика газового потока при взаимодействии двух встречных закрученных течений с целью выравнивания центробежных сил в центральной области аппарата применительно к задачам сепарации порошков по фракционному составу или интенсификации тепломассопереноса в химических реакторах. На основе дискретно-траекторного подхода выявлены особенности в траекториях движения классифицируемых частиц, а также показана достоверность полученных результатов для аэродинамики закрученного течения в предлагаемой геометрии вихревой камеры.

Ключевые слова: *аэродинамика, численное моделирование, закрученное течение, скорость, давление, частицы, вихревая камера.*

На сегодняшний день, потребности в получении тонкодисперсных порошков при заданном гранулометрическом составе существенно возросли, поэтому в научной литературе увеличился интерес к совершенствованию сухих методов фракционного разделения частиц по размерам в газовой или воздушной среде. Тонкодисперсные порошки востребованы в технологических процессах таких разделов промышленности, как энергетика, энергомашиностроение, порошковая и химическая отрасли [1, 2]. Одной из основных проблем газовой классификации порошков является создание однородного поля вектора скорости в центробежном аппарате [3]. Имеют место различные способы для получения тонкодисперсных порошков. Одним из самых безопасных, с точки зрения экологии, и в то же время эффективных способов получения мелкодисперсных порошков являются газовые или воздушно-центробежные методы переработки сыпучей среды [4]. Практические исследования показывают, что для процесса фракционного разделения порошков на группы по фиксированному и заданному размеру частиц наиболее выгодным и перспективным является применение газовых центробежных классификаторов. Наибольшее распространение в промышленной области получили каскадно-гравитационные и центробежные классификаторы. Гравитационные классификаторы преимущественно используются для разделения порошков в диапазоне граничных крупностей частиц от сотен микрон до нескольких миллиметров, в то время как центробежные классификаторы – от нескольких до нескольких сотен микрон [5]. Это можно объяснить тем, что сила тяжести, действующая на разделяемые частицы в гравитационном классификаторе, может быть в тысячи раз меньше, чем центробежная сила, действующая на такие же самые частицы в центробежном классификаторе [6]. Экспериментальные исследования показыва-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-38-90135.

ют, что удачный выбор геометрии сепарационной зоны классификатора позволяет получить однородное поле закрученного течения, что является определяющим фактором, влияющим на остроту сепарации твердых тяжелых частиц. Поэтому представленная работа посвящена моделированию аэродинамики закрученного газа в предложенной оригинальной геометрии вихревой камеры и расчету траекторий частиц в поле скоростей двух встречных закрученных течений.

Физико-математическая постановка задачи

В настоящей работе представлена оригинальная геометрия закрученного течения в вихревой камере, показанная на рис. 1. Несущие газовые потоки из сечений В-В и Н-Н направляются к центру вихревой камеры с противоположных сторон, где образуют однородную область центробежных и аэродинамических сил, и затем газовые потоки покидают аппарат через сечения А-А и С-С. Предложенная геометрия позволяет в области Е-Е и F-F создать равномерное поле закрученного течения, которое может повысить остроту классификации мелкодисперсных частиц.

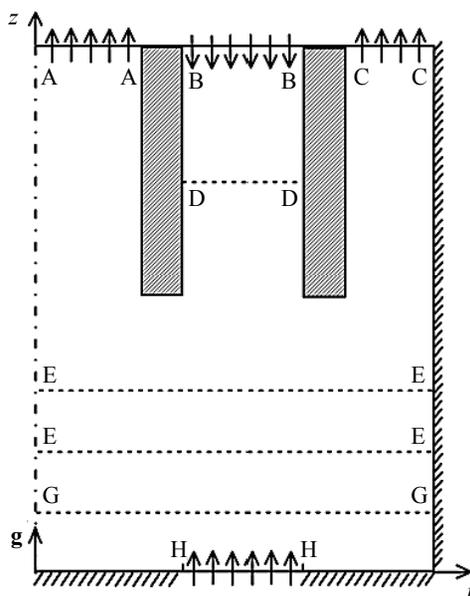


Рис. 1. Схема расчетной области
Fig.1. Computational domain

Основой для численного расчета динамики закрученного течения несущей среды в новой геометрии служили уравнения Навье – Стокса, которые для удобства записывались в цилиндрической системе координат. В силу небольших скоростей газового потока будем считать движущую среду несжимаемой и при отсутствии изменений импульса в окружном направлении получим осесимметричную систему дифференциальных уравнений для переноса количества движения. В результате перечисленных выше условий получим безразмерную форму уравнений Навье – Стокса [7]:

$$\frac{\partial u_r}{\partial \tau} + \frac{\partial u_r^2}{\partial r} + \frac{\partial u_r u_z}{\partial z} + \frac{u_r^2}{r} - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right]; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial \tau} + \frac{\partial u_r u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_z^2}{\partial z} + \frac{u_r u_z}{r} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right]; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial u_r u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial u_z u_\varphi}{\partial z} + 2 \frac{u_r u_\varphi}{r} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right]; \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0. \quad (4)$$

Для получения безразмерной формы уравнений (1) – (4) были использованы следующие масштабы: радиус вихревой камеры R_0 был взят в качестве масштаба длины, а в качестве масштаба скорости – принята средняя аксиальная скорость газа U_0 через сечение В-В. Полученная безразмерная форма уравнений (1) – (4) содержит критерий Рейнольдса (Re) и давление в виде $p = P/(\rho U_0^2)$.

В предложенной геометрии сепарационной зоны были приняты граничные условия для скоростей: на входе в сечении В-В значение осевой скорости принималось постоянным отрицательным $u_z = -1$, а на противоположной стороне камеры в сечении Н-Н значение принималось положительным и постоянным числом $\gamma = U_z/U_0$. Для радиальной составляющей скорости в этих сечениях использовались условия Неймана $\partial u_r/\partial z = 0$. Для окружной безразмерной скорости во входных сечениях В-В и Н-Н принималось условие вращения газа как твердого тела $u_\varphi = r\Omega_0$ и $u_\varphi = r\Omega_1$ соответственно, причем значения критериев имеют вид $\text{Re}\Omega_0 = \omega_0 R_0/U_0$ и $\text{Re}\Omega_1 = \omega_1 R_0/U_0$. Здесь значения угловых скоростей ω_0 и ω_1 есть средние значения угловых скоростей газа на входе в вихревую камеру. Для оси симметрии принимались условия $u_r = 0$; $\partial u_z/\partial r = \partial u_\varphi/\partial r = 0$. На выходе из вихревой камеры в сечениях А-А и С-С использовалось условие установления $\partial/\partial z = 0$ для всех искомых переменных. На стенках для скоростей несущей среды использовалось условие равенства нулю. Для окружной компоненты скорости на стенках предложенной геометрии устанавливалось условие равенства нулю, за исключением внутренних перегородок, которые также могли вращаться с угловой скоростью ω_d и для них применялось традиционное условие: $u_\varphi = r\Omega_d$. Здесь критерий вращения имеет вид $\text{Re}\Omega_d = \omega_d R_0/U_0$.

Таким образом, полученная система (1) – (4) замкнута и описывает аэродинамику двух встречных закрученных течений в вихревой камере. В силу особенностей закрученного течения двухфазной среды континуальный подход в данной постановке не совсем подходит, так как известно, что траектории движения частиц при наличии аэродинамических и центробежных сил могут пересекаться между собой [8]. Поэтому численные расчеты проводились на основе дискретно-траекторного подхода.

В работе предполагается, что на сферическую твердую частицу действуют только гравитационная, центробежная, аэродинамическая и инерционная силы. Для того чтобы достичь высокой эффективности процесса сепарации частиц по фиксированному и заданному размеру необходима небольшая концентрация частиц, следовательно, можно пренебречь обратным воздействием частиц на поток.

В таком случае, в рамках предложенного дискретно-траекторного подхода, уравнения траекторий движения частиц будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{W}; \quad (5)$$

$$m \frac{d\mathbf{W}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (6)$$

В результате вышеуказанных допущений, уравнение (6) с учетом указанных сил, в цилиндрической системе координат будет представлено в виде [9]

$$\frac{dw_r}{d\tau} = \frac{(w_\varphi)^2}{r} + \frac{u_r - w_r}{Stk} \xi; \quad (7)$$

$$\frac{dw_z}{d\tau} = \frac{u_z - w_z}{Stk} \xi - \frac{1}{Fr}; \quad (8)$$

$$\frac{dw_\varphi}{d\tau} = -\frac{w_r w_\varphi}{r} + \frac{u_\varphi - w_\varphi}{Stk} \xi. \quad (9)$$

Здесь ξ – это отношение истинного коэффициента аэродинамического сопротивления частицы к коэффициенту сопротивления по закону Стокса.

$$\xi = 1 + \frac{1}{6} Re_p^{\frac{2}{3}}; \quad Re_p = \frac{\delta |\mathbf{U} - \mathbf{W}|}{\nu}; \quad Fr = \frac{U_0^2}{gR_0}; \quad Stk = \frac{\rho_p}{\rho} \frac{\delta^2 U_0}{18\nu R_0},$$

где δ – диаметр частицы, g – ускорение свободного падения, ρ_p – плотность частицы, ρ – плотность несущего потока.

Метод численного решения

Решение полученной системы уравнений (1) – (4) проводилось на основе известного метода [10], который достаточно детально описан в работе [5]. После его применения, на выходе получаем систему скалярных уравнений, причем для решения каждого уравнения используется метод [11].

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \Lambda_x \theta + \Lambda_y \theta + F;$$

$$\frac{\Delta \theta^*}{\Delta \tau} - \frac{1}{2} \Lambda_x \Delta \theta^* = \Lambda_x \theta^n + \Lambda_y \theta^n + F;$$

$$\frac{\Delta \theta^{**}}{\Delta \tau} - \frac{1}{2} \Lambda_y \Delta \theta^{**} = \frac{\Delta \theta^*}{\Delta \tau};$$

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta \theta^{**}.$$

Здесь операторы Λ представляют собой слагаемые, отвечающие за диффузию и конвекцию.

Для устойчивости численной схемы решения задачи использовалась экспоненциальная схема [12]. Численное решение полученных уравнений движения частиц проводилось на основе неявного метода Эйлера.

