МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАДЁЖНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

УДК 519.718.7

DOI 10.17223/20710410/55/4

КОРОТКИЕ ЕДИНИЧНЫЕ ПРОВЕРЯЮЩИЕ ТЕСТЫ ДЛЯ СХЕМ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ[1]

К. А. Попков

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

E-mail: kirill-formulist@mail.ru

Доказано, что любую неконстантную булеву функцию от n переменных можно реализовать неизбыточной схемой из функциональных элементов в базисе $\{\&, \oplus, \neg\}$, допускающей при $n \geqslant 3$ единичный проверяющий тест длины не более $6n - 10$ относительно произвольных неисправностей элементов.

Ключевые слова: *схема из функциональных элементов, булева функция, неисправность, единичный проверяющий тест.*

SHORT SINGLE FAULT DETECTION TESTS FOR LOGIC NETWORKS UNDER ARBITRARY FAULTS OF GATES

K. A. Popkov

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia

It was proved that one can implement any non-constant Boolean function in n variables by an irredundant logic network in the basis $\{\&, \oplus, \neg\}$, allowing, when $n \geqslant 3$, a single fault detection test with length not more than $6n - 10$ relative to arbitrary faults of gates.

Keywords: *logic network, Boolean function, fault, single fault detection test.*

Введение

Рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию электрических схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [1]; этот подход также применим к тестированию схем из функциональных элементов (СФЭ; [2–4]). Пусть имеется СФЭ S с одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Представим, что под воздействием некоторого источника неисправностей один из элементов схемы S может перейти в неисправное состояние. В результате данная схема вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект № 19-71-30004.

говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$ называются *функциями неисправности* схемы S. *Единичным проверяющим тестом* (ЕПТ) для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ данной схемы в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального ЕПТ длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Единичные проверяющие тесты обычно рассматривают для *неизбыточных схем* [4, с. 110–111], т. е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой.

Любое множество булевых функций будем называть *базисом*.

Ранее в качестве неисправностей функциональных элементов традиционно рассматривались константные либо инверсные неисправности на входах и/или выходах элементов. Константная неисправность на входе (выходе) функционального элемента означает, что значение на этом его входе (выходе) становится равно некоторой булевой константе. Неисправности на входах и/или выходах элементов называются однотипными константными типа p, если эта константа одна и та же для каждого неисправного входа/выхода элемента и равна p, и произвольными константными, если эта константа может быть равна как 0, так и 1 для каждого неисправного входа/выхода элемента независимо от неисправностей других входов/выходов элементов. Инверсная неисправность на входе (выходе) функционального элемента означает, что значение на этом входе (выходе) меняется на противоположное по сравнению со случаем, когда данный элемент исправен.

Основные результаты, касающиеся ЕПТ для схем из функциональных элементов при указанных неисправностях, получены в работах [5–20]; более подробный обзор см. в работе автора [21]. Отметим, что в [5–7, 11, 13–20] установлены константные верхние оценки минимально возможных длин ЕПТ при реализации произвольных булевых функций от n переменных неизбыточными СФЭ в различных базисах при различных неисправностях элементов.

В настоящей работе, так же как и в [21], будем рассматривать произвольные неисправности функциональных элементов: допустим, что каждый неисправный элемент E вместо исходной приписанной ему булевой функции $\varphi_E(\tilde{x}^m)$ реализует произвольную другую булеву функцию $\varphi'_E(\tilde{x}^m)$ (от своих входов). Тогда элемент E может находиться в любом (неизменном в ходе тестирования) из $2^{2^m} - 1$ неисправных состояний, характеризующихся функцией $\varphi'_E(\tilde{x}^m)$. Например, в случае константной неисправности типа p (в случае инверсной неисправности) на выходе этого элемента имеем $\varphi'_E \equiv p$ (соответственно $\varphi'_E = \overline{\varphi}_E$), а в случае константной неисправности типа p (инверсной неисправности) на входе элемента E, отвечающем переменной x_1, имеем $\varphi'_E(\tilde{x}^m) = \varphi_E(p, x_2, \ldots, x_m)$ (соответственно $\varphi'_E(\tilde{x}^m) = \varphi_E(\overline{x}_1, x_2, \ldots, x_m)$).

В соответствии с [22, с. 105] будем говорить, что СФЭ *содержит k фиктивных входных переменных и реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$*, если данная схема содержит k входных переменных, отличных от переменных $x_1, \ldots, x_n$, и реализует булеву функцию, не зависящую существенно от этих k переменных и равную функции $f(\tilde{x}^n)$. Будем также предполагать, что все наборы из любого ЕПТ для такой схемы имеют длину $n+k$ (по общему числу её входных переменных).

В [21] установлено, что любую неконстантную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной СФЭ в базисе $\{\&, \oplus, \neg\}$, содержащей одну фиктивную входную переменную и допускающей ЕПТ длины не более $2n+3$.

Введём обозначения $\tilde{0}^l = \underbrace{0, \ldots, 0}_{l}$, $\tilde{1}^l = \underbrace{1, \ldots, 1}_{l}$, где $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (в случае $l = 0$ они обозначают пустую строку: например, $(\tilde{0}^n, \tilde{1}^0) = (\tilde{0}^n)$), а также

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \overline{x}, & \text{если } \sigma = 0, \end{cases}$$

где $x \in \{0, 1\}$.

Две различные неисправности в произвольной СФЭ назовём *равносильными*, если соответствующие им функции неисправности равны друг другу.

Вместо «вход схемы S, отвечающий переменной x_i» для краткости будем писать «вход «x_i» схемы S».

1. Формулировка основной теоремы

Рассмотрим базис $B = \{\&, \oplus, \neg\}$. Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $x\&y$ (вида $x \oplus y$, $\overline{x}$) от своих входов, будем называть *конъюнктором* (соответственно *сумматором*, *инвертором*). Вход любого конъюнктора или сумматора, отвечающий переменной x, будем считать *левым*, а другой вход — *правым*.

Теорема 1. Любую неконстантную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной СФЭ в базисе B, допускающей при $n \geqslant 3$ ЕПТ длины не более $6n - 10$.

Замечание 1. В отличие от основной теоремы работы [21], фигурирующая в формулировке теоремы 1 СФЭ не содержит фиктивных входных переменных.

Замечание 2. Константные булевы функции нельзя реализовать неизбыточными СФЭ в базисе B. Действительно, константная неисправность типа α на выходе выходного элемента любой схемы в базисе B, реализующей функцию $f(\tilde{x}^n) \equiv \alpha$, где $\alpha \in \{0, 1\}$, приводит к функции неисправности $g(\tilde{x}^n) \equiv \alpha$.

Для доказательства теоремы 1 требуется ввести следующее понятие.

1.1. Регулярные булевы функции

Рассмотрим произвольную булеву функцию $f_n(\tilde{x}^n)$, где $n \geqslant 3$. Её можно представить, причём единственным образом, в виде

$$f_n(\tilde{x}^n) = x_n f_{n-1}(\tilde{x}^{n-1}) \oplus f'_{n-1}(\tilde{x}^{n-1}),$$

где f_{n-1} и f'_{n-1} — булевы функции от переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Действительно, подставив в последнее равенство вместо x_n поочерёдно 0 и 1, получим, что

$$f'_{n-1}(\tilde{x}^{n-1}) = f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \tag{1}$$

и $f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) = f_{n-1}(\tilde{x}^{n-1}) \oplus f'_{n-1}(\tilde{x}^{n-1}) = f_{n-1}(\tilde{x}^{n-1}) \oplus f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$, откуда

$$f_{n-1}(\tilde{x}^{n-1}) = f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \oplus f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0). \tag{2}$$

Аналогично функцию $f_{n-1}(\tilde{x}^{n-1})$ в случае $n - 1 \geqslant 3$ можно единственным образом представить в виде

$$f_{n-1}(\tilde{x}^{n-1}) = x_{n-1} f_{n-2}(\tilde{x}^{n-2}) \oplus f'_{n-2}(\tilde{x}^{n-2}),$$

и вообще, для любого $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, если уже определена функция $f_{i+1}(\tilde{x}^{i+1})$, то её можно единственным образом представить в виде

$$f_{i+1}(\tilde{x}^{i+1}) = x_{i+1} f_i(\tilde{x}^i) \oplus f'_i(\tilde{x}^i),$$

где $f_i(\tilde{x}^i)$ и $f'_i(\tilde{x}^i)$ — булевы функции. Указанным образом по функции $f_n(\tilde{x}^n)$ однозначно определяются булевы функции $f_i(\tilde{x}^i)$ и $f'_i(\tilde{x}^i)$ для каждого $i = 2, \ldots, n-1$.

Назовём булеву функцию $f_n(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 3$, *регулярной*, если для любого $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ выполнено хотя бы одно из трёх условий: а) функция $f_i(\tilde{x}^i)$ является константной; б) функция $f'_i(\tilde{x}^i)$ является константной; в) функция $f_i(\tilde{x}^i)$ отлична от каждой из функций $f'_i(\tilde{x}^i), \overline{f'_i}(\tilde{x}^i)$.

