

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

---

*Научный журнал*

---

**2022**

**№ 58**

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере  
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия  
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)

Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций  
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,  
Высшей аттестационной комиссии

## Founder – Tomsk State University

### EDITORIAL BOARD

**Alexander Gortsev** – Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599

**Valery Smagin** – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599

**Lyudmila Nezhelskaya** – Executive Editor, Doctor. of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

**Sergey Vorobeychikov** – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University

**Vladimir Vishnevsky** – Doctor of Sc., Prof. Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).

**Gennady Koshkin** – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University

**Yury Kostyuk** – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Informatics Department Tomsk State University

**Anjela Matrosova** – Doctor of Sc., Prof. of the Department of Computer Security Tomsk State University

**Anatoly Nazarov** – Doctor of Sc., Prof. of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department Tomsk State University

**Konstantin Samouylov** – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Probability and Informatics Department RUDN University (Moscow, Russia)

**Eugene Semenkina** – Doctor of Sc., Prof. System Analysis and Operations Research Department Reshetnev Siberian State University of Science and Technology (Krasnoyarsk, Russia)

**Sergey Sushchenko** – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied of Information Department Tomsk State University

**Mais Farkhadov** – Doctor of Sc., Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).

**Gurami Tsitsiashevili** – Doctor of Sc., Prof., Chief researcher Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Prof. Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russia)

#### Editorial address:

Institute of Applied Mathematics and Computer Science,  
unit of Applied Mathematics

National Research Tomsk State University

36 Lenina Avenue, Tomsk, 634050

Telephone / fax: +73822529599

E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

### EDITORIAL COUNCIL

**Ana Rosa Cavalli**

PhD, Prof.

University VII Paris, France

**Alexander Dudin**

Doctor of Sc., Prof.

Belarusian State University

Minsk, Republic Belorussia

**Reindert Nobel**

Doctor of Sc., Associate Prof.

Vrije University, Amsterdam,

Netherlands

**Enco Orzinger**

PhD, Prof.

University of Rome, Italy

**Paolo Prinetto**

Prof. Politechnic Institute,

Torino, Italy

**Gilbert Saporta**

PhD, Prof.

Pierre and Marie Curie

University, Paris, France

**Raimund Ubar**

Doctor of Sc., Prof.

University of Technology

Tallinn, Estonia

**Nina Yevtushenko**

Doctor of Sc., Prof.

Ivannikov V.P. ISP RAS

Moscow, Russia

**Yervant Zorian**

PhD, Fellow & Chief Architect,

Synopsys, Mountain View,

CA, USA

## Учредитель – Томский государственный университет

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Горцев Александр Михайлович** – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599

**Смагин Валерий Иванович** – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599

**Нежелская Людмила Алексеевна** – ответственный секретарь, доц., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ  
E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

**Воробейчиков Сергей Эрикович** – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ

**Вишневецкий Владимир Миронович** – проф., д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)

**Кошкин Геннадий Михайлович** – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ

**Костюк Юрий Леонидович** – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теоретической информатики ТГУ

**Матросова Анжела Юрьевна** – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры компьютерной безопасности ТГУ

**Назаров Анатолий Андреевич** – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теории вероятностей и математической статистики ТГУ

**Самуйлов Константин Евгеньевич** – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (г. Москва)

**Семенкин Евгений Станиславович** – проф., д-р техн. наук, проф. каф. системного анализа и исследования операций, СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)

**Сушенко Сергей Петрович** – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики ТГУ

**Фархадов Маис Паша Оглы** – д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)

**Цициашвили Гурами Шалвович** – проф., д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН, проф. ДВФУ (г. Владивосток)

Адрес редакции и издателя: 634050, Томск, пр. Ленина, 36

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Институт прикладной математики и компьютерных наук,

отделение прикладной математики

Телефон / факс: +73822529599

E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**Ана Роза Ковали**

д-р. философии, проф.

Университет VII Париж, Франция

**Александр Дудин**

д.ф.-м.н., проф.

БГУ, Минск,

Республика Беларусь

**Рейндерт Нобель**

д-р., доцент

Свободный университет, Амстердам,

Нидерланды

**Енцо Орзингер**

д-р. философии, проф.

Римский университет, Италия

**Паоло Принетто**

проф. Политехнический институт

Турин, Италия

**Жильберт Сапорта**

д-р. философии, проф.

Университет им. Пьера и Марии

Кюри, Париж, Франция

**Раймонд Убар**

д-р. проф.

Технологический университет,

Таллинн, Эстония

**Нина Евтушенко**

д-р. техн. наук, проф.

ИСП РАН им. Иваницова В.П.,

Москва, Россия

**Ервант Зорян**

д-р. философии,

гл. научный сотр.

Фирмы «Синописис»,

США

### JOURNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031)

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- control of dynamical systems,
- mathematical modeling,
- data processing,
- informatics and programming,
- discrete function and automation,
- designing and diagnostics of computer systems.

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

### О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке

Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- управление динамическими системами,
- математическое моделирование,
- обработка информации,
- информатика и программирование,
- дискретные функции и автоматы,
- проектирование и диагностика вычислительных систем.

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).

Правила оформления статей приведены на сайте:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

**СОДЕРЖАНИЕ**

**CONTENTS**

**УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ**

**CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS**

**Паршуков А.Н.**  
 Метод формирования семейства модальных регуляторов полного порядка с эллиптической областью принадлежности коэффициентов ..... 4

**Фейзиев Ф.Г., Мехтиева М.Р.**  
 Задача синтеза одного класса двоичных 3D-многомерных нелинейных модулярных динамических систем ..... 14

**Parshukov A.N.**  
 A method for forming a family of full-order modal regulators with an elliptic domain of coefficients belonging ..... 4

**Feyziyev F.G., Mekhtiyeva M.R.**  
 The problem of synthesis of one class of binary 3d-multidimensional nonlinear modular dynamic systems ..... 14

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**MATHEMATICAL MODELING**

**Кузьмин В.Н., Шуваев Ф.Л., Розганов М.В.**  
 Сравнительный анализ моделей случайных графов ..... 23

**Полховская А.В., Данилюк Е.Ю., Моисеева С.П., Бобкова О.С.**  
 Вероятностная модель системы совместного доступа с коллизиями, *H*-настойчивостью и отказами ..... 35

**Назаров А.А., Павлова Е.А.**  
 Исследование СМО вида ММРР|М|N с обратной связью методом асимптотического анализа ..... 47

**Kuzmin V.N., Shuvaev F.L., Rozganov M.V.**  
 Comparative analysis of random graph models ..... 23

**Polkhovskaya A.V., Danilyuk E.Yu., Moiseeva S.P., Bobkova O.S.**  
 The probabilistic model of sharing system with collisions, *H*-persistence and rejections data processing ..... 35

**Nazarov A.A., Pavlova E.A.**  
 Asymptotical analysis of queueing system ММРР|М|N with feedback ..... 47

**ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ**

**DATA PROCESSING**

**Горцев А.М., Веткина А.В.**  
 ММ-оценка параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени в полусинхронном потоке событий в особом случае ..... 58

**Кульневич А.Д., Косечкин А.А., Карев С. В., Замятин А.В.**  
 Подход к распознаванию именованных сущностей на примере технологических терминов в условиях ограниченной обучающей выборки ..... 71

**Меликов А.З., Мехбалиева Э.В.**  
 Системы обслуживания с гетерогенными серверами и зависящими от состояния скачкообразными приоритетами ..... 82

**Gortsev A.M., Vetkina A.V.**  
 MM-estimation of the parameter of the uniform distribution of the duration of unextendable random dead time in the semi-synchronous events flow in the special case ..... 58

**Kulnevich A.D., Koshechkin A.A., Karev S.V., Zamyatin A.V.**  
 An approach to recognizing named entities using the example of technological terms in a limited training sample ..... 71

**Melikov A.Z., Mekhbaliyeva E.V.**  
 Queuing systems with heterogeneous servers and state-dependent jump priorities informatics and programming ..... 82

**ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

**INFORMATICS AND PROGRAMMING**

**Shchetinin Eu.Yu., Sevastyanov L.A.**  
 Automated detection of COVID-19 coronavirus infection based on analysis of chest X-ray images by deep learning methods ..... 97

**Shchetinin Eu.Yu., Sevastyanov L.A.**  
 Automated detection of COVID-19 coronavirus infection based on analysis of chest X-ray images by deep learning methods ..... 97

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА  
 ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ**

**DESIGNING AND DIAGNOSTICS  
 OF COMPUTER SYSTEMS**

**Ефанов Д.В.**  
 Структуры схем коррекции ошибок на основе логического дополнения с контролем вычислений по коду с суммированием взвешенных переходов от разряда к разряду ..... 106

**Efanov D.V.**  
 Error correction circuits structures based on Boolean complement with calculation checking by code with summation of weighted transitions from bit to bit ..... 106

## УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

## CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Научная статья

УДК 681.5

doi: 10.17223/19988605/58/1

**Метод формирования семейства модальных регуляторов полного порядка с эллиптической областью принадлежности коэффициентов****Андрей Николаевич Паршуков***Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия, anparshukov@mail.ru*

**Аннотация.** Разработан метод формирования семейства модальных регуляторов с эллиптической областью принадлежности коэффициентов, гарантирующих заданное качество управления. Данный метод оформлен в виде алгоритма вычисления оценки сверху радиуса эллиптической области коэффициентов. Эффективность метода проиллюстрирована примером.