Анализ численных результатов

Результаты поля скоростей для представленной оригинальной геометрии показаны на рис. 2 – 6. На рис. 2 изображено распределение линий тока и изолинии окружной компоненты скорости для случая [13]. Из анализа этих графиков можно отметить, что наличие модернизированной геометрии зоны сепарации позволило получить достаточно однородные поля вектора скорости в центральной области рассматриваемого центробежного классификатора. Существенное увеличение окружной скорости в непосредственной близости от левой перегородки объясняется сохранением импульса в окружном направлении и обеспечивает невозможность проникновения крупных частиц в область выхода мелкого продукта.

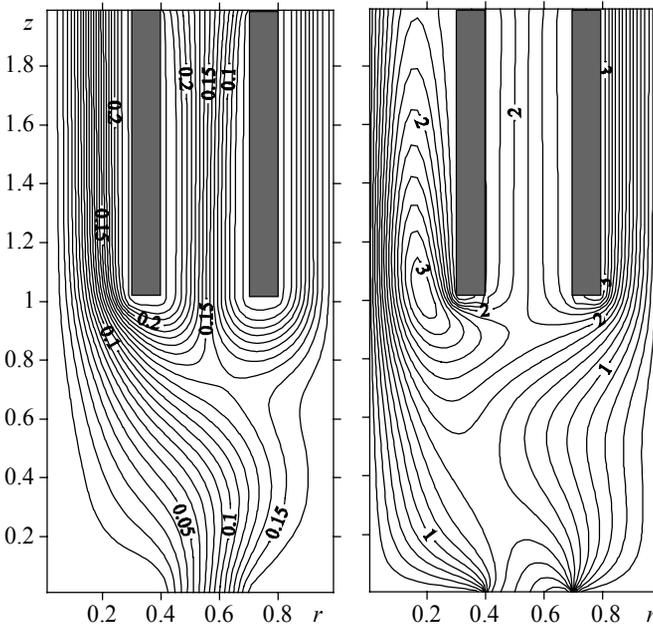


Рис. 2. Картина изменений линий тока (слева) и изолиний окружной скорости (справа) в оригинальной геометрии сепарационной зоны при параметрах течения $Re = 20$; $R\omega_0 = 4$; $R\omega_1 = 4$; $R\omega_d = 4$, $\gamma = 1$

Fig. 2. Distribution of isolines of stream functions (left) and isolines of the circumferential component of the velocity vector (right) in the vortex chamber at flow parameters $Re = 20$; $R\omega_0 = 4$; $R\omega_1 = 4$; $R\omega_d = 4$; and $\gamma = 1$

На рис. 3 представлены кривые движения одиночных, сферических частиц, с различным диаметром, запущенных с точек с координатой $r = 0.55$ при встречных потоках со слабой закруткой (слева) и для случая, когда оба потока подаются на вход с большей закруткой. Как видно из графиков, при увеличении величины закрутки во входных сечениях аппарата за счет увеличенной центробежной силы удастся добиться более качественного процесса классификации частиц и уменьшить граничный размер частиц, попадающих в мелкую фракцию.

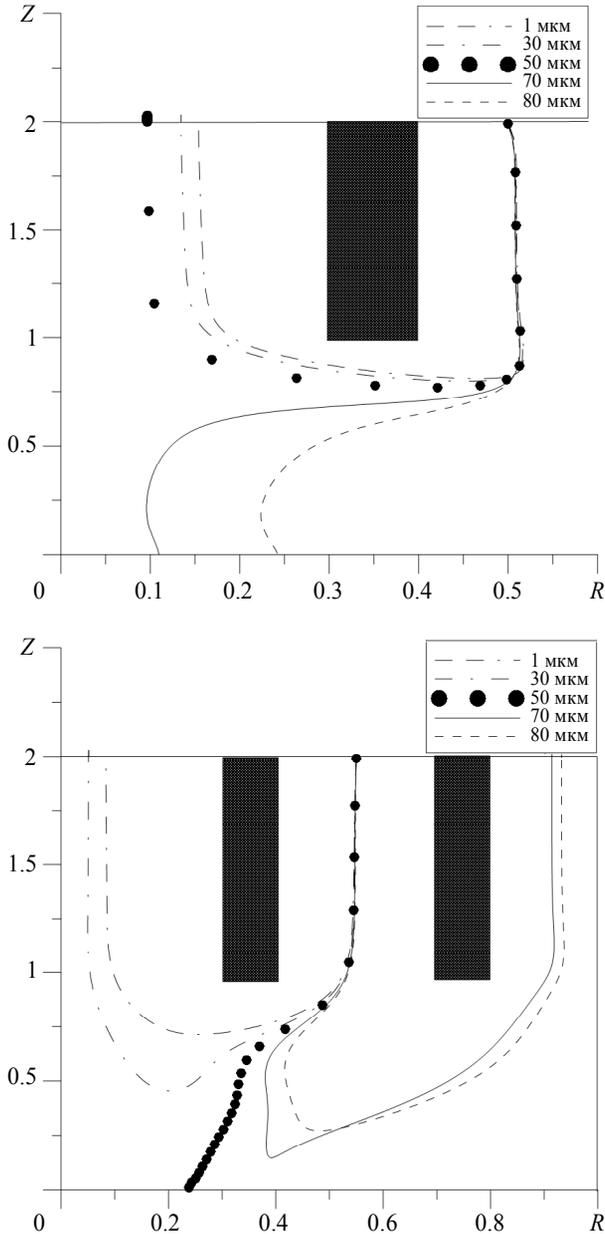


Рис. 3. Распределение траекторий частиц при движении в предложенной геометрии при параметрах течения $Re = 100$, $R\omega_0 = R\omega_1 = 0.5$, $R\omega_d = 0$, $\gamma = 1$ (вверху) и при параметрах течения $Re = 100$, $R\omega_0 = R\omega_1 = 2$, $R\omega_d = 4$, $\gamma = 1$ (внизу)

Fig.3. Distribution of particle trajectories in the proposed geometry with flow parameters $Re = 100$, $R\omega_0 = R\omega_1 = 0.5$, $R\omega_d = 0$, $\gamma = 1$ (upper) and for flow parameters $Re = 100$, $R\omega_0 = R\omega_1 = 2$, $R\omega_d = 4$, $\gamma = 1$ (lower)

На рис. 4 представлены распределения линий тока несущей среды для двух различных вариантов аэродинамики, на основе которых были получены распределения траекторий движения частиц, представленных на рис. 3. Можно заметить, что при увеличении закрутки и числа Рейнольдса поток, поступающий снизу, в основном направляется на периферию, тем самым подхватывая тяжелые частицы и устремляя их в периферийный отсек центробежного классификатора.

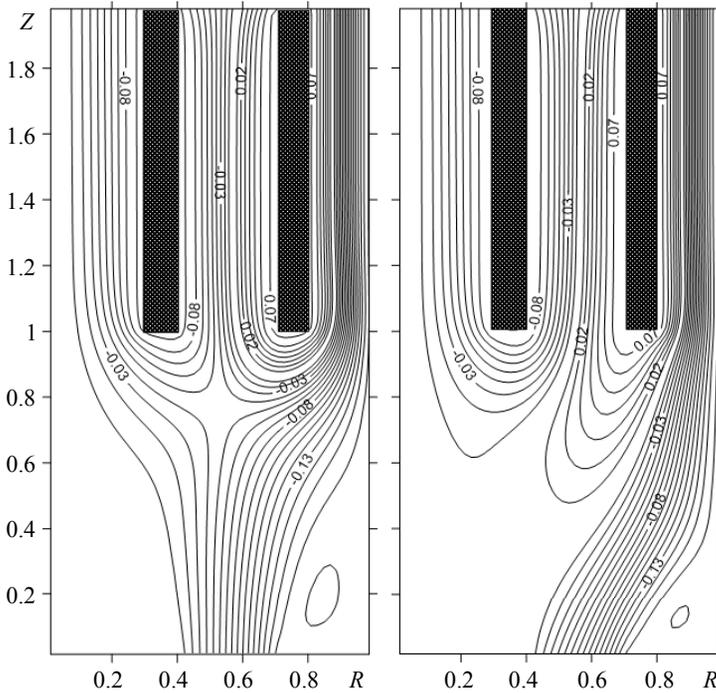


Рис. 4. Распределение линий тока несущей среды при параметрах течения $R\omega_0 = R\omega_1 = 0.5$, $R\omega_d = 0$, $Re = 100$, $\gamma = 1$ (слева) и при параметрах течения $R\omega_0 = R\omega_1 = 2$, $R\omega_d = 4$, $Re = 100$, $\gamma = 1$ (справа)

Fig. 4. Distribution of isolines of the stream function in a vortex chamber at flow parameters $R\omega_0 = R\omega_1 = 0.5$, $R\omega_d = 0$, $Re = 100$, $\gamma = 1$ (left) and at flow parameters $R\omega_0 = R\omega_1 = 2$, $R\omega_d = 4$, $Re = 100$, $\gamma = 1$ (right)

На рис. 5 представлено изменение окружной скорости в зависимости от радиуса в сечениях G-G (точки), E-E (сплошная кривая), F-F (пунктирная кривая). Этот график также иллюстрирует увеличение окружной скорости вблизи левой перегородки предложенной геометрии, что объясняется сохранением импульса в окружном направлении и предотвращением попадания крупных частиц в мелкий продукт процесса классификации частиц. Изменение поля осевой скорости показано на рис. 6 при аналогичных параметрах, что и на рис. 4.