Пример 1. Никакая функция $f_n(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 3$, представимая в виде

$$f_n(\tilde{x}^n) = \overline{x}_n g(\tilde{x}^{n-1}) \oplus c,$$

где g — произвольная неконстантная булева функция от переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$ и $c \in \{0, 1\}$, не является регулярной. Действительно,

$$f_n(\tilde{x}^n) = (x_n \oplus 1) g(\tilde{x}^{n-1}) \oplus c = x_n g(\tilde{x}^{n-1}) \oplus (g(\tilde{x}^{n-1}) \oplus c),$$

поэтому $f_{n-1}(\tilde{x}^{n-1}) = g(\tilde{x}^{n-1})$ и $f'_{n-1}(\tilde{x}^{n-1}) = g(\tilde{x}^{n-1}) \oplus c$, а тогда

$$f'_{n-1}(\tilde{x}^{n-1}) = \begin{cases} f_{n-1}(\tilde{x}^{n-1}), & \text{если } c = 0, \\ \overline{f_{n-1}}(\tilde{x}^{n-1}), & \text{если } c = 1. \end{cases}$$

Пример 2. Функция $f_4(\tilde{x}^4) = x_1\overline{x}_3 \oplus \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4$ является регулярной. Действительно, пользуясь (1) и (2), получаем

$$\begin{gathered} f'_3(\tilde{x}^3) = x_1\overline{x}_3 \oplus \overline{x}_1\overline{x}_2, \\ f_3(\tilde{x}^3) = x_1\overline{x}_3 \oplus (x_1\overline{x}_3 \oplus \overline{x}_1\overline{x}_2) = \overline{x}_1\overline{x}_2, \\ f'_2(\tilde{x}^2) = \overline{x}_1\overline{x}_2, \\ f_2(\tilde{x}^2) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \oplus \overline{x}_1\overline{x}_2 \equiv 0, \end{gathered}$$

откуда следует, что функция f_3 отлична от функций f'_3 и $\overline{f'_3}$, а функция f_2 является константной.

Для удобства будем считать, что все булевы функции, формально зависящие от одной или двух переменных, являются регулярными. Легко видеть, что если булева функция $f_n(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 3$, регулярна, то и все функции $f_i(\tilde{x}^i)$, где $i = 2, \ldots, n-1$, регулярны.

1.2. Доказательство основной теоремы

Справедливость теоремы 1 очевидным образом вытекает из следующих трёх лемм.

Лемма 1. Любую неконстантную регулярную булеву функцию $f_n(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной СФЭ в базисе B, допускающей при $n \geqslant 3$ ЕПТ длины не более $6n - 10$.

Лемма 2. Для любой неконстантной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ существуют такие $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \{0, 1\}$, что функция $f(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$ регулярна и отлична от констант.

Лемма 3. Если неконстантная булева функция $f(\tilde{x}^n)$ и числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \{0, 1\}$ таковы, что функцию $f(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$ можно реализовать неизбыточной СФЭ в базисе B, допускающей при $n \geqslant 3$ ЕПТ длины не более $6n - 10$, то функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать СФЭ с теми же свойствами.

Сформулируем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 4. Любую неконстантную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной СФЭ в базисе B, содержащей одну фиктивную входную переменную и допускающей ЕПТ T длины не более $2n+4$, подмножеством которого является множество $T^0_{n+1} \cup \{\tilde{\sigma}\}$, где $T^0_{n+1} = \big\{(\tilde{0}^r, \tilde{1}^{n+1-r}), (\tilde{1}^s, 0, \tilde{1}^{n-s}) : r \in \{0, \dots, n+1\}, s \in \{1, \dots, n\}\big\}$, а $\tilde{\sigma}$ — некоторый такой двоичный $(n+1)$-разрядный набор, что его $(n+1)$-я компонента равна 0 и n-разрядный набор $\tilde{\sigma}'$, получающийся из набора $\tilde{\sigma}$ удалением $(n+1)$-й компоненты, удовлетворяет условию $f(\tilde{\sigma}') \neq f(\tilde{0}^n)$.

Доказательство основано на доказательстве теоремы 1 работы [21], которое разбивается на два случая. В случае 1 доказано [22, с. 94–95], что функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной СФЭ в базисе B, содержащей одну фиктивную входную переменную и допускающей ЕПТ T^0_{n+1} (длины $2n+2$). Функция f отлична от константы $f(\tilde{0}^n)$, поэтому существует такой двоичный n-разрядный набор $\tilde{\sigma}'$, что $f(\tilde{\sigma}') \neq f(\tilde{0}^n)$. Пусть $\tilde{\sigma}$ — набор, получающийся из набора $\tilde{\sigma}'$ добавлением $(n+1)$-й компоненты, равной 0. Тогда утверждение леммы 4 справедливо при $T = T^0_{n+1} \cup \{\tilde{\sigma}\}$.

В случае 2 идёт ссылка (см. [22, с. 95]) на лемму 2 работы [21]. В формулировке этой леммы (см. [22, с. 89]) фигурирует двоичный $(n+1)$-разрядный набор $\tilde{\sigma}_{K_1}$, определяемый в [22, с. 88]. Из его определения и соотношения [21, (3)] следует, что $(n+1)$-я компонента набора $\tilde{\sigma}_{K_1}$ равна 0. Обозначим через $\tilde{\sigma}'_{K_1}$ набор, получающийся из набора $\tilde{\sigma}_{K_1}$ удалением $(n+1)$-й компоненты. Тогда из определения данных наборов и соотношения [21, (2)] вытекает, что

$$f(\tilde{0}^n) = K_1(\tilde{0}^n) \oplus \ldots \oplus K_m(\tilde{0}^n) \oplus c = \underbrace{0 \oplus 0}_{m} \oplus c = c,$$

$$f(\tilde{\sigma}'_{K_1}) = K_1(\tilde{\sigma}'_{K_1}) \oplus K_2(\tilde{\sigma}'_{K_1}) \oplus \ldots \oplus K_m(\tilde{\sigma}'_{K_1}) \oplus c = 1 \oplus \underbrace{0 \oplus 0}_{m-1} \oplus c = \overline{c},$$

поэтому $f(\tilde{\sigma}'_{K_1}) \neq f(\tilde{0}^n)$. В таком случае утверждение леммы 4 следует из [21, лемма 2] при $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_{K_1}$. ■

Доказательство леммы 1. Пусть сначала $n = 1$. Тогда $f_1(x_1) = x_1$ или $f_1(x_1) = \overline{x}_1$. В первом случае функцию f_1 можно реализовать СФЭ, не содержащей функциональных элементов, а во втором — содержащей один инвертор. Множество функций неисправности первой схемы пусто, а список возможных неисправностей второй схемы ограничивается константной неисправностью типа 0, константной неисправностью типа 1 и инверсной неисправностью на выходе инвертора, при которых на выходе схемы вместо «правильной» функции $\overline{x}_1$ реализуются функции соответственно 0, 1, x_1. Поэтому обе рассматриваемые схемы неизбыточны, что и требовалось доказать.

Далее будем считать, что $n \geqslant 2$. Докажем индукцией по n более сильное утверждение: любую неконстантную регулярную булеву функцию $f_n(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной СФЭ S_n в базисе B, допускающей ЕПТ T_n, подмножеством которого является множество $T^0_n = \big\{(\tilde{0}^r, \tilde{1}^{n-r}), (\tilde{1}^s, 0, \tilde{1}^{n-s-1}) : r \in \{0, \dots, n\};\ s \in \{1, \dots, n-1\}\big\}$, причём $|T_n| \leqslant 6n - 10$ при $n \geqslant 3$.

Б а з а и н д у к ц и и: $n = 2$. Надо доказать, что любую неконстантную булеву функцию $f_2(x_1, x_2)$ можно реализовать неизбыточной СФЭ в базисе B, допускающей ЕПТ $T_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. Любая СФЭ, реализующая функцию $f_2(x_1, x_2)$, допускает тривиальный ЕПТ T_2, поэтому достаточно установить, что эту функцию можно реализовать неизбыточной СФЭ S_2 в базисе B. Заметим, что $f_2(x_1, x_2) \in$ $\in \{x_1, x_2, \overline{x}_1, \overline{x}_2, (x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2})^c, (x_1 \oplus x_2)^c : \sigma_1, \sigma_2, c \in \{0, 1\}\}$. В случае $f_2(x_1, x_2) \in \{x_1, x_2\}$

в качестве S_2 можно взять схему, не содержащую функциональных элементов, а в случае $f_2(x_1,x_2) \in \{x_1,x_2\}$ — схему, состоящую из одного инвертора.

Пусть $f_2(x_1,x_2) = (x_1 \oplus x_2)^c$, где $c \in \{0,1\}$. Реализуем функцию f_2 схемой S_2, состоящей из одного сумматора E, на входы которого подаются переменные x_1 и x_2, и — в случае $c=0$ — одного инвертора, вход которого соединён с выходом этого сумматора. При произвольной неисправности элемента E, при которой он реализует некоторую булеву функцию $\varphi'_E(x_1,x_2)$, отличную от $\varphi_E(x_1,x_2) = x_1 \oplus x_2$, на выходе схемы S_2, очевидно, возникнет функция $(\varphi'_E(x_1,x_2))^c$, отличная от $(x_1 \oplus x_2)^c$; в случае же $c=0$ и неисправности инвертора на выходе схемы S_2 возникнет одна из функций $0, 1, x_1 \oplus x_2$, отличная от функции $f_2(x_1,x_2) = \overline{x_1 \oplus x_2}$. Таким образом, схема S_2 неизбыточна.

