

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 511

DOI 10.17223/20710410/55/1

ПРИМЕНЕНИЕ МУЛЬТИГАРМОНИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ СИНТЕЗА ЗАМКНУТЫХ ФОРМ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФАКТОРИАЛ-ПРОИЗВОДЯЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

И. В. Стаценко

*Московский энергетический институт, г. Москва, Россия***E-mail:** iwsta@yandex.ru

Представлены инструментарий и метод приведения к замкнутому виду последовательностей целых чисел, относящихся к классу факториал-производящих рекурсий. Определены признаки и свойства модифицированной факториал-производящей рекурсии одной и двух переменных. Наиболее известной факториал-производящей рекурсией двух переменных является последовательность чисел Стирлинга первого рода. Для синтеза аналитической модели рекурсии применяются модифицированные гипергармонические числа. Выявлены преимущества данных чисел для построения замкнутых форм факториал-производящих рекурсий. Синтезирована неполная замкнутая форма последовательности чисел Стирлинга первого рода.

Ключевые слова: замкнутые формы рекуррентных уравнений с нелинейными коэффициентами, интерполяция рекуррентных последовательностей, производящие функции рекурсий, факториал-производящие последовательности, гипергармонические числа, мультигармонические числа, числа Стирлинга первого рода.

APPLICATION OF MULTIHARMONIC NUMBERS FOR THE SYNTHESIS OF CLOSED FORMS OF PARAMETRICALLY MODIFIED FACTORIAL GENERATING SEQUENCES

I. V. Statsenko

Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russia

In this paper, using numbers of a special kind $H_n^{(r)} = \sum_{m=r}^n \dots \sum_{l=3}^{s-1} \sum_{j=2}^{l-1} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{ijl \dots m}$, $r, n \in \mathbb{N}$, called multiharmonic numbers, incomplete closed forms of two fundamental sequences of integers given as a recursion are synthesized. The first recursion $u_{k+1}^{(m)} = (k+m)[2u_k^{(m)} - (k-1)u_{k-1}^{(m)}]$, $u_k \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}^+$, under the conditions $m=0$, $u_0^{(0)} = u_1^{(0)} = 1$ is factorial-generating: $u_k^{(0)} = k!$. The second recursion defines a sequence of Stirling numbers of the first kind $s(n, k)$, $n, k \in \mathbb{Z}^+$, and by the property $|s(n, 1)| = (n-1)!$ is also factorial-generating. The resulting closed form for the first recursion is $u_k^{(m)} = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i A_{k+m-1}^{k-i} m^{i-1}$, $k, m \in \mathbb{N}$,

$A_n^m = n!/(n-m)!$, $C_n^m = n!/(n-m)!m!$. The closed form for the second recursion is $s(n, k) = H_{n-1}^{(k-1)}(n-1)!(-1)^{n+k}$, $k, n \in \mathbb{N}$. Closed forms are not complete, since they are not used for cases: $m = k = 0$, $n = k = 0$.

Keywords: *closed forms of recurrent equations with nonlinear coefficients, interpolation of recurrent sequences, generating recursion functions, factorial-generating sequences, hyperharmonic numbers, multiharmonic numbers, Stirling numbers of the first kind.*

Введение

Вопросам применения различного инструментария для анализа свойств рекуррентных последовательностей посвящено большое количество публикаций, в частности можно отметить [1–6]. Как правило, анализ возможности представления неизвестной рекуррентной последовательности в замкнутой форме (в виде формулы для общего члена последовательности) начинается с построения производящей функции, что по целому ряду причин не всегда приводит к положительному результату. Далее применяются различные инструменты анализа последовательностей: интерполяция, экстраполяция, полиномы Бернулли, Case-средства, специальные числа.

Для «замыкания» рекурсий с постоянными коэффициентами разработан и успешно применяется математический аппарат производящих функций. В то же время уникальность задач, связанных с анализом целочисленных рекуррентных последовательностей с нелинейными коэффициентами, в большинстве случаев требует разработки индивидуальных методик приведения данных рекурсий к замкнутым формам. Актуальность таких задач связана, в первую очередь, с необходимостью приведения к замкнутому виду фундаментальных рекуррентных целочисленных последовательностей. Необходимо отметить, что в настоящее время не известны приемлемые для практического использования замкнутые формы последовательностей чисел Бернулли и чисел Стирлинга первого рода.