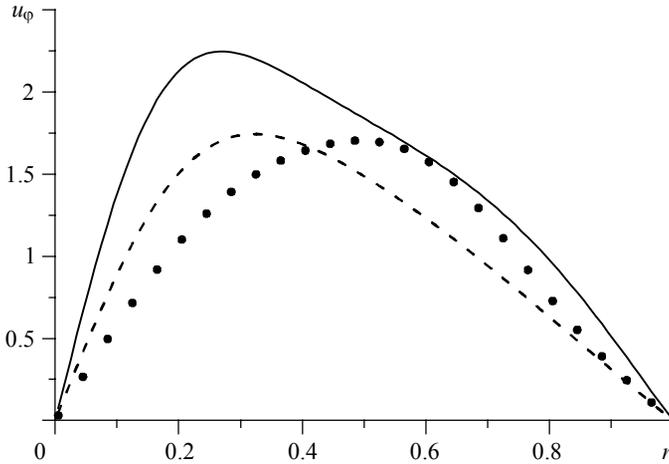


Рис. 5. Изменение окружной скорости в зависимости от радиуса в сечениях E-E (сплошная кривая), F-F (пунктирная кривая), G-G (точки) для случая $R\omega_0 = 4$; $R\omega_1 = 4$; $R\omega_d = 4$; $Re = 20$

Fig. 5. Distribution of the circumferential velocity component depending on the radius in the sections E-E (solid curve), F-F (dashed curve), and G-G (points) at flow parameters $R\omega_0 = 4$; $R\omega_1 = 4$; $R\omega_d = 4$; and $Re = 20$

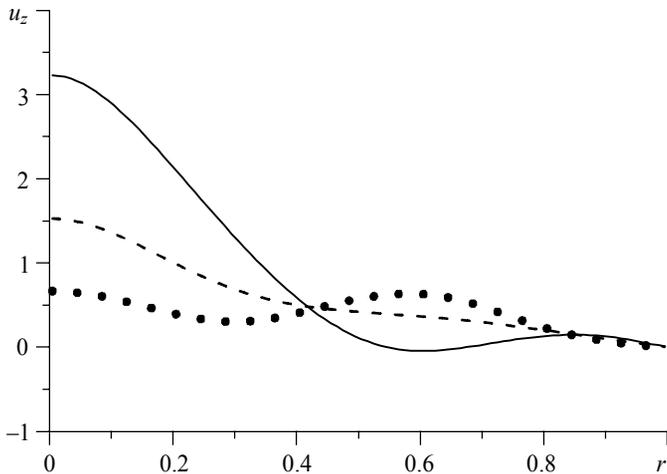


Рис. 6. Распределение аксиальной скорости в зависимости от радиуса в сечениях E-E (сплошная кривая), F-F (пунктирная кривая), G-G (точки) при параметрах течения $Re = 20$; $R\omega_0 = 4$; $R\omega_1 = 4$; $R\omega_d = 4$; $Re = 20$

Fig. 6. Axial velocity distributions depending on the radius in sections E-E (solid curve), F-F (dashed curve), G-G (points) at flow parameters $R\omega_0 = 4$; $R\omega_1 = 4$; $R\omega_d = 4$; and $Re = 20$

Подтверждением достоверности полученного численного решения системы (1) – (4) может служить сравнение численного решения с данными аналитической формулы (9), а также тестовые расчеты [13]. На рис. 7 и 8 показано изменение

осевой скорости в сечении D-D и C-C соответственно в предложенной геометрии зоны сепарации в сравнении с известной аналитической формулы для кольцевого канала (9)

$$\frac{U_z}{U_{cp}} = 2 \frac{(r_1^2 - r^2) \log(r_0/r_1) - (r_1^2 - r_0^2) \log(r/r_1)}{r_1^2 - r_0^2 + (r_1^2 + r_0^2) \log(r_0/r_1)}. \tag{9}$$

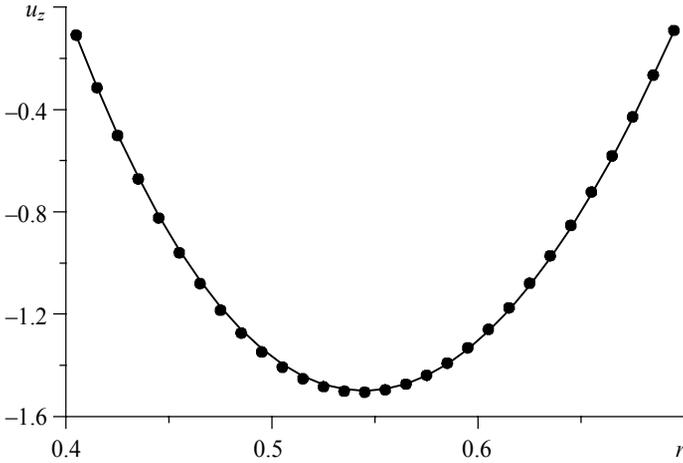


Рис. 7. Сопоставление численного и аналитического решения. Сплошная кривая – численное решение, точки – формула (9)
Fig.7. Comparison of the numerical and analytical solutions. The solid curve is the numerical solution; the points are formula (9)

На рис. 8 представлено аналогичное сравнение по формуле (9) для сечения C-C, которое также представляет кольцевой канал.

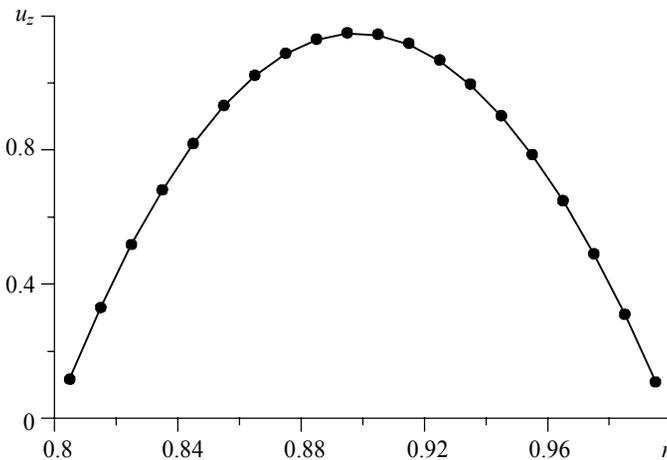


Рис. 8. Сопоставление численного и аналитического решения для сечения C-C. Сплошная кривая – численное решение, точки – формула (9)
Fig. 8. Comparison of the numerical and analytical solutions for the C-C section. The solid curve is the numerical solution; the points are formula (9)

На рис. 9 показано сравнение формулы Пуазейля с полученным численным решением в сечении А-А при числе $Re = 4$.

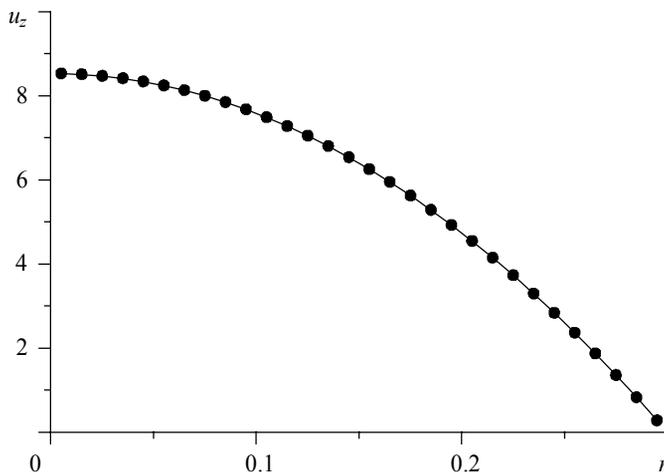


Рис. 9. Сопоставление численного решения с известной формулой Пуазейля при числе $Re = 4$. Сплошная кривая – численное решение, точки – формула Пуазейля

Fig.9. Comparison of the numerical solution with the well-known Poiseuille formula for section A-A at the number $Re = 4$. The solid curve is the numerical solution; the points are the Poiseuille formula

Заключение

В результате проведенного исследования аэродинамики закрученного течения несущей среды и динамики движения одиночной тяжелой частицы показано, с одной стороны, однородность поля скоростей несущей среды и, с другой, влияние новой геометрии зоны сепарации на качество процесса фракционного разделения частиц, причем полученное поле центробежных и аэродинамических сил позволяет увеличить остроту процесса разделения частиц по размерам и, в частности, увеличить центробежные силы в выходном сечении аппарата, не позволяя крупным частицам попадать в мелкий продукт процесса классификации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гупта А., Лилли Д., Сайред Н. Закрученные потоки. М.: Мир, 1987. 588 с.
2. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течения и теплообмен в каналах и вращающихся полостях. М.: Физмалит, 2010.
3. Гропянов А.В., Ситов Н.Н., Жукова М.Н. Порошковые материалы: учебное пособие. СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2017. 74 с.
4. Пономарев В.Б. Расчет и проектирование оборудования для воздушной сепарации сыпучих материалов. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2017. 96 с.
5. Турубает Р.Р., Шваб А.В. Численное исследование аэродинамики закрученного потока в вихревой камере комбинированного пневматического аппарата // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 47. С. 87–98. DOI: 10.17223/19988621/47/9.
6. Алексеенко С.В., Окулов В.Л. Закрученные потоки в технических приложениях (обзор) // Теплофизика и аэромеханика. 1996. Т. 3. № 2. С. 101–138.
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

8. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течение газа с частицами. М.: Физматлит, 2008. 600 с.
9. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 1. 384 с.
10. Chorin A.J. Numerical solution of Navier–Stokes equation // *Math. Comput.* 1968. V. 22. P. 745.
11. Пейре Р., Тейлор Т.Д. Вычислительные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / пер. с англ. под ред. В.Д. Виленского. М.: Энергоатомиздат, 1984. 351 с.
12. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 149 с.
13. Шваб А.В., Левченко Д.А., Турубаев Р.Р. Моделирование аэродинамики газа при взаимодействии двух встречных закрученных течений // *Изв. вузов. Физика.* 2018. Т. 61. № 12-2. С. 134–139.

Статья поступила 25.03.2021

Turubaev R.R., Shvab A.V. (2022) SIMULATION OF GAS AERODYNAMICS AND PARTICLE TRAJECTORIES IN THE INTERACTION OF TWO OPPOSING SWIRLING FLOWS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 138–149

DOI 10.17223/19988621/75/12

Keywords: aerodynamics, numerical simulation, swirling flow, velocity, pressure, particles, vortex chamber.

The paper presents an original geometry of a vortex chamber in which aerodynamics of a gas flow is simulated during the interaction of two opposing swirling flows in order to equalize the centrifugal forces in the central region of the apparatus as applied to the tasks of separating powders by fractional composition or intensifying heat and mass transfer in chemical reactors. Based on the results obtained, the distributions of the trajectories of motion of single particles are determined, based on the discrete-trajectory approach, and the reliability of the results obtained for the aerodynamics of swirling flow in the proposed geometry of the vortex chamber was shown. As a result of mathematical modeling of the dynamics of motion of a single heavy particle in a swirling flow, the influence of swirl on the quality of the particle classification process is shown; for example, an increase in swirl leads to a greater influence of the centrifugal force which picks up heavy particles and throws them to the peripheral sector. In addition, an increase in the centrifugal force leads to a displacement of the boundary particle size. However, since this work presents a laminar formulation of the problem, the difference will amount to tens of microns; when updating to the turbulent problem, the difference will already be calculated in units of microns.