Пусть, наконец, $f_2(x_1,x_2) = (x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2})^c$, где $\sigma_1,\sigma_2,c \in \{0,1\}$. Сначала для каждого такого $j \in \{1,2\}$, что $\sigma_j = 0$, реализуем функцию $x_j^{\sigma_j} = \overline{x}_j$ с использованием одного инвертора I_j, на вход которого подаётся переменная x_j. Далее реализуем функцию f_2 схемой S_2, содержащей один конъюнктор E, на входы которого подаются функции $x_1^{\sigma_1}$ и $x_2^{\sigma_2}$, и — в случае $c=0$ — инвертор I, вход которого соединён с выходом этого конъюнктора; каждая функция $x_j^{\sigma_j}$, $j=1,2$, берётся со входа x_j схемы в случае $\sigma_j = 1$ и с выхода инвертора I_j в случае $\sigma_j = 0$. Легко видеть, что любая константная либо инверсная неисправность на выходе инвертора I_j (при наличии этого инвертора) равносильна такой же неисправности на входе конъюнктора E, отвечающего переменной x_j, а других неисправностей у инвертора быть не может. В случае произвольной неисправности элемента E, при которой он реализует некоторую булеву функцию $\varphi'_E(x_1,x_2)$ (от своих входов), отличную от $\varphi_E(x_1,x_2) = x_1 \& x_2$, на выходе схемы S_2 возникнет функция $(\varphi'_E(x_1^{\sigma_1},x_2^{\sigma_2}))^c$, отличная от $(\varphi_E(x_1^{\sigma_1},x_2^{\sigma_2}))^c = (x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2})^c$; в случае же $c=0$ и неисправности инвертора на выходе схемы S_2 возникнет одна из функций $0, 1, x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2}$, отличная от функции $f_2(x_1,x_2) = \overline{x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2}}$. Таким образом, схема S_2 неизбыточна. База индукции доказана.

Предположение и шаг индукции: пусть требуемое утверждение доказано для $n=t$, где $t \geqslant 2$; докажем его для $n=t+1$. Надо доказать, что любую неконстантную регулярную булеву функцию $f_{t+1}(\tilde{x}^{t+1})$ можно реализовать неизбыточной СФЭ S_{t+1} в базисе B, допускающей ЕПТ T_{t+1} длины не более $6t-4$, подмножеством которого является множество $T^0_{t+1} = \{(\tilde{0}^r, \tilde{1}^{t+1-r}), (\tilde{1}^s, 0, \tilde{1}^{t-s}) : r \in \{0,\ldots,t+1\}; s \in \in \{1,\ldots,t\}\}$. Функцию f_{t+1} можно единственным образом представить в виде

$$f_{t+1}(\tilde{x}^{t+1}) = x_{t+1} f_t(\tilde{x}^t) \oplus f'_t(\tilde{x}^t), \tag{3}$$

где f_t и f'_t — булевы функции. Введём обозначение

$$a = \begin{cases} 1, & \text{если обе функции } f_t, f'_t \text{ неконстантные и либо } f_t \leqslant f'_t, \text{ либо } f_t \leqslant \overline{f'_t}, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

(неравенство $h_1 \leqslant h_2$, где $h_1(\tilde{x}^t)$, $h_2(\tilde{x}^t)$ — булевы функции, означает, что $h_1(\tilde{\sigma}) \leqslant h_2(\tilde{\sigma})$ для любого двоичного t-разрядного набора $\tilde{\sigma}$). Перепишем равенство (3) в виде

$$f_{t+1}(\tilde{x}^{t+1}) = x_{t+1}(f_t(\tilde{x}^t) \oplus a) \oplus f'_t(\tilde{x}^t) \oplus a x_{t+1}. \tag{4}$$

Построим СФЭ S_{t+1} в базисе B, реализующую при отсутствии в ней неисправностей функцию $f_{t+1}(\tilde{x}^{t+1})$, в соответствии с представлением (4) (рис. 1). Из регулярности функции $f_{t+1}(\tilde{x}^{t+1})$ следует регулярность функции $f_t(\tilde{x}^t)$. Если последняя функция отлична от констант, то её по предположению индукции можно реализовать неизбыточной СФЭ S_t в базисе B, допускающей ЕПТ T_t, подмножеством которого является множество $T_t^0 = \{(\tilde{0}^r, \tilde{1}^{t-r}), (\tilde{1}^s, 0, \tilde{1}^{t-s-1}) : r \in \{0, \ldots, t\};\ s \in \{1, \ldots, t-1\}\}$, причём

$$|T_t| \leqslant 6t - 10 \tag{5}$$

при $t \geqslant 3$. В случае $a = 0$ соединим вход «x_{t+1}» схемы S_{t+1} и выход схемы S_t с левым и правым входами конъюнктора $E_{t+1}^{\&}$ соответственно; в случае $a = 1$ соединим выход схемы S_t с входом инвертора I_{t+1} и далее соединим вход «x_{t+1}» схемы S_{t+1} и выход инвертора I_{t+1} с левым и правым входами конъюнктора $E_{t+1}^{\&}$ соответственно. Обозначим построенную к настоящему моменту схему, выход которой совпадает с выходом элемента $E_{t+1}^{\&}$, через S_{t+1}^1. Будем считать, что в случае $f_t \equiv 1$ подсхема S_t схемы S_{t+1} пуста, а подсхема S_{t+1}^1 не содержит функциональных элементов и её выход совпадает со входом «x_{t+1}» схемы S_{t+1}; в случае $f_t \equiv 0$ подсхемы S_t и S_{t+1}^1 пусты (отметим, что в каждом из этих случаев $a = 0$). Легко видеть, что во всех перечисленных в данном абзаце случаях на выходе подсхемы S_{t+1}^1, если она непуста, реализуется функция $x_{t+1}(f_t(\tilde{x}^t) \oplus a)$.

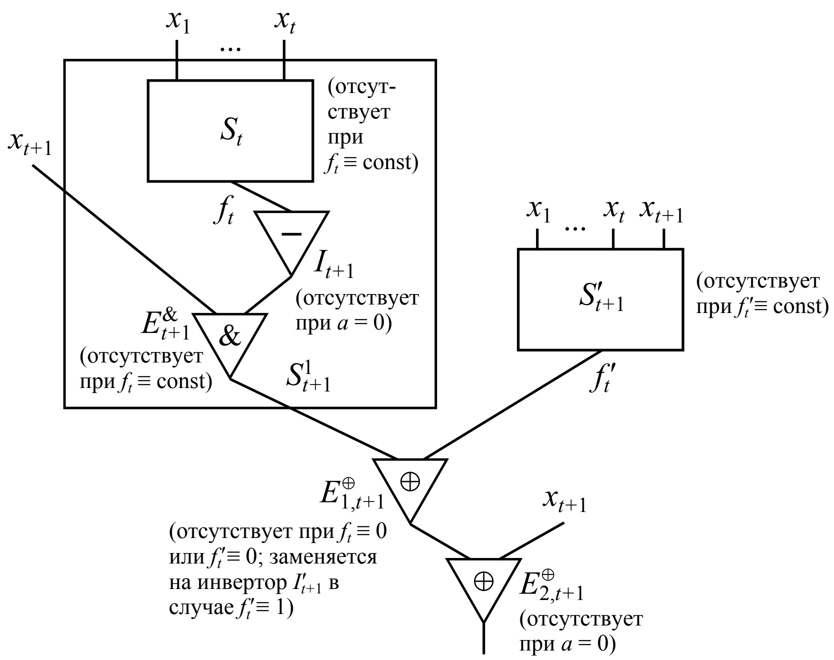

Рис. 1. Схема S_{t+1}

Далее, если функция $f'_t(\tilde{x}^t)$ отлична от констант, то её по лемме 4 можно реализовать неизбыточной СФЭ S'_{t+1} в базисе B, содержащей одну фиктивную входную переменную x_{t+1} и допускающей ЕПТ T'_{t+1} длины не более $2t+4$, подмножеством которого является множество $T_{t+1}^0 \cup \tilde{\rho}'_{t,0}$, где $\tilde{\rho}'_{t,0}$ — некоторый такой двоичный $(t+1)$-разрядный набор, что его $(t+1)$-я компонента равна 0 и t-разрядный набор $\tilde{\rho}'_t$, получающийся из $\tilde{\rho}'_{t,0}$ удалением $(t+1)$-й компоненты, удовлетворяет условию $f'_t(\tilde{\rho}'_t) \neq f'_t(\tilde{0}^t)$. В случае $f_t \not\equiv 0$ соединим выходы подсхем S_{t+1}^1 и S'_{t+1} схемы S с левым и правым входами сумматора $E_{1,t+1}^{\oplus}$ соответственно. При $a = 0$ выход элемента $E_{1,t+1}^{\oplus}$ объявим выходом схемы S_{t+1}; при $a = 1$ соединим выход этого элемента и вход «x_{t+1}» схемы S_{t+1} с левым и правым входами сумматора $E_{2,t+1}^{\oplus}$ соответственно, выход которого объявим выходом данной схемы. В случае $f_t \equiv 0$ будем считать, что схема S_{t+1} совпадает со схемой S'_{t+1}.

Если $f'_t \equiv 0$ или $f'_t \equiv 1$, то $f_t \not\equiv 0$ (иначе в силу (3) функция $f_{t+1}(\tilde{x}^{t+1})$ была бы константной), $a = 0$ и подсхема S'_{t+1} предполагается пустой. В случае $f'_t \equiv 0$ будем считать, что схема S_{t+1} совпадает с подсхемой S^1_{t+1}, а в случае $f'_t \equiv 1$ соединим выход подсхемы S^1_{t+1} со входом инвертора I'_{t+1}, выход которого объявим выходом схемы S_{t+1}. Нетрудно проверить, что во всех случаях на выходе этой схемы реализуется функция $x_{t+1}(f_t(\tilde{x}^t) \oplus a) \oplus f'_t(\tilde{x}^t) \oplus ax_{t+1}$, равная $f_{t+1}(\tilde{x}^{t+1})$ в силу (4).

Для доказательства шага индукции требуется показать, что построенная схема S_{t+1} неизбыточна и допускает ЕПТ T_{t+1} длины не более $6t - 4$, подмножеством которого является множество T^0_{t+1}.

Докажем следующее утверждение (∗): в случае $f_t \not\equiv 0$ схема S^1_{t+1} неизбыточна и допускает ЕПТ T^1_{t+1}, подмножеством которого является множество T^0_{t+1}, причём $|T^1_{t+1}| \leqslant 6t - 7$ при $t \geqslant 3$.