**Ключевые слова:** модальное управление; регулятор полного порядка; семейство регуляторов с эллиптической областью принадлежности коэффициентов

**Для цитирования:** Паршуков А.Н. Метод формирования семейства модальных регуляторов полного порядка с эллиптической областью принадлежности коэффициентов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 58. С. 4–13. doi: 10.17223/19988605/58/1

Original article

doi: 10.17223/19988605/58/1

**A method for forming a family of full-order modal regulators with an elliptic domain of coefficients belonging****Andrej N. Parshukov***Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation, anparshukov@mail.ru*

**Abstract.** The problem of synthesis of regulators consists of two sequentially solved problems:

1) find the regulator (if it exists) such that it provides stability and a given quality of control to a closed system;

2) if possible, find not one regulator, but some set: a set of controller settings on the one hand guarantees that some inaccuracies in the controller settings will not lead to a violation of the specified control quality, and on the other hand, it will allow you to set the task of finding the optimal controller settings from an acceptable set.

Currently, a large number of methods for the synthesis of regulators have been developed, taking into account both the features of the task of the mathematical model of the control object and the features of the task of the control objectives: as examples, we can cite works on the synthesis of PI and PID regulators, on modal control, on the synthesis of stabilizing feedbacks in the presence of structural and parametric

uncertainty in the model of the control object, etc. Thus, the first of these tasks can be attributed to the solved ones.

Two approaches can be attributed to the solution of the second problem: the  $D$ -partitioning method and the Yula-Kucher parametrization. The  $D$ -partitioning method allows you to build stability regions of a closed control system in the space of one or two parameters (most often, the parameters of the controller). It is known that the  $D$ -partitioning method can also be used if it is required to provide the specified root quality indicators: root stability margin and oscillation. A significant disadvantage of the  $D$ -partitioning method is that in the case of several variables, only two independent variables should be left as variable, and the rest should be artificially fixed. The parametrization of Yula-Kucera reduces the problem of forming stabilizing regulators to solving the polynomial Bezu equation. However, these methods do not solve the problem of forming a family of regulators that provide a given quality of control.

The modal control method allows synthesizing a controller for control objects of arbitrary order; this method assumes that the control object is described by a linear differential equation of the  $n$ -th order (where  $n$  is any non-negative integer) without delay. The modal regulator is also sought in the form of a linear differential equation. The quality of control is given in the form of a region  $S$  on a complex plane that determines the desired location of the poles of the transfer function of a closed system. It has been repeatedly proved in the literature that a modal regulator of the order  $n-1$  and higher provides any given location of the poles of the transfer function of a closed system, and thereby guarantees stability and specified root quality indicators for a closed system. The  $(n-1)$ -th order regulator is called a full-order modal regulator.

In this article, a method for forming a family of full-order modal regulators with an elliptic domain of coefficients that guarantee a given control quality is developed. This method is a generalization of  $D$ -partitioning. It should be noted that there are no analytical methods for solving this problem, in this regard, it is of interest to obtain estimates (from above and from below) of the ellipsoid radius in the space of the regulator coefficients. The paper proposes an algorithm for calculating an estimate from above of the radius of the elliptical region of setting the coefficients of the regulator. The effectiveness of the method is illustrated by an example.

The expansion of the range of permissible values of the regulator coefficients can be obtained by combining two (or more) ellipsoids with different orientation of the semi-axes. Therefore, the proposed method can be used to form in the space of the coefficients of the regulator of the boundary of the stability region and a given control quality.

**Keywords:** modal control; a full-order regulator; a family of regulators with an elliptic domain of coefficients belonging

**For citation:** Parshukov, A.N. (2022) A method for forming a family of full-order modal regulators with an elliptic domain of coefficients belonging. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 58. pp. 4–13. doi: 10.17223/19988605/58/1

Проблема синтеза регуляторов состоит из двух последовательно решаемых задач:

1) найти регулятор (если он существует), обеспечивающий устойчивость и заданное качество управления замкнутой системе;

2) по возможности найти не один регулятор, а некоторое множество: множество настроек регулятора, с одной стороны, гарантирует, что некоторые неточности в настройках регулятора еще не приведут к нарушению заданного качества управления, а с другой – позволит поставить задачу поиска оптимальных настроек регулятора из допустимого множества.

В настоящее время разработано большое количество методов синтеза регуляторов, учитывающих как особенности задания математической модели объекта управления, так и особенности задания целей управления; в качестве примеров можно привести работы по синтезу ПИ- и ПИД-регуляторов [1], по модальному управлению [2–3], по синтезу стабилизирующих обратных связей при наличии структурно-параметрической неопределенности в модели объекта управления [4–6] и т.д. Таким образом, первую из указанных задач можно отнести к решенным.

К реализации второй задачи можно отнести два подхода: метод  $D$ -разбиения и параметризацию Юлы–Кучеры. Метод  $D$ -разбиения предложен в работе Ю.И. Неймарка [7], он позволяет строить об-

ласти устойчивости замкнутой системы управления в пространстве одного или двух параметров (чаще всего – параметров регулятора). Известно (см.: [8]), что метод D-разбиения также может быть использован тогда, когда требуется обеспечить заданные корневые показатели качества: корневой запас устойчивости и колебательность. Существенным недостатком метода D-разбиения является то, что в случае нескольких переменных в качестве варьируемых следует оставить только две независимые переменные, а остальные искусственно зафиксировать. Параметризация Юлы–Кучеры [9–11] сводит задачу формирования стабилизирующих регуляторов к решению полиномиального уравнения Безу. Однако указанные методы не решают задачу формирования семейства регуляторов, обеспечивающих заданное качество управления.

В настоящей статье разработан метод формирования семейства модальных регуляторов полного порядка с эллиптической областью принадлежности коэффициентов, гарантирующих заданное качество управления. Следует отметить, что аналитических методов решения поставленной задачи не существует, в этой связи представляет интерес получение оценок (сверху и снизу) радиуса эллипсоида в пространстве коэффициентов регулятора. В работе предложен алгоритм вычисления оценки сверху радиуса эллиптической области задания коэффициентов регулятора.

В статье приняты следующие обозначения:  $\doteq$  – равно по определению;  $R^n$ ,  $C^n$  – пространства  $n$ -мерных векторов  $\mathbf{x} \doteq [x_1; \dots; x_n]$ , коэффициенты которых соответственно вещественные или мнимые числа;  $\mathbf{A}^T$  – матрица, транспонированная по отношению к исходной матрице  $\mathbf{A}$ ;  $\mathbf{0}$  – матрица (или вектор) необходимой размерности, состоящая из нулей;  $s$  – комплексная переменная;  $\bar{s}$  – число, комплексно сопряженное числу  $s$ ;  $S$  – область на  $C^1$ ;  $\partial S$  – граница области  $S$ ;  $\text{int } S$  – внутренняя часть области  $S$ ;  $t$  – непрерывное время;  $p^i$  – оператор  $i$ -й степени дифференцирования по времени:

$$p^i \doteq d^i/dt^i; \quad i \in \overline{0, n}, \quad p^0 \doteq 1.$$

Полиномиальным оператором степени  $n$  будем называть дифференциальный оператор вида

$$a(n, p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i,$$

где  $a_i$  – постоянные коэффициенты. В изображениях по Лапласу оператору  $a(n, p)$  соответствует алгебраический полином

$$a(n, s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i,$$

определенный на  $C^1$ ; здесь за  $s \in C^1$  обозначена переменная преобразования Лапласа.

Множество корней (нулей) полинома  $a(n, s)$  будем обозначать  $\Lambda(a)$ :

$$\Lambda(a) \doteq \{ \lambda_i : a(n, \lambda_i) = 0, \quad i \in \overline{1, n} \}.$$

## 1. Метод формирования семейства модальных регуляторов полного порядка с эллиптической областью принадлежности коэффициентов

### 1.1. Классическая постановка задачи синтеза модального регулятора

Изложим классическую постановку задачи синтеза модального регулятора следуя [2. С. 5–20].