Roman R. TURUBAEV (Postgraduate student, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: roma.turubaev@gmail.com

Aleksander V. SHVAB (Doctor of Physics and Mathematics, Prof, Tomsk, Russian Federation). E-mail: avshvab@inbox.ru

REFERENCES

1. Gupta A., Lilley D., Syred N. (1984) *Swirl Flows*. Tunbridge Wells: Abacus Press.
2. Volkov K.N., Emelyanov V.N. (2010) *Techeniya i teploobmen v kanalakh i vrashchayushchikhsya polostyakh* [Flows and heat transfer in channels and rotating cavities]. Moscow: FIZMATLIT.
3. Gropyaynov A.V., Sitov N.N., Zhukova M.N. (2017) *Poroshkovyye materialy: uchebnoye posobiye*: [Powder Materials: A Tutorial]. St. Petersburg: HSE SPbGUPTD.
4. Ponomarev V.B. (2017) *Raschet i proyektirovaniye oborudovaniya dlya vozdushnoy separatsii sypuchikh materialov* [Calculation and design of equipment for air separation of bulk materials]. Ekaterinburg: Ural University.

5. Turubaev R.R., Shvab A.V. (2017) Chislennoye issledovaniye aerodinamiki zakruchennogo potoka v vikhrevoi kamere kombinirovannogo pnevmaticheskogo apparata [Numerical study of the aerodynamics of a swirl flow in the vortex chamber of a combined air-operated apparatus], *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 87–98. DOI: 10.17223/19988621/47/9.
6. Alekseenko S.V., Okulov V.L. (1996) Zakruchennyye potoki v tekhnicheskikh prilozheniyakh (obzor) [Swirling flows in technical applications (a review)]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 3(2). pp. 101–138.
7. Loytsyanskiy L.G. (1987) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow: Nauka.
8. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. (2008) *Techeniye gaza s chastitsami* [Gas flow with particles]. Moscow: FIZMATLIT.
9. Anderson J., Tannehill J., Pletcher R. (1997) *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Part 2*. London: Taylor & Francis.
10. Chorin A.J. (1968) Numerical solution of Navier–Stokes equation. *Mathematics of Computation*. 22(104). pp. 745–762.
11. Peyret R., Taylor T.D. (1983) *Computational Methods for Fluid Flow*. New York: Springer-Verlag.
12. Patankar S.V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York: Hemisphere Publishing Corporation.
13. Shvab A.V., Levchenko D.A., Turubaev R.R. (2018) Modelirovaniye aerodinamiki gaza pri vzaimodeystvii dvukh vstrechnykh zakruchennykh techeniy [Simulation of gas aerodynamics in the interaction of two opposing swirling flows]. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Fizika*. 61(12-2). pp.134–139.

Received: March 25, 2021

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/75/13

А. Юлдашев, Ш.Т. Пирматов

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ГИБКИХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ СДВИГА И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ

Рассматривается построение единой вычислительной схемы решения краевых задач динамического расчета гибких прямоугольных пластин с учетом сдвига и инерции вращения с использованием нелинейной теории Лява, разработка автоматизированной системы динамического расчета гибких пластин, апробация построенной автоматизированной системы и исследование напряженно-деформированного состояния гибких пластин.

Ключевые слова: алгоритм, пластина, сдвиг, инерция вращения, теория упругости, разностные схемы.

Известно, что большинство задач о гибких пластинах решены в постановке Феипля – Кармана являются частным случаем задач теории Лява. Поэтому построение автоматизированной системы полного расчета гибких пластин с заданной степенью точности является актуальной задачей.

Разрабатываемые алгоритмы должны удовлетворять ряду требований, ориентированных на расчет достаточно широкого класса конструкций в различных условиях. Это возможно лишь в том случае, если в основу алгоритмов закладываются достаточно общие механические модели и достаточно разносторонние математические методы, такие, как, например, метод конечных разностей, метод конечных элементов и т.д.

Среди многочисленных теорий оболочек, отличающихся по сложности, обладающих различными границами применимости, выделяется нелинейная динамическая теория типа Тимошенко, учитывающая эффекты деформации поперечного сдвига и инерции вращения. В связи с этим, методы динамического расчета пластин как в классической линейной, так и в геометрической нелинейной постановке задачи постоянно совершенствуются.

Проблемы создания автоматизированной системы вывода и решения уравнений теории упругости и пластичности впервые сформулированы в монографии В.К. Кабулова [2]. В этой работе рассмотрены основные задачи алгоритмизации и указаны пути их смешанного решения. Задачи алгоритмизации решаются в четыре этапа. На первом этапе, в зависимости от геометрических характеристик объекта и физических свойств материала, выбирается расчетная схема данной модели. Второй этап связан с выводом исходных дифференциальных уравнений и соответствующих им граничных и начальных условий. Выбор вычислительного алгоритма и численное решение полученных уравнений составляют третий этап исследований. Четвертый этап завершается анализом полученных численных результатов, описывающих напряженно-деформированное состояние рассматриваемой конструкции [11].

Выбор вычислительного алгоритма и численное решение сформулированных краевых задач составляют основной этап алгоритмизации.

Таким образом в настоящей работе рассматриваются следующие вопросы:

1. Построение единой вычислительной схемы решения краевых задач динамического расчета гибких прямоугольных пластин с учетом сдвига и инерции вращения с использованием нелинейной теории Лява.

2. Разработка автоматизированной системы динамического расчета гибких пластин.

3. Апробация построенной автоматизированной системы.

4. Использование напряженно-деформированного состояния гибких пластин.

1. Уравнения движения прямоугольных пластин с учетом сдвига и инерции вращения

Для вывода уравнений движения пластинки с учетом сдвига и инерции вращения при наличии соответствующих граничных условий используем наиболее удобный вариационный подход [1].

Рассмотрим движение материальной системы на произвольном отрезке от t_0 до t_1 . Известно, что для различных траекторий движения точек системы между начальными и конечными положениями истинные траектории отличаются от других возможных траектории тем, что для истинных должно выполняться условие

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta k - \delta \pi + \delta w) dt = 0, \quad (1)$$

где k – кинетическая энергия системы; π – потенциальная энергия и δw – сумма элементарных работ внешних сил.

Подставим выражения $\delta k, \delta \pi, \delta w$ из [1] в уравнение (1) (соответствующее принципу Гамильтона – Остроградского). Так как вариации $\delta u, \delta v$ и т.д., рассматриваемые на функции z , произвольны, то мы приходим к следующему уравнению.

Уравнения движения с учетом сдвига и инерции вращения [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + P_x - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + P_y - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x - \rho \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y - \rho \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0,$$

где

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}, \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$T = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right), \\ M_y &= D \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right), \\ H &= D \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= k^2 \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right), \\ Q_y &= k^2 \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Подставляя (2), (3), (4) и (5) в (1) и вводя безразмерную величину [2], получим систему квазилинейных дифференциальных уравнений движения в перемещениях

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + a_6 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P_1 &= \ddot{u}, \\ b_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b_3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b_4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + b_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + b_6 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_2 &= \ddot{v}, \\ c_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c_4 \frac{\partial w}{\partial x} + c_5 \frac{\partial w}{\partial y} + c_6 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + c_7 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + q &= \ddot{w}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} d_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + d_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + d_3 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + d_4 \frac{\partial w}{\partial x} + d_5 \psi_x &= \ddot{\psi}_x, \\ e_1 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + e_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + e_3 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + e_4 \frac{\partial w}{\partial y} + e_5 \psi_y &= \ddot{\psi}_y. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= \eta^2, \quad a_2 = \frac{1+\mu}{2} \eta, \quad a_3 = \frac{1-\mu}{2}, \quad a_4 = \eta^2 \gamma \frac{\partial w}{\partial x}, \\ a_5 &= \frac{1+\mu}{2} \gamma \eta, \quad a_6 = \frac{1-\mu}{2} \gamma \eta \frac{\partial w}{\partial x}, \quad P_1 = \frac{1-\mu^2}{E\gamma^2} P_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1-\mu}{2} \eta^2, \quad b_2 = \frac{1+\mu}{2} \eta, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \\
 b_5 &= \frac{1+\mu}{2} \gamma \eta^2 \frac{\partial w}{\partial x}, \quad b_6 = \frac{1-\mu}{2} \gamma \eta^2 \frac{\partial w}{\partial y}, \quad P_2 = \frac{1-\mu^2}{E\gamma^2} P_y, \\
 c_1 &= \eta^2 \left(k^2 \frac{1-\mu}{2} + \eta \gamma \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \gamma \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad c_2 = (1-\mu) \eta \left(\gamma \frac{\partial u}{\partial y} + \eta \gamma \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\
 c_3 &= k^2 \frac{1-\mu}{2} + \mu \eta \gamma \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma \frac{\partial v}{\partial y}, \\
 c_4 &= \eta^2 \left[\gamma \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \left(\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right], \\
 c_5 &= \eta \left[\mu \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1-\mu}{2} \left(\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \eta \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right], \\
 c_6 &= \frac{\eta k^2}{2\gamma} (1-\mu), \quad c_7 = \frac{k^2(1-\mu)}{2\gamma}, \quad q' = \frac{1-\mu^2}{\gamma^2 E} q, \quad d_1 = \eta^2, \quad d_2 = \frac{1+\mu}{2}, \\
 d_3 &= \frac{1-\mu}{2}, \quad d_4 = -6k^2 \frac{1-\mu}{\gamma} \eta, \quad d_5 = -6k^2 \frac{1-\mu}{\gamma^2}, \quad e_1 = \frac{1-\mu}{2} \eta^2, \\
 e_2 &= \frac{1+\mu}{2} \eta, \quad e_3 = 1, \quad e_4 = -6k^2 \frac{1-\mu}{\gamma}, \quad e_5 = -6k^2 \frac{1-\mu}{\gamma^2}
 \end{aligned}$$

Система уравнений (6) решается в области

$$G = \Omega \times T = \left\{ \begin{aligned} \Omega &= (0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1) \\ T &= (0 \leq t \leq t_1) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$Z|_{t=0} = Z^0, \quad \dot{Z}|_{t=0} = \dot{Z}^0, \quad Z = \{u, v, w, \psi_x, \psi_y\}. \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} N_v \delta u_v|_{\Gamma} &= 0, \quad T_v \delta u_v|_{\Gamma} = 0, \quad M_v \delta \frac{\partial w}{\partial v} \Big|_{\Gamma} = 0, \\ R_v \delta w|_{\Gamma} &= 0, \quad M_v \delta \psi_x|_{\Gamma} = 0, \quad H_v \delta \psi_y|_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Условия (8) для случая произвольной вариации δu_v , δw на той части Γ_N контура Γ , где заданы внешние нагрузки, приводят к равенствам

$$N_v = T_v = M_v = R_v = 0,$$

что соответствует свободному от внешних нагрузок краю. В общем же случае, когда на части Γ_N контура заданы внешние условия N_v^0, T_v^0, R_v^0 и моменты M_v^0 , то могут быть получены условия, аналогичные (8), которые приводят к равенствам

$$H_v|_{\Gamma} = N_v^0, \quad T_v|_{\Gamma} = T_v^0, \quad R_v|_{\Gamma} = R_v^0, \quad M_v|_{\Gamma} = M_v^0.$$

