

УДК 519.6

DOI: 10.17223/19988605/57/5

Б.Х. Хайиткулов**КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ
УПРАВЛЕНИЯ КОНВЕКЦИЕЙ-ДИФфуЗИЕЙ***Работа выполнена при финансовой поддержке фонда УзФФИ № ОТ-Ф4-33.*

Рассмотрена задача поддержания температуры в стержне в определенных пределах за счет оптимального расположения источников тепла. В качестве модели используется уравнение конвекции-диффузии, для которого построены неявные конечно-разностные схемы решения. Для решения задачи управления конвекцией-диффузией используется задача линейного программирования. Разработаны алгоритмы и программное обеспечение для численного моделирования. Представлены результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: нестационарные задачи; оптимальный выбор; плотность источников тепла; уравнения конвекции-диффузии; моделирование.

Задача оптимального размещения источников тепла в отапливаемых помещениях всегда была актуальной в строительстве, металлургии, проектировании теплиц и других областях техники и технологий.

В работе [1] предложено решение задачи оптимального размещения источников в неоднородных средах, скалярные стационарные поля в которых описываются эллиптическими уравнениями. В основу алгоритмов решения задачи положены способы оценки значений функционала на множестве возможных мест размещения источников, что дает возможность выбора оптимального варианта путем реализации метода ветвей и границ. В [2] рассмотрены задачи оптимального нагрева помещения на основе принципа максимума Понтрягина. Работа [3] посвящена задаче энергоэффективного теплоснабжения здания в системе центрального отопления. В [4] исследована дифференциально-разностная задача управления процессом диффузии, получен аналог принципа максимума, позволяющий определить моменты включения и выключения источника максимальной мощности.

В работах [5, 6] разработаны метод и алгоритм решения нестационарной задачи об оптимальном выборе плотности источников тепла на простых геометрических областях так, чтобы температура внутри рассматриваемой области находилась в заданных пределах. При этом источники тепла обеспечивали заданный температурный режим минимальной суммарной мощности и температуру в заданном коридоре, заполненном однородной или неоднородной средой. В работе [7] рассмотрена краевая задача параболического типа. Распределение тепла в рассматриваемом теле контролируется функцией, которая находится на границе тела.

В работе [8] численно решается уравнение конвекции-диффузии в двумерной геометрии для моделирования теплопередачи. Проведено тестирование и получены результаты для случаев граничных условий трех типов. Отметим, также, что в [9–11] рассмотрены численные схемы с явным конвективным и неявным диффузионным переносом.

В данной работе исследуется задача управления конвекцией-диффузией на основе оптимизации линейного целевого функционала с учетом ограничений, которая решается на основе аппроксимации и сведения к задаче линейного программирования. Предлагаются методика и алгоритм решения нестационарной задачи поддержания температуры внутри области в заданных пределах путем оптимального размещения источников тепла в стержне. Для проведения вычислительных экспериментов разработано программное обеспечение.

1. Постановка задачи и ее конечномерная аппроксимация

Пусть $D = \{a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\}$ – прямоугольник. Требуется определить функцию $f(x, t) \geq 0$, доставляющую при каждом $t \in [0, T]$ минимум линейному функционалу

$$J\{f\} = \int_a^b f(x, t) dx \rightarrow \min \quad (1)$$

при следующих условиях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \chi(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v(x) \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \quad a < x < b, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad a \leq x \leq b, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u(a, t) &= \mu_1(t), \quad u(b, t) = \mu_2(t), \quad 0 < t \leq T, \\ m(x, t) &\leq u(x, t) \leq M(x, t), \quad (x, t) \in D. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $u = u(x, t)$ – температура стержня в точке x в момент времени t ; $\chi(x) > 0$ – коэффициент теплопроводности диффузии; $v(x)$ – компоненты скорости конвекции; $f(x, t)$ – плотность источников тепла; $u_0(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $m(x, t)$, $M(x, t)$ – заданные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям сопряжения $\mu_1(0) = u_0(a)$, $\mu_2(0) = u_0(b)$. Функции $m(x, t)$, $M(x, t)$ имеют смысл функций минимального и максимального профиля температуры в области D соответственно. Плотность источников тепла описывается квадратично интегрируемой функцией $f(x, t)$ в пространстве $L_2(D)$.

В такой математической постановке данная задача на равномерной сетке решается методом конечных разностей. Далее условия (2) заменяются на конечно-разностные аналоги, при этом используется неявная схема.

Введем в D равномерную по обоим переменным разностную сетку $\bar{\omega}_{ht} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j)\}$: $x_i = ih$, $t_j = j\tau$, $i = 0, 1, \dots, N_1$, $j = 0, 1, \dots, N_2$ с шагами $h = (b - a) / N_1$, $\tau = T / N_2$.

Неявная разностная схема для задачи (2) имеет вид [10]:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \chi_i \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + v_i \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2h} + f_i^{j+1}, \\ i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, j = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \\ u_0^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \\ u_{N_1}^{j+1} = \mu_2(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\chi_i = \chi(x_i)$, $v_i = v(x_i)$, $f_i^{j+1} = f(x_i, t_{j+1})$. Оператор $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \chi(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v(x) \frac{\partial u}{\partial x}$ с начальными и краевыми условиями будет самосопряженным положительно определенным в $L_2(D)$. Это означает, что он имеет ограниченный обратный оператор $G = L^{-1}$. Тогда можно переформулировать задачу (1)–(3) как задачу минимизации функционала (1) при следующих условиях на плотность источников:

$$f(\cdot, \cdot) \in L_2(D), \quad f(x, t) \geq 0, \quad m(x, t) \leq (Gf)(x, t) \leq M(x, t). \quad (5)$$

Введем обозначения

$$X = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2\chi_i}{h^2} \right), \quad X^+ = \left(-\frac{\chi_i}{h^2} + \frac{v_i}{2h} \right), \quad X^- = \left(-\frac{\chi_i}{h^2} - \frac{v_i}{2h} \right).$$

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} X & X^+ & \dots & \dots & 0 \\ X^- & X & X^+ & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & X^- & X & X^+ \\ 0 & \dots & \dots & X^- & X \end{bmatrix}.$$

Получаем

$$G = A^{-1}.$$

Построим конечномерную аппроксимацию (1)–(5) в виде задачи линейного программирования.

Разобьем область D по x на N_1 и по t на N_2 равных частей: $D = \bigcup_{j=1}^{N_2} \bigcup_{i=1}^{N_1} D_i^j$, где

$D_i^j = \{(x, t), x_{i-1} \leq x \leq x_i, t_{j-1} \leq t \leq t_j\}$, $i = 1, 2, \dots, N_1$, $j = 1, 2, \dots, N_2$. Обозначим через $S_{N_1}^{N_2}(D)$ подпространство пространства $L_2(D)$, в котором определены кусочно-постоянные функции вида

$f(x, t) = f_i^j$, $(x, t) \in D_i^j$ ($i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$, $j = 1, 2, \dots, N_2$). Введем в $S_{N_1}^{N_2}(D)$ базис, состоящий из функций

$e_i^j(x, t) = 1$, $(x, t) \in D_i^j$ и $e_i^j(x, t) = 0$, $(x, t) \notin D_i^j$. Тогда $f(x, t) \approx \sum_{i=1}^{N_1-1} f_i^j e_i^j(x, t)$. Пусть $g_{ik} = (Ge_k^j, e_i^j)$,

$(m(x, t), e_i^j(x, t)) = m_i^j$, $(M(x, t), e_i^j(x, t)) = M_i^j$, $i = \overline{1, N_1 - 1}$, $k = \overline{1, N_1 - 1}$, $j = \overline{1, N_2}$, где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(D)$. Подставим выражение для $f(x, t)$ в (1) и скалярно умножим неравенства (5)

на $e_i^j(x, t)$ в $L_2(D)$. В результате получим задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} J_j\{f\} &= \sum_{i=1}^{N_1-1} (mes D_i^j) f_i^j \rightarrow \min, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \\ m_i^j &\leq \sum_{k=1}^{N_1-1} g_{ik} f_k^j \leq M_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \\ f_k^j &\geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Решением задачи (6) численными методами находится функция $u_i^j = \sum_{k=1}^{N_1-1} g_{ik} f_k^j$, которая является решением краевой задачи (2) с f_k^j . При этом задача (6) решается симплекс-методом [12].

2. Описание алгоритма и результатов моделирования

Для приближенного решения задачи (1)–(6) разработано программное обеспечение на языке С#. Оно позволяет представлять все необходимые входные данные: константы, коэффициенты, параметры сеток, а также функции температуры, начальные и краевые условия, в виде скриптов. Для представления результатов разработаны графические модули.

На блок-схеме (рис. 1) приведен общий алгоритм решения задачи с использованием численного метода для вычисления $J_{\min}$. Для одно-, двух- и трехмерного случая проведено большое количество вычислительных экспериментов с различными значениями входных данных.