Если $f_t \equiv 1$, то по построению схема S^1_{t+1} не содержит функциональных элементов, поэтому у неё нет ни одной функции неисправности, она неизбыточна и любое множество двоичных наборов длины $t + 1$, в том числе $T^1_{t+1} = T^0_{t+1}$, является для неё ЕПТ, причём

$$|T^1_{t+1}| = |T^0_{t+1}| = 2t + 2 < 6t - 7$$

при $t \geqslant 3$. Пусть функция $f_t(\tilde{x}^t)$ отлична от констант. Выше для этого случая определено множество T_t. Пусть $\hat{T}_{t+1}$ — множество, состоящее из наборов $(\tilde{0}^{t+1})$ и $(\tilde{1}^t, 0)$, а также наборов, получающихся добавлением к каждому набору из множества T_t компоненты с номером $t + 1$, равной единице. Тогда

$$|\hat{T}_{t+1}| = |T_t| + 2, \tag{6}$$

а из соотношения $T^0_t \subseteq T_t$ очевидным образом вытекает, что

$$T^0_{t+1} \subseteq \hat{T}_{t+1} \tag{7}$$

(см. определения множеств T^0_t и T^0_{t+1}).

Пусть $\tilde{\sigma}_t$ — произвольный двоичный набор длины t, для которого $f_t(\tilde{\sigma}_t) \neq f_t(\tilde{0}^t)$; такой набор найдётся в силу отличия функции f_t от констант. Обозначим через $\tilde{\sigma}_{t,0}$ набор, получающийся из $\tilde{\sigma}_t$ добавлением $(t+1)$-й компоненты, равной нулю, и положим $T^1_{t+1} = \hat{T}_{t+1} \cup \{\tilde{\sigma}_{t,0}\}$. При $t \geqslant 3$ с учётом (5) и (6) имеем

$$|T^1_{t+1}| \leqslant |\hat{T}_{t+1}| + 1 = |T_t| + 3 \leqslant 6t - 7.$$

Отсюда, а также из соотношений (7) и $\hat{T}_{t+1} \subseteq T^1_{t+1}$ вытекает, что для доказательства утверждения (∗) достаточно доказать следующее утверждение: схема S^1_{t+1} неизбыточна, а множество T^1_{t+1} является для неё ЕПТ.

При переходе в произвольное неисправное состояние произвольного одного элемента E_t из подсхемы S_t схемы S^1_{t+1} значение, выдаваемое этой подсхемой хотя бы на одном наборе $\tilde{\pi}_t$ из множества T_t, изменится с 0 на 1 или наоборот, поскольку T_t — ЕПТ для неизбыточной схемы S_t. Пусть $\tilde{\pi}_{t,1}$ — набор, получающийся из набора $\tilde{\pi}_t$ добавлением $(t + 1)$-й компоненты, равной единице. Тогда

$$\tilde{\pi}_{t,1} \in \hat{T}_{t+1} \subseteq T^1_{t+1}$$

в силу определений множеств $\hat{T}_{t+1}, T^1_{t+1}$. При подаче на входы схемы S^1_{t+1} набора $\tilde{\pi}_{t,1}$ на её вход «x_{t+1}» поступает значение 1, а на вход подсхемы S_t — набор $\tilde{\pi}_t$. Поэтому при переходе элемента E_t в указанное неисправное состояние набор, поступающий в схеме S^1_{t+1} на входы конъюнктора $E^{\&}_{t+1}$, изменится с $(1,0)$ на $(1,1)$ или наоборот вне зависимости от наличия в ней инвертора I_{t+1}, а тогда изменится значение на выходе этого конъюнктора, т. е. на выходе схемы S^1_{t+1}. Тем самым показано, что любая неисправность любого одного элемента из подсхемы S_t схемы S^1_{t+1} обнаруживается хотя бы на одном наборе из множества T^1_{t+1}.

Рассмотрим теперь произвольную неисправность конъюнктора $E^{\&}_{t+1}$. Пусть данный элемент при ней реализует вместо «правильной» функции $\varphi_{E^{\&}_{t+1}}(x,y) = x\&y$ некоторую другую булеву функцию $\varphi'_{E^{\&}_{t+1}}(x,y)$ (от своих входов). Обозначим через $(\alpha_{1,t+1}, \alpha_{2,t+1})$ произвольный двоичный набор, на котором значения этих функций различаются. Докажем, что при последовательной подаче на входы схемы S^1_{t+1} некоторых четырёх наборов из множества T^1_{t+1} на входы конъюнктора $E^{\&}_{t+1}$ поступают наборы $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ и $(1,1)$. Если $f_t(\tilde{x}^t) = x_{i_t}$ для некоторого $i_t \in \{1,\dots,t\}$, то в качестве указанных наборов можно взять $(\tilde{0}^{t+1})$, $(\tilde{1}^t,0)$, $(\tilde{0}^t,1)$ и $(\tilde{1}^{t+1})$ соответственно. В противном случае в подсхеме S_t обязательно содержится выходной элемент. Для каждого $p \in \{0,1\}$ константная неисправность типа $\overline{p}$ на его выходе должна обнаруживаться на каком-то наборе $\tilde{\tau}^{(p)}_t \in T_t$, откуда следует, что $f_t(\tilde{\tau}^{(p)}_t) = p$. Набор $\tilde{\tau}^{(p)}_{t,1}$, получающийся из $\tilde{\tau}^{(p)}_t$ добавлением $(t+1)$-й компоненты, равной единице, по построению принадлежит T^1_{t+1}. Тогда в качестве указанных четырёх наборов можно взять $(\tilde{0}^{t+1})$, $\tilde{\sigma}_{t,0}$, $\tilde{\tau}^{(0)}_{t,1}$ и $\tilde{\tau}^{(1)}_{t,1}$ (возможно, в другом порядке). Действительно, переменная x_{t+1}, подающаяся на левый вход конъюнктора $E^{\&}_{t+1}$, на этих наборах принимает значения $0,0,1,1$ соответственно, а функция $f_t(\tilde{x}^t) \oplus a$, подающаяся на правый вход данного конъюнктора, — значения $f_t(\tilde{0}^t) \oplus a$, $f_t(\tilde{\sigma}_t) \oplus a$, $f_t(\tilde{\tau}^{(0)}_t) \oplus a = a$, $f_t(\tilde{\tau}^{(1)}_t) \oplus a = \overline{a}$ соответственно, первые два из которых не равны друг другу в силу выбора набора $\tilde{\sigma}_t$.

При подаче на входы схемы S^1_{t+1} какого-то из четырёх выбранных наборов на входы конъюнктора $E^{\&}_{t+1}$ поступит набор $(\alpha_{1,t+1}, \alpha_{2,t+1})$. Тогда при переходе элемента $E^{\&}_{t+1}$ в рассматриваемое неисправное состояние значение на его выходе, т. е. на выходе схемы S^1_{t+1}, изменится с $\varphi_{E^{\&}_{t+1}}(\alpha_{1,t+1}, \alpha_{2,t+1})$ на $\varphi'_{E^{\&}_{t+1}}(\alpha_{1,t+1}, \alpha_{2,t+1})$ и неисправность будет обнаружена на каком-то наборе из множества T^1_{t+1}.

Наконец, любая константная либо инверсная неисправность на выходе инвертора I_{t+1} (при наличии этого инвертора) равносильна такой же неисправности на правом входе конъюнктора $E^{\&}_{t+1}$. Таким образом, любая неисправность любого одного элемента схемы S^1_{t+1} обнаруживается хотя бы на одном наборе из множества T^1_{t+1}. Это означает, что схема S^1_{t+1} неизбыточна, а множество T^1_{t+1} является для неё ЕПТ. Утверждение $(*)$ доказано.

Докажем теперь основное утверждение: схема S_{t+1} неизбыточна и допускает ЕПТ T_{t+1} длины не более $6t-4$, подмножеством которого является множество T^0_{t+1}. Заметим, что в случае $t=2$ достаточно доказать только неизбыточность схемы S_{t+1}, так как в качестве T_{t+1} можно взять тривиальный ЕПТ длины $2^{t+1} = 8 = 6t-4$ для этой схемы. Рассмотрим пять случаев:

1. Пусть $f'_t \equiv 0$. Тогда $f_t \not\equiv 0$ и схема S_{t+1} по построению совпадает с подсхемой S^1_{t+1}. По утверждению $(*)$ схема S^1_{t+1}, т. е. S_{t+1}, неизбыточна и допускает ЕПТ T^1_{t+1}, подмножеством которого является множество T^0_{t+1}, причём $|T^1_{t+1}| \leqslant 6t-7$ при $t \geqslant 3$. Тогда в случае $t \geqslant 3$ можно взять $T_{t+1} = T^1_{t+1}$.

2. Пусть $f'_t \equiv 1$ и $f_t \equiv 1$. Тогда по построению схема S_{t+1} состоит из одного инвертора I'_{t+1}, вход которого соединён со входом «x_{t+1}» схемы, а её выходом является выход элемента I'_{t+1}. Очевидно, что в случае, когда инвертор I'_{t+1} исправен, на его вы-

ходе реализуется функция $f_{t+1}(\tilde{x}_{t+1}) = \overline{x}_{t+1}$, а при произвольной неисправности этого инвертора — одна из функций 0, 1 и x_{t+1}, каждую из которых можно отличить от функции $\overline{x}_{t+1}$ хотя бы на одном из наборов $(\tilde{0}^{t+1}), (\tilde{0}^t, 1) \in T^0_{t+1}$. Отсюда следует, что схема S_{t+1} неизбыточна, а множество T^0_{t+1} является для неё ЕПТ длины $2t+2 < 6t-4$, и можно взять $T_{t+1} = T^0_{t+1}$.

3. Пусть $f'_t \equiv 1$ и $f_t \not\equiv 1$. Из первого соотношения вытекает, что $f_t \not\equiv 0$, значит, функция $f_t(\tilde{x}^t)$ отлична от констант. В этом случае по построению выход схемы S^1_{t+1} совпадает с выходом конъюнктора $E^{\&}_{t+1}$, а схема S_{t+1} получается из схемы S^1_{t+1} добавлением инвертора I'_{t+1}, вход которого соединяется с выходом подсхемы S^1_{t+1}, и переносом выхода схемы на выход данного инвертора. При переходе в произвольное неисправное состояние произвольного одного элемента из подсхемы S^1_{t+1} схемы S_{t+1} значение, выдаваемое этой подсхемой хотя бы на одном наборе из множества T^1_{t+1}, изменится, поскольку T^1_{t+1} — ЕПТ для неизбыточной схемы S_t в силу утверждения $(*)$. Тогда изменится значение, поступающее на вход инвертора I'_{t+1}, а следовательно, и значение, возникающее на его выходе, т. е. на выходе схемы S_{t+1}. Заметим также, что константная неисправность типа p (инверсная неисправность) на выходе инвертора I_{t+1} равносильна константной неисправности типа $\overline{p}$ (инверсной неисправности) на выходе конъюнктора $E^{\&}_{t+1}$, где p — произвольное число из множества $\{0, 1\}$. Тем самым показано, что любая неисправность любого одного элемента схемы S^1_{t+1} обнаруживается хотя бы на одном наборе из множества T^1_{t+1}. Отсюда следует, что схема S_{t+1} неизбыточна и допускает ЕПТ T^1_{t+1}, подмножеством которого является множество T^0_{t+1}, причём $|T^1_{t+1}| \leqslant 6t-7$ при $t \geqslant 3$ (см. утверждение $(*)$), и в случае $t \geqslant 3$ можно взять $T_{t+1} = T^1_{t+1}$.

4. Пусть $f_t \equiv 0$. Тогда по построению схема S_{t+1} совпадает с неизбыточной схемой S'_{t+1}, допускающей ЕПТ T'_{t+1} длины не более $2t+4$, подмножеством которого является множество T^0_{t+1}; в случае $t \geqslant 3$ с учётом неравенства $2t+4 < 6t-7$ можно взять $T_{t+1} = T'_{t+1}$.

5. Пусть $f_t \not\equiv 0$, $f'_t \not\equiv 0$ и $f'_t \not\equiv 1$. Тогда по построению схема S_{t+1} содержит подсхемы S^1_{t+1} и S'_{t+1}, выходы которых соединены с левым и правым входами сумматора $E^{\oplus}_{1,t+1}$ соответственно; в случае $a = 0$ выход схемы S_{t+1} совпадает с выходом элемента $E^{\oplus}_{1,t+1}$, а в случае $a = 1$ выход этого элемента и вход «x_{t+1}» схемы S_{t+1} соединены с левым и правым входами сумматора $E^{\oplus}_{2,t+1}$ соответственно, выход которого совпадает с выходом схемы. Схема S^1_{t+1} реализует при отсутствии в ней неисправностей функцию $x_{t+1}(f_t(\tilde{x}^t) \oplus a)$, по утверждению $(*)$ неизбыточна и допускает ЕПТ T^1_{t+1}, подмножеством которого является множество T^0_{t+1}, причём $|T^1_{t+1}| \leqslant 6t-7$ при $t \geqslant 3$. Выход схемы S^1_{t+1} совпадает с выходом конъюнктора $E^{\&}_{t+1}$ в случае $f_t \not\equiv 1$ и со входом «x_{t+1}» схемы S_{t+1} в случае $f_t \equiv 1$. В первом из этих случаев константная неисправность типа 0 на выходе элемента $E^{\&}_{t+1}$ должна обнаруживаться на каком-то наборе $\tilde{\rho}_{t,1} \in T^1_{t+1}$, откуда следует, что значение функции $x_{t+1}(f_t(\tilde{x}^t) \oplus a)$ на наборе $\tilde{\rho}_{t,1}$ равно единице, т. е. $(t+1)$-я компонента данного набора равна единице и

$$f_t(\tilde{\rho}_t) \oplus a = 1, \tag{8}$$

где $\tilde{\rho}_t$ — набор, получающийся из набора $\tilde{\rho}_{t,1}$ удалением $(t+1)$-й компоненты. В случае $f_t \equiv 1$ положим $\tilde{\rho}_t = (\tilde{0}^t)$ и $\tilde{\rho}_{t,1} = (\tilde{0}^t, 1)$; тогда равенство (8) также выполнено (с учётом того, что в данном случае $a = 0$), $(t+1)$-я компонента набора $\tilde{\rho}_{t,1}$ также равна единице и $\tilde{\rho}_{t,1} \in T^0_{t+1} \subseteq T^1_{t+1}$.

Схема S'_{t+1} содержит одну фиктивную входную переменную x_{t+1} и реализует функцию $f'_t(\tilde{x}^t)$, т. е. на выходе этой схемы реализуется булева функция $f'^{(+1)}_t(\tilde{x}^{t+1})$, не зависящая существенно от переменной x_{t+1} и равная $f'_t(\tilde{x}^t)$. Кроме того, по построению схема S'_{t+1} неизбыточна и допускает ЕПТ T'_{t+1} длины не более $2t+4$, подмножеством которого является множество $T^0_{t+1} \cup \tilde{\rho}'_{t,0}$, где $\tilde{\rho}'_{t,0}$ — некоторый такой двоичный $(t+1)$-разрядный набор, что его $(t+1)$-я компонента равна 0 и t-разрядный набор $\tilde{\rho}'_t$, получающийся из набора $\tilde{\rho}'_{t,0}$ удалением $(t+1)$-й компоненты, удовлетворяет условию

$$f'_t(\tilde{\rho}'_t) \neq f'_t(\tilde{0}^t).$$

Докажем существование такого двоичного t-разрядного набора $\tilde{\rho}''_t$, что

$$f_t(\tilde{\rho}''_t) \oplus a = 1; \tag{9}$$

$$f'_t(\tilde{\rho}''_t) \neq f'_t(\tilde{\rho}_t). \tag{10}$$

Пусть сначала $a = 0$. Из определения числа a и предположения случая 5 вытекает, что либо $f_t \equiv 1$, либо не выполнено ни одно из функциональных неравенств $f_t \leqslant f'_t$, $f_t \leqslant \overline{f'_t}$. В обоих случаях существуют такие двоичные t-разрядные наборы $\tilde{\lambda}_t$ и $\tilde{\lambda}'_t$, что

$$f_t(\tilde{\lambda}_t) = f_t(\tilde{\lambda}'_t) = f'_t(\tilde{\lambda}_t) = 1$$

и $f'_t(\tilde{\lambda}'_t) = 0$. Среди наборов $\tilde{\lambda}_t$ и $\tilde{\lambda}'_t$ можно выбрать такой набор $\tilde{\rho}''_t$, что выполнены соотношения (9) (с учётом равенства $a = 0$) и (10), что и требовалось доказать.

Пусть теперь $a = 1$. Из определения числа a следует, что обе функции f_t, f'_t неконстантные и либо $f_t \leqslant f'_t$, либо $f_t \leqslant \overline{f'_t}$. Тогда $f_t \leqslant f'_t \oplus c_t$ для некоторого $c_t \in \{0, 1\}$. Из регулярности функции $f_{t+1}(\tilde{x}^{t+1})$ и отличия обеих функций f_t, f'_t от констант вытекает, что функция $f_t(\tilde{x}^t)$ отлична от $f'_t(\tilde{x}^t)$ и от $\overline{f'_t}(\tilde{x}^t)$, в частности, от функции $f'_t(\tilde{x}^t) \oplus c_t$. Значит, существует такой двоичный t-разрядный набор $\tilde{\lambda}_t$, что $f_t(\tilde{\lambda}_t) = 0$ и $f'_t(\tilde{\lambda}_t) \oplus c_t = 1$, т. е. $f'_t(\tilde{\lambda}_t) = \overline{c}_t$. Функция $f'_t(\tilde{x}^t)$ отлична от константы $\overline{c}_t$, поэтому существует такой двоичный t-разрядный набор $\tilde{\lambda}'_t$, что $f'_t(\tilde{\lambda}'_t) = c_t$. Тогда

$$f_t(\tilde{\lambda}'_t) \leqslant f'_t(\tilde{\lambda}'_t) \oplus c_t = c_t \oplus c_t = 0,$$

откуда $f_t(\tilde{\lambda}'_t) = 0$. Получаем, что $f_t(\tilde{\lambda}_t) = f_t(\tilde{\lambda}'_t) = 0$, $f'_t(\tilde{\lambda}_t) = \overline{c}_t$ и $f'_t(\tilde{\lambda}'_t) = c_t$. Среди наборов $\tilde{\lambda}_t$ и $\tilde{\lambda}'_t$ можно выбрать такой набор $\tilde{\rho}''_t$, что выполнены соотношения (9) (с учётом равенства $a = 1$) и (10), что и требовалось доказать.