2. Интегрирования уравнений движения гибких прямоугольных пластин с учетом сдвига и инерций вращения

Система уравнений (6) с начальными и граничными условиями (7) и (8) решается методом сеток в области (7').

$$G = \Omega \times T = \left(\begin{array}{l} \Omega_{h_1, h_2} = \{0 \leq x_i \leq 1, 0 \leq y_i \leq 1\}, \\ T = \{0 \leq t \leq t_0\}. \end{array} \right)$$

$$x_i = ih_1, \quad y_i = jh_2, \quad h_1 = \frac{1}{N_1}, \quad h_2 = \frac{1}{N_2}, \quad i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2}.$$

Пользуясь центральными разностными формулами, аппроксимирующими частные производные по x и y с точностью до второго порядка [3, 5], вместо уравнений (6) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений [4]:

$$\begin{aligned} & a_{ij}^{(1)} v_{i-1, j-1} + a_{ij}^{(2)} w_{i-1, j-1} + a_{ij}^{(3)} u_{i-1, j} + a_{ij}^{(4)} w_{i-1, j} + a_{ij}^{(5)} v_{i-1, j+1} + a_{ij}^{(6)} w_{i-1, j+1} + a_{ij}^{(7)} u_{i, j-1} + \\ & + a_{ij}^{(8)} w_{i, j-1} + a_{ij}^{(9)} u_{i, j} + a_{ij}^{(10)} w_{i, j} + a_{ij}^{(11)} u_{i, j+1} + a_{ij}^{(12)} w_{i, j+1} + a_{ij}^{(13)} v_{i+1, j-1} + a_{ij}^{(14)} w_{i+1, j-1} + \\ & + a_{ij}^{(15)} u_{i+1, j} + a_{ij}^{(16)} w_{i+1, j} + a_{ij}^{(17)} v_{i+1, j+1} + a_{ij}^{(18)} w_{i+1, j+1} + p_1 = \ddot{u}_{i, j}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & b_{ij}^{(1)} u_{i-1, j-1} + b_{ij}^{(2)} w_{i-1, j-1} + b_{ij}^{(3)} v_{i-1, j} + b_{ij}^{(4)} w_{i-1, j} + b_{ij}^{(5)} u_{i-1, j+1} + b_{ij}^{(6)} w_{i-1, j+1} + b_{ij}^{(7)} v_{i, j-1} + \\ & + b_{ij}^{(8)} w_{i, j-1} + b_{ij}^{(9)} v_{i, j} + b_{ij}^{(10)} w_{i, j} + b_{ij}^{(11)} v_{i, j+1} + b_{ij}^{(12)} w_{i, j+1} + b_{ij}^{(13)} u_{i+1, j} + b_{ij}^{(14)} w_{i+1, j-1} + \\ & + b_{ij}^{(15)} v_{i+1, j} + b_{ij}^{(16)} w_{i+1, j} + b_{ij}^{(17)} u_{i+1, j} + b_{ij}^{(18)} w_{i+1, j+1} + p_2 = \ddot{v}_{i, j}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_{ij}^{(1)} w_{i-1, j-1} + c_{ij}^{(2)} u_{i-1, j} + c_{ij}^{(3)} w_{i-1, j} + c_{ij}^{(4)} x_{i-1, j} + c_{ij}^{(5)} w_{i-1, j+1} + c_{ij}^{(6)} v_{i, j+1} + c_{ij}^{(7)} w_{i, j-1} + \\ & + c_{ij}^{(8)} y_{i, j+1} + c_{ij}^{(9)} w_{i, j} + c_{ij}^{(10)} v_{i, j+1} + c_{ij}^{(11)} w_{i, j+1} + c_{ij}^{(12)} y_{i, j+1} + c_{ij}^{(13)} w_{i+1, j-1} + c_{ij}^{(14)} u_{i+1, j} + \\ & + c_{ij}^{(15)} w_{i+1, j} + c_{ij}^{(16)} x_{i+1, j} + c_{ij}^{(17)} w_{i+1, j+1} + q = \ddot{w}_{i, j}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & d_{ij}^{(1)} y_{i-1, j-1} + d_{ij}^{(2)} w_{i-1, j} + d_{ij}^{(3)} x_{i-1, j} + d_{ij}^{(4)} y_{i-1, j+1} + d_{ij}^{(5)} x_{i, j+1} + d_{ij}^{(6)} x_{i, j} + d_{ij}^{(7)} x_{i, j+1} + \\ & + d_{ij}^{(8)} y_{i+1, j} + d_{ij}^{(9)} w_{i+1, j} + d_{ij}^{(10)} x_{i-1, j} + d_{ij}^{(11)} y_{i+1, j+1} = \ddot{x}_{ij}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & e_{ij}^{(1)} x_{i-1, j-1} + e_{ij}^{(2)} y_{i-1, j} + e_{ij}^{(3)} x_{i-1, j+1} + e_{ij}^{(4)} w_{i, j-1} + e_{ij}^{(5)} y_{i, j-1} + e_{ij}^{(6)} y_{i, j} + e_{ij}^{(7)} w_{i, j+1} + \\ & + e_{ij}^{(8)} y_{i, j+1} + e_{ij}^{(9)} x_{i+1, j-1} + e_{ij}^{(10)} y_{i+1, j+1} + e_{ij}^{(11)} x_{i+1, j+1} = \ddot{y}_{ij}. \end{aligned}$$

Здесь

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(17)} = -a_{ij}^{(5)} = -a_{ij}^{(13)} = a_2 \frac{N_1 N_2}{4}; \quad a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(18)} = -a_{ij}^{(6)} = -a_{ij}^{(14)} = a_5 \frac{N_1 N_2}{4};$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(15)} = a_1 N_1^2; \quad a_{ij}^{(4)} = a_4 N_1^2; \quad a_{ij}^{(16)} = a_4 N_1^2; \quad a_{ij}^{(7)} = a_{ij}^{(11)} = a_3 N_2^2;$$

$$a_{ij}^{(8)} = a_{ij}^{(12)} = a_6 N_2^2; \quad a_{ij}^{(9)} = -2(a_1 N_1^2 + 2a_3 N_2^2); \quad a_{ij}^{(10)} = -2(a_4 N_1^2 + a_6 N_2^2);$$

$$\begin{aligned}
 b_{ij}^{(1)} &= b_{ij}^{(17)} = -b_{ij}^{(5)} = -b_{ij}^{(13)} = b_2 \frac{N_1 N_2}{4}; & b_{ij}^{(2)} &= b_{ij}^{(18)} = -b_{ij}^{(6)} = -b_{ij}^{(14)} = b_5 \frac{N_1 N_2}{4}; \\
 b_{ij}^{(3)} &= b_{ij}^{(13)} = b_1 N_1^2; & b_{ij}^{(4)} &= b_{ij}^{(15)} = b_6 N_1^2; & b_{ij}^{(7)} &= b_{ij}^{(11)} = b_3 N_2^2; & b_{ij}^{(8)} &= b_4 N_2^2; \\
 b_{ij}^{(9)} &= -2(b_1 N_1^2 + 2b_3 N_2^2); & b_{ij}^{(10)} &= -2(b_4 N_1^2 + b_6 N_2^2); & b_{ij}^{(12)} &= b_4 N_2^2; \\
 c_{ij}^{(1)} &= -c_{ij}^{(4)} = 2 \frac{N_1 N_2}{4}; & c_{ij}^{(3)} &= -c_{ij}^{(12)} = c_6 \frac{N_1}{2}; & c_{ij}^{(2)} &= c_1 N_1^2 + c_4 \frac{N_1}{4}; \\
 c_{ij}^{(5)} &= c_3 N_2^2 + c_5 \frac{N_2}{2}; & c_{ij}^{(6)} &= c_7 \frac{N_2}{2}; & c_{ij}^{(7)} &= -2c_1 N_1^2 - 2c_3 N_2^2; \\
 c_{ij}^{(8)} &= c_3 N_2^2 - c_5 \frac{N_2}{2}; & c_{ij}^{(9)} &= -c_7 \frac{N_2}{2}; & c_{ij}^{(11)} &= c_1 N_1^2 - c_4 \frac{N_1}{2}; \\
 c_{ij}^{(13)} &= -c_{ij}^{(10)} = c_2 \frac{N_1 N_2}{4}; & c_{ij}^{(1)} &= -c_{ij}^{(4)}; & d_{ij}^{(1)} &= d_{ij}^{(11)} = -d_{ij}^{(4)} = -d_{ij}^{(8)} = d_2 \frac{N_1 N_2}{4}; \\
 -d_{ij}^{(2)} &= d_{ij}^{(9)} = d_4 \frac{N_1}{2}; & -d_{ij}^{(3)} &= d_{ij}^{(10)} = d_1 N_1^2; & d_{ij}^{(5)} &= d_{ij}^{(7)} = d_3 N_1^2; \\
 d_{ij}^{(6)} &= -2(d_1 N_1^2 + d_3 N_2^2) + d_5; & e_{ij}^{(1)} &= e_{ij}^{(11)} = -e_{ij}^{(3)} = -e_{ij}^{(9)} = e_2 \frac{N_1 N_2}{4}; \\
 e_{ij}^{(2)} &= b_{ij}^{(10)} = e_1 N_1^2; & -e_{ij}^{(4)} &= b_{ij}^{(7)} = e_4 \frac{N_2}{2}; & e_{ij}^{(5)} &= e_{ij}^{(8)} = e_3 N_2^2; \\
 e_{ij}^{(6)} &= -2e_1 N_1^2 - 2e_3 N_2^2 + e_5; & a_5 &= \frac{\eta^2 \gamma N_1}{2} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j}), \\
 a_6 &= \frac{1+\mu}{2} \gamma \eta^2 \frac{N_2}{2} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1}), & a_7 &= \frac{1-\mu}{4} N_1 \gamma \eta (w_{i+1,j} - w_{i-1,j}), \\
 b_5 &= \mu \frac{N_2}{2} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1}), & b_6 &= \frac{1+\mu}{2} \gamma \eta^2 \frac{N_1}{2} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j}), \\
 b_7 &= \frac{1-\mu}{2} \gamma \eta^2 \frac{N_2}{2} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1}), \\
 c_1 &= \eta^2 \left[k^2 \frac{1-\mu}{2} + \eta \gamma \frac{N_1}{2} (u_{i+1,j} - u_{i,j-1}) + \mu \gamma \frac{N_2}{2} (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) \right], \\
 c_2 &= (1-\mu) \eta \gamma \left[\frac{N_2}{2} (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + \eta \frac{N_1}{2} (v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) \right], \\
 c_3 &= \frac{k^2 (1-\mu)}{2} + \mu \eta \gamma \frac{N_1}{2} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \gamma \frac{N_2}{2} (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}), \\
 c_4 &= \eta^2 \left[\gamma \eta N_1^2 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \mu \frac{N_1 N_2}{4} (v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j+1} + v_{i-1,j-1}) + \right. \\
 & \left. + \frac{1-\mu}{2} \gamma \left(\frac{N_2^2}{4} (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} - u_{i,j-1}) + \frac{N_1 N_2}{4} (v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j+1} + v_{i-1,j-1}) \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{j,j} &= \begin{pmatrix} a_{ij}^{(9)} & 0 & a_{ij}^{(10)} & 0 & 0 \\ 0 & b_{ij}^{(9)} & b_{ij}^{(10)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(7)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{ij}^{(6)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{ij}^{(6)} \end{pmatrix}, \quad b_{j,j+1} = \begin{pmatrix} a_{ij}^{(11)} & 0 & a_{ij}^{(12)} & 0 & 0 \\ 0 & b_{ij}^{(11)} & b_{ij}^{(12)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(8)} & 0 & c_{ij}^{(9)} \\ 0 & 0 & 0 & d_{ij}^{(7)} & 0 \\ 0 & 0 & e_{ij}^{(7)} & 0 & e_{ij}^{(8)} \end{pmatrix}, \\
 c_{j,j-1} &= \begin{pmatrix} 0 & a_{ij}^{(13)} & a_{ij}^{(14)} & 0 & 0 \\ b_{ij}^{(13)} & 0 & b_{ij}^{(14)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(10)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{ij}^{(5)} & 0 \end{pmatrix}, \quad c_{j,j} = \begin{pmatrix} a_{ij}^{(15)} & 0 & a_{ij}^{(16)} & 0 & 0 \\ 0 & b_{ij}^{(13)} & b_{ij}^{(15)} & 0 & 0 \\ c_{ij}^{(13)} & 0 & c_{ij}^{(11)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{ij}^{(9)} & d_{ij}^{(10)} & d_{ij}^{(8)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{ij}^{(10)} \end{pmatrix}, \\
 b_{j,j+1} &= \begin{pmatrix} 0 & a_{ij}^{(17)} & a_{ij}^{(18)} & 0 & 0 \\ b_{ij}^{(17)} & 0 & b_{ij}^{(18)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(13)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{ij}^{(11)} \\ 0 & 0 & 0 & e_{ij}^{(11)} & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$z_{1,i} = \{z_{1,1}, z_{1,2}, \dots, z_{1,N_1-2}, z_{1,N_1-1}\}, \quad z_{1,j} = \{z_{1,1}, z_{1,2}, \dots, z_{1,N_2-2}, z_{1,N_2-1}\}.$$