Пусть одномерный линейный стационарный динамический объект управления задан дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка

$$a(n, p)y(t) = b(m, p)u(t), \quad n > m, \quad a_n = 1, \quad (1)$$

где  $y(t)$  – управляемая переменная (выходной сигнал),  $u(t)$  – управляющая переменная (входной сигнал). Модальный регулятор ищется в виде дифференциального уравнения  $l$ -го порядка

$$\beta(l, p)u(t) = \alpha(l, p)y(t) + \chi(l, p)g(t), \quad \beta_l = 1, \quad (2)$$

где  $g(t)$  – входной сигнал для замкнутой системы. Уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$a^{c.l.}(n+l, p)y(t) = b^{c.l.}(m+l, p)g(t), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} a^{c.l.}(n+l, p) &= a(n, p)\beta(l, p) - b(m, p) \cdot \alpha(l, p), \\ b^{c.l.}(m+l, p) &= b(m, p)\chi(l, p). \end{aligned}$$

Качество управления назначается в виде области  $S$ , определяющей допустимое расположение корней полинома  $a^{c.l.}(n+l, s)$  на  $C^1$ , что может быть записано в виде целевого условия

$$\Lambda(a^{c.l.}) \subset S. \quad (4)$$

Предполагается, что  $S$  удовлетворяет следующим требованиям: расположена в ограниченной части  $C^1$  слева от мнимой оси; односвязна; для любой точки  $s \in S$  также выполняется  $\bar{s} \in S$ .

В классической постановке задачи модального управления цель управления назначается эталонной системой (эталонном)

$$a^{et.}(n+l, p)y(t) = b^{et.}(m+l, p)g(t), \quad a_{n+l}^{et.} = 1, \quad (5)$$

при этом характеристический полином эталона  $a^{et.}(n+l, s)$  выбирается из условия

$$\Lambda(a^{et.}) \subset \text{int } S. \quad (6)$$

Коэффициенты операторов  $\beta(l, p)$  и  $\alpha(l, p)$  регулятора (2) находятся из условия

$$a(n, s)\beta(l, s) - b(m, s)\alpha(l, s) \equiv a^{et.}(n+l, s). \quad (7)$$

Тождеству (7) соответствует система из  $n+l$  линейных алгебраических уравнений относительно  $2l+1$  неизвестных. В [3, с. 9–12] доказано, что данная система всегда имеет решение, если  $l = n-1$ .

Модальные регуляторы порядка  $n-1$  в монографии [3. С. 11] предложено называть регуляторами *полного порядка*. Составление системы линейных алгебраических уравнений для расчета модального регулятора полного порядка описано в книге [12. С. 10–14] и в данной работе не приводится. Следует отметить, что выбор полинома  $\chi(n-1, s)$  в (2) не влияет на выполнение целевого условия (4) и в классической задаче модального управления не рассматривается.

## 1.2. Постановка задачи формирования семейства модальных регуляторов полного порядка с эллиптической областью принадлежности коэффициентов

Далее под *модальным регулятором* понимается модальный регулятор полного порядка, под *эталонном* – характеристический полином  $a^{et.}(2n-1, s)$  системы (5).

Свобода в выборе эталона  $a^{et.}(2n-1, s)$  (см. условие (6)) означает, что существуют такие вариации коэффициентов регулятора, которые еще не выведут корни характеристического полинома замкнутой системы за границу области  $S$ . В этой связи естественно поставить вопрос о формировании семейства регуляторов, для которых еще выполняется целевое условие (4).

Итак, пусть заданы объект управления (1), область  $S$ , и выбран эталон  $a^{et.0}(2n-1, s)$  такой, что

$$\Lambda(a^{et.0}) \subset \text{int } S. \quad (8)$$

Для определенности выбранный эталон будем называть номинальным. Пусть

$$\beta^0(n-1, s) = s^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \beta_i^0 s^i, \quad \alpha^0(n-1, s) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^0 s^i,$$

полиномы модального регулятора, полученные в результате синтеза модального регулятора с номинальным эталоном. Непосредственно из описанной технологии синтеза модального регулятора следует, что полиномы  $\beta^0(n-1, s)$ ,  $\alpha^0(n-1, s)$  и  $a^{et.0}(2n-1, s)$  связаны тождеством

$$a(n, s)\beta^0(n-1, s) - b(m, s)\alpha^0(n-1, s) \equiv a^{et.0}(2n-1, s).$$

Любой другой эталон  $a^{et.}(2n-1, s)$  может быть рассмотрен как вариация от номинального, т.е.

$$a^{et.}(2n-1, s) = a^{et.0}(2n-1, s) + a(n, s)\delta\beta(n-2, s) - b(m, s)\delta\alpha(n-1, s), \quad (9)$$

где  $\delta\beta(n-1, s)$  и  $\delta\alpha(n-1, s)$  – вариации полиномов регулятора

$$\delta\beta(n-1, s) = \sum_{i=0}^{n-2} \delta\beta_i s^i, \quad \delta\alpha(n-1, s) = \sum_{i=0}^{n-1} \delta\alpha_i s^i.$$

Обозначим за  $\mathbf{x}^0$  вектор коэффициентов *номинального* регулятора

$$\mathbf{x}^0 \doteq \text{col}[\beta_0^0; \dots; \beta_{n-2}^0; \alpha_0^0; \dots; \alpha_{n-1}^0],$$

а за  $\mathbf{x}$  – вектор вариации коэффициентов регулятора

$$\mathbf{x} \doteq \text{col}[\delta\beta_0; \dots; \delta\beta_{n-2}; \delta\alpha_0; \dots; \delta\alpha_{n-1}].$$

Условие выхода корней эталона  $a^{et}(2n-1, s)$  в точке  $s$  границы области  $S$ :

$$\begin{cases} \text{Re}(a^{et}(2n-1, s)) = 0, \\ \text{Im}(a^{et}(2n-1, s)) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Подставляя в систему (10) выражение для полинома  $a^{et}(2n-1, s)$  согласно (9) получаем

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}, \quad (11)$$

здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = & \begin{bmatrix} \text{Re}(a(n, s)); & \text{Re}(a(n, s) \cdot s); & \dots; & \text{Re}(a(n, s) \cdot s^{n-2}); \\ \text{Im}(a(n, s)); & \text{Im}(a(n, s) \cdot s); & \dots; & \text{Im}(a(n, s) \cdot s^{n-2}); \\ -\text{Re}(b(m, s)); & -\text{Re}(b(m, s) \cdot s); & \dots; & -\text{Re}(b(m, s) \cdot s^{n-1}); \\ -\text{Im}(b(m, s)); & -\text{Im}(b(m, s) \cdot s); & \dots; & -\text{Im}(b(m, s) \cdot s^{n-1}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{d} = & \begin{bmatrix} -\text{Re}(a^{et,0}(2n-1, s)) \\ -\text{Im}(a^{et,0}(2n-1, s)) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

а  $\mathbf{x}$  – вектор вариации коэффициентов регулятора (определен выше).

В системе уравнений (11) коэффициенты матрицы  $\mathbf{C}$  и вектора  $\mathbf{d}$  зависят от точки  $s \in \partial S$ . Обозначим за  $\Omega$  множество решений системы (11) в точке  $s$ :

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in R^{2n-1} \mid \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d} \right\}.$$

Если в какой-то точке  $s \in \partial S$  множество  $\Omega$  пусто, следовательно, нет таких векторов  $\mathbf{x}$ , которые бы выводили корни эталона на границу области  $S$  в этой точке.

Рассмотрим в пространстве векторов  $\mathbf{x}^0 + \mathbf{x} \in R^{2n-1}$  область  $X$  вида

$$X = \left\{ \mathbf{x}^0 + \mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \doteq \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \leq \rho^2 \right\}. \quad (12)$$

Матрицу  $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$ ,  $i, j = \overline{1, 2n-1}$  в (12) будем считать заданной и удовлетворяющей следующим условиям: а) положительно определена; б) матрица Гесса  $\mathbf{H}$  функции  $f(\mathbf{x})$

$$\mathbf{H} = [h_{ij}], \quad h_{ij} \doteq \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} 2q_{ii}, & j = i, \\ q_{ij}, & j \neq i, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, 2n-1},$$

положительно определена; в)  $\exists \mathbf{H}^{-1}$ .

Поставим следующую задачу: найти максимальное значение параметра  $\rho$  в (12) при условии

$$\Lambda(a^{et}) \subset S.$$

Очевидно, что решение данной задачи существует, обозначим его  $\rho^*$ .

Значение  $\rho^*$  определяет в пространстве коэффициентов регулятора эллипсоид  $X$  с центром в точке  $\mathbf{x}^0$ , такой что для любого  $\mathbf{x}$ , удовлетворяющего условию

$$\mathbf{x}^0 + \mathbf{x} \in X,$$

корни характеристического полинома замкнутой системы (или корни эталона) еще не выходят из области  $S$ . Поставленную задачу поиска  $\rho^*$  назовем **задачей формирования семейства модальных регуляторов полного порядка с эллиптической областью принадлежности коэффициентов**.