Обозначим через $\tilde{\rho}''_{t,1}$ набор, получающийся из набора $\tilde{\rho}''_t$ добавлением $(t+1)$-й компоненты, равной единице, и положим $T_{t+1} = T^1_{t+1} \cup (T'_{t+1} \setminus T^0_{t+1}) \cup \{\tilde{\rho}''_{t,1}\}$. Тогда

$$T^0_{t+1} \subseteq T^1_{t+1} \subseteq T_{t+1},$$

а при $t \geqslant 3$ имеем

$$|T_{t+1}| \leqslant |T^1_{t+1}| + |T'_{t+1} \setminus T^0_{t+1}| + 1 = |T^1_{t+1}| + |T'_{t+1}| - |T^0_{t+1}| + 1 \leqslant 6t - 7 + 2t + 4 - (2t+2) + 1 = 6t - 4.$$

Поэтому достаточно доказать, что схема S_{t+1} неизбыточна, а множество T_{t+1} является для неё ЕПТ. Заметим, что $T^1_{t+1} \cup (T'_{t+1} \setminus T^0_{t+1}) = T^1_{t+1} \cup T'_{t+1}$, так как $T^0_{t+1} \subseteq T^1_{t+1}$. Значит, $T_{t+1} = T^1_{t+1} \cup T'_{t+1} \cup \{\tilde{\rho}''_{t,1}\}$. Также нам понадобятся соотношения

$$(\tilde{0}^{t+1}) \in T^0_{t+1} \subseteq T^1_{t+1} \subseteq T_{t+1},$$

$$\tilde{\rho}'_{t,0} \in T'_{t+1} \subseteq T_{t+1},$$

$$\tilde{\rho}_{t,1} \in T^1_{t+1} \subseteq T_{t+1},$$

$$\tilde{\rho}''_{t,1} \in T_{t+1}.$$

Несмотря на различие строения схемы S_{t+1} в случаях $a = 0$ и $a = 1$, ряд рассуждений можно провести для обоих этих случаев. При переходе в произвольное неисправное состояние произвольного одного элемента из подсхемы S^1_{t+1} (подсхемы S'_{t+1}) схемы S_{t+1} значение, выдаваемое этой подсхемой хотя бы на одном наборе из множества T^1_{t+1} (соответственно T'_{t+1}), изменится, поскольку данное множество является ЕПТ для указанной подсхемы. Тогда изменится значение, поступающее на левый (соответственно правый) вход сумматора $E^{\oplus}_{1,t+1}$, а значение на другом его входе останется неизменным, поэтому значение, возникающее на его выходе, изменится хотя бы на одном наборе из множества $T^1_{t+1} \cup T'_{t+1} \subseteq T_{t+1}$.

Рассмотрим теперь произвольную неисправность сумматора $E^{\oplus}_{1,t+1}$. Пусть данный элемент при ней реализует вместо «правильной» функции $\varphi_{E^{\oplus}_{1,t+1}}(x, y) = x \oplus y$ некоторую другую булеву функцию $\varphi'_{E^{\oplus}_{1,t+1}}(x, y)$ (от своих входов). Обозначим через $(\beta_{1,t+1}, \beta_{2,t+1})$ произвольный двоичный набор, на котором значения этих функций различаются. В схеме S_{t+1} на левый и правый входы сумматора $E^{\oplus}_{1,t+1}$ подаются функции $x_{t+1}(f_t(\tilde{x}^t) \oplus a)$ и $f_t'^{(+1)}(\tilde{x}^{t+1})$ с выходов подсхем S^1_{t+1} и S'_{t+1} соответственно. На наборах $(\tilde{0}^{t+1})$, $\tilde{\rho}'_{t,0}$, $\tilde{\rho}_{t,1}$ и $\tilde{\rho}''_{t,1}$, каждый из которых принадлежит T_{t+1}, пара функций $(x_{t+1}(f_t(\tilde{x}^t) \oplus a), f_t'^{(+1)}(\tilde{x}^{t+1}))$ принимает пары значений $(0, f'_t(\tilde{0}^t))$, $(0, f'_t(\tilde{\rho}'_t))$, $(f_t(\tilde{\rho}_t) \oplus a, f'_t(\tilde{\rho}_t))$ и $(f_t(\tilde{\rho}''_t) \oplus a, f'_t(\tilde{\rho}''_t))$ соответственно, т. е. пары значений $(0, f'_t(\tilde{0}^t))$, $(0, \overline{f'_t}(\tilde{0}^t))$, $(1, f'_t(\tilde{\rho}_t))$ и $(1, \overline{f'_t}(\tilde{\rho}_t))$ (см. (8)–(10)). Очевидно, что среди них присутствуют все пары $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

Таким образом, установлено, что при последовательной подаче на входы схемы S_{t+1} некоторых четырёх наборов из множества T_{t+1} на входы сумматора $E^{\oplus}_{1,t+1}$ поступают наборы $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ и $(1, 1)$. При подаче на входы схемы какого-то из четырёх выбранных наборов на входы сумматора поступит набор $(\beta_{1,t+1}, \beta_{2,t+1})$. При переходе элемента $E^{\oplus}_{1,t+1}$ в рассматриваемое неисправное состояние значение на его выходе изменится с $\varphi_{E^{\oplus}_{1,t+1}}(\beta_{1,t+1}, \beta_{2,t+1})$ на $\varphi'_{E^{\oplus}_{1,t+1}}(\beta_{1,t+1}, \beta_{2,t+1})$. Рассмотрим два подслучая:

5.1. Пусть $a = 0$. Тогда по построению выход схемы S_{t+1} совпадает с выходом сумматора $E^{\oplus}_{1,t+1}$. В силу рассуждений из предыдущих трёх абзацев любая неисправность любого одного элемента из подсхемы S^1_{t+1} или S'_{t+1}, а также любая неисправность элемента $E^{\oplus}_{1,t+1}$ обнаруживается в схеме S_{t+1} хотя бы на одном наборе из множества T_{t+1}. Это означает, что схема S_{t+1} неизбыточна, а множество T_{t+1} является для неё ЕПТ, что и требовалось доказать.

5.2. Пусть $a = 1$. В этом случае по построению выход элемента $E^{\oplus}_{1,t+1}$ и вход «x_{t+1}» схемы S_{t+1} соединены в ней с левым и правым входами сумматора $E^{\oplus}_{2,t+1}$ соответственно, выход которого совпадает с выходом схемы. Как показано выше, при переходе в произвольное неисправное состояние сумматора $E^{\oplus}_{1,t+1}$ либо произвольного одного элемента из подсхемы S^1_{t+1} или S'_{t+1} значение, возникающее в схеме S_{t+1} на выходе элемента $E^{\oplus}_{1,t+1}$ хотя бы на одном наборе из множества T_{t+1}, изменится. Это значение поступит на левый вход сумматора $E^{\oplus}_{2,t+1}$, а значение на его правом входе останется неизменным, поэтому значение на его выходе, т. е. на выходе схемы S_{t+1}, изменится. Тем самым показано, что любая неисправность любого одного элемента из подсхемы S^1_{t+1} или S'_{t+1}, а также любая неисправность элемента $E^{\oplus}_{1,t+1}$ обнаруживается в схеме S_{t+1} хотя бы на одном наборе из множества T_{t+1}.

Рассмотрим теперь произвольную неисправность сумматора $E^{\oplus}_{2,t+1}$. Пусть данный элемент при ней реализует вместо «правильной» функции $\varphi_{E^{\oplus}_{2,t+1}}(x, y) = x \oplus y$ некоторую другую булеву функцию $\varphi'_{E^{\oplus}_{2,t+1}}(x, y)$ (от своих входов). Обозначим через

$(\gamma_{1,t+1}, \gamma_{2,t+1})$ произвольный двоичный набор, на котором значения этих функций различаются. В схеме S_{t+1} на левый и правый входы сумматора $E^{\oplus}_{2,t+1}$ подаются функции $x_{t+1}(f_t(\tilde{x}^t)\oplus a)\oplus f_t^{\prime(+1)}(\tilde{x}^{t+1})$ и x_{t+1} с выхода сумматора $E^{\oplus}_{1,t+1}$ и входа «x_{t+1}» схемы соответственно. На наборах $(\tilde{0}^{t+1})$, $\tilde{\rho}'_{t,0}$, $\tilde{\rho}_{t,1}$ и $\tilde{\rho}''_{t,1}$, каждый из которых принадлежит T_{t+1}, пара функций $(x_{t+1}(f_t(\tilde{x}^t)\oplus a)\oplus f_t^{\prime(+1)}(\tilde{x}^{t+1}), x_{t+1})$ принимает пары значений $(0\oplus f'_t(\tilde{0}^t), 0)$, $(0\oplus f'_t(\tilde{\rho}'_t), 0)$, $((f_t(\tilde{\rho}_t)\oplus a)\oplus f'_t(\tilde{\rho}_t), 1)$ и $((f_t(\tilde{\rho}''_t)\oplus a)\oplus f'_t(\tilde{\rho}''_t), 1)$ соответственно, т. е. пары значений $(f'_t(\tilde{0}^t), 0)$, $(\overline{f'_t}(\tilde{0}^t), 0)$, $(1\oplus f'_t(\tilde{\rho}_t), 1)$ и $(1\oplus \overline{f'_t}(\tilde{\rho}_t), 1)$ (см. (8)–(10)). Очевидно, что среди них присутствуют все пары $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

Таким образом, установлено, что при последовательной подаче на входы схемы S_{t+1} некоторых четырёх наборов из множества T_{t+1} на входы сумматора $E^{\oplus}_{2,t+1}$ поступают наборы $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ и $(1,1)$. При подаче на входы схемы какого-то из четырёх выбранных наборов на входы сумматора поступит набор $(\gamma_{1,t+1}, \gamma_{2,t+1})$. При переходе элемента $E^{\oplus}_{2,t+1}$ в рассматриваемое неисправное состояние значение на его выходе, т. е. на выходе схемы S_{t+1}, изменится с $\varphi_{E^{\oplus}_{1,t+1}}(\gamma_{1,t+1}, \gamma_{2,t+1})$ на $\varphi'_{E^{\oplus}_{1,t+1}}(\gamma_{1,t+1}, \gamma_{2,t+1})$ и неисправность будет обнаружена на каком-то наборе из множества T_{t+1}.

В итоге получаем, что любая неисправность любого одного элемента схемы S_{t+1} обнаруживается хотя бы на одном наборе из данного множества. Это означает, что схема S_{t+1} неизбыточна, а множество T_{t+1} является для неё ЕПТ, что и требовалось доказать. Случай 5 разобран.

Случаями 1–5 исчерпываются все возможные случаи. Основное утверждение, а вместе с ним шаг индукции и лемма 1 доказаны. ∎

Доказательство леммы 2. Докажем индукцией по n, что для любой неконстантной булевой функции $f_n(\tilde{x}^n)$ существуют такие $\sigma_{1,n}, \ldots, \sigma_{n,n} \in \{0,1\}$, что функция $f_n(x_1^{\sigma_{1,n}}, \ldots, x_n^{\sigma_{n,n}})$ регулярна и отлична от констант; отсюда следует утверждение леммы.

Б а з а и н д у к ц и и: $n = 1$ или 2. По определению любая булева функция от одной или двух переменных является регулярной, поэтому в случаях $n = 1$, 2 можно взять соответственно $\sigma_{1,1} = 1$, $\sigma_{1,2} = \sigma_{2,2} = 1$.

П р е д п о л о ж е н и е и ш а г и н д у к ц и и: пусть утверждение доказано для $n = t$, где $t \geqslant 2$; докажем его для $n = t+1$. Функцию f_{t+1} можно единственным образом представить в виде (3), где f_t и f'_t — булевы функции. Рассмотрим два случая:

1. Пусть $f_t \equiv c$ для некоторого $c \in \{0,1\}$. Если $t \geqslant 3$, то функцию f_t можно единственным образом представить в виде

$$f_t(\tilde{x}^t) = x_t f_{t-1}(\tilde{x}^{t-1}) \oplus f'_{t-1}(\tilde{x}^{t-1}),$$

где f_{t-1} и f'_{t-1} — булевы функции, причём этот вид достигается при $f_{t-1} \equiv 0$ и $f'_{t-1} \equiv c$. В случае $t \geqslant 4$ функцию $f_{t-1} \equiv 0$ можно единственным образом представить в виде

$$f_{t-1}(\tilde{x}^{t-1}) = x_{t-1} f_{t-2}(\tilde{x}^{t-2}) \oplus f'_{t-2}(\tilde{x}^{t-2}),$$

где f_{t-2} и f'_{t-2} — булевы функции, причём этот вид достигается при $f_{t-2} \equiv 0$ и $f'_{t-2} \equiv 0$, и т. д. В итоге получаем, что для любого $i \in \{2, \ldots, t\}$ функция $f_i(\tilde{x}^i)$ является константной, а тогда функция $f_{t+1}(\tilde{x}^{t+1})$ по определению регулярна и можно взять $\sigma_{1,t+1} = \ldots = \sigma_{t+1,t+1} = 1$.

2. Пусть $f_t \not\equiv 0$ и $f_t \not\equiv 1$. Достаточно доказать существование таких $\sigma_{1,t+1}, \ldots, \sigma_{t+1,t+1} \in \{0,1\}$, что функция $f_{t+1}(x_1^{\sigma_{1,t+1}}, \ldots, x_{t+1}^{\sigma_{t+1,t+1}})$ регулярна; отличие её от кон-

стант будет следовать из отличия функции $f_{t+1}(\tilde{x}^{t+1})$ от констант. По предположению индукции существуют такие $\sigma_{1,t}, \ldots, \sigma_{t,t} \in \{0,1\}$, что функция $h_t(\tilde{x}^t) = f_t(x_1^{\sigma_{1,t}}, \ldots, x_t^{\sigma_{t,t}})$ регулярна и отлична от констант. В силу (3) имеем

$$f_{t+1}(x_1^{\sigma_{1,t}}, \ldots, x_t^{\sigma_{t,t}}, x_{t+1}) = x_{t+1} h_t(\tilde{x}^t) \oplus h'_t(\tilde{x}^t), \tag{11}$$

где $h'_t(\tilde{x}^t) = f'_t(x_1^{\sigma_{1,t}}, \ldots, x_t^{\sigma_{t,t}})$. Если функция $h'_t(\tilde{x}^t)$ является константной или функция $h_t(\tilde{x}^t)$ отлична от $h'_t(\tilde{x}^t)$ и от $\overline{h'_t}(\tilde{x}^t)$, то из регулярности функции $h_t(\tilde{x}^t)$ следует регулярность функции $f_{t+1}(x_1^{\sigma_{1,t}}, \ldots, x_t^{\sigma_{t,t}}, x_{t+1})$ и можно взять $\sigma_{1,t+1} = \sigma_{1,t}$, $\ldots$, $\sigma_{t,t+1} = \sigma_{t,t}$, $\sigma_{t+1,t+1} = 1$. В противном случае $h'_t(\tilde{x}^t) = h_t(\tilde{x}^t) \oplus c_t$ для некоторого $c_t \in \{0,1\}$. Преобразуем равенство (11):

$$f_{t+1}(x_1^{\sigma_{1,t}}, \ldots, x_t^{\sigma_{t,t}}, x_{t+1}) = x_{t+1} h_t(\tilde{x}^t) \oplus h_t(\tilde{x}^t) \oplus c_t = (x_{t+1} \oplus 1) h_t(\tilde{x}^t) \oplus c_t = \overline{x}_{t+1} h_t(\tilde{x}^t) \oplus c_t,$$
$$f_{t+1}(x_1^{\sigma_{1,t}}, \ldots, x_t^{\sigma_{t,t}}, \overline{x}_{t+1}) = x_{t+1} h_t(\tilde{x}^t) \oplus c_t.$$

С учётом того, что последнее слагаемое в правой части последнего равенства — константа, из регулярности функции $h_t(\tilde{x}^t)$ вытекает регулярность функции $f_{t+1}(x_1^{\sigma_{1,t}}, \ldots, x_t^{\sigma_{t,t}}, \overline{x}_{t+1})$ и можно взять $\sigma_{1,t+1} = \sigma_{1,t}$, $\ldots$, $\sigma_{t,t+1} = \sigma_{t,t}$, $\sigma_{t+1,t+1} = 0$. Шаг индукции, а вместе с ним лемма 2 доказаны. ■

Доказательство леммы 3. Пусть S' — неизбыточная СФЭ в базисе B, реализующая функцию $f(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$ и допускающая при $n \geqslant 3$ ЕПТ T' длины не более $6n-10$. Если выход схемы S' совпадает с одним из её входов, то на этом выходе реализуется функция $f(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}) = x_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда $f(\tilde{x}^n) = x_i^{\sigma_i}$, т. е. $f(\tilde{x}^n) = x_i$ или $f(\tilde{x}^n) = \overline{x}_i$. В первом (во втором) из этих случаев функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать СФЭ, не содержащей функциональных элементов (соответственно содержащей один инвертор); данная схема, очевидно, является неизбыточной и допускает ЕПТ $\{(\tilde{0}^n), (\tilde{1}^n)\}$, длина которого равна $2 < 6n - 10$ при $n \geqslant 3$.

Пусть теперь в схеме S' содержится выходной элемент. Для удобства будем считать, что в случаях $n = 1, 2$ множество T' представляет собой тривиальный ЕПТ для схемы S', т. е. состоит из всех 2^n двоичных n-разрядных наборов. Для каждого такого $i \in \{1, \ldots, n\}$, что $\sigma_i = 0$, и каждого входа каждого элемента схемы, соединённого со входом «x_i» схемы, отсоединим указанный вход элемента от входа «x_i» схемы и соединим его с выходом своего инвертора, на вход которого подадим переменную x_i со входа схемы. Все указанные преобразования произведём одновременно. Полученную в результате схему обозначим через S; легко видеть, что она является СФЭ в базисе B и реализует булеву функцию, получающуюся из функции $f(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$ подстановкой для каждого такого $i \in \{1, \ldots, n\}$, что $\sigma_i = 0$, вместо переменной x_i её отрицания, т. е. функцию $f(\tilde{x}^n)$. Обозначим через T множество, получающееся заменой для каждого такого $i \in \{1, \ldots, n\}$, что $\sigma_i = 0$, i-й компоненты каждого набора из множества T' на противоположную. Очевидно, что $|T| = |T'| \leqslant 6n - 10$ при $n \geqslant 3$, поэтому достаточно доказать, что схема S неизбыточна, а множество T является для неё ЕПТ.

Пусть M — множество всех инверторов схемы S, добавленных в ходе преобразований в неё схемы S'. Рассмотрим произвольную неисправность произвольного элемента E схемы S, не принадлежащего M. Такая же неисправность этого же элемента в схеме S' обязана обнаруживаться хотя бы на одном наборе $\tilde{\pi}'$ из множества T', поскольку T' — ЕПТ для неизбыточной схемы S'. Обозначим через $\tilde{\pi}$ набор, получающийся из $\tilde{\pi}'$ заменой для каждого такого $i \in \{1, \ldots, n\}$, что $\sigma_i = 0$, i-й компоненты на противоположную. Тогда $\tilde{\pi} \in T$. Легко заметить, что при подаче на входы схемы S набора $\tilde{\pi}$ на входах и выходе каждого элемента $\hat{E}$, не принадлежащего множеству M, возникают те же значения, что на входах и выходе того же элемента в схеме S' при подаче на её входы набора $\tilde{\pi}'$ как в случае отсутствия неисправностей в схемах S и S', так и в случае одинаковой неисправности элемента E в каждой из данных схем и исправной работы всех остальных элементов (формально это можно доказать, двигаясь по каждой из схем S, S' «сверху вниз» от входов к выходу). Взяв в качестве $\hat{E}$ выходной элемент каждой из схем S, S', получим, что рассматриваемая неисправность элемента E в схеме S обнаруживается на наборе $\tilde{\pi}$. Тем самым показано, что любая неисправность любого одного элемента схемы S, не принадлежащего M, обнаруживается хотя бы на одном наборе из множества T.