В данной работе для анализа целочисленной последовательности применяется аппарат модифицированных гипергармонических чисел [7–10]. На основе обобщения взаимосвязей в факториал-производящих рекурсиях получен вариант замкнутой формы для последовательности чисел Стирлинга первого рода.

1. Постановка задачи

Рассмотрим рекуррентное уравнение вида

$$u_{k+1}^{(m)} = (k+m) \left[2u_k^{(m)} - (k-1)u_{k-1}^{(m)} \right], \quad u_k \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где $k \in \mathbb{N}$; $m \in \mathbb{Z}^+$. Данное уравнение задаёт рекурсию квазифибоначчиевого типа, так как связывает очередной член последовательности с двумя предыдущими на множестве целых чисел, но при этом коэффициенты рекурсии — нелинейные функции, зависящие от k . Наличие нелинейных коэффициентов существенно усложняет поиск замкнутых форм. Величина m выступает в качестве параметра, и свойство данной рекурсии при $m = 0$ определяет основное её название.

Рекурсия (1) имеет следующие замечательные свойства:

1. При $m = 0$ и $u_0^{(0)} = u_1^{(0)} = 1$ имеем замкнутую форму в виде

$$u_k^{(0)} = k!. \quad (2)$$

По этому свойству при $m = 0$ рекурсию (1) будем называть факториал-производящей. При других значениях параметра m данную рекурсию будем называть параметрически модифицированной факториал-производящей.

Доказательство проведём непосредственной подстановкой замкнутой формы (2) в рекурсию: $(k+1)! = k[2k! - (k-1)(k-1)!]$. Отсюда получаем $(k+1)! \equiv (k+1)!$.

2. Для любых $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}^+$ значения формулы (1) не зависят от $u_0^{(m)}$.

3. Если начальные условия для рекурсии (1) ввести в виде $u_0^{(m)} \in \mathbb{Z}$, $u_1^{(m)} = 1$, а соответствующую замкнутую форму обозначить $u_k^{(m,1)}$, то для других вариантов выбора первого члена последовательности $u_1^{(m,2)} = 2$, $u_1^{(m,3)} = 3$, $\dots$, $u_1^{(m,s)} = s$ получим

$$u_k^{(m,s)} = s \cdot u_k^{(m,1)},$$

где $u_k^{(m,s)}$ — замкнутые формы рекурсии (1) с $u_1^{(m)} = s$, $s \in \mathbb{N}$.

4. Рекурсия (1) формирует нечетную функцию $u_k^{(m,s)} = -u_k^{(m,-s)}$ относительно величины s .

5. $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k^{(m,s)} = \infty$.

В таблице представлены некоторые варианты формирования рекурсии $u_k^{(m,1)}$.

k	1	2	3	4	5	6	7
$u_k^{(0,1)}$	1	2	6	24	120	720	5040
$u_k^{(1,1)}$	1	4	21	136	1045	9276	93289
$u_k^{(2,1)}$	1	6	44	380	3768	42112	523072
$u_k^{(3,1)}$	1	8	75	804	9681	129168	1889379

Поставим задачу найти замкнутую форму $u_k^{(m,1)}$ при $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}^+$ для рекурсии (1). Учитывая свойства 1–3, замкнутая форма для случая $m = 0$ известна, а замкнутые формы для $u_k^{(m,s)}$, $s = 2, 3, \dots$, вычисляются с использованием $u_k^{(m,1)}$.

С целью упрощения обозначений все замкнутые формы будем искать далее для $u_1^{(m,1)} = 1$ и обозначать в виде $u_k^{(m)}$.

2. Анализ возможности применения производящей функции

На базе (1) составим уравнение для получения производящей функции в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_{k+1}^{(m)}}{k+m} z^k = \left[2 \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(m)} z^k - (k-1) \sum_{k=1}^{\infty} u_{k-1}^{(m)} z^k \right]. \quad (3)$$

Пусть

$$F_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(m)} z^k, \quad F_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) u_{k-1}^{(m)} z^k, \quad F_3(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_{k+1}^{(m)} z^k}{k+m}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

В новых обозначениях уравнение (3) приобретает вид

$$F_3(z) = 2F_1(z) - F_2(z). \quad (4)$$

Функцию $F_1(z)$ будем полагать производящей для последовательности $u_1^{(m)}$, $u_2^{(m)}$, $\dots$. Выразим функции $F_2(z)$ и $F_3(z)$ через $F_1(z)$.

Можно получить следующие соотношения для $F_2(z)$ и $F_3(z)$:

$$F_2 = F_1' z^2; \quad (5)$$

$$F_3 = \frac{\int F_1 z^{m-2} dz}{z^m} - \frac{u_1^{(m)}}{m}. \quad (6)$$

Подставив (5) и (6) в (4), получим уравнение

$$\frac{\int F_1 z^{m-2} dz}{z^m} - \frac{u_1^{(m)}}{m} = 2F_1 - F_1' z^2.$$

Отсюда получаем

$$F_1'' z^4 + F_1'[(m+2)z^3 - 2z^2] + F_1(1 - 2mz) = u_1^{(m)} z. \quad (7)$$

Решением данного уравнения является искомая производящая функция $F_1(z)$, $z \in \mathbb{R}$, коэффициенты разложения которой в ряд Тейлора представляют решение исходного рекуррентного уравнения (1).

Недостатком данного метода в применении производящей функции является отсутствие решения дифференциального уравнения (7) в элементарных функциях, начиная со случая $m = 0$, когда уравнение приобретает наиболее простой вид

$$F_1'' z^4 + 2F_1'(z^3 - z^2) + F_1 = u_1^{(0)} z.$$

3. Применение мультигармонических чисел для синтеза замкнутых форм факториал-производящих рекурсий одной переменной

В работах [7–10] представлены свойства и асимптотика гипергармонических чисел и модифицированных гипергармонических (мультигармонических) чисел. На их основе могут быть сформированы целочисленные последовательности, имеющие свойства рекурсий (1).

Процедура синтеза замкнутых форм с использованием мультигармонических чисел включает в себя три этапа:

- 1) подбор подходящей модели;
- 2) настройка модели (интерполяция);
- 3) проверка модели на удовлетворение условиям рекурсии (1).

Первый этап — подбор подходящей модели — процедура творческая и трудно формализуемая. Основным критерием здесь является удовлетворение модели скорости роста исходной последовательности (1) для фиксированного значения параметра m . В результате такого анализа подобрана модель следующего вида:

$$G_{m,k} = k!(k+m-1) \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+j+1} m^{i-m+1} P_{m-2}(i) k^{j-1} \frac{H_i^{(j-1)}}{(i+1)!}. \quad (8)$$

Здесь $k \in \mathbb{N}$; $m = 2, 3, \dots$, $G_{m,k}$ — модель замкнутой формы рекурсии $u_k^{(m)}$; $P_{m-2}(n)$ — многочлен с целыми коэффициентами $(m-2)$ -й степени от целого аргумента n ;

$$H_k^{(r)} = \sum_{n=r}^k \frac{H_{n-1}^{(r-1)}}{n} \quad (9)$$

— k -е мультигармоническое число r -го порядка; $r \in \mathbb{N}$; $H_n^{(0)} = 1$ для всех n ;

$$H_n^{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}; \quad H_n^{(2)} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{ij}; \quad H_n^{(3)} = \sum_{l=3}^n \sum_{j=2}^{l-1} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{ijl};$$

$H_n^{(r)} = 0$ при $n < r$.

Второй этап — подбор коэффициентов многочлена (интерполяция) на $(m-2)$ первых узлах (точках последовательности).

Третий этап — проверка настроенной модели на удовлетворение условиям рекурсии (1). В случае неудовлетворения необходимо вернуться к первому этапу синтеза — отказу от модели (8) либо её модернизации модели.

В предложенной схеме отсутствует случай $m = 1$. Рассмотрим его отдельно, используя модель (8) и многочлен $P_0(n) \equiv 1$:

$$G_{1,k} = k! \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+j+1} k^{j-1} \frac{H_i^{(j-1)}}{i!}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Модель (10) можно представить в виде

$$G_{1,k} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!} \sum_{j=1}^k (-1)^{i+j+1} k^{j-1} H_i^{(j-1)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда с использованием свойства мультигармонических чисел

$$\sum_{j=1}^k (-1)^{i+j+1} k^{j-1} H_i^{(j-1)} = C_{k-1}^i = \frac{(k-1)!}{i!(k-i-1)!}$$

получим

$$G_{1,k} = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i A_k^{k-i} = u_k^{(1)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

где $A_n^m = n!/(n-m)!$.

Второй этап (настройку модели) в данном случае пропускаем, так как используется многочлен $P_0(n) \equiv 1$.

Третий этап предусматривает проверку на удовлетворение модели (11) свойствам рекурсии (1) для случая $m = 1$, т. е.

$$G_{1,k+1} = (k+1)[2G_{1,k} - (k-1)G_{1,k-1}]. \quad (12)$$

Проверим эти условия:

$$G_{1,k} = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i A_k^{k-i} = u_k^{(1)}, \quad k \in \mathbb{N}; \quad (13)$$

$$\frac{G_{1,k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k C_k^i A_{k+1}^{k+1-i} = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i A_k^{k-i} + 1; \quad (14)$$

$$G_{1,k-1}(k-1) = (k-1) \sum_{i=0}^{k-2} C_{k-2}^i A_{k-2}^{k-i-2} = \sum_{i=0}^{k-2} \frac{((k-1)!)^2}{(i!)^2} \frac{1}{(k-i-2)!}; \quad (15)$$

$$G_{1,k-1}(k-1) = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i A_{k-1}^i (k-i-1), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

После подстановки (13)–(16) в рекурсию (12) получим

$$\sum_{i=0}^{k-1} C_k^i A_k^{k-i} \frac{(i^2 + i - k)}{k^2} \equiv -1. \quad (17)$$

Для доказательства (17) преобразуем его левую часть:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{k-1} (C_k^i A_k^{k-i} \frac{i^2}{k^2} - C_k^i A_k^{k-i} \frac{(k-i)}{k^2}) = \sum_{i=1}^{k-1} C_{k-1}^{i-1} A_{k-1}^{k-i} - \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i A_{k-1}^{k-i-1} = \\ & = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i-1} A_{k-1}^{k-i} - \sum_{i=0}^{k-2} C_{k-1}^i A_{k-1}^{k-i-1} - 1 = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i-1} A_{k-1}^{k-i} - \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i-1} A_{k-1}^{k-i} - 1 \equiv -1. \end{aligned}$$

Таким образом, функция вида (13) является замкнутой формой для факториал-производящей рекурсии для случая $m = 1$.

Дальнейшие исследования на основе модели (8) показали следующие результаты:

$$\begin{aligned} u_k^{(2)} &= (k+1)! \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+j+1} 2^{i-1} k^{j-1} \frac{H_i^{(j-1)}}{(i+1)!} = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i A_{k+1}^{k-i} 2^{i-1}, \quad k \in \mathbb{N}; \\ u_k^{(3)} &= k!(k+2) \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+j+1} 3^{i-2} [i+3] k^{j-1} \frac{H_i^{(j-1)}}{(i+1)!} = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i A_{k+2}^{k-i} 3^{i-1}, \quad k \in \mathbb{N}; \\ u_k^{(4)} &= k!(k+3) \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+j+1} 4^{i-3} [i^2 + 7i + 16] k^{j-1} \frac{H_i^{(j-1)}}{(i+1)!} = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i A_{k+3}^{k-i} 4^{i-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Обобщение всех замкнутых форм представлено формулой

$$u_k^{(m)} = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i A_{k+m-1}^{k-i} m^{i-1}, \quad k, m \in \mathbb{N}. \quad (18)$$

По аналогии с методикой, показанной для случая $m = 1$, можно доказать, что модель (18) отвечает условиям рекурсии (1).

В замкнутых формах $u_k^{(3)}$ и $u_k^{(4)}$ результаты второго этапа синтеза (интерполяция) представлены многочленами в квадратных скобках.

4. Применение мультигармонических чисел для синтеза замкнутых форм факториал-производящих рекурсий двух переменных

Рассмотрим рекурсию следующего вида:

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1)s(n-1, k), \quad (19)$$

$n \in \mathbb{Z}^+; k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1; s(0, 0) = 1; s(n, 0) = 0$ для всех $n > 0; s(0, k) = 0$ для всех $k > 0$.

Данная рекурсия моделирует числа Стирлинга первого рода и принадлежит к числу факториал-производящих благодаря свойству

$$|s(n, 1)| = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Если переменную k в данной последовательности объявить вспомогательной (параметром), то в целом рекурсия $s(n, k)$ принадлежит к классу параметрически модифицированных факториал-производящих целочисленных последовательностей.

Применяя методику п. 3 для анализа данной последовательности, получим следующее тождество:

$$s(n, k) \equiv H_{n-1}^{(k-1)}(n-1)!(-1)^{n+k}, \quad (20)$$

$n \in \mathbb{N}; k = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

Учитывая, что мультигармонические числа (МГЧ) можно представить в двух формах — в замкнутой форме и в виде рекурсии, первый вид представления позволяет получить замкнутую форму для чисел Стирлинга первого рода. При этом форма будет неполной, так как в тождестве (36) отсутствуют случаи $k = 0$ и $n = 0$.

Доказательство (20) проведём непосредственной подстановкой (20) в (19) с использованием следующего свойства МГЧ [10]:

$$H_{n-1}^{(k-1)} = H_{n-2}^{(k-1)} + \frac{1}{n-1} H_{n-2}^{(k-2)}, \quad (21)$$

$n = 2, 3, \dots; k = 2, 3, \dots$ Имеем

$$s(n, k) = H_{n-1}^{(k-1)}(n-1)!(-1)^{n+k}, \quad (22)$$

$$s(n-1, k-1) = H_{n-2}^{(k-2)}(n-2)!(-1)^{n+k-2}, \quad (23)$$

$$(n-1)s(n-1, k) = H_{n-2}^{(k-1)}(n-1)!(-1)^{n+k-1}. \quad (24)$$

После подстановки (22)–(24) в (19) получим

$$H_{n-1}^{(k-1)}(n-1) = H_{n-2}^{(k-2)} + H_{n-2}^{(k-1)}(n-1).$$

Далее используем свойство МГЧ (21):

$$H_{n-2}^{(k-1)}(n-1) + H_{n-2}^{(k-2)} \equiv H_{n-2}^{(k-2)} + H_{n-2}^{(k-1)}(n-1).$$

Тождество (20) доказано.

Перечислим некоторые недостатки замкнутой формы (20):

1) при использовании МГЧ в виде

$$H_n^{(0)} \equiv 1, \quad H_n^{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}, \quad H_n^{(2)} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{ij}, \quad H_n^{(3)} = \sum_{l=3}^n \sum_{j=2}^{l-1} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{ijl},$$

$$H_n^{(r)} = \sum_{m=r}^n \dots \sum_{l=3}^{s-1} \sum_{j=2}^{l-1} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{ijl \dots m}$$

формула имеет громоздкий вид за счёт использования r знаков суммирования, что предполагает её применение при небольших значениях r ;

2) при использовании МГЧ в виде

$$H_k^{(r)} = \sum_{n=r}^k \frac{H_{n-1}^{(r-1)}}{n}$$

формула (20) имеет вид рекурсии (незамкнутая форма);

3) формула не применяется при $n = 0$ и $k = 0$.

Заключение

Таким образом, предложен новый инструментарий синтеза замкнутых форм факториал-производящих рекурсий — мультигармонические числа. Представлен метод применения МГЧ в указанных целях.

Необходимо отметить существенный недостаток метода — трудно формализуемый этап подбора исходной модели для дальнейшей интерполяции.

Синтезированы замкнутые формы факториал-производящих рекурсий одной и двух переменных. Актуальность проведённых исследований определяется одновременно фундаментальным и прикладным характером представленных рекурсий.

Очевидным недостатком полученной замкнутой формы чисел Стирлинга первого рода является её неполнота и громоздкость при увеличении значений одной из двух переменных. В то же время достаточно простой для алгоритмической реализации и дальнейшего анализа вид позволяет рассматривать данную замкнутую форму в качестве базовой для описания чисел Стирлинга не только первого, но и второго рода, а также связанных с ними специальных чисел. Необходимо отметить, что алгоритмическая простота представленной замкнутой формы чисел Стирлинга первого рода, по всей видимости, не позволяет считать её абсолютно новой. С другой стороны, представление данной замкнутой формы в рамках предварительно введённых специальных чисел (МГЧ) позволяет считать её описательно новой.