Для заземленных контуров

- при $i = 1, j = \overline{1, N_2 - 1}$; $A_i = 0$; при $i = N_1 - 1, j = \overline{1, N_2 - 1}$; $C_{N_1-1} = 0$;
- при $i = \overline{1, N_1 - 1}, j = 1$; $a_{j,j-1} = b_{j,j-1} = c_{j,j-1} = 0$;
- при $i = \overline{1, N_1 - 1}, j = N_2 - 1$; $a_{j,j+1} = b_{j,j+1} = c_{j,j+1} = 0$.

Расчетные величины (3) – (5) в сеточной форме имеют вид

$$\begin{aligned}
 N_x &= \gamma \left\{ \eta \frac{N_1}{2} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \gamma \eta \frac{N_1^2}{4} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \mu \left[\frac{N_2}{2} (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) + \frac{1}{2} \gamma \frac{N_2^2}{4} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1})^2 \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_y &= \gamma \left\{ \frac{N_2}{2} (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) + \frac{1}{2} \gamma \frac{N_2^2}{4} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1})^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \mu \left[\eta \frac{N_1}{2} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \gamma \eta^2 \frac{N_1^2}{4} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})^2 \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T &= \gamma \left[\frac{N_2}{2} (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + \frac{\eta N_1}{2} (v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) + \right. \\
 &\quad \left. + \gamma \eta \frac{N_1 N_2}{4} (w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1} + w_{i-4,j-1}) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= \eta \frac{N_1}{2}(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) + \mu \frac{N_2}{2}(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}), \\
 M_y &= \frac{N_2}{2}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + \mu \eta \frac{N_1}{2}(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}), \\
 H &= \frac{N_2}{2}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + \eta \frac{N_1}{2}(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}), \\
 Q_x &= \gamma \eta \frac{N_1}{2}(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) + x_{i,j}, \\
 Q_y &= \gamma \frac{N_2}{2}(w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) + y_{i,j}.
 \end{aligned}$$

Для решения системы (13) с начальными условиями (7) можно применить симметричную формулу Рунге – Кутты четвертого порядка точности как в (13):

$$\dot{Z} = \Upsilon Z + \tilde{b}, \tag{14}$$

где $Z = \begin{Bmatrix} Z_I \\ Z_{II} \end{Bmatrix}$, $\Upsilon = \begin{pmatrix} 0 & E \\ M & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ g \end{Bmatrix}$.

Начальные условия примут вид

$$\left. \begin{aligned}
 Z_I|_{t=0} &= Z_I^0, \quad Z_{II}|_{t=0} = Z_{II}^0, \\
 \dot{Z}_I|_{t=0} &= \dot{Z}_I^0, \quad \dot{Z}_{II}|_{t=0} = \dot{Z}_{II}^0.
 \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

С учетом (15) уравнение (14) решается по известной схеме:

$$\begin{aligned}
 \bar{Z}_I &= Z_I^0 + \tau \bar{\alpha} \bar{Z}_{II}, \quad \bar{Z}_{II} = Z_{II}^0 + \tau \bar{\alpha} \dot{Z}_{II}, \\
 Z_I' &= \dot{Z}_I^0 + \tau \bar{\beta} \bar{Z}_{II}, \quad Z_{II}' = Z_{II}^0 + \tau \bar{\beta} \dot{Z}_{II}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $\bar{Z}_I, \bar{Z}_{II}, Z_I^0, Z_{II}^0$ – соответственно текущие и начальные значения, Z_I', Z_{II}' – искомые функции, τ – шаг по времени, а $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ – векторы константы, фигурирующие в схеме Рунге – Кутты [4–6].

После определения искомых функции методом Рунге – Кутты по формуле (16) вычисляются расчетные величины по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\gamma N_1}{2\delta} \left[u_{i,j+1} - u_{i-1,j} + \frac{\gamma N_1}{4\delta} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})^2 \right], \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2\delta} \left[N_2 (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + \gamma N_1 (v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) \right] + \frac{\gamma N_1 N_2}{2\delta} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})(w_{i,j+1} - w_{i,j-1}), \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{N_2}{2\delta} \left[v_{i,j+1} - v_{i,j-1} + \frac{N_2}{4\delta} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1})^2 \right], \\
 \gamma_{11} &= \left(\frac{\gamma N_1}{\delta} \right)^2 (w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}), \\
 \gamma_{12} &= \frac{\gamma N_1 N_2}{4\delta^2} (w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}), \\
 \gamma_{22} &= \frac{N_2^2}{\delta^2} \left(w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1} \sqrt{b^2 - 4ac} \right),
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$T_1 = \varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}, T_2 = \varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11},$$

$$M_{11} = -(\gamma_{11} + \mu\gamma_{22}), M_{22} = -(\gamma_{22} + \mu\gamma_{11}), M_{12} = -\gamma_{12}.$$

3. Динамический расчет гибких прямоугольных пластин, защемленных по контуру

Займемся исследованием динамического напряженно-деформированного состояния защемленных по контуру гибких прямоугольных пластин с учетом сдвига и инерции вращения, подвергающихся действию мгновенно приложенной равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности. Поставленные задачи решаются при нулевых начальных условиях и следующих значениях параметров счёта: шаг сетки по пространственным координатам $N_1 = N_2 = 10$; отношение ширины пластин к длине $a/b = 1$; отношение ширины пластин к толщине $b/h = 50$; шаг по времени $\tau_\lambda = 0.00125$ при решении задачи в линейной, а $\tau_{нл} = 0.00025$ при нелинейной постановке, интенсивность нагрузки $\beta = 400$. Результаты расчета представлены в виде графиков (рис. 1 и 2).

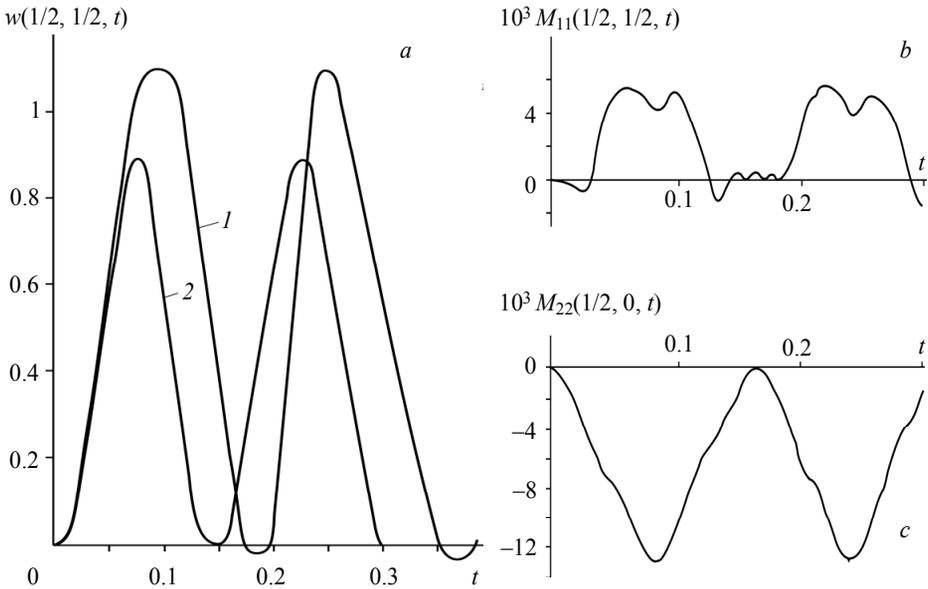


Рис. 1. Прогиб (а), моменты (b, c)
Fig. 1. (a) Deflection; (b, c) moments

Из рис. 1, а видно, что безразмерный прогиб в центре пластины по линейной теории (кривая 1) достигает первого максимума $w_\lambda = 1.12$ при $t = 0.10$ и второго $w_\lambda = 1.15$ при $t = 0.27$, а по нелинейной теории (кривая 2) первый минимум $w_{нл} = 0.87$ наблюдается при $t = 0.07$; а второй $w_{нл} = 0.88$ при $t = 2.2$.