Осталось заметить, что в схеме S любая константная либо инверсная неисправность на выходе произвольного инвертора из множества M равносильна такой же неисправности на входе следующего за ним элемента, уже не принадлежащего M, соединённом с выходом этого инвертора. Приведённые рассуждения показывают, что схема S неизбыточна, а множество T является для неё ЕПТ. Лемма 3 доказана. ■

Заключение

В работе предложен метод реализации любой неконстантной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ схемой из функциональных элементов в базисе $\{\&, \oplus, \neg\}$, неизбыточной и допускающей при $n \geqslant 3$ единичный проверяющий тест длины не более $6n - 10$ относительно произвольных неисправностей элементов, существенно более короткий, чем тривиальный тест из 2^n наборов. Данный метод может быть использован на практике для построения легкотестируемых интегральных схем в случае, когда тип допустимых неисправностей содержащихся в них элементов никак не ограничивается (в частности, не ограничивается хорошо изученными константными либо инверсными неисправностями на входах и/или выходах элементов).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. 1958. Т. 51. С. 270–360.
2. *Яблонский С. В.* Надёжность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюз. семинара по дискретной математике и её приложениям (Москва, 31 января – 2 февраля 1984 г.). М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 7–12.
3. *Яблонский С. В.* Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
4. *Редькин Н. П.* Надёжность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992. 192 с.
5. *Бородина Ю. В.* О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2008. № 5. С. 49–52.
6. *Попков К. А.* Нижние оценки длин единичных тестов для схем из функциональных элементов // Дискретная математика. 2017. Т. 29. Вып. 2. С. 53–69.
7. *Попков К. А.* Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисе «конъюнкция-отрицание» // Прикладная дискретная математика. 2017. № 38. С. 66–88.
8. *Reddy S. M.* Easily testable realizations for logic functions // IEEE Trans. Comput. 1972. V. C-21. Iss. 11. P. 1183–1188.
9. *Коляда С. С.* Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 4. С. 32–34.

10. *Коляда С. С.* Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2013. 77 с.
11. *Романов Д. С.* Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретная математика. 2014. Т. 26. Вып. 2. С. 100–130.
12. *Попков К. А.* Короткие единичные тесты для схем при произвольных константных неисправностях на выходах элементов // Дискретная математика. 2018. Т. 30. Вып. 3. С. 99–116.
13. *Коваценко С. В.* Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2000. № 2. С. 45–47.
14. *Редькин Н. П.* О единичных проверяющих тестах схем при инверсных неисправностях элементов // XII Междунар. конф. по проблемам теоретической кибернетики (Н. Новгород, 1999). Тез. докл. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999. С. 196.
15. *Редькин Н. П.* Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. М.: Физматлит, 2003. С. 217–230.
16. *Попков К. А.* Синтез легкотестируемых схем при однотипных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2018. Т. 23. Вып. 3. С. 131–147.
17. *Романов Д. С., Романова Е. Ю.* Короткие тесты для схем в базисе Жегалкина // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2016. Т. 20. Вып. 3. С. 73–78.
18. *Романов Д. С., Романова Е. Ю.* Метод синтеза неизбыточных схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретная математика. 2017. Т. 29. Вып. 4. С. 87–105.
19. *Попков К. А.* Синтез легкотестируемых схем при произвольных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Прикладная дискретная математика. 2019. № 43. С. 78–100.
20. *Попков К. А.* Метод построения легко диагностируемых схем из функциональных элементов относительно единичных неисправностей // Прикладная дискретная математика. 2019. № 46. С. 38–57.
21. *Попков К. А.* О схемах, допускающих короткие единичные проверяющие тесты при произвольных неисправностях функциональных элементов // Прикладная дискретная математика. 2021. № 51. С. 85–100.
22. *Попков К. А.* Короткие полные проверяющие тесты для схем из двухвходовых функциональных элементов // Дискретный анализ и исследование операций. 2019. Т. 26. № 1. С. 89–113.

REFERENCES

1. *Chegis I. A. and Yablonskiy S. V.* Logicheskie sposoby kontrolya raboty elektricheskikh skhem [Logical methods of control of work of electric circuits]. Trudy Mat. Inst. Steklov, 1958, vol. 51, pp. 270–360. (in Russian)
2. *Yablonskiy S. V.* Nadezhnost' i kontrol' upravlyayushchikh sistem [Reliability and verification of control systems]. Materialy Vsesoyuznogo seminara po diskretnoy matematike i ee prilozheniyam (Moscow, 31 Jan.–2 Feb. 1984). Moscow, MSU Publ., 1986, pp. 7–12. (in Russian)

3. *Yablonskiy S. V.* Nekotorye voprosy nadezhnosti i kontrolya upravlyayushchikh sistem [Some questions of reliability and verification of control systems]. Matematicheskie Voprosy Kibernetiki, iss. 1. Moscow, Nauka Publ., 1988, pp. 5–25. (in Russian)
4. *Red'kin N. P.* Nadezhnost' i diagnostika skhem [Circuits Reliability and Diagnostics]. Moscow, MSU Publ., 1992. 192 p. (in Russian)
5. *Borodina Yu. V.* Circuits admitting single-fault tests of length 1 under constant faults at outputs of elements. Mosc. Univ. Math. Bull., 2008, vol. 63, iss. 5, pp. 202–204.
6. *Popkov K. A.* Lower bounds for lengths of single tests for Boolean circuits. Discrete Math. Appl., 2019, vol. 29, iss. 1, pp. 23–33.
7. *Popkov K. A.* Edinichnye proveryayushchie testy dlya skhem iz funktsional'nykh elementov v bazise "kon'yunktsiya-otritsanie" [Single fault detection tests for logic networks in the basis "conjunction-negation"]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2017, no. 38, pp. 66–88. (in Russian)
8. *Reddy S. M.* Easily testable realizations for logic functions. IEEE Trans. Comput., 1972, vol. C-21, iss. 11, pp. 1183–1188.
9. *Kolyada S. S.* Single fault detection tests for circuits of functional elements. Mosc. Univ. Math. Bull., 2013, vol. 68, iss. 4, pp. 192–193.
10. *Kolyada S. S.* Verkhnie otsenki dliny proveryayushchikh testov dlya skhem iz funktsional'nykh elementov [Upper bounds on length of fault detection tests for logic networks]. Cand. Diss. Moscow, 2013. 77 p. (in Russian)
11. *Romanov D. S.* Method of synthesis of easily testable circuits admitting single fault detection tests of constant length. Discrete Math. Appl., 2014, vol. 24, iss. 4, pp. 227–251.
12. *Popkov K. A.* Short single tests for circuits with arbitrary stuck-at faults at outputs of gates. Discrete Math. Appl., 2019, vol. 29, iss. 5, pp. 321–333.
13. *Kovatsenko S. V.* Sintez legkotestiruemykh skhem v bazise Zhegalkina dlya inversnykh neispravnostey [Synthesis of easily testable logic networks in the Zhegalkin basis for inverse faults]. Vestnik MSU, Ser. 15, 2000, no. 2, pp. 45–47. (in Russian)
14. *Red'kin N. P.* O edinichnykh proveryayushchikh testakh skhem pri inversnykh neispravnostyakh elementov [On single fault detection tests of logic networks under inverse faults of gates]. XII Mezhd. konf. po problemam teoreticheskoy kibernetiki (Nizhny Novgorod, 1999). Tezisy dokladov. Moscow, Mech.-Math. Faculty of MSU Publ., 1999, p. 196. (in Russian)
15. *Red'kin N. P.* Edinichnye proveryayushchie testy dlya skhem pri inversnykh neispravnostyakh elementov [Single fault detection tests for logic networks under inverse faults of gates]. Matematicheskie Voprosy Kibernetiki, iss. 12. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, pp. 217–230. (in Russian)
16. *Popkov K. A.* Sintez legkotestiruemykh skhem pri odnotipnykh konstantnykh neispravnostyakh na vkhodakh i vykhodakh elementov [Synthesis of easily testable logic networks under one-type stuck-at faults at inputs and outputs of gates]. Intellektual'nye Sistemy. Teoriya i Prilozheniya, 2018, vol. 23, iss. 3, pp. 131–147. (in Russian)
17. *Romanov D. S. and Romanova E. Yu.* Korotkie testy dlya skhem v bazise Zhegalkina [Short tests for circuits in the Zhegalkin basis]. Intellektual'nye Sistemy. Teoriya i Prilozheniya, 2016, vol. 20, iss. 3, pp. 73–78. (in Russian)
18. *Romanov D. S. and Romanova E. Yu.* A method of synthesis of irredundant circuits admitting single fault detection tests of constant length. Discrete Math. Appl., 2019, vol. 29, iss. 1, pp. 35–48.
19. *Popkov K. A.* Sintez legkotestiruemykh skhem pri proizvol'nykh konstantnykh neispravnostyakh na vkhodakh i vykhodakh elementov [Synthesis of easily testable

logic networks under arbitrary stuck-at faults at inputs and outputs of gates]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2019, no. 43, pp. 78–100. (in Russian)

20. *Popkov K. A.* Metod postroeniya legko diagnostiruemykh skhem iz funktsional'nykh elementov otnositel'no edinichnykh neispravnostey [A method of constructing of easily diagnosable logic networks regarding single faults]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2019, no. 46, pp. 38–57. (in Russian)
21. *Popkov K. A.* O skhemakh, dopuskayushchikh korotkie edinichnye proveryayushchie testy pri proizvol'nykh neispravnostyakh funktsional'nykh elementov [On logic networks allowing short single fault detection tests under arbitrary faults of gates]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2021, no. 51, pp. 85–100. (in Russian)
22. *Popkov K. A.* Short complete fault detection tests for logic networks with fan-in two. J. Appl. Industr. Math., 2019, vol. 13, iss. 1, pp. 118–131.