Пример 1. Найти плотность распределения источников на отрезке. В качестве расчетной области используется отрезок $(0 \leq x \leq 1)$ с функциями температуропроводности $\chi(x) = x^2$ м²/с и компонентами скорости $v(x) = x$ м/с. Начальное и граничные условия определяются функциями $u_0(x) = 2 + x^2$ м/с, $\mu_1(t) = 2 + t^2$ м/с, $\mu_2(t) = 3 + t^2$ м/с. Ограничивающие температурные кривые задаются функциями

$m(x,t)=1+x^2+t^2$ К, $M(x,t)=4+x^2+t^2$ К, а окончание времени $T=1$ (здесь К – градус Кельвина). Расчетная сетка с числом источников $N_2 \times (N_1 - 1) = 50 \times 49$. На рис. 2 представлены результаты численного решения задачи (6). Минимум значения функционала при численном решении составляет $J_{\min} = 2982,17$ К·м/с. Представлены результаты с минимальным (синий), максимальным (красный) и приближенным (зеленый) значениями температуры.

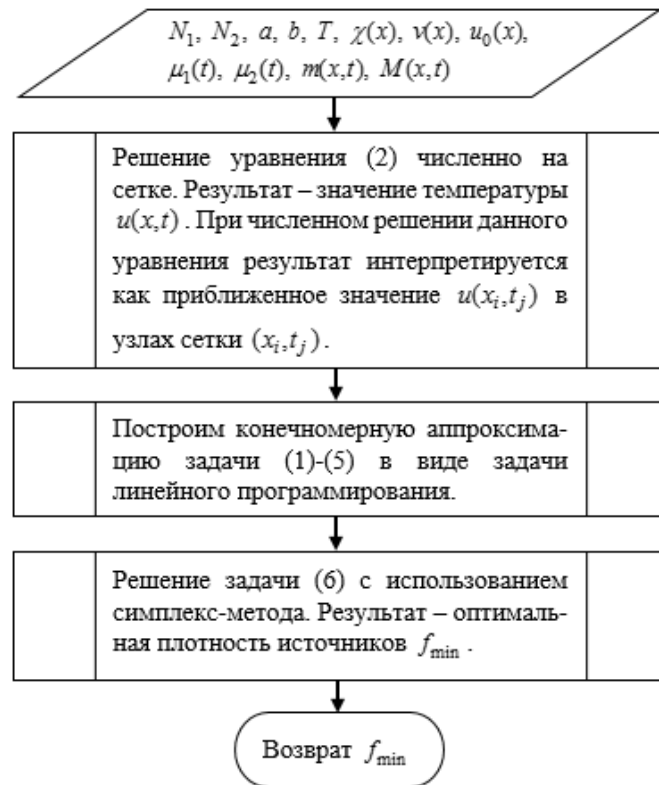


Рис. 1. Блок-схема общего алгоритма решения задачи
Fig. 1. Block diagram of the general algorithm for solving the problem

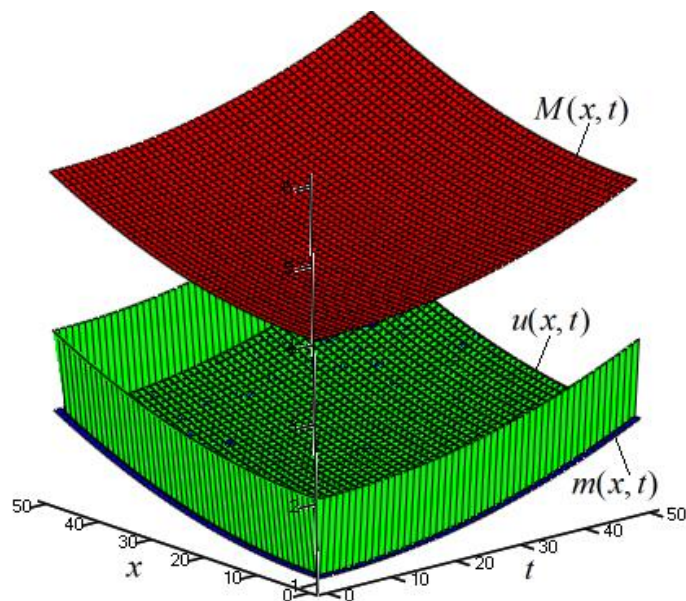


Рис. 2. Графическое отображение решения задачи (6) для примера 1
Fig. 2. Graphic display of the solution to problem (6) for example 1

На рис. 3 приведено оптимальное расположение источников тепла с минимальной мощностью. Максимальная температура показана красным цветом, решение краевой задачи – зеленым, минимальная температура – синим. Из графика видно, что решение задачи лежит в заданном пределе, т.е. решение удовлетворяет неравенству (3). Видно, что значение $u(x,t)$ практически равно минимальной температуре. Это означает, что функционал $J_j\{f\}$ достигает минимума.