Пренебрежение нелинейными эффектами приводит к завышению оценок максимальных прогибов приблизительно на 30% (29% для первого максимума и 31% для второго).

Картина изменения во времени изгибающих моментов по нелинейной теории показана на рис. 1, *b* и *c*. На рис. 1, *b* представлена кривая изменения M_{22} в середине боковой стороны пластины ($x = 1/2, y = 0$), а на рис. 1, *c* кривая изменения M_{11} в центре пластины ($x = 1/2, y = 1/2$). Отметим, что максимальные значения изгибающего момента на контуре защемленной пластины приблизительно в 2.2 раза превосходят значения изгибающего момента в её центре.

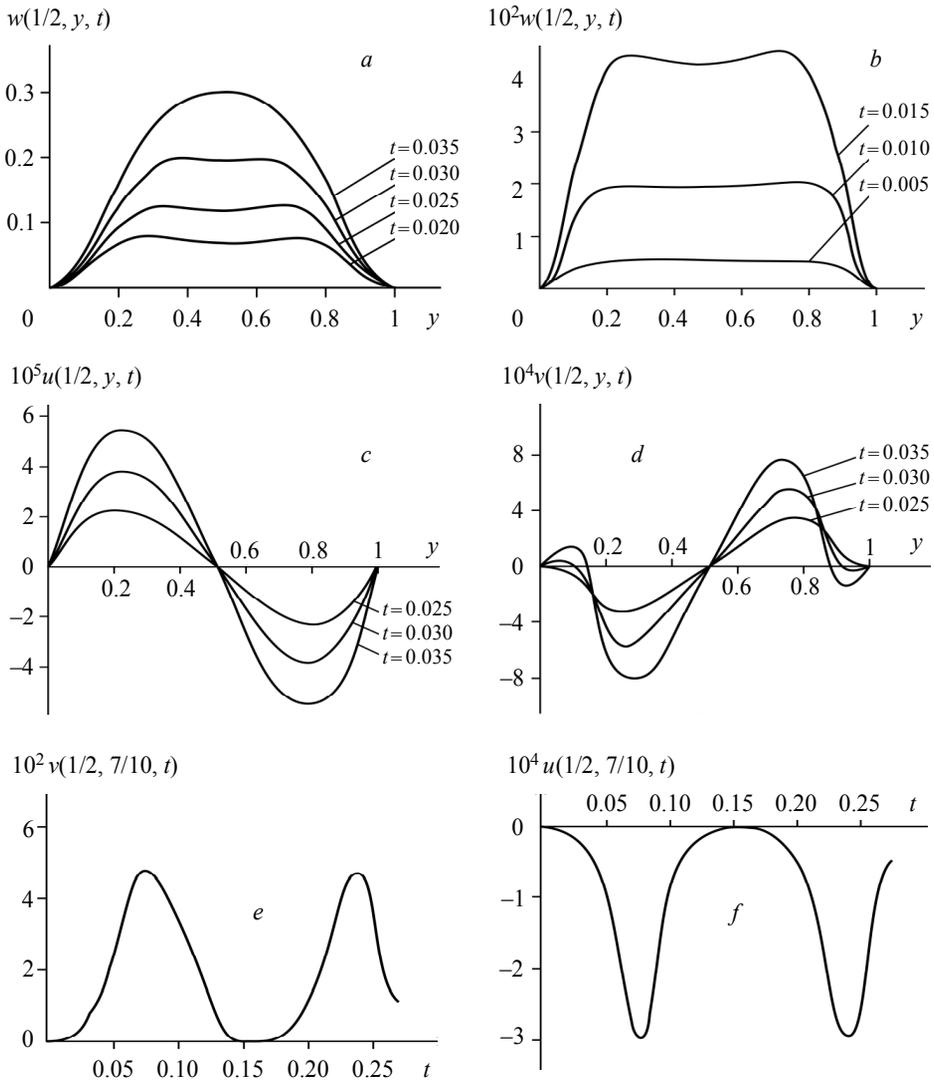


Рис. 2. Прогиб (*a, b*), перемещение по оси Ox (*c, f*), перемещение по оси (*d, e*)
Fig. 2. (*a, b*) Deflection, (*c, f*) movement along the Ox axis, and (*d, e*) movement along the Oy axis

Серии графиков, приведенных на рис. 2, *a-d*, изображают распределения прогиба w (рис. 2, *a* и *b*) а также смещений u (рис. 2, *c*) и v (рис. 2, *d*) вдоль средней линии пластины $x = 1/2$ в разные моменты времени непосредственно вслед за мгновенным приложением к пластине равномерного нормального давления. Наблюдаемая картина соответствует распространению волн от защемленного края к центру. Следует отметить, что графики прогибов w , построенные на рис. 2, *a* для безразмерных времени $t \leq 0,015$ носят, по-видимому, довольно условный характер, поскольку сопоставление решений, полученных по теориям и по трехмерной теории упругости, показывает, что теории оболочек не дают достаточно правильной картины до того момента, когда возбуждение еще не распространилось по толщине пластины (в нашем примере этот период времени приблизительно $t < 0,02$). Графики на рис. 2, *e* и *f* отражают изменение во времени смещений в плоскости пластины, в точке $x = 1/2$, $y = 7/10$ несколько смещенной от центра к боковой стороне пластины. Отметим, что эти смещения имеют почти такой же период колебаний, что и прогиб w середины пластин (рис. 2, *a*).

Данная задача решена и для $N_1 = N_2 = 20$ при одинаковых параметрах $N_1 = N_2 = 10$. Полученный результат показывает, что при одинаковых амплитудах колебаний совпадают два десятичных знака, т.е. метод конечных разностей при вычислении почти сходится.

Заключение

Таким образом, основные результаты работы следующие:

1. Создание пакетов прикладных программ нормативных расчетов является временным компромиссным решением проблемы автоматизированного расчета и проектирования конструкции. Основой систем автоматизированного расчета и проектирования должны стать высокоэффективные специализированные машинные программы, построенные с использованием современных достижений механики и вычислительной математики, утвержденных в качестве нормативов.

2. Построена единая вычислительная схема решения краевых задач динамического расчета гибких прямоугольных пластин с учетом сдвига и инерции вращения методом конечных разностей. При постановке краевых задач в перемещениях использована нелинейная теория Вольмира, причем в динамических задачах учтены как нормальное, так и тангенциальные инерционные слагаемые уравнения движения.

3. Построена единая автоматизированная система полного динамического расчета гибких прямоугольных пластин с учетом сдвига и инерции вращения с произвольными начальными и граничными условиями. В основу системы положены стандартные программы образования и решения больших систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Разработанная программа апробирована в ходе решения ряда динамических задач о внезапном нагружении нормальным давлением плоских прямоугольных пластин, различным образом закрепленных по внешнему контуру.

5. Учет сил инерции вращения и сдвига, введенных Вольмиром, что приводит к уменьшению изгибных и к увеличению мембранных расчетных величин.

6. Установлено, что с увеличением степени нелинейности задачи уменьшается амплитуда изгибных расчетных величин и период колебаний пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. *Кабулов В.К.* Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности. Ташкент: Фан, 1966. 394 с.
3. *Демидович Б.П., Марон И.А.* (1962) Численные методы анализа / под ред. Б.П. Демидовича. М.: Физматгиз.
4. Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ-НКТЛ ССР, 1935. 674 с.
5. *Юлдашев А., Алибоев А.* (1978) Интегрирование уравнения движения гибких оболочек с учетом сдвига и инерций вращения. В.сб.науч.тр. ТашПИ «Численные методы», Ташкент, С. 50–60.
6. *Березин И.С., Жидков Н.П.* (1959) Методы вычислений, Т. I-II, Физматгиз.
7. *Алибоев А., Юлдашев А.* (1978) Интегрирование уравнения движения прямоугольных пластин методом сеток. В.сб. науч.тр. ТашПИ «Автоматизация проектирования», Ташкент, Выпуск 237. С. 89–93.
8. *Бате К.Ю.* (2010) Методы конечных элементов. М: Физматлит, 1024 с.
9. *Корнишин М.С.* (1963) Некоторые вопросы применения метода конечных разностей для решения краевых задач теории пластин // Прикладная механика. Т. 9. № 3.
10. *Юлдашев А., Пирматов Ш.Т., Минарова Н.* (2015) Уравнение равновесия гибких круглых пластин // Austrian J. Technical and Natural Sciences. No. 3–4. P. 32–35.
11. *Yuldashev A., Pirmatov Sh.T.* (2020) Algorithmization of solving dynamic edge problems of the theory of flexible rectangular plates. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika №-66, pp. 143–157.
12. *Коробейников С.Н.* (2000) Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 262 с.
13. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
14. *Берикханова Г.Е., Жумагулов Б.Т., Кангужин Б.Е.* (2010) Математическая модель колебаний пакета прямоугольных пластин с учетом точечных связей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. № 1(9). С. 72–86.
15. *Базаров М.Б., Сафаров И.И., Шокин Ю.И.* (1996) Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 189 с.
16. *Вячкин Е.С., Каледин В.О., Решетникова Е.В., Вячкина Е.А., Гилева А.Е.* (2018) Разработка математической модели статического деформирования слоистых конструкций с несжимаемыми слоями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. № 55. С. 72–83. DOI: 10.17223/19988621/55/7.