Непосредственный практический выход данной работы связан с ускорением работы алгоритмов решения некоторых частных вычислительных задач, а также возможностью дополнения онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей OEIS — базы замкнутых форм известных фундаментальных и параметрически связанных с ними целочисленных рекурсий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Варин В. П.* Факториальное преобразование некоторых классических комбинаторных последовательностей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 11. С. 1747–1770.
2. *Варин В. П.* Об интерполяции некоторых рекуррентных последовательностей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 6. С. 913–925.
3. *Варин В. П.* Комбинаторные преобразования последовательностей как ускорители сходимости степенных рядов // Теоретические основы конструирования численных алгоритмов решения задач математической физики. Тез. докл. XXII Всерос. конф., посвящённой памяти К. И. Бабенко (Абрау-Дюрсо, 3–8 сентября, 2018). М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2018. С. 29.
4. *Геут К. Л., Титов С. С.* О понижении порядка линейных рекуррентных уравнений с постоянными коэффициентами // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2017. № 10. С. 12–13.
5. *Геут К. Л., Титов С. С.* О простых числах и рекуррентных соотношениях // Актуальные проблемы прикладной математики и механики. Тез. докл. VII Всерос. конф., посвящённой памяти академика А. Ф. Сидорова (Абрау-Дюрсо, 15–21 сентября, 2014). Екатеринбург: УрО РАН, 2014. С. 20–21.
6. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998.
7. *Benjamin A. T., Gaebler D., and Gaebler R.* A combinatorial approach to hyperharmonic numbers // Electr. J. Combinat. Number Theory. 2003. V. 3.
8. *Conway D. H. and Guy R. K.* The Book of Numbers. N.Y.: Springer Verlag, 1996.

9. *Mező I.* Some inequalities for hyperharmonic series // Adv. in Inequalities for Special Functions. Nova Science Publ. House, 2006. P. 121–125.
10. *Стаценко И. В.* Расширение свойств мультигармонических чисел // Точная наука. 2021. № 107. С. 2–4.

REFERENCES

1. *Varin V. P.* Faktorial'noe preobrazovanie nekotorykh klassicheskikh kombinatornykh posledovatel'nostey [Factorial transformation of some classical combinatorial sequences]. Zhurnal Vychislitel'noy Matematiki i Matematicheskoy Fiziki, 2018, vol. 58, no. 11, pp. 1747–1770. (in Russian)
2. *Varin V. P.* Ob interpol'yatsii nekotorykh rekurrentnykh posledovatel'nostey [On the interpolation of some recurrent sequences]. Zhurnal Vychislitel'noy Matematiki i Matematicheskoy Fiziki, 2021, vol. 61, no. 6, pp. 913–925. (in Russian)
3. *Varin V. P.* Kombinatornye preobrazovaniya posledovatel'nostey kak uskoriteli skhodimosti stepennykh ryadov [Combinatorial transformations of sequences as accelerators of convergence of power series]. Teoreticheskie Osnovy Konstruirovaniya Chislennykh Algoritmov Resheniya Zadach Matematicheskoy Fiziki. Proc. XXII All-Rus. Conf. dedicated to the memory of K. I. Babenko (Abrau-Durso, 3–8 September, 2018), Moscow, IPM Publ., 2018, p. 29. (in Russian)
4. *Geut K. L. and Titov S. S.* O ponizhenii poryadka lineynykh rekurrentnykh uravneniy s postoyannymi koeffitsientami [On reducing the order of linear recurrence equations with constant coefficients]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika. Prilozhenie, 2017, no. 10, pp. 12–13. (in Russian)
5. *Geut K. L. and Titov S. S.* O prostykh chislakh i rekurrentnykh sootnosheniyakh [On prime numbers and recurrent relations]. Aktual'nye Problemy Prikladnoy Matematiki i Mekhaniki. Proc. VII All-Rus. Conf. dedicated to the memory of A. F. Sidorov (Abrau-Durso, 15–21 September, 2014). Yekaterinburg, UB RAS, 2014, pp. 20–21. (in Russian)
6. *Graham R., Knuth D., and Patashnik O.* Concrete Mathematics. Addison-Wesley Publ., 1989.
7. *Benjamin A., Gebler D., and Gebler R.* A combinatorial approach to hyperharmonic numbers. lectr. J. Combinat. Number Theory, 2013, vol. 3.
8. *Conway D. H. and Guy R. K.* The Book of Numbers. N.Y., Springer Verlag, 1996.
9. *Mező I.* Some inequalities for hyperharmonic series. Adv. in Inequalities for Special Functions. Nova Science Publ. House, 2006, pp. 121–125.
10. *Statsenko I. V.* Rasshireniye svoystv mul'tigarmonicheskikh chisel [Extension of the properties of multiharmonic numbers]. Tochnaya Nauka, 2021, no. 107, pp. 2–4. (in Russian)