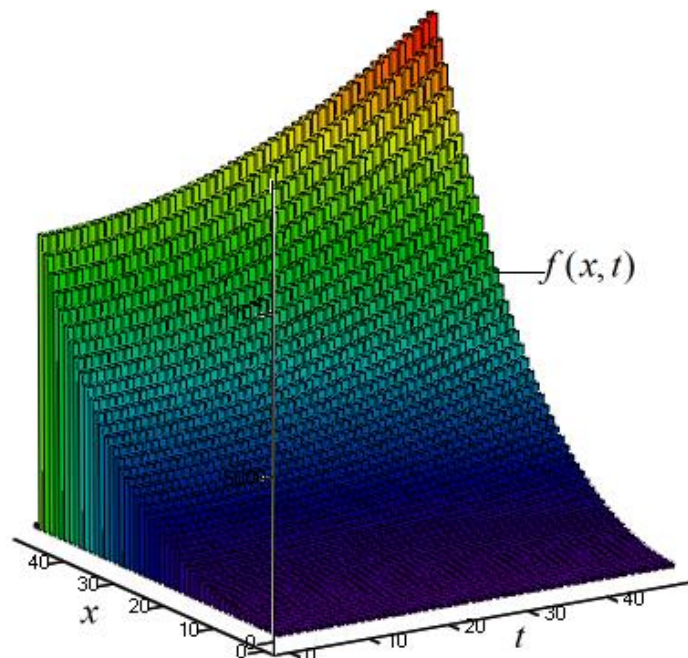


Рис. 3. Распределение оптимальной плотности источников тепла $f(x,t)$

Fig. 3. Distribution of the optimal density of heat sources $f(x,t)$

Пример 2. Определить оптимальную плотность распределения источников на стержне. В качестве расчетной области используется отрезок $(0 \leq x \leq 1)$ с функциями теплопроводности $\chi(x) = x$ м²/с и компонентами скорости $v(x) = x^2$ м/с. Начальное и граничные условия задаются функциями $u_0(x) = 4 + \sin(x)$ м/с, $\mu_1(t) = 3 + \cos(t)$ м/с, $\mu_2(t) = 3,841 + \cos(t)$ м/с.

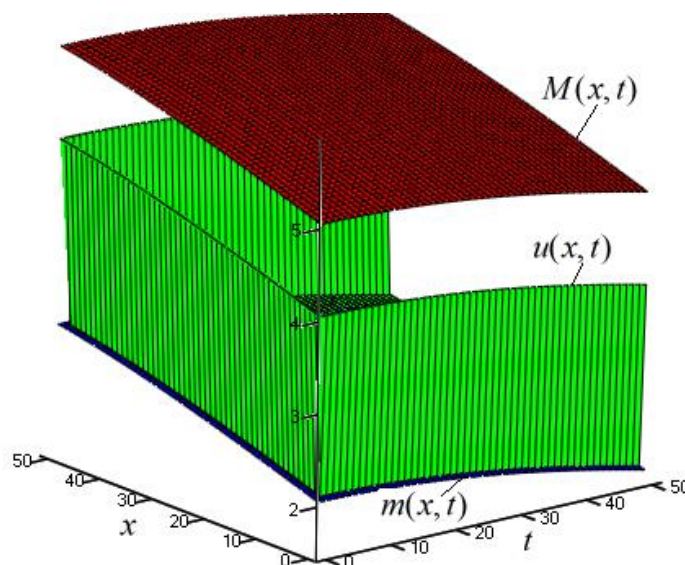


Рис. 4. Графическое отображение решения задачи (6) для примера 2

Fig. 4. Graphic display of the solution to problem (6) for example 2

Ограничивающие температурные кривые задаются функциями $m(x,t)=1+\sin(x)+\cos(t)$ К, $M(x,t)=4+\sin(x)+\cos(t)$ К, а окончание времени $T=1$. Расчетная сетка с числом источников $N_2 \times (N_1 - 1) = 50 \times 49$. На рис. 4 представлены результаты численного решения задачи (6). Минимум значения функционала равен $J_{\min} = 5600,2$ К·м/с. Показаны результаты с минимальным (синий), максимальным (красный) и приближенным (зеленый) значениями температуры.

На рис. 5 показано оптимальное расположение источников тепла с минимальной мощностью. Видно, что решение краевой задачи находится в пределах максимальных и минимальных температур. Отображение температуры цветом такое же, как на рис. 3. Решение краевой задачи и во втором примере практически соответствует пределу минимальной температуры (синий цвет). Это означает, что функционал $J_j\{f\}$ достигает минимума.

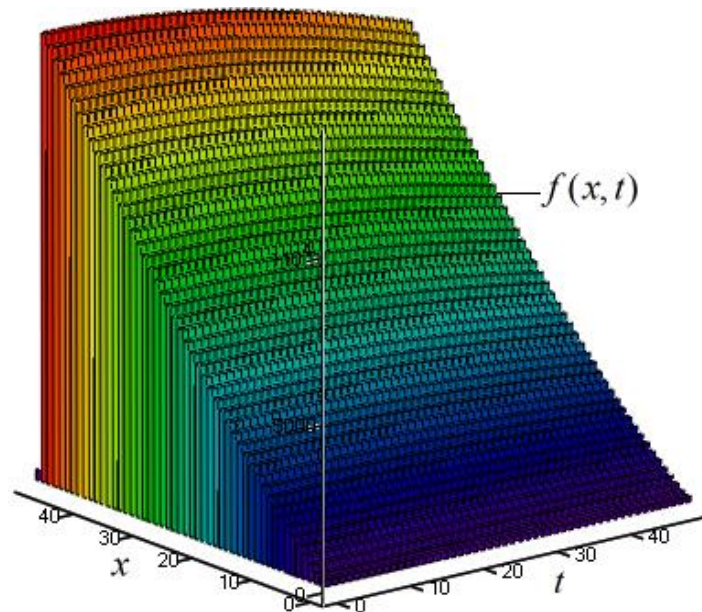


Рис. 5. Распределение оптимальной плотности источников тепла $f(x,t)$

Fig. 5. Distribution of the optimal density of heat sources $f(x,t)$

Источники тепла изображены разными цветами в зависимости от мощности. Мощность источников увеличивалась снизу вверх. Самый высокий источник мощности показан красным цветом.

Заключение

Предложены методика и алгоритм решения нестационарной задачи поддержания температуры внутри области в заданных пределах путем оптимального размещения источников тепла в стержне. Задача решена на основе численного моделирования процесса конвекции-диффузии и последовательного решения задач линейного программирования.

Результаты вычислительного эксперимента подтверждают достижение функционалом минимума и решение основной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахметзянов А.В., Кулибанов В.Н. Оптимальное размещение источников для стационарных скалярных полей // Автоматика и телемеханика. 1999. № 6. С. 50–58.
2. Мирская С.Ю., Сидельников В.И. Экономичный обогрев помещения как задача оптимального управления // Технические проблемы сервиса. 2014. № 4 (30). С. 75–78.

3. Сабденов К.О., Байтасов Т.М. Оптимальное (энергоэффективное) теплоснабжение здания в системе центрального отопления // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2015. Т. 326, № 8. С. 53–60.
4. Исламов Г.Г., Коган Ю.В. Дифференциально-разностная задача управления процессом диффузии // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 1. С. 121–126.
5. Хайиткулов Б.Х. Численное решение нестационарной задачи об оптимальном выборе источников тепла в стержне // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2020. № 5 (29). С. 141–146.
6. Khaitkulov B.Kh. Homogeneous different schemes of the problem for optimum selection of the location of heat sources in a rectangular body // Solid State Technology. 2020. V. 63, is. 4. P. 583–592.
7. Тухтасинов М.Т., Абдулимова Г.М., Хайиткулов Б.Х. Граничное управление распространением тепла в ограниченном теле // Бюллетень Института математики. 2019. № 1. С. 1–10.
8. Лебо И.Г., Симаков А.И. Решение уравнения конвекция-диффузия для моделирования теплопередачи в высокотемпературных газах и плазме // Вестник МГТУ МИРЭА. 2014. № 3 (4). С. 195–205.
9. Вабищевич П.Н., Самарский А.А. Разностные схемы для нестационарных задач конвекции-диффузии // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 2. С. 207–219.
10. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М. : ЛИБРОКОМ, 2015. 248 с.
11. Вабищевич П.Н., Васильева М.В. Явно-неявные схемы для задач конвекции-диффузии-реакции // Сибирский журнал вычислительной математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 359–369.
12. To'xtasinov M. Jarayonlar tadqiqoti. Toshkent : Barkamol Fayz media nashriyoti, 2017. 572 bet.

Поступила в редакцию 6 января 2021 г.

Khayitkulov B.Kh. (2021) FINITE-DIFFERENCE METHOD FOR SOLVING NON-STATIONARY PROBLEMS OF CONVECTION-DIFFUSION CONTROL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 57. pp. 45–52

DOI: 10.17223/19988605/57/5

The work is related to the study of the control of heat propagation on the rod. The magnitude of the power and the location of the heat sources are controlled in such a way that, at a given time interval, the temperature of the rod is within predetermined limits, and the total power of the heat sources is minimal. After approximation by the finite-difference method, this control problem passes to the linear programming problem and is solved by the M-method of linear programming.

The objective functional is linear and due to the absence of the coercively property, significant difficulties arise in establishing the existence of a continuous exact solution.

One of the distinctive features of this work is that the non-stationary problem is considered, i.e. the change in temperature depends not only on spatial variables, but also on time.

It should be noted that in this case, we consider a separate problem of optimizing the linear functional at each layer in time. Although it is easy to get similar results for a set of time layers.

By moving to the numerical implementation and solving the resulting system of linear algebraic equations, in fact, we actually have the numerical value of the Green's function in the form of a matrix. Then, by the M-method of linear programming, a numerical solution of the problem is constructed.

The description of the algorithms based and the results of numerical experiments is given. To illustrate the result, a numerical example is considered. Software has been created for carrying out numerical experiments to solve the problem.

Keywords: non-stationary problems; optimal choice; density of heat sources; convection-diffusion equations; modeling.

KHAYITKULOV Bobomurod Khayitovich (Post-graduate Student, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan).
E-mail: b.hayitkulov@mail.ru

REFERENCES

1. Akhmetzyanov, A.V. & Kulibanov, V.N. (1999) Optimal placement of sources for stationary scalar fields. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Telemechanics*. 6. pp. 50–58.
2. Mirskaya, S.Y. & Sidelnikov, V.I. (2014) Efficient heating of the room as the optimal control problem. *Tekhniko-tekhnologicheskie problemy servisa*. 4(30). pp. 75–78.
3. Sabdenov, K.O. & Baitasov, T.M. (2015) Optimal (energy efficient) heat supply to buildings in central heating system. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georесursov – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*. 326(8). pp. 53–60.

4. Islamov, G.G. & Kogan, Y.V. (2008) The difference-differential problem of control by diffusion process. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science.* 1. pp. 121–126.
5. Khaitkulov, B.Kh. (2020) Numerical solution of the problem of the optimal choice of heat sources in a homogeneous stationary medium. *Problemy vychislitel'noy i prikladnoy matematiki – Problems of Computational and Applied Mathematics.* 5(29). pp. 141–146.
6. Khaitkulov, B.Kh. (2020) Homogeneous different schemes of the problem for optimum selection of the location of heat sources in a rectangular body. *Solid State Technology.* 63(4). pp. 583–592.
7. Tukhtasinov, M., Abduolimova, G.M. & Khayitkulov, B.Kh. (2019) Boundary control of heat propagation in a bounded body. *Bulletin of the Institute of Mathematics.* 1. pp. 1–10.
8. Lebo, I.G. & Simakov, A.I. (2014) Solution of the equation convection-diffusion for modelling of heat transfer in high temperature gases and plasma. *Bulletin of MSTU MIREA.* 3(4). pp. 195–205.
9. Vabishchevich, P.N. & Samarskii, A.A. (1998) Finite-difference schemes for time-dependent diffusion-convection problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 38(2). pp. 199–210.
10. Samarskii, A.A. & Vabishchevich, P.N. (2015) *Numerical methods for solving convection-diffusion problems.* Moscow: LIBROCOM. 248 p.
11. Vabishchevich, P.N. & Vasileva, M.V. (2012) Explicit-implicit schemes for convection-diffusion-reaction problems. *Numerical Analysis and Applications.* 5(4). pp. 297–306.
12. Tukhtasinov, M. (2017) *Operations research.* Tashkent: Barkamol Fayz media nashriyoti. 572 p. (In Uzbekistan)