Статья поступила 03.10.2020

Yuldashev A., Pirmatov Sh.T. (2022) ALGORITHMIZATION OF THE SOLUTION OF DYNAMIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE THEORY OF FLEXIBLE PLATES TAKING INTO ACCOUNT SHIFT AND ROTATION INERTIA. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 150–165

DOI 10.17223/19988621/75/13

Keywords: algorithm, plates, shear, inertia of rotation, theory of elasticity, difference schemes.

Most of the problems on flexible plates are solved in the Föppl–von Karman formulation, which is Love's special case. The constructed algorithms are not economical in terms of implementation on a computer. Therefore, construction of algorithms for the complete calculation of flexible plates with a given degree of accuracy with allowance for the shear and inertia of rotation is becoming a topical issue.

The problem of creating an automated inference system and solving the equations of the theory of elasticity and plasticity were first posed in the monograph by V.K. Kabulov. In this

work, for the first time, the main problems of algorithmization are formulated and ways of their machine solution are outlined. The problem of algorithmization is solved as follows: depending on geometric characteristics of the object and physical properties of the material, a design scheme of this model is selected; derivation of the initial differential equations and the corresponding boundary and initial conditions; selection of a computational algorithm and numerical solution of the obtained equations; analysis of the obtained numerical results describing the stress-strain state of the structure under consideration.

This work consists of an introduction, three sections and a conclusion. In the first paragraph, the equations of motion of rectangular plates are given. Substituting the expression for the force of moments and shearing forces and introducing a dimensionless value, a system of equations in displacements is obtained. In the second section, using the central difference formulas, a system of quasilinear ordinary differential equations is obtained. Taking into account the boundary and initial conditions, the system of equations is reduced to matrix form, which can be solved by the Runge–Kutta method. In the third paragraph, an analysis of the results obtained is presented.

Adash YULDAESHEV (Candidate of Physics and Mathematics, Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan)

Shamshod T. PIRMATOV (Candidate of Physics and Mathematics, Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan) E-mail: shamshod@rambler.ru

REFERENCES

1. Vol'mir A.S. (1972) *Nelineynaya dinamika plastin i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow: Nauka.
2. Kabulov V.K. (1966) *Algoritmizatsiya v teorii uprugosti i deformatsionnoy teorii plastichnosti* [Algorithmization in the theory of elasticity and deformation theory of plasticity]. Tashkent: Fan.
3. Demidovich B.P., Maron I.A. (1962) *Chislennyye metody analiza* [Numerical methods of analysis]. Moscow: Fizmatgiz.
4. Love A. (1927) *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge: Cambridge University Press.
5. Yuldashev A., Aliboyev A. (1978) Integrirovaniye uravneniya dvizheniya gibkikh obolochek s uchetom sdviga i inertsii vrashcheniya [Integration of the equation of motion of flexible shells with allowance for shear and rotational inertia]. *Sbornik nauchnykh trudov TashPI "Chislennyye metody," Tashkent*. pp. 50–60.
6. Berezin I.S., Zhidkov N.P. (1959) *Metody vychisleniy* [Computational methods]. Moscow: Fizmatgiz.
7. Aliboyev A. Yuldashev A. (1978) Integrirovaniye uravneniya dvizheniya pryamougol'nykh plastin metodom setok [Integration of the equation of motion of rectangular plates by the grid method]. *Sbornik nauchnykh trudov TashPI "Design automation," Tashkent*, vyp. 237. pp. 89–93.
8. Bathe K.-J. (1996) *Finite Element Procedures*. Prentice Hall.
9. Kornishin M.S. (1963) Nekotorye voprosy primeneniya metoda konechnykh raznostey dlya resheniya kraevykh zadach teorii plastin [Some problems of the application of the finite difference method for solving boundary problems of the theory of plates]. *Prikladnaya mekhanika – Applied mechanics*. 9(3).
10. Yuldashev A., Pyrmatov S.T., Minarova N. (2015) Uravneniye ravnovesiya gibkikh kruglykh plastin [The equation of balance of flexible round plates]. *Austrian Journal of Technical and Natural Sciences*. 3–4. pp. 32–35.
11. Yuldashev A., Pirmatov Sh.T. (2020) Algorithmization of solving dynamic edge problems of the theory of flexible rectangular plates. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 66. pp. 143–157.

12. Korobeynikov S.N. (2000) *Nelineynoye deformirovaniye tverdykh tel* [Nonlinear deformation of solid bodies]. Novosibirsk: Siberian Branch, Russian Academy of Sciences.
13. Rabotnov Yu.N. (1988) *Mekhanika deformiruyemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solid bodies]. Moscow: Nauka.
14. Berikkhanova G.E., Zhumagulov B.T., Kanguzhin B.E. (2010) Matematicheskaya model' kolebaniy paketa pryamougol'nykh plastin s uchetom tochechnykh svyazey [Mathematical model of rectangular plate stack oscillations with account for point-like coupling]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(9). pp. 72–86.
15. Bazarov M.B., Safarov I.I., Shokin Yu.I. (1996) *Chislennoye modelirovaniye kolebaniy dissipativno odnorodnykh i neodnorodnykh mekhanicheskikh sistem* [Numerical simulation of oscillations of dissipative homogeneous and heterogeneous mechanical systems]. Novosibirsk: Siberian Branch, Russian Academy of Sciences.
16. Vyachkin E.S., Kaledin V.O., Reshetnikov E.V., Vyachkin E.A., Gileva A.E. (2018) Razrabotka matematicheskoy modeli staticheskogo deformirovaniya sloistykh konstruktsey s neszhimayemyimi sloyami [Mathematical modeling of static deformation of layered constructions with incompressible layers]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp. 72–83. DOI: 10.17223/19988621/55/7.

Received: October 3, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АХМЕТОВ Аян Жанатович – младший научный сотрудник лаборатории нелинейной механики метаматериалов и многоуровневых систем Института физики прочности и материаловедения СО РАН, аспирант кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: ayan.akhmetov93@gmail.com

БИМАТОВ Владимир Исмагилович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой динамики полета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: vbimatov@mail.ru

БЛОХИНА Анна Алексеевна – Ph.D, Томский государственный университет, г. Томск, Россия. E-mail: nyura.blokhina.97@mail.ru

ЗАДОРЖНАЯ Ольга Владимировна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и информатики Института развития образования Краснодарского края, г. Краснодар. E-mail: ovz_70@mail.ru

ЗЮЗЬКОВ Валентин Михайлович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Национального исследовательского Томского государственного университета, профессор кафедры компьютерных систем в управлении и проектировании Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Россия. E-mail: vmz@math.tsu.ru

ИВАНЫЧЕВ Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей механики Липецкого государственного технического университета, г. Липецк, Россия. E-mail: Lsivdmal@mail.ru

ИМОМНАЗАРОВ Холматжон Худайназарович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией вычислительных задач геофизики института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия. E-mail: imom@omzg.sgcc.ru

ИСЛАМОВ Денис Фавилович – старший преподаватель кафедры геофизики физико-технического института Башкирского государственного университета, г. Уфа, Россия. E-mail: islamovden@rambler.ru

КОЧЕТКОВ Владимир Константинович – доктор физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и анализа Калмыцкого государственного университета им. Б.Б. Городовикова, г. Элиста, Россия. E-mail: kvk1106@mail.ru

КРАЙНОВ Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, Томский государственный университет, г. Томск, Россия. E-mail: kraunov@tru.ru

КУДЕНЦОВ Владимир Юрьевич – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры авиа- и ракетостроения Омского государственного технического университета, г. Омск, Россия. E-mail: kvu_om@mail.ru

МИЛЕХИН Юрий Михайлович – доктор технических наук, академик РАН, Генеральный директор и Генеральный конструктор, ФГУП «Федеральный центр двойных технологий «Союз», г. Дзержинский, Россия. E-mail: fcdt@mail.ru

МОЛЧАНОВА Евгения Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий и систем Инженерно-технологического института Хакасского государственного университета имени Н.Ф. Катанова, г. Абакан, Россия. E-mail: mevgen2001@mail.ru

ОМОНОВ Алишер Тошпулатович – ассистент кафедры прикладной математики Ташкентского государственного экономического университета, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: alisher.omonov1992@mail.ru

ПАНЬЖЕНСКИЙ Владимир Иванович – кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического образования Пензенского государственного университета; Педагогический институт им. В.Г.Белинского, факультет физико-математических и естественных наук, г. Пенза, Россия. E-mail: kaf-geom@yandex.ru

ПИРМАТОВ Шамшод Тургунбоевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ташкентского государственного технического университета, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: shamshod@rambler.ru

ПОРЯЗОВ Василий Андреевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: poryazov@mail.ru

РАМАЗАНОВ Айрат Шайхуллинович – доктор технических наук, профессор кафедры геофизики физико-технического института Башкирского государственного университета, г.Уфа, Россия. E-mail: ramaz@bsunet.ru

РАСТРЕПИНА Анастасия Олеговна – старший лаборант кафедры математического образования Пензенского государственного университета; Педагогический институт им. В.Г.Белинского, факультет физико-математических и естественных наук, г. Пенза, Россия. E-mail: n.rastrepina@mail.ru

РАШКОВСКИЙ Сергей Александрович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, г. Москва, Россия; ведущий научный сотрудник Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: rash@ipmnet.ru

СМОЛИН Игорь Юрьевич – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией нелинейной механики метаматериалов и многоуровневых систем Института физики прочности и материаловедения СО РАН, профессор кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: smolin@ispms.ru

ТРУШЛЯКОВ Валерий Иванович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры авиа- и ракетостроения Омского государственного технического университета, г. Омск, Россия. E-mail: vatrushlyakov@yandex.ru

ТУРУБАЕВ Роман Ринатович – аспирант кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: roma.turubaev@gmail.com

ФЕДОРЫЧЕВ Александр Васильевич – начальник лаборатории ФГУП «Федеральный центр двойных технологий «Союз», г. Дзержинский, Россия. E-mail: dgr56@mail.ru

ХОЛМУРОДОВ Абдулхамид Эркинович – доктор физико-математических наук, декан физико-математического факультета Каршинского государственного университета, г. Карши, Узбекистан. E-mail: abishx@mail.ru

ШВАБ Александр Вениаминович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной аэромеханики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: avshvab@inbox.ru

ЮЛДАШЕВ Адаш Юлдашевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ташкентского государственного технического университета, г. Ташкент, Узбекистан.

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634034, г. Томск, ул. Студенческая, 4

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 17.02.2022. Выпуск в свет 24.02.2022.
Формат 70 × 100¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 13.55. Уч.-изд. л. 15.17. Тираж 250 экз. Заказ № 2. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 4924.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru