

## ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/57/7

А.В. Кеба, Л.А. Нежелская

### ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛА МЕЖДУ СОСЕДНИМИ СОБЫТИЯМИ В ОБОБЩЕННОМ МАР-ПОТОКЕ СОБЫТИЙ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ

Рассматривается задача оценки параметров плотности вероятности значений длительности интервала между моментами наступления событий обобщенного МАР-потока событий (Markovian Arrival Process) с произвольным числом состояний методом моментов в условиях его полной наблюдаемости. Находится явный вид плотности вероятности значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока. Формулируется алгоритм вычисления оценок параметров  $\hat{z}_1$ ,  $\hat{z}_2$ ,  $\hat{\gamma}$  плотности  $p(\tau)$ . Приводятся численные результаты расчетов оценок параметров плотности и их анализ.

**Ключевые слова:** обобщенный МАР-поток событий с произвольным числом состояний; плотность вероятности значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий; метод моментов; оценка параметров.

Рассматривается обобщенный МАР-поток событий с  $n$  состояниями, относящийся к классу дважды стохастических потоков событий [1–3]. Изучаемый поток представляет собой адекватную математическую модель реальных потоков случайных событий в телекоммуникационных системах, спутниковых сетях связи и глобальных компьютерных сетях; сопровождающий процесс исследуемого потока есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний [4–7].

При анализе дважды стохастических потоков событий выделяют два основных раздела задач, базой для которых служат моменты времени наступления событий в потоке: 1) оценивание состояний потока событий [8–11]; 2) оценивание параметров потока [12–15]. Задача, решаемая в настоящей статье, относится ко второму классу задач.

В данной работе исследуется обобщенный МАР-поток событий с произвольным числом состояний. Находится явный вид плотности вероятности значений длительности интервала между моментами наступления событий потока [16]. Приводятся численные результаты оценивания параметров плотности вероятности значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий исследуемого потока. Статья является непосредственным развитием работ [17, 18].

#### 1. Постановка задачи

Исследуется обобщенный МАР-поток событий с произвольным числом состояний (далее – поток), функционирующий в установившемся стационарном режиме. Сопровождающий случайный процесс  $\lambda(t)$  изучаемого потока представляет собой кусочно-постоянный принципиально ненаблюдаемый процесс с  $n$  состояниями:  $S_1, \dots, S_n$ . Полагается, что при  $\lambda(t) = \lambda_i$  имеет место  $i$ -е состояние ( $S_i$ ),  $i = \overline{1, n}$ , процесса  $\lambda(t)$ . При этом  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$ .

Функция распределения случайной величины – длительности пребывания процесса  $\lambda(t)$  в состоянии  $S_i$  – является экспоненциальной:  $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . В момент окончания

состояния  $S_i$  процесс  $\lambda(t)$  переходит из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  с вероятностью  $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$  с наступлением события потока или с вероятностью  $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$  без наступления события потока,  $i, j = \overline{1, n}$ .

Отметим, что для введенных вероятностей справедливо  $\sum_{j=1}^n P_0(\lambda_j|\lambda_i) + \sum_{j=1}^n P_1(\lambda_j|\lambda_i) = 1, i = \overline{1, n}$ .

**Замечание 1.** Введение вероятности  $P_0(\lambda_i|\lambda_i) \neq 0, i = \overline{1, n}$ , перехода процесса  $\lambda(t)$  из состояния  $S_i$  в состояние  $S_i$  без наступления события приводит к обобщению классического МАР-потока с произвольным числом состояний.

**Утверждение.** Для обобщенного МАР-потока событий с  $n$  состояниями процесс  $\lambda(t)$  является скрытым марковским процессом.

Блочная матрица инфинитезимальных характеристик [19] процесса  $\lambda(t)$  имеет вид  $\mathbf{D} = \|\mathbf{D}_0|\mathbf{D}_1\|$ , где

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} -\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) & \lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_0(\lambda_n|\lambda_1) \\ \lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2) & -\lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) & \dots & \lambda_2 P_0(\lambda_n|\lambda_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_0(\lambda_1|\lambda_n) & \lambda_n P_0(\lambda_2|\lambda_n) & \dots & -\lambda_n(1 - P_0(\lambda_n|\lambda_n)) \end{pmatrix}_{n \times n},$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_1(\lambda_n|\lambda_1) \\ \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2) & \dots & \lambda_2 P_1(\lambda_n|\lambda_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_1(\lambda_1|\lambda_n) & \lambda_n P_1(\lambda_2|\lambda_n) & \dots & \lambda_n P_1(\lambda_n|\lambda_n) \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

В качестве иллюстрации на рис. 1 приведена одна из реализаций процесса  $\lambda(t)$  и наблюдаемого потока, где  $\lambda_i$  – значение процесса  $\lambda(t)$  в состоянии  $S_i, i = \overline{1, n}$ ;  $t_1, t_2, \dots$  – моменты времени наступления событий в наблюдаемом потоке.

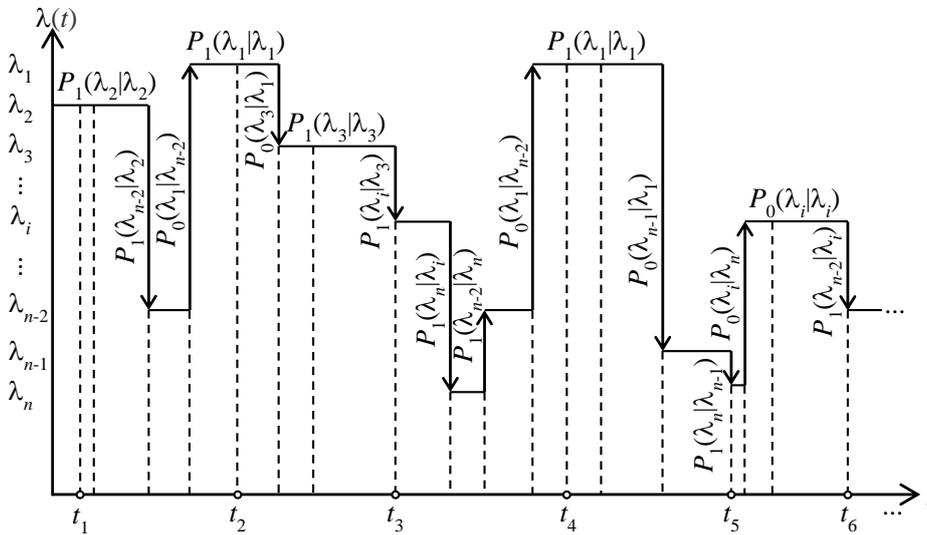


Рис. 1. Реализация обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний  
 Fig. 1. Implementation of Generalized MAP with an arbitrary number of states

Обозначим  $\tau_k = t_{k+1} - t_k, \tau_k \geq 0$ , – значение длительности  $k$ -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока  $t_k$  и  $t_{k+1}, k = 1, 2, \dots$ . Для плотности вероятности значений  $\tau_k$  вследствие функционирования потока в стационарном режиме справедливо  $p(\tau_k) = p(\tau), \tau_k \geq 0$ , при любом  $k \geq 1$ , что позволяет без ограничения общности положить момент наступления события  $t_k$  равным нулю или, что то же самое, момент наступления события есть  $\tau = 0$ .

Задача заключается в нахождении явного вида плотности распределения вероятностей длительности интервала между моментами наступления соседних событий в обобщенном МАР-потоке событий с двумя состояниями ( $n = 2$ ).

## 2. Вид плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в обобщенном МАР-потоке событий

Последовательность  $t_1, t_2, \dots$  образует вложенную по моментам времени наступления событий цепь Маркова  $\{\lambda(t_k)\}$ , поэтому плотность  $p(\tau)$  имеет вид:

$$p(\tau) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(\tau), \tau \geq 0, \quad (1)$$

где  $\pi_i(0)$  – условная стационарная вероятность того, что процесс  $\lambda(t)$  в момент времени  $\tau = 0$  находится в состоянии  $S_i$  при условии, что в момент времени  $\tau = 0$  событие потока наступило,  $i = 1, 2$ ;  $\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$ ; пусть  $p_{ij}(\tau)$  – условная вероятность того, что на интервале  $(0, \tau)$  нет событий потока и в момент времени  $\tau$  значение процесса  $\lambda(\tau) = \lambda_j$  при условии, что в момент времени  $\tau = 0$  значение процесса  $\lambda(0) = \lambda_i$ , и событие потока в момент времени  $\tau = 0$  наступило,  $i, j = 1, 2$ ;  $\tilde{p}_{ij}(\tau)$  – соответствующая вероятности  $p_{ij}(\tau)$  плотность вероятности,  $i, j = 1, 2$ .

Для введенных величин справедливы следующие леммы.

**Лемма 1.** Условные вероятности  $p_{ij}(\tau)$ ,  $i, j = 1, 2$ , в обобщенном МАР-потоке событий имеют вид:

$$\begin{aligned} p_{11}(\tau) &= \frac{1}{z_2 - z_1} \left\{ [\lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) - z_1] e^{-z_1\tau} - [\lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) - z_2] e^{-z_2\tau} \right\}, \\ p_{12}(\tau) &= \frac{\lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1)}{z_2 - z_1} \left\{ e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau} \right\}, \\ p_{22}(\tau) &= \frac{1}{z_2 - z_1} \left\{ [\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) - z_1] e^{-z_1\tau} - [\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) - z_2] e^{-z_2\tau} \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$p_{21}(\tau) = \frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2)}{z_2 - z_1} \left\{ e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau} \right\},$$

$$\text{где } z_{1,2} = \frac{\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) + \lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) \mp \sqrt{D}}{2},$$

$$D = [\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) - \lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2))]^2 + 4\lambda_1\lambda_2 P_0(\lambda_2|\lambda_1)P_0(\lambda_1|\lambda_2), \quad 0 < z_1 < z_2.$$

**Доказательство.** Пусть процесс  $\lambda(\tau)$  в момент времени  $\tau + \Delta\tau$  принимает значение  $\lambda(\tau + \Delta\tau) = \lambda_j, j = 1, 2$ . Опишем возможные ситуации на интервале  $(0, \tau + \Delta\tau)$ .

1. Процесс  $\lambda(\tau)$  в момент времени  $\tau = 0$  принимает значение  $\lambda(0) = \lambda_i, i = 1, 2$ , и на интервале  $(0, \tau)$  осуществляется переход из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j, i \neq j$ , не сопровождающийся наступлением события, вероятность этого есть  $p_{ij}(\tau), i, j = 1, 2, i \neq j$ , и на полуинтервале  $[\tau, \tau + \Delta\tau)$  состояние  $S_j$  процесса  $\lambda(\tau)$  не заканчивается с вероятностью  $e^{-\lambda_j\Delta\tau}$ ; вероятность этой ситуации равна  $e^{-\lambda_j\Delta\tau} p_{ij}(\tau), i, j = 1, 2, i \neq j$ ;

2. Процесс  $\lambda(\tau)$  в момент времени  $\tau = 0$  принимает значение  $\lambda(0) = \lambda_i, i = 1, 2$ , и на интервале  $(0, \tau)$  осуществляется переход из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j, i \neq j$ , не сопровождающийся наступлением события, вероятность этого есть  $p_{ij}(\tau), i, j = 1, 2, i \neq j$ , и на полуинтервале  $[\tau, \tau + \Delta\tau)$  состояние  $S_j$  процесса  $\lambda(\tau)$  заканчивается с вероятностью  $1 - e^{-\lambda_j\Delta\tau}$ , и процесс  $\lambda(\tau)$  переходит из состояния  $S_j$  в состояние  $S_j$  без наступления события, вероятность этого есть  $P_0(\lambda_j|\lambda_j)$ ; вероятность этой ситуации выписется в виде  $P_0(\lambda_j|\lambda_j)(1 - e^{-\lambda_j\Delta\tau})p_{ij}(\tau), i, j = 1, 2, i \neq j$ ;

3. Аналогично рассматриваются другие ситуации перехода процесса  $\lambda(\tau)$  на интервале  $(0, \tau + \Delta\tau)$ .

Учитывая всевозможные переходы процесса  $\lambda(\tau)$  на интервале  $(0, \tau + \Delta\tau)$  и проделывая необходимые преобразования, получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} p'_{11}(\tau) &= -\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1))p_{11}(\tau) + \lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2)p_{12}(\tau), \\ p'_{12}(\tau) &= \lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1)p_{11}(\tau) - \lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2))p_{12}(\tau), \\ p'_{21}(\tau) &= -\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1))p_{21}(\tau) + \lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2)p_{22}(\tau), \\ p'_{22}(\tau) &= \lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1)p_{21}(\tau) - \lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2))p_{22}(\tau) \end{aligned} \quad (3)$$

с начальными условиями  $p_{11}(0) = p_{22}(0) = 1, p_{12}(0) = p_{21}(0) = 0$ .

Решая систему уравнений (3) методом исключения или методом Эйлера, определяя при этом неизвестные постоянные из начальных условий, получим (2). Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** Плотности вероятностей  $\tilde{p}_{ij}(\tau)$ ,  $i, j = 1, 2$ , в обобщенном МАР-потоке событий определяются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{11}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)p_{11}(\tau) + \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)p_{12}(\tau), \\ \tilde{p}_{12}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)p_{11}(\tau) + \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)p_{12}(\tau), \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)p_{21}(\tau) + \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)p_{22}(\tau), \\ \tilde{p}_{22}(\tau) &= \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)p_{21}(\tau) + \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)p_{22}(\tau), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $p_{ij}(\tau)$ ,  $i, j = 1, 2$ , определены в (2).

**Доказательство.** Определим совместные вероятности  $p_{ij}(\tau)\lambda_j P_1(\lambda_d|\lambda_j)\Delta\tau + o(\Delta\tau)$  того, что без наступления события на интервале  $(0, \tau)$  процесс  $\lambda(\tau)$  на этом интервале переходит из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$ ,  $i, j = 1, 2$ , на полуинтервале  $[\tau, \tau + \Delta\tau)$  происходит окончание состояния  $S_j$  процесса  $\lambda(\tau)$ , и в момент наступления события потока процесс  $\lambda(\tau)$  переходит из состояния  $S_j$  в состояние  $S_d$ ,  $d, j = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} p_{11}(\tau)\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)\Delta\tau + o(\Delta\tau), p_{11}(\tau)\lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)\Delta\tau + o(\Delta\tau), \\ p_{12}(\tau)\lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)\Delta\tau + o(\Delta\tau), p_{12}(\tau)\lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)\Delta\tau + o(\Delta\tau), \\ p_{21}(\tau)\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)\Delta\tau + o(\Delta\tau), p_{21}(\tau)\lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)\Delta\tau + o(\Delta\tau), \\ p_{22}(\tau)\lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)\Delta\tau + o(\Delta\tau), p_{22}(\tau)\lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)\Delta\tau + o(\Delta\tau). \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что каждая из совместных вероятностей (5) представима в виде:

$$p_{ij}(\tau)\lambda_j P_1(\lambda_d|\lambda_j)\Delta\tau + o(\Delta\tau) = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \tilde{p}_{ij}^{(d)}(u)du = \tilde{p}_{ij}^{(d)}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau), \quad i, j = 1, 2, d = 1, 2,$$

где  $\tilde{p}_{ij}^{(d)}(\tau)$  – соответствующая вероятности  $p_{ij}(\tau)\lambda_j P_1(\lambda_d|\lambda_j)$  плотность вероятности,  $i, j = 1, 2, d = 1, 2$ .

Запишем последнее равенство в виде:

$$p_{ij}(\tau)\lambda_j P_1(\lambda_d|\lambda_j) + \frac{o(\Delta\tau)}{\Delta\tau} = \tilde{p}_{ij}^{(d)}(\tau) + \frac{o(\Delta\tau)}{\Delta\tau}, \quad i, j = 1, 2, d = 1, 2.$$

Устремляя здесь  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , находим

$$\tilde{p}_{ij}^{(d)}(\tau) = p_{ij}(\tau)\lambda_j P_1(\lambda_d|\lambda_j), \quad i, j = 1, 2, d = 1, 2.$$

Тогда плотность вероятности  $\tilde{p}_{ij}^{(d)}(\tau)$  того, что без наступления события потока на интервале  $(0, \tau)$  и наступления события в момент  $\tau$  процесс  $\lambda(\tau)$  переходит из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$ ,  $i, j = 1, 2$ , согласно вышеприведенному равенству запишется в виде (4). Лемма 2 доказана.

**Лемма 3.** Условные финальные вероятности  $\pi_i(0)$ ,  $i = 1, 2$ , в обобщенном МАР-потоке событий задаются выражениями

$$\pi_1(0) = \frac{A}{A+B}, \quad \pi_2(0) = \frac{B}{A+B}, \quad \pi_1(0) + \pi_2(0) = 1,$$

$$\text{где } A = P_1(\lambda_1|\lambda_2)(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) + P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_1|\lambda_1), \quad (6)$$

$$B = P_1(\lambda_2|\lambda_1)(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) + P_0(\lambda_2|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2).$$

**Доказательство.** Последовательность  $t_1, t_2, \dots$  образует вложенную по моментам времени наступления событий цепь Маркова  $\{\lambda(t_k)\}$ , поэтому для вероятностей  $\pi_i(0), i = 1, 2$ , справедливы следующие уравнения:

$$\pi_1(0) = p_{11}\pi_1(0) + p_{21}\pi_2(0), \quad (7)$$

$$\pi_2(0) = p_{12}\pi_1(0) + p_{22}\pi_2(0),$$

где вероятности  $p_{ij}$  – вероятности перехода процесса  $\lambda(\tau)$  из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j, i, j = 1, 2$ , за время, которое пройдет от момента  $\tau = 0$  до момента наступления очередного события потока.

Поскольку  $\tau$  есть произвольный момент времени,  $\tau \geq 0$ , то  $p_{ij}$  определяются в виде:

$$p_{ij} = \int_0^{\infty} \tilde{p}_{ij}(\tau) d\tau, \quad i, j = 1, 2. \quad (8)$$

Подставляя (4) в (8), находим

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{P_1(\lambda_1|\lambda_1)(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) + P_0(\lambda_2|\lambda_1)P_1(\lambda_1|\lambda_2)}{(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1))(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)}, \\ P_{12} &= \frac{P_1(\lambda_2|\lambda_1)(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) + P_0(\lambda_2|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2)}{(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1))(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)}, \\ P_{21} &= \frac{P_1(\lambda_1|\lambda_2)(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) + P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_1|\lambda_1)}{(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1))(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)}, \\ P_{22} &= \frac{P_1(\lambda_2|\lambda_2)(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) + P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1)}{(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1))(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

В результате подстановки (9) в (7) и с учетом условия нормировки  $\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$ , приходим к (6). *Лемма 3 доказана.*

Леммы 2 и 3 позволяют сформулировать следующую теорему.

**Теорема.** В обобщенном МАР-потоке плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями имеет вид:

$$\begin{aligned} p(\tau) &= \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \quad \tau \geq 0, \\ \gamma &= \frac{z_2 - \lambda_1 \pi_1(0) [P_1(\lambda_1|\lambda_1) + P_1(\lambda_2|\lambda_1)] - \lambda_2 \pi_2(0) [P_1(\lambda_1|\lambda_2) + P_1(\lambda_2|\lambda_2)]}{z_2 - z_1}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $z_i$  определены в (2),  $\pi_i(0)$  – в (6),  $i = 1, 2$ .

**Доказательство.** Подставляя в (1) сначала (4), а затем явные выражения (6) для  $\pi_i(0), i = 1, 2$ , осуществляя необходимые преобразования, приходим к (10). *Теорема доказана.*

**Замечание 2.** Полагая в (10) вероятности  $P_0(\lambda_j|\lambda_i) = 0, i, j = \overline{1, n}, P_1(\lambda_2|\lambda_1) = p, P_1(\lambda_1|\lambda_2) = q$ , приходим к виду плотности распределения для синхронного потока [18], являющегося частным случаем рассматриваемого обобщенного МАР-потока событий:

$$\begin{aligned} p(\tau) &= \gamma \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} + (1 - \gamma) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau}, \quad \tau \geq 0, \\ \gamma &= \frac{q}{p + q}, \quad \lambda_1 > \lambda_2, \quad 0 < p \leq 1, \quad 0 < q \leq 1. \end{aligned}$$

### 3. Оценка параметров методом моментов

Оценить методом моментов десять параметров обобщенного МАР-потока событий  $\lambda_i$ ,  $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$ ,  $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$ ,  $i, j = 1, 2$ , или с учетом нормировки – восемь, располагая лишь информацией о виде плотности  $p(\tau)$ , не представляется возможным [20]. Потому будем оценивать неизвестные параметры  $z_1, z_2, \gamma$  плотности  $p(\tau)$ .

**Замечание 3.** Обобщенный МАР-поток событий является коррелированным потоком, поэтому говорить о состоятельности получаемых методом моментов оценок не представляется возможным [21, 22].

Введем в рассмотрение выборку  $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$  из распределения  $p(\tau|z_1, z_2, \gamma) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}$ ,  $\tau \geq 0$ , зависящего от трех неизвестных параметров  $z_1, z_2, \gamma$ . В силу близости теоретической и эмпирической функций распределения, т.е. неограниченного сближения их значений при  $n \rightarrow \infty$ , следует ожидать близости их числовых характеристик – моментов одного и того же порядка. Теоретический начальный момент  $l$ -го порядка  $M\tau^l = \int_0^\infty \tau^l p(\tau|z_1, z_2, \gamma) d\tau$  близок к соответствующему выборочному

моменту – статистике  $C_l = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \tau_k^l$ , где  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$  – значение длительности между моментами  $t_k$  и  $t_{k+1}$  наступления событий в обобщенном МАР-потоке событий. Таким образом, для оценки параметров  $z_1, z_2, \gamma$  необходимо иметь три уравнения моментов вида:

$$M\tau^l = C_l, \quad l = \overline{1,3}. \quad (11)$$

Выполняя интегрирование левой части (11), находим

$$M\tau^l = \int_0^\infty \tau^l (\gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}) d\tau = \frac{l! \gamma}{z_1^l} + \frac{l!(1-\gamma)}{z_2^l}, \quad l = \overline{1,3}.$$

На основании вышеприведенного вида начального момента  $l$ -го порядка запишем систему трех уравнений моментов относительно оценок  $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}$  с учетом преобразований в виде:

$$\gamma z_2 + (1-\gamma) z_1 - C_1 z_1 z_2 = 0, \quad C_1(z_1 + z_2) - \frac{1}{2} C_2 z_1 z_2 = 1, \quad C_2(z_1 + z_2) - \frac{1}{3} C_3 z_1 z_2 = 2C_1. \quad (12)$$

Замены  $x_1 = z_1 + z_2, x_2 = z_1 z_2$  позволяют свести систему (12) к неоднородной системе двух линейных уравнений относительно неизвестных  $x_1, x_2$ :

$$C_1 x_1 - \frac{1}{2} C_2 x_2 = 1, \quad C_2 x_1 - \frac{1}{3} C_3 x_2 = 2C_1,$$

решение которой запишется в виде:  $x_1 = \frac{2(3C_1 C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3}, \quad x_2 = \frac{6(2C_1^2 - C_2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3}$ .

Оценки  $\hat{z}_1, \hat{z}_2$  согласно обратной теореме Виета есть корни уравнения

$$z^2 - x_1 z + x_2 = 0 \quad (13)$$

при известных значениях коэффициентов  $x_1$  и  $x_2$ .

Из (2) следует, что  $z_1 < z_2$ , тогда

$$\hat{z}_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2(3C_1 C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} \mp \sqrt{\left( \frac{2(3C_1 C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3} \right)^2 - 4 \frac{6(2C_1^2 - C_2)}{3C_2^2 - 2C_1 C_3}} \right]. \quad (14)$$

**Замечание 4.** Оценки  $\hat{z}_1, \hat{z}_2$  как действительные положительные корни (13) существуют тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$1. \left( \frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} \right)^2 - 4 \frac{6(2C_1^2 - C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} > 0; \text{ отметим, что } \hat{z}_1 \neq \hat{z}_2, \text{ и действительные положитель-$$

ные корни, получаемые при равном нулю дискриминанте, исключаются из рассмотрения;

$$2. \frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} > 0 \text{ как необходимое и достаточное условие положительности } \hat{z}_1 \text{ и, кроме то-}$$

го, необходимое, но недостаточное для  $\hat{z}_2 > 0$ ;

$$3. \frac{6(2C_1^2 - C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} > 0 \text{ как достаточное условие для } \hat{z}_2 > 0.$$

Оценка  $\hat{\gamma}$  определяется однозначно из первого уравнения системы (12):

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{z}_1(1 - C_1\hat{z}_2)}{\hat{z}_1 - \hat{z}_2}. \quad (15)$$

Итак, система (12) имеет единственное решение  $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}$ .

### 5. Результаты численных расчетов

С целью получения численных результатов разработан алгоритм вычисления оценок  $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}$  и построена имитационная модель обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний. Основой имитационной модели являются датчики псевдослучайных чисел и метод обратных функций [23]. На первом этапе расчета осуществляется имитационное моделирование обобщенного МАР-потока события с двумя состояниями с тем, чтобы получить статистики  $C_l, l = \overline{1,3}$ , на основе выборки моментов времени наступления событий  $t_1, \dots, t_m$ . На втором этапе расчета вычисляются оценки  $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}$  по формулам (14), (15).

Для каждой реализации определены оценки  $\hat{\theta}^{(v)}, v = \overline{1, N}$ , соответствующих параметров  $\theta$ , на основании которых вычислены выборочное среднее значение  $\hat{M}(\hat{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N \hat{\theta}^{(v)}$ , оценка смещения  $|\hat{M}(\hat{\theta}) - \theta|$ , где  $\theta = \{z_1, z_2, \gamma\}; \hat{\theta} = \{\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}\}$ .

**Эксперимент 1.** Фиксируются число состояний  $n = 2$ , количество опытов  $N = 100$ , значения  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$  процесса  $\lambda(t)$  и переходные вероятности, представленные в табл. 1.

Целью данного эксперимента является нахождение временного интервала установления стационарного режима функционирования обобщенного МАР-потока события с двумя состояниями, или, иными словами, установление зависимости  $\hat{M}(\hat{\theta}), |\hat{M}(\hat{\theta}) - \theta|$  от длительности времени моделирования  $T_{mod}$ , где  $T_{mod} \in \{100, 200, \dots, 1\,000\}$ . Результаты 1-го статистического эксперимента представлены в табл. 2.

Таблица 1

Значения переходных вероятностей обобщенного МАР-потока событий с двумя состояниями в рамках 1-го статистического эксперимента

|                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $P_0(\lambda_1 \lambda_1) = 0,10$ | $P_0(\lambda_1 \lambda_2) = 0,05$ |
| $P_0(\lambda_2 \lambda_1) = 0,05$ | $P_0(\lambda_2 \lambda_2) = 0,10$ |
| $P_1(\lambda_1 \lambda_1) = 0,80$ | $P_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0,05$ |
| $P_1(\lambda_2 \lambda_1) = 0,05$ | $P_1(\lambda_2 \lambda_2) = 0,80$ |

Результаты 1-го статистического эксперимента

| $T_{mod}$ | $\theta$             |                              |                      |                              |                         |                                    |
|-----------|----------------------|------------------------------|----------------------|------------------------------|-------------------------|------------------------------------|
|           | $z_1 = 0,8944$       |                              | $z_2 = 1,8055$       |                              | $\gamma = 0,5823$       |                                    |
|           | $\hat{M}(\hat{z}_1)$ | $ \hat{M}(\hat{z}_1) - z_1 $ | $\hat{M}(\hat{z}_2)$ | $ \hat{M}(\hat{z}_2) - z_2 $ | $\hat{M}(\hat{\gamma})$ | $ \hat{M}(\hat{\gamma}) - \gamma $ |
| 100       | 1,5079               | 0,6134                       | 4,2102               | 2,4047                       | 0,3737                  | 0,2085                             |
| 200       | 1,4024               | 0,5080                       | 5,8124               | 4,0069                       | 0,2741                  | 0,3081                             |
| 300       | 1,3175               | 0,4231                       | 2,9713               | 1,1658                       | 0,1935                  | 0,3887                             |
| 400       | 1,2660               | 0,3715                       | 2,8707               | 1,0652                       | 0,1521                  | 0,4301                             |
| 500       | 1,3086               | 0,4142                       | 2,7482               | 0,9427                       | 0,1414                  | 0,4408                             |
| 600       | 1,2721               | 0,3776                       | 2,7447               | 0,9391                       | 0,1406                  | 0,4416                             |
| 700       | 1,3001               | 0,4056                       | 2,7207               | 0,9152                       | 0,1301                  | 0,4522                             |
| 800       | 1,3325               | 0,4380                       | 2,7008               | 0,8953                       | 0,1267                  | 0,4555                             |
| 900       | 1,3076               | 0,4131                       | 2,6872               | 0,8817                       | 0,1116                  | 0,4707                             |
| 1000      | 1,3355               | 0,4411                       | 2,6806               | 0,8751                       | 0,1117                  | 0,4706                             |

Из анализа численных результатов, приведенных в табл. 2, следует, что имеет место смещение оценок относительно исходных значений оцениваемых параметров. Анализ представленных в табл. 2 результатов эксперимента приводит к утверждению о зависимости получаемых оценок от времени моделирования, а именно: с увеличением значения  $T_{mod}$  выборочные средние и оценки смещения стабилизируются при  $T_{mod} \geq 500$ , что объясняется концепцией метода моментов.

**Эксперимент 2.** Фиксируются число состояний  $n = 2$ , количество опытов  $N = 100$ , значение времени моделирования  $T_{mod} = 1\,000$ , значение  $\lambda_2 = 1$  процесса  $\lambda(t)$  и переходные вероятности  $P_0(\lambda_j|\lambda_i) = P_1(\lambda_j|\lambda_i) = 0,25, i, j = 1, 2$ .

В рамках эксперимента исследуются зависимости  $\hat{M}(\hat{\theta}), |\hat{M}(\hat{\theta}) - \theta|$  от изменения параметра  $\lambda_1$  процесса  $\lambda(t)$ , где  $\lambda_1 \in \{2, 3, \dots, 10\}$ . Результаты 2-го статистического эксперимента представлены в табл. 3 и на рис. 2–4.

Таблица 3

Результаты 2-го статистического эксперимента

| $\lambda_1$                        | 2      | 3      | 4      | 5      | ... | 9       | 10      |
|------------------------------------|--------|--------|--------|--------|-----|---------|---------|
| $z_1$                              | 0,6096 | 0,6339 | 0,6438 | 0,6492 | ... | 0,6576  | 0,6586  |
| $\hat{M}(\hat{z}_1)$               | 2,1788 | 1,8743 | 1,8143 | 1,3173 | ... | 0,6718  | 0,5882  |
| $ \hat{M}(\hat{z}_1) - z_1 $       | 1,5692 | 1,2403 | 1,1704 | 0,668  | ... | 0,0142  | 0,0703  |
| $z_2$                              | 1,6503 | 2,366  | 3,1061 | 3,8507 | ... | 6,8423  | 7,5913  |
| $\hat{M}(\hat{z}_2)$               | 3,6762 | 4,5476 | 5,6904 | 2,5113 | ... | 1,4661  | 1,4914  |
| $ \hat{M}(\hat{z}_2) - z_2 $       | 2,0358 | 2,1816 | 2,5843 | 1,3394 | ... | 5,3762  | 6,0999  |
| $\gamma$                           | 0,8638 | 0,7886 | 0,7538 | 0,7342 | ... | 0,7021  | 0,6983  |
| $\hat{M}(\hat{\gamma})$            | 3,7406 | 2,1419 | 1,9095 | 0,6146 | ... | -0,0821 | -0,0434 |
| $ \hat{M}(\hat{\gamma}) - \gamma $ | 2,8768 | 1,3533 | 1,1557 | 1,3489 | ... | 0,7842  | 0,7418  |

Результаты табл. 3 указывают на то, что увеличение значений параметра  $\lambda_1$  при выбранном наборе параметров влечет за собой улучшение качества оценок  $\hat{z}_1, \hat{\gamma}$  в смысле уменьшения значений оценок смещения. Последнее объясняется тем, что при увеличении разности  $\lambda_1 - \lambda_2$  состояния процесса  $\lambda(t)$  более различимы, что влечет за собой улучшение качества оценивания параметров  $z_1, \gamma$ ; соответственно, при сближении  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  состояния процесса  $\lambda(t)$  менее различимы, поэтому оценивание параметров  $z_1, \gamma$  в этом случае хуже.

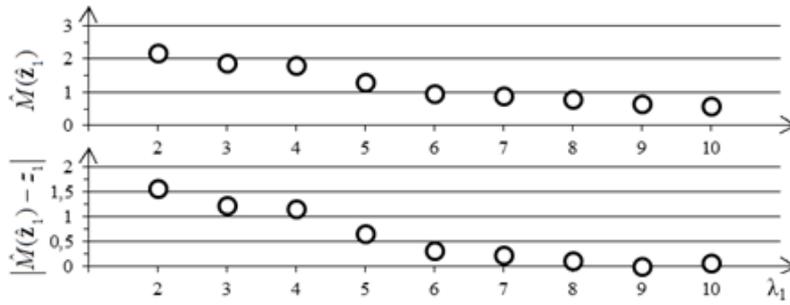


Рис. 2. График зависимости  $\hat{M}(z_1)$ ,  $|\hat{M}(z_1) - z_1|$  от значения  $\lambda_1$

Fig. 2.  $\hat{M}(z_1)$ ,  $|\hat{M}(z_1) - z_1|$  as functions of  $\lambda_1$

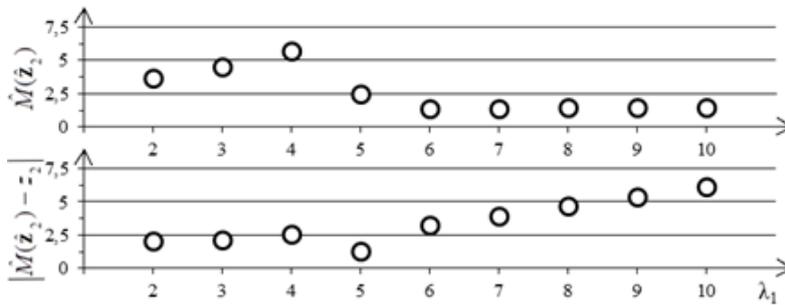


Рис. 3. График зависимости  $\hat{M}(z_2)$ ,  $|\hat{M}(z_2) - z_2|$  от значения  $\lambda_1$

Fig. 3.  $\hat{M}(z_2)$ ,  $|\hat{M}(z_2) - z_2|$  as functions of  $\lambda_1$

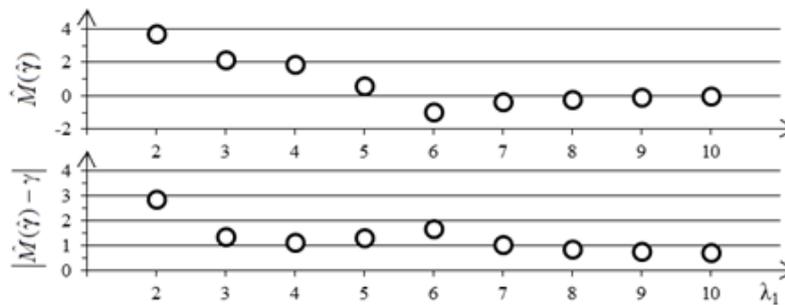


Рис. 4. График зависимости  $\hat{M}(\hat{\gamma})$ ,  $|\hat{M}(\hat{\gamma}) - \gamma|$  от значения  $\lambda_1$

Fig. 4.  $\hat{M}(\hat{\gamma})$ ,  $|\hat{M}(\hat{\gamma}) - \gamma|$  as functions of  $\lambda_1$

Как следует из табл. 3, параметр  $z_2$  оценивается хуже, чем параметры  $z_1$  и  $\gamma$  в смысле значений оценок смещения. Увеличение параметра  $\lambda_1$  влечет за собой частую смену состояния  $S_1$  процесса  $\lambda(t)$  с наступлением события либо без наступления события. В свою очередь, частая смена состояния  $S_1$  ведет к тому, что состояния  $S_1$  и  $S_2$  становятся менее различимыми и оценивание параметра  $z_2$  ухудшается.

### Заключение

В данной статье приведен явный вид плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями обобщенного МАР-потока событий с  $n$  состояниями (10). Методом моментов найдены оценки параметров плотности  $p(\tau)$ :  $\hat{z}_1$ ,  $\hat{z}_2$  вида (14),  $\hat{\gamma}$  вида (15). Алгоритм вычисления оценок реализован на языке программирования С# в среде Visual Studio 2015. Проведены статистические эксперименты, указывающие на работоспособность алгоритма оценки параметров  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $\gamma$ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, is. 4. P. 923–930.
2. Cox D.R., Miller H.D. The theory of stochastic processes // New York : Wiley. 1965. 398 p.
3. Grandell J. Doubly stochastic Poisson processes // Berlin Heidelberg : Springer-Verlag. 1976. 240 p.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
5. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
6. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
7. Вишневецкий В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применения в телекоммуникационных сетях. М.: Техносфера, 2018. 564 с.
8. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2(19). С. 88–101.
9. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
10. Горцев А.М., Леонова М.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1(10). С. 33–47.
11. Nezhelskaya L., Tumashkina D. Optimal state estimation of semi-synchronous event of flow of the second order under its complete observability // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 912. P. 93–105.
12. Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А. Оценка параметров мультипликативных распределений сетей массового обслуживания // Проблемы передачи информации. 2009. Т. 45, № 4. С. 115–120.
13. Okamura H., Dohi T., Trivedi K.S. Markovian arrival process parameter estimation with group data // IEEE/ACM Transactions on Networking (TON). 2009. 17(4). P. 1326–1339.
14. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events // Telecommunications and Radio Engineering. 1993. V. 48, No. 10. P. 40–45.
15. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable // Telecommunications and Radio Engineering. 1992. V. 47, No. 1. P. 33–38.
16. Nezhelskaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 141–151.
17. Кеба А.В., Нежелская Л.А. Статистические эксперименты на имитационной модели обобщенного MAP-потока событий с произвольным числом состояний // Труды Томского государственного университета. Сер. физико-математическая. Томск: Изд. Дом ТГУ, 2018. Т. 302. С. 157–164.
18. Нежелская Л.А., Кеба А.В. Оптимальная оценка состояний обобщенного MAP-потока событий с произвольным числом состояний // Автоматика и телемеханика. 2021. №5. С. 68–85.
19. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
20. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. №S1-1. С. 24–29.
21. Шуленин В.П. Математическая статистика. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. Ч. 1. 540 с.
22. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель: ГТУ им. Ф. Скорина, 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.
23. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.

Поступила в редакцию 20 июля 2021 г.

Keba A.V., Nezhel'skaya L.A. (2021) ESTIMATION OF THE PROBABILITY DENSITY PARAMETERS OF THE INTERVAL DURATION BETWEEN EVENTS IN GENERALIZED MAP WITH TWO STATES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 57. pp. 62–73

DOI: 10.17223/19988605/57/7

The paper deals with a generalized MAP with an arbitrary number of states under conditions of full observability. The accompanying random process  $\lambda(t)$  of the flow is an unobservable piecewise constant process with  $n$  states:  $S_1, \dots, S_n$ . The process  $\lambda(t)$  is unobservable in principle, the moments of occurrence of events  $t_1, t_2, \dots$  are observable.

We denote by  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $\tau_k \geq 0$ , the value of the  $k$ -th interval duration between events of the observed flow  $t_k$  and  $t_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Due to the fact that the flow operates in a stationary mode, then for the probability density of values  $\tau_k$  it is true  $p(\tau_k) = p(\tau)$ ,  $\tau_k \geq 0$ ,

for any  $k \geq 1$ . This allows, without loss of generality, to set the moment of occurrence of the event  $t_k$  equal to zero or, which is the same, the moment the event occurs is  $\tau = 0$ .

It is necessary to use the method of moments to estimate the parameters  $z_1, z_2$ , and  $\gamma$  of the probability density distribution of the interval duration between events in generalized MAP with two states (we assume  $n = 2$ ) at an arbitrary time instant  $\tau$ , provided that the realization of the time intervals between events  $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$  is known of the observed flow on the interval  $(0, \tau)$ , where  $\tau = 0$  is the moment of occurrence of the event,  $\tau$  is the end of observation,  $m$  is the number of observed events over the time interval  $(0, \tau)$ . It is assumed that  $\lambda(t)$  is stationary.

In the paper we present an explicit form of the probability density parameters of the interval duration between events in generalized MAP with  $n$  states. The method of moments is used to find estimates of the density parameters  $p(\tau)$ :  $z_1, z_2$ , and  $\gamma$  at an arbitrary time moment  $\tau$ . The algorithm was implemented by C # programming language in the Visual Studio 2015. Statistical experiments were conducted on the simulation model of the flow in order to establish the quality of the results obtained by evaluating the parameters of the probability distribution. The numerical results of these experiments are given in the paper and illustrate an acceptable estimate that does not contradict the physical interpretation.

Keywords: generalized MAP with an arbitrary number of states; probability density of the values of the interval duration between the moments of the events occurrence; method of moments; estimation of the parameters.

*KEBA Anastasia Vladimirovna* (PhD Student, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).  
E-mail: mir.na.mig7@mail.ru

*NEZHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna* (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Applied Mathematics Department, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).  
E-mail: ludne@mail.ru

## REFERENCES

1. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
2. Cox, D.R. & Miller, H.D. (1965) *The Theory of Stochastic Processes*. New York: Wiley.
3. Grandell, J. (1976) *Doubly Stochastic Poisson Processes*. BerlinHeidelberg: Springer-Verlag.
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. CH. 1 [On the Equivalent Substitutions Method for Computing Fragments of Communication Networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
5. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. CH. 2 [On the Equivalent Substitutions Method for Computing Fragments of Communication Networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
6. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
7. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primeneniye v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic systems with correlated flows. Theory and application in telecommunication networks]. Moscow: Tekhnosfera.
8. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88–101.
9. Nezhelskaya, L.A. (2000) Optimal state estimation of the semi-synchronous event flow under conditions of its partial observability. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95–98.
10. Gortsev, A.M. & Leonova, M.A. (2010). The optimal evaluation of states of the integrated asynchronous doubly stochastic event flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 33–47.
11. Nezhelskaya, L. & Tumashkina, D. (2018) Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability. *Communications in Computer and Information Science*. 912. pp. 93–105. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5\_8
12. Tsitsiashvili, G.Sh. & Osipova, M.A. (2009) Parameter estimation for product-form distributions of queueing networks. *Problemy peredachi informatsii – Problems of Information Transmission*. 45(4). pp. 115–120.
13. Okamura, H., Dohi, T. & Trivedi, K.S. (2009) Markovian arrival process parameter estimation with group data. *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*. 17(4). pp. 1326–1339. DOI: 10.1109/TNET.2008.2008750
14. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1993) Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events. *Telecommunications and Radio Engineering*. 48(10). pp. 40–45.

15. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1992) Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable. *Telecommunications and Radio Engineering*. 47(1). pp. 33–38.
16. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4\_12
17. Keba, A.V. & Nezhelskaya, L.A. (2018) Statisticheskie eksperimenty na imitatsionnoy modeli obobshchennogo MAP-potoka sobyitij s proizvolnym chislom sostoyaniy [Statistical experiments on a simulation model of generalized MAP with an arbitrary number of states] In: Smyrin, I.S. (ed.) *Matematicheskie i programmnoe obespechenie informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and software informational, technical and economic systems]. Tomsk: Tomsk State University. pp. 157–164.
18. Nezhelskaya, L.A. & Keba, A.V. (2021) Optimal state estimation of a generalized MAP event flow with an arbitrary number of states observability. *Automation and Remote Control*. 82(5). pp. 798–811. DOI: 10.31857/S0005231021050056
19. Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (2006) *Teoriya veroyatnostey i sluchaynykh protsessov* [Theory of Probabilities and Random Processes]. Tomsk: NTL.
20. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Estimation of parameters of a synchronous doubly stochastic flow by the method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S1-1. pp. 24–29.
21. Shulenin, V.P. (2012) *Matematicheskaya statistika* [Math Statistics]. Tomsk: NTL.
22. Malinkovsky, Yu.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Theory of Probability and Mathematical Statistics]. Gomel: GTU.
23. Sobol, I.M. (1973) *Chislennyye metody Monte-Karlo* [Numerical Methods of Monte Carlo]. Moscow: Nauka.