### 1.3. Алгоритм формирования семейства модальных регуляторов с эллиптической областью принадлежности коэффициентов

Задачу поиска  $\rho^*$  можно представить в виде:

$$\rho^* = \min_{s \in \partial S} \rho(s), \quad (13)$$

где  $\rho(s) = \infty$ , в тех точках  $s \in \partial S$ , где множество  $\Omega$  пусто, и

$$\rho(s) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x})^{1/2}, \quad (14)$$

в остальных точках  $s \in \partial S$ . Далее для удобства рассуждений положим, что выбрана точка  $s \in \partial S$ . Определить, совместна ли в точке  $s$  система уравнений (11) можно по теореме Кронекера–Капелли:

$$\text{rank } \mathbf{C} = \text{rank } \hat{\mathbf{C}}, \quad (15)$$

где  $\mathbf{C}$  – матрица системы (11), а  $\hat{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}|\mathbf{d}]$  – присоединенная матрица.

Задача (14) представляет собой задачу поиска условного экстремума квадратичной функции  $f(\mathbf{x})$  с ограничениями типа линейных уравнений (11). Данная задача может быть решена аналитически методом множителей Лагранжа. Представим задачу (14) в следующей форме:

$$f(\mathbf{x}) \doteq \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \rightarrow \min, \quad (16)$$

при условиях

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 \mathbf{x} - d_1 = 0, \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{x} - d_2 = 0, \end{cases} \quad (17)$$

где  $\mathbf{c}_1$  и  $\mathbf{c}_2$  соответственно 1-я и 2-я строки матрицы  $\mathbf{C}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= [\text{Re}(a(n, s)); \text{Re}(a(n, s) \cdot s); \dots; \text{Re}(a(n, s) \cdot s^{n-2}); \\ &\quad - \text{Re}(b(m, s)); - \text{Re}(b(m, s) \cdot s); \dots; - \text{Re}(b(m, s) \cdot s^{n-1})], \\ \mathbf{c}_2 &= [\text{Im}(a(n, s)); \text{Im}(a(n, s) \cdot s); \dots; \text{Im}(a(n, s) \cdot s^{n-2}); \\ &\quad - \text{Im}(b(m, s)); - \text{Im}(b(m, s) \cdot s); \dots; - \text{Im}(b(m, s) \cdot s^{n-1})], \end{aligned}$$

а  $d_1$  и  $d_2$  – элементы вектора  $\mathbf{d}$ :

$$d_1 = -\text{Re}(a^{er,0}(2n-1, s)), \quad d_2 = -\text{Im}(a^{er,0}(2n-1, s)).$$

По условиям задачи система уравнений (17) совместна.

Для решения задачи (16)–(17) составляем функцию Лагранжа:

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 (\mathbf{c}_1 \mathbf{x} - d_1) + \lambda_2 (\mathbf{c}_2 \mathbf{x} - d_2),$$

здесь  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – множители Лагранжа. Необходимое условие экстремума функции  $L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2)$

$$\begin{cases} \partial L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2) / \partial x_i = 0, \quad i = \overline{1, 2n-1}, \\ \partial L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2) / \partial \lambda_1 = 0, \\ \partial L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2) / \partial \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

после подстановки производных функции Лагранжа принимает следующий вид:

$$\begin{cases} 2q_{ii}x_i + \sum_{j \neq i} q_{ij}x_j + \lambda_1 \cdot c_{1i} + \lambda_2 \cdot c_{2i} = 0, \quad i = \overline{1, 2n-1}, \\ \mathbf{c}_1 \mathbf{x} - d_1 = 0, \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{x} - d_2 = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Пусть  $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$  – решение системы (18), тогда точка  $\mathbf{x}^*$  является критической (подозрительна на экстремум). Достаточным условием минимума функции  $f(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}^*$  является положительная определенность гессиана  $\mathbf{H}$ , что обеспечено условиями задачи. Найдем критические точки  $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$ , для этого систему уравнений (18) запишем с помощью матрицы  $\mathbf{H}$ :

$$\begin{cases} \mathbf{H}\mathbf{x} + \lambda_1 \cdot \mathbf{c}_1^T + \lambda_2 \cdot \mathbf{c}_2^T = \mathbf{0}, \\ \mathbf{c}_1\mathbf{x} - d_1 = 0, \\ \mathbf{c}_2\mathbf{x} - d_2 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Система уравнений (17) входит в систему (19).

При решении системы (19) возможны следующие ситуации: а) одно из уравнений системы (17) обращается в тождество; б) ни одно из уравнений системы (17) не обращается в тождество. Одновременное обращение в тождество всех уравнений системы (17) исключено условием (8).

**Утверждение.** Решение системы уравнений (19):

$$\begin{cases} \mathbf{x}^* = d_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T (\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)^{-1}, \\ \lambda_1^* = -d_1 (\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)^{-1}, \end{cases} \quad (20)$$

в точках  $s \in \partial S$ , где обращается в тождество 2-е уравнение системы (17), или

$$\begin{cases} \mathbf{x}^* = d_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T (\mathbf{c}_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T)^{-1}, \\ \lambda_2^* = -d_2 (\mathbf{c}_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T)^{-1}, \end{cases} \quad (21)$$

в точках  $s \in \partial S$ , где обращается в тождество 1-е уравнение системы (17), или

$$\begin{cases} \mathbf{x}^* = -\mathbf{H}^{-1} (\lambda_1^* \cdot \mathbf{c}_1^T + \lambda_2^* \cdot \mathbf{c}_2^T), \\ \lambda_1^* = -\frac{\mathbf{c}_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T d_1 - \mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T d_2}{(\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)(\mathbf{c}_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T) - (\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T)(\mathbf{c}_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)}, \\ \lambda_2^* = \frac{\mathbf{c}_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T d_1 - \mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T d_2}{(\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)(\mathbf{c}_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T) - (\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T)(\mathbf{c}_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)}. \end{cases} \quad (22)$$

в остальных точках  $s \in \partial S$ .

**Доказательство.** Докажем формулу (20). В этом случае система (19) принимает вид:

$$\begin{cases} \mathbf{H}\mathbf{x} + \lambda_1 \mathbf{c}_1^T = \mathbf{0}, \\ \mathbf{c}_1\mathbf{x} - d_1 = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Решение первого уравнения системы (23) с учетом того, что  $\exists \mathbf{H}^{-1}$ , может быть записано в виде:

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T \lambda_1,$$

подставляя его во второе уравнение системы (23) получаем

$$-(\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T) \lambda_1 - d_1 = 0. \quad (24)$$

Число  $(\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)$  не может быть равно нулю, так как в противном случае из уравнения (24) следовало бы, что  $d_1 = 0$ , что исключено условием (8). Разделив обе части уравнения (24) на  $(\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)$ , получаем

$$\lambda_1^* = -d_1 (\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)^{-1}.$$

В результате получили формулу (20). Что и требовалось доказать.

Формулы (21) и (22) доказываются аналогично.

Вычислив вектор  $\mathbf{x}^*$  по формулам (20)–(22) находим решение задачи (14):

$$\rho(s) = \left( (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}^* \right)^{1/2}. \quad (25)$$

Приведенные рассуждения можно рассматривать как доказательство следующего алгоритма формирования семейства модальных регуляторов с эллиптической областью принадлежности коэффициентов. Очевидно, что получить аналитическое выражение для  $\rho^*$  возможно только в исключительных случаях, поэтому видится только численная реализация данного алгоритма, что требует конечного числа точек  $s$  границы области  $S$ , т.е.

$$\partial S = \{s_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad N < \infty\}.$$

## 2. Алгоритм формирования семейства модальных регуляторов

Шаг 1. Принять  $k = 1$ .

Шаг 2. Для точки  $s_k \in \partial S$  составить систему уравнений (11).

Шаг 3. Проверить полученную систему уравнений на совместность по условию (15). Если система несовместна – перейти на следующий шаг, если совместна – перейти на шаг 5.

Шаг 4. Принять  $\rho(s_k) = \infty$ . Перейти на шаг 9.

Шаг 5. Проверить, обращается ли в тождество 2-е уравнение системы, если да, то  $\mathbf{x}^*$  вычислить по формуле (20) и перейти на шаг 8. В противном случае перейти на следующий шаг.

Шаг 6. Проверить, обращается ли в тождество 1-е уравнение системы, если да, то  $\mathbf{x}^*$  вычислить по формуле (21) и перейти на шаг 8. В противном случае перейти на следующий шаг.

Шаг 7. Вычислить  $\mathbf{x}^*$  по формуле (22) и перейти на следующий шаг.

Шаг 8. Вычислить  $\rho(s_k)$  по формуле (25).

Шаг 9. Принять  $k = k + 1$ .

Шаг 10. Проверить, выполняется ли условие  $k = N$ . Если да, то перейти на следующий шаг, в противном случае – перейти на шаг 2.

Шаг 11. Вычислить  $\rho^*$  по формуле (13). Останов.

## 3. Пример формирования семейства регуляторов

Объект управления задан дифференциальным уравнением

$$a(3, p)y(t) = b(2, p)u(t),$$

где

$$a(3, p) = (s + 21)(s + 3)(s - 2) = p^3 + 22p^2 + 15p - 126,$$

$$b(2, p) = 10(s + 20)(s + 6) = 10p^2 + 260p + 1200.$$

Требования к качеству управления замкнутой системой заданы в виде области

$$S = \{s \mid \eta_2 \leq -\operatorname{Re}(s) \leq \eta_1, \quad |\operatorname{Im}(s_i)/\operatorname{Re}(s_i)| \leq \zeta_1\} \subset C^1,$$

где  $\eta_1 = 25$ ,  $\eta_2 = 2$ ,  $\zeta_1 = 1$ . Область  $S$  на  $C^1$  расположена в левой полуплоскости, имеет трапециевидную форму и удовлетворяет всем вышеперечисленным требованиям. Параметр  $\eta_2$  определяет допустимый корневой запас устойчивости, а  $\zeta_1$  – допустимую колебательность.

Регулятор полного порядка ищется на классе дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\ddot{u}(t) + \beta_1^0 \dot{u}(t) + \beta_0^0 u(t) = \alpha_2^0 \ddot{y}(t) + \alpha_1^0 \dot{y}(t) + \alpha_0^0 y(t) + \chi_0 g(t). \quad (26)$$

Номинальный эталон  $a^{et.0}(5, s)$  будем назначать по биномиальной схеме [2. С. 6] с параметром  $\omega_0 = 5$ :

$$a^{et.0}(5, s) = (s + \omega_0)^5 = s^5 + 25s^4 + 250s^3 + 1250s^2 + 3125s + 3125.$$

В соответствии со схемой синтеза модального регулятора [12. С. 10–14] нахождение коэффициентов регулятора (26) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}, \quad (27)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{b}$  – соответственно матрица и вектор, составленные из коэффициентов операторов  $a(3, p)$  и  $b(2, p)$  объекта управления и характеристического полинома эталона  $a^{et.0}(5, s)$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -126 & 0 & -1200 & 0 & 0 \\ 15 & -126 & -260 & -1200 & 0 \\ 22 & 15 & -10 & -260 & -1200 \\ 1 & 22 & 0 & -10 & -260 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3125 \\ 3125 \\ 1376 \\ 235 \\ 3 \end{bmatrix},$$

а  $\mathbf{x}^0 = \text{col}[\beta_0^0; \beta_1^0; \alpha_0^0; \alpha_1^0; \alpha_2^0]$  – вектор коэффициентов регулятора. Решая (27) получаем

$$\mathbf{x}^0 = \text{col}[990,2; 171,0; -106,6; 14,9; 16,8],$$

таким образом, регулятор полного порядка (номинальный регулятор)

$$\ddot{u}(t) + 171,0\dot{u}(t) + 990,2u(t) = 16,8\ddot{y}(t) + 14,9\dot{y}(t) - 106,6y(t) + \chi_0 g(t).$$

*Задача формирования семейства модальных регуляторов.* Выберем  $\mathbf{Q} = \text{diag}(1; 1; 1; 1; 1)$ , матрица  $\mathbf{Q}$  положительно определена. Матрица Гесса  $\mathbf{H} = \text{diag}(2; 2; 2; 2; 2)$  также положительно определена, обратная к ней матрица существует:  $\mathbf{H}^{-1} = \text{diag}(0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5)$ . Требуется найти  $\rho^*$ .

*Решение.* В таблице приведены выбранные точки  $s_k$  на границе области  $S$  и соответствующие им значения  $\rho(s_k)$ . Следует отметить, что в точках  $s_k$  и  $\bar{s}_k$  значения функции  $\rho(s_k)$  будут одинаковыми.

Результаты расчётов функции  $\rho(s_k)$

$s_k$	$-2,0 + 0,0j$	$-2,0 + 0,2j$	$-2,0 + 0,4j$	$-2,0 + 0,6j$	$-2,0 + 0,8j$	$-2,0 + 1,0j$	$-2,0 + 1,2j$
$\rho(s_k)$	0,07	0,54	0,53	0,51	0,48	0,45	0,41
$s_k$	$-2,0 + 1,4j$	$-2,0 + 1,6j$	$-2,0 + 1,8j$	$-2,0 + 2,0j$	$-4,3 + 4,3j$	$-6,6 + 6,6j$	
$\rho(s_k)$	0,38	0,34	0,30	0,26	0,25	0,73	
$s_k$	$-8,9 + 8,9j$	$-11,2 + 11,2j$	$-13,5 + 13,5j$	$-15,8 + 15,8j$	$-18,1 + 18,1j$	$-20,4 + 20,4j$	
$\rho(s_k)$	2,62	5,46	8,96	12,61	16,07	19,23	
$s_k$	$-22,7 + 22,7j$	$-25,0 + 25,0j$	$-25,0 + 22,5j$	$-25,0 + 20,0j$	$-25,0 + 17,5j$	$-25,0 + 15,0j$	
$\rho(s_k)$	22,11	24,79	26,49	27,81	28,65	28,89	
$s_k$	$-25,0 + 12,5j$	$-25,0 + 10,0j$	$-25,0 + 7,5j$	$-25,0 + 5,0j$	$-25,0 + 2,5j$	$-25,0 + 0,0j$	
$\rho(s_k)$	28,26	26,31	25,26	15,13	6,48	5,36	

Из таблицы получаем, что минимальное значение функции  $\rho(s_k)$  достигается в точке  $(-2,0 + 0,0j)$  и равно 0,07. Задача решена:  $\rho^* = 0,07$ .

### Заключение

В статье разработан метод формирования семейства модальных регуляторов с эллиптической областью принадлежности коэффициентов, гарантирующих заданное качество управления. Данный метод оформлен в виде алгоритма вычисления оценки сверху радиуса эллиптической области коэффициентов. Расширение области допустимых значений коэффициентов регулятора можно получить путем объединения двух (и более) эллипсоидов с различной ориентацией полуосей. Следовательно, предложенный метод может использоваться для формирования (в пространстве коэффициентов регулятора) границы области устойчивости и заданного качества управления.

### Список источников

1. Ротач В.Я. Теория автоматического управления. М. : Изд. дом МЭИ, 2004. 400 с.
2. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М. : Машиностроение, 1976. 184 с.
3. Соловьев И.Г. Методы мажоризации в анализе и синтезе адаптивных систем. Новосибирск : Наука, 1992. 191 с.
4. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // Автоматика и телемеханика. 2021. № 1. С. 3–54.
5. Баландин Д.В., Коган М.М., Кривдина Л.Н., Федюков А.А. Синтез обобщенного  $H_\infty$ -оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. 2014. № 1. С. 3–22.
6. Kogan M.M. Optimal discrete-time  $H_\infty/\gamma_0$  filtering and control under unknown covariances // Int. J. Control. 2016. V. 89, № 4. P. 691–700.

7. Неймарк Ю.И. Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива // Автоматика и телемеханика. 1948. № 3 (9). С. 190–203.
8. Зубов И.В. Проблема устойчивости процессов управления. Л. : Судостроение, 1980. 253 с.
9. Youla D.C., Jabr H.A., Bonjorno J.J. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. Part II: The multivariable case // IEEE Trans. Autom. Control. 1976. V. 21, № 3. P. 319–338.
10. Bonjorno J.J., Youla D.C. On the design of single-loop single-input-output feedback control systems in the complex frequency domain // IEEE Trans. Autom. Control. 1977. V. 22, № 3. P. 416–423.
11. Kucera V. Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach. New York : John Wiley, 1979. 206 p.
12. Паршуков А.Н. Методы синтеза модальных регуляторов. Тюмень : ТюмГНГУ, 2009. 84 с.

#### References

1. Rotach, V. Ya. (2004) *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Automatic Control Theory]. Moscow: Izd. dom MEI.
2. Kuzovkov, N.T. (1976) *Modal'noe upravlenie i nablyudayushchie ustroystva* [Modal Control and Monitoring Devices]. Moscow: Mashinostroenie.
3. Soloviev, I.G. (1992) *Metody mazhorizatsii v analize i sinteze adaptivnykh sistem* [Methods of Majorization in the Analysis and Synthesis of Adaptive Systems]. Novosibirsk: Nauka.
4. Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V. & Shcherbakov, P.S. (2021) Linear matrix inequalities in control systems with uncertainty. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 82(1). pp. 1–40. DOI: 10.31857/S0005231021010013
5. Balandin, D.V., Kogan, M.M., Krivdina, L.N. & Fedukov, A.A. (2014) Design of Generalized Descretetime  $H_\infty$ -optimal Control over Finite and Infinite Intervals. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 75(1). pp. 1–17.
6. Kogan, M.M. (2016) Optimal discrete-time  $H_\infty/\gamma_0$  filtering and control under unknown covariances. *International Journal of Control*. 89(4). pp. 691–700. DOI: 10.1080/00207179.2015.1091511
7. Neimark, Yu.I. (1948) On determining the values of parameters at which the automatic control system is stable. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 9(3). pp. 190–203.
8. Zubov, I.V. (1980) *Problema ustoychivosti protsessov upravleniya* [The Problem of Stability of Management Processes]. Leningrad: Sudostroenie.
9. Youla, D.C., Jabr, H.A. & Bonjorno, J.J. (1976) Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. Part II: The multivariable case. *IEEE Trans. Autom. Control*. 21(3). pp. 319–338. DOI: 10.1109/TAC.1976.1101223
10. Bonjorno, J.J. & Youla, D.C. (1977) On the design of single-loop single-input-output feedback control systems in the complex frequency domain. *IEEE Trans. Autom. Control*. 22(3). pp. 416–423. DOI: 10.1109/TAC.1977.1101507
11. Kucera, V. (1979) *Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach*. New York: John Wiley.
12. Parshukov, A.N. (2009) *Metody sinteza modal'nykh regulyatorov* [Methods of Synthesis of Modal Regulators]. Tyumen: TyumGNGU.

#### Информация об авторе:

**Паршуков Андрей Николаевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Электроэнергетика» Тюменского индустриального университета (Тюмень, Россия). E-mail: anparshukov@mail.ru

#### Information about the author:

**Parshukov Andrej Nikolaevich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Federal State Budget Educational Institution of Higher Education «Industrial University of Tyumen» (Tyumen, Russian Federation). E-mail: anparshukov@mail.ru

Поступила в редакцию 09.08.2021; принята к публикации 28.02.2022

Received 09.08.2021; accepted for publication 28.02.2022

Научная статья

УДК 519.95

doi: 10.17223/19988605/58/2

## Задача синтеза одного класса двоичных 3D-многомерных нелинейных модулярных динамических систем

Фикрат Гюльали оглы Фейзиев<sup>1</sup>, Марал Рзабала кызы Мехтиева<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Сумгаитский государственный университет, Сумгаит, Азербайджан, FeyziyevFG@mail.ru

<sup>2</sup> Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан, mehdiyevamaral71@gmail.com

**Аннотация.** Рассматривается решение задачи синтеза одного класса двоичных 3D-многомерных нелинейных модулярных динамических систем с фиксированной памятью, ограниченной связью, с известным числом входов и выходов, заданных в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры. В случае с ортогональными многомерными входными последовательностями системы для решения задачи используется метод, основанный на округлении решения соответствующей континуальной задачи квадратичной оптимизации. В случае с неортогональными входными последовательностями системы входные последовательности ортогонализуются, и решение задачи продолжается, как в случае с ортогональными входными последовательностями.

**Ключевые слова:** 3D-многомерные нелинейные модулярные динамические системы; полином Вольтерры; задача синтеза; континуальная задача квадратичной оптимизации; ортогональные входные последовательности

*Для цитирования* Фейзиев Ф.Г., Мехтиева М.Р. Задача синтеза одного класса двоичных 3D-многомерных нелинейных модулярных динамических систем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 58. С. 14–22. doi: 10.17223/19988605/58/2

Original article

doi: 10.17223/19988605/58/2

## The problem of synthesis of one class of binary 3d-multidimensional nonlinear modular dynamic systems

Fikrat G. Feyziyev<sup>1</sup>, Maral R. Mekhtiyeva<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Sumgait State University, Sumgait, Azerbaijan, FeyziyevFG@mail.ru

<sup>2</sup> Baku State University, Baku, Azerbaijan, mehdiyevamaral71@gmail.com

**Abstract.** In this paper, binary 3D-multidimensional nonlinear modular dynamic systems (3D-MNMDS) are considered:

$$y_v[n, c_1, c_2] = \sum_{i=1}^S \sum_{\bar{\eta} \in \Lambda(i)} \sum_{\bar{w} \in \Psi(\bar{\eta})} \sum_{(\bar{j}, \bar{\mu}) \in L_1 \times L_2} \sum_{\bar{\tau} \in \Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})[\bar{w}]} h_{v,i,\bar{\eta},\bar{w}}[\bar{j}, \bar{\mu}, \bar{\tau}] \times \prod_{\ell \in \bar{Q}_0(\bar{\eta})} \prod_{(\alpha_\ell, \beta_\ell, \sigma) \in Q'_\ell(\eta_\ell, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell)} u_\ell[n - \tau_\ell(\alpha_\ell, \beta_\ell, \sigma), c_1 + p_1(j_{\alpha_\ell}(\ell)), c_2 + p_2(\mu_{\beta_\ell}(\ell))], GF(2), \quad v = \bar{1}, \bar{k}. \quad (1)$$

Here  $n \in Z_0$ ,  $c_\alpha \in Z$ ,  $P_\alpha = \{p_\alpha(1), \dots, p_\alpha(r_\alpha)\}$ ,  $-\infty < p_\alpha(1) < \dots < p_\alpha(r_\alpha) < \infty$ ,  $p_\alpha(\beta) \in Z$ ,  $\beta = \bar{1}, r_\alpha$ ,  $\alpha = \bar{1}, \bar{2}$ ;  $u[n, c] \in GF^r(2)$  and  $y[n, c] \in GF^k(2)$  are input and output sequences, where  $GF(2)$  is a finite field,  $GF^k(2)$  and  $GF^r(2)$  are  $k$  and  $r$ -dimensional linear spaces respectively over the finite field  $GF(2)$ .

Let arbitrary unknown binary sequences enter to the input 3D-MNMDs (1):

$$\{u_\ell[n, c_1, c_2] : n \in [0, N], c_1 \in [0, C_1], c_2 \in [0, C_2], \ell \in \underline{Q}_0(\bar{\eta})\}. \quad (2)$$

The problem of the synthesis of binary 3D-MNMDs (1) consists in finding for all  $\bar{\tau} \in \Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})[\bar{w}]$ ,  $(\bar{j}, \bar{\mu}) \in L_1 \times L_2$ ,  $\bar{w} \in \Psi(\bar{\eta})$ ,  $\bar{\eta} \in \Lambda(i)$ ,  $i \in \{1, \dots, S\}$  such  $h_{v, i, \bar{\eta}, \bar{w}}[\bar{j}, \bar{\mu}, \bar{\tau}] \in \{0, 1\}$ , for which the following functional is minimized:

$$J = \sum_{n=0}^N \sum_{c_1=0}^{C_1} \sum_{c_2=0}^{C_2} \sum_{v=1}^k (y_v[n, c_1, c_2] - y_v^0[n, c_1, c_2])^2, \quad (3)$$

where  $\{y_v^0[n, c_1, c_2] : n \in [0, N], v = \bar{1}, \bar{k}, c_1 \in [0, C_1], c_2 \in [0, C_2]\}$ , are desired output sequences. Based on the sequence (2) and on the elements of the impulse characteristics of the system, matrix  $U$  and vectors  $H$  are constructed respectively, with the help of which problem (1), (3) has the matrix form:  $Y = UH$ ,  $GF(2)$ ,  $J = (Y - Y_0)^T(Y - Y_0) \rightarrow \min$ .

If the orthogonal sequences  $v_{\ell, i, \bar{\eta}, \bar{w}}[n, c_1, c_2]$ ,  $\ell \in \underline{Q}_0(\bar{\eta})$ ,  $\bar{w} \in \Psi(\bar{\eta})$ ,  $\bar{\eta} \in \Lambda(i)$ ,  $i \in \{1, \dots, S\}$ , enter to input of 3D-MNMDs (1) and the matrix  $V$  is formed from them, then the solution of the problem  $Y = VH$ ,  $GF(2)$ ,  $J = (Y - Y_0)^T(Y - Y_0) \rightarrow \min$  can be found by solving the continual problem of the quadratic optimization  $Y = VK$ ,  $J = (Y - Y_0)^T(Y - Y_0) \rightarrow \min$ . Let  $k_\alpha$  and  $h_\alpha$  be the  $\alpha$ -th components of the vectors  $K$  and  $H$  respectively. From here, if  $k_\alpha > 0.5$ , then  $h_\alpha = 1$ , else  $h_\alpha = 0$ . The vector  $K$  is determined by the formula  $K = (V^T V)^{-1} V^T Y_0$ .

If the input sequence (2) is not orthogonal, then it is orthogonalized and the solution of the problem continues as in the case of orthogonal input sequences.

**Keywords:** 3D-multidimensional nonlinear modular dynamic system; Volterra's polynomial; problem of synthesis; continual quadratic optimization problem; orthogonal input sequences

**For citation:** Feyziyev, F.G., Mekhtiyeva, M.R. (2022) The problem of synthesis of one class of binary 3d-multidimensional nonlinear modular dynamic systems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 58. pp. 14–22. doi: 10.17223/19988605/58/2

Конечные последовательностные машины, или модулярные динамические системы (МДС) [1–5], являются одним из важных классов дискретных управляющих систем. Они находят широкое применение в различных областях науки и техники [2, 3, 5–7]. Исследован ряд задач теории и приложений МДС [1–5, 6, 8–17]. К таким задачам относится задача синтеза МДС [18]. К настоящему времени разработаны методы и алгоритмы решения задачи синтеза для некоторых классов двоичных МДС [5, 18–24]. Один из этих классов есть класс четырех параметрических (три пространственных и один временной параметр) нелинейных МДС (4D-НМДС) [23]. В этом классе входно-выходные последовательности системы скалярные (одномерные). МДС с векторными входными и выходными последовательностями (т.е. многомерными), для которых решена задача синтеза, есть класс двух параметрических (один пространственный и один временной параметр) нелинейных МДС.

Во многих отраслях (нефтегазовая, нефтехимическая, энергетическая и т.д.) объекты управления имеют более двух параметров, и входно-выходные функции являются векторными функциями. В работе [25] для двоичных трехпараметрических (два пространственных и один временной параметр) многомерных нелинейных МДС (3D-МНМДС) получено представление в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры. Отметим, что 4D-НМДС и 3D-МНМДС – близкие системы. В работе [7] МДС применена как управляющее устройство в системе управления работой скважины в газлифтной нефтедобыче, при этом оптимальный режим работы системы управления представляется как задача синтеза МДС по квадратичному критерию. Двоичные 3D-МНМДС тоже могут быть использованы в моделировании и управлении непрерывными и дискретными объектами. Поэтому несомненный интерес представляет решение задачи синтеза двоичных 3D-МНМДС. В данной работе рассматривается решение задачи синтеза двоичных 3D-МНМДС, при этом некоторые вычисления проводятся по аналогии с работой [23].

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим двоичную 3D-МНМДС с фиксированной памятью  $n_0$ , ограниченной связью  $P = P_1 \times P_2$ , со степенью  $S$ , с  $r$  входами и  $k$  выходами, описываемую в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры [25]:

$$y_v[n, c_1, c_2] = \sum_{i=1}^S \sum_{\bar{\eta} \in \Lambda(i)} \sum_{(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m}) \in F(\bar{\eta})} \sum_{(\bar{j}, \bar{\mu}) \in L_1 \times L_2} \sum_{\bar{\tau} \in \Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})} h_{i, v, \bar{\eta}, (\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})}[\bar{j}, \bar{\mu}, \bar{\tau}] \times \\ \times \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \prod_{(\alpha_\ell, \beta_\ell) \in Q'_\ell(\eta_\ell, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell)} \prod_{\sigma=1}^{m_{\ell, \alpha_\ell, \beta_\ell}} u_\ell[n - \tau(\alpha_\ell, \beta_\ell, \sigma), c_1 + p_1(j_{\alpha_\ell}(\ell)), c_2 + p_2(\mu_{\beta_\ell}(\ell))], \quad GF(2), \quad (1) \\ v = \overline{1, k}.$$

Здесь  $n \in Z_0$ ,  $c_\alpha \in Z$ , где  $Z$  и  $Z_0$  есть множество целых и неотрицательных целых чисел соответственно,  $P_\alpha = \{p_\alpha(1), \dots, p_\alpha(r_\alpha)\}$ ,  $-\infty < p_\alpha(1) < \dots < p_\alpha(r_\alpha) < \infty$ ,  $p_\alpha(\beta) \in Z$ ,  $\beta = \overline{1, r_\alpha}$ ,  $\alpha = \overline{1, 2}$ ;  $y[n, c_1, c_2] = (y_1[n, c_1, c_2], \dots, y_k[n, c_1, c_2]) \in GF^k(2)$  и  $u[n, c_1, c_2] = (u_1[n, c_1, c_2], \dots, u_r[n, c_1, c_2]) \in GF^r(2)$  – выходная и входная последовательности, где  $GF^k(2)$  и  $GF^r(2)$  есть  $k$  и  $r$ -мерные линейные пространства над конечным полем  $GF(2)$  [6]; присутствие записи  $GF(2)$  в формуле (1) означает, что эти формулы выполняются над полем  $GF(2)$ , т.е. операции сложения и умножения есть сложение и умножение по mod 2 (но в выражениях  $n - \tau(\alpha_\ell, \beta_\ell, \sigma)$ ,  $c_1 + p_1(j_{\alpha_\ell}(\ell))$  и  $c_2 + p_2(\mu_{\beta_\ell}(\ell))$  операции вычитания и сложения есть операции вычитания и сложения над целыми числами соответственно);  $\Lambda(i) = \{\bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_r) \mid \eta_1 + \dots + \eta_r = i, \eta_\alpha \in \{0, 1, \dots, (n_0 + 1)r_1 r_2, \alpha = \overline{1, r}\}\}$ ;  $Q_0(\bar{\eta}) = \{\ell \mid \ell \in \{1, \dots, r\} \text{ и } \eta_\ell \neq 0, \eta_\ell \text{ есть компонент вектора } \bar{\eta}\}$ ;  $F(\bar{\eta}) = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} F_\ell(\eta_\ell)$ ,  $L_1 = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} L_{\ell, 1}(\gamma_1(\ell))$ ,  $L_2 = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} L_{\ell, 2}(\gamma_2(\ell))$ . Множества  $F_\ell(\eta_\ell)$ ,  $L_{\ell, 1}(\gamma_1(\ell))$ ,  $L_{\ell, 2}(\gamma_2(\ell))$ ,  $\ell \in Q_0(\bar{\eta})$  следующие:

$$F_\ell(\eta_\ell) = \left\{ (\gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell) \mid \bar{m}_\ell = (m_{\ell, 1, 1}, \dots, m_{\ell, 1, \gamma_2(\ell)}, \dots, m_{\ell, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell)}), \sum_{\alpha=1}^{\gamma_1(\ell)} \sum_{\beta=1}^{\gamma_2(\ell)} m_{\ell, \alpha, \beta} = \eta_\ell ; \right. \\ \left. m_{\ell, \alpha, \beta} \in \{0, \dots, n_0 + 1\}, \alpha = \overline{1, \gamma_1(\ell)}, \beta = \overline{1, \gamma_2(\ell)}; (\forall \alpha \in \{1, \dots, \gamma_1(\ell)\})(\exists \beta \in \{1, \dots, \gamma_2(\ell)\}) \Rightarrow (m_{\ell, \alpha, \beta} \neq 0), \right. \\ \left. (\forall \beta \in \{1, \dots, \gamma_2(\ell)\})(\exists \alpha \in \{1, \dots, \gamma_1(\ell)\}) \Rightarrow (m_{\ell, \alpha, \beta} \neq 0), \gamma_\sigma(\ell) \in \{1, \dots, r_\sigma\}, \sigma = \overline{1, 2} \right\}, \\ L_{\ell, 1}(\gamma_1(\ell)) = \{\bar{j}(\ell) = (j_1(\ell), \dots, j_{\gamma_1(\ell)}(\ell)) \mid 1 \leq j_1(\ell) < \dots < j_{\gamma_1(\ell)}(\ell) \leq r_1\}, \\ L_{\ell, 2}(\gamma_2(\ell)) = \{\bar{\mu}(\ell) = (\mu_1(\ell), \dots, \mu_{\gamma_2(\ell)}(\ell)) \mid 1 \leq \mu_1(\ell) < \dots < \mu_{\gamma_2(\ell)}(\ell) \leq r_2\};$$

$$\gamma_1 = (\gamma_1(1), \dots, \gamma_1(r)), \quad \gamma_2 = (\gamma_2(1), \dots, \gamma_2(r)), \quad \bar{j} = (\bar{j}(1), \dots, \bar{j}(r)), \quad \bar{\mu} = (\bar{\mu}(1), \dots, \bar{\mu}(r)), \quad \bar{m} = (\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_r).$$

Здесь  $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})$  – множество элементов типа  $\bar{\tau}$  и  $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m}) = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \Gamma_\ell(\gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell)$ , где при  $\bar{\tau}_{\ell, \alpha, \beta} \in \Gamma_{\ell, \alpha, \beta}(m_{\ell, \alpha, \beta})$ ,  $(\alpha, \beta) \in Q'_\ell(\eta_\ell, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell)$ ,  $\alpha = \overline{1, \gamma_1(\ell)}$ ,  $\beta = \overline{1, \gamma_2(\ell)}$ , множество всех блочных векторов (наборов)  $\bar{\tau}_\ell$  обозначено через  $\Gamma_\ell(\gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell)$ , причем  $\Gamma_{\ell, \alpha, \beta}(m_{\ell, \alpha, \beta}) = \{\bar{\tau}_{\ell, \alpha, \beta} = (\tau_\ell(\alpha, \beta, 1), \dots, \tau_\ell(\alpha, \beta, m_{\ell, \alpha, \beta})) \mid 0 \leq \tau_\ell(\alpha, \beta, 1) < \dots < \tau_\ell(\alpha, \beta, m_{\ell, \alpha, \beta}) \leq n_0\}$ ;  $Q'_\ell(\eta_\ell, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell) = \{(\alpha, \beta) \mid m_{\ell, \alpha, \beta} \neq 0, \alpha = \overline{1, \gamma_1(\ell)}, \beta = \overline{1, \gamma_2(\ell)}\}$ ;  $Q''_\ell(\eta_\ell, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell) = \{(\alpha_\ell, \beta_\ell, \sigma) \mid \sigma \in \{1, \dots, m_{\ell, \alpha_\ell, \beta_\ell}\}, (\alpha_\ell, \beta_\ell) \in Q'_\ell(\eta_\ell, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell)\}$ .

Введем обозначения  $\lambda(\eta_\ell) = |F_\ell(\eta_\ell)|$  и  $|F(\bar{\eta})| = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \lambda_\ell(\eta_\ell)$ , где через  $|A|$  обозначено число элементов множества  $A$ . Через  $(\gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell)[w_\ell]$  обозначим  $w_\ell$ -й элемент множества  $F_\ell(\eta_\ell)$  и  $\Psi(\bar{\eta}) = \{\bar{w} = (w_1, \dots, w_r) \mid w_\ell \in \{1, \dots, \lambda(\eta_\ell)\}, \ell \in Q_0(\bar{\eta}); w_\ell = 0, \ell \notin Q_0(\bar{\eta})\}$ .

Ясно, что каждому  $(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m}) \in F(\bar{\eta})$  взаимно-однозначно соответствует набор  $\bar{w} \in \Psi(\bar{\eta})$ . Набор  $(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m}) \in F(\bar{\eta})$ , который соответствует  $\bar{w} \in \Psi(\bar{\eta})$ , обозначим через  $(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})[\bar{w}]$ . Тогда, используя множества  $\Psi(\bar{\eta})$ , можно переписать (1) в виде:

$$y_v[n, c_1, c_2] = \sum_{i=1}^S \sum_{\bar{\eta} \in \Lambda(i)} \sum_{\bar{w} \in \Psi(\bar{\eta})} \sum_{(\bar{j}, \bar{\mu}) \in L_1 \times L_2} \sum_{\bar{\tau} \in \Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})[\bar{w}]} h_{v,i,\bar{\eta},\bar{w}}[\bar{j}, \bar{\mu}, \bar{\tau}] \times \\ \times \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \prod_{(\alpha_\ell, \beta_\ell, \sigma) \in Q'_\ell(\eta_\ell, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell)} u_\ell[n - \tau_\ell(\alpha_\ell, \beta_\ell, \sigma), c_1 + p_1(j_{\alpha_\ell}(\ell)), c_2 + p_2(\mu_{\beta_\ell}(\ell))], GF(2), \quad (2) \\ v = \overline{1, k}.$$

Из формулы (2) видно, что двоичная 3D-МНМДС состоит из различных блоков. Между блоками и тройками  $\langle i, \bar{\eta}, \bar{w} \rangle$ , где  $\bar{w} \in \Psi(\bar{\eta})$ ,  $\bar{\eta} \in \Lambda(i)$ ,  $i \in \{1, \dots, S\}$ , есть взаимно-однозначное соответствие. Отметим, что количество блоков определяется по формуле  $\sum_{i=1}^S \sum_{\bar{\eta} \in \Lambda(i)} |\Psi(\bar{\eta})|$ . Пусть  $N, C_1, C_2$  есть заданные неотрицательные целые числа,  $n \in [0, N] \equiv \{0, 1, \dots, N\}$ ,  $c_\alpha \in [0, C_\alpha] \equiv \{0, 1, \dots, C_\alpha\}$ ,  $\alpha = \overline{1, 2}$ , и

$$\{u_\ell[n, c_1, c_2] : n \in [0, N], c_1 \in [0, C_1], c_2 \in [0, C_2]\}, \quad \ell \in Q_0(\bar{\eta}), \quad (3)$$

есть произвольные двоичные последовательности. Пусть

$$\{y_v^0[n, c_1, c_2] : n \in [0, N], c_1 \in [0, C_1], c_2 \in [0, C_2]\}, \quad v = \overline{1, k}, \quad (4)$$

есть желаемые выходные последовательности 3D-МНМДС (2). Рассмотрим функционал

$$J = \sum_{n=0}^N \sum_{c_1=0}^{C_1} \sum_{c_2=0}^{C_2} \sum_{v=1}^k (y_v[n, c_1, c_2] - y_v^0[n, c_1, c_2])^2. \quad (5)$$

Функционал (5) указывает расстояние между реальной и желаемой выходными последовательностями (4) 3D-МНМДС (2). Задача синтеза двоичных 3D-МНМДС (2) с входными последовательностями (3) заключается в нахождении значений импульсных характеристик  $h_{v,i,\bar{\eta},\bar{w}}[\bar{j}, \bar{\mu}, \bar{\tau}]$  для каждого  $\bar{\tau} \in \Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})[\bar{w}]$ ,  $(\bar{j}, \bar{\mu}) \in L_1 \times L_2$ ,  $\bar{w} \in \Psi(\bar{\eta})$ ,  $\bar{\eta} \in \Lambda(i)$ ,  $i \in \{1, \dots, S\}$  3D-МНМДС (2), при которых минимизируется функционал (5).

## 2. Приведение задачи к матрично-векторному виду

Через  $\bar{\tau}_\xi$  обозначим  $\xi$ -й элемент в  $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})$ , а компоненты набора  $\bar{\tau}_\xi$  обозначим через  $\tau_\ell^{(\xi)}(\alpha_\ell, \beta_\ell, \sigma)$ ,  $\sigma \in \{1, \dots, m_{\ell, \alpha_\ell, \beta_\ell}\}$ ,  $(\alpha_\ell, \beta_\ell) \in Q'_\ell(\eta_\ell, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell)$ . Введем матрицы

$$U_0(i, \bar{\eta}, \bar{w}, \bar{j}, \bar{\mu}, \bar{\tau}_\xi) = \left\{ \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \prod_{(\alpha_\ell, \beta_\ell, \sigma) \in Q'_\ell(\eta_\ell, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell)} u_\ell[n - \tau_\ell^{(\xi)}(\alpha_\ell, \beta_\ell, \sigma), c_1 + p_1(j_{\alpha_\ell}(\ell)), c_2 + p_2(\mu_{\beta_\ell}(\ell))] \right\} \quad (6)$$

размерностью  $(N+1)(C_1+1)(C_2+1) \times 1$  и последовательно построим матрицы

$$U_1(i, \bar{\eta}, \bar{w}, \bar{j}, \bar{\mu}) = (U_0(i, \bar{\eta}, \bar{w}, \bar{j}, \bar{\mu}, \bar{\tau}_1), \dots, U_0(i, \bar{\eta}, \bar{w}, \bar{j}, \bar{\mu}, \bar{\tau}_{|\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})[\bar{w}]|})), \\ U_2(i, \bar{\eta}, \bar{w}) = (U_1(i, \bar{\eta}, \bar{w}, \bar{j}_1, \bar{\mu}_1), \dots, U_1(i, \bar{\eta}, \bar{w}, \bar{j}_1, \bar{\mu}_{|L_2|}), \dots, U_1(i, \bar{\eta}, \bar{w}, \bar{j}_{|L_1|}, \bar{\mu}_{|L_2|})), \\ U_3(i, \bar{\eta}) = (U_2(i, \bar{\eta}, \bar{w}_1), \dots, U_2(i, \bar{\eta}, \bar{w}_{|\Psi(\bar{\eta})|})), U_4(i) = (U_3(i, \bar{\eta}_1), \dots, U_3(i, \bar{\eta}_{|\Lambda(i)|})), U_5 = (U_4(1) \dots U_4(S)), \quad (7) \\ U = \text{diag}\{U_5 \dots U_5\}.$$

Введем вектор-столбец

$$H_1(v, i, \bar{\eta}, \bar{w}, \bar{j}, \bar{\mu}) = (h_{v,i,\bar{\eta},\bar{w}}[\bar{j}, \bar{\mu}, \bar{\tau}_1], \dots, h_{v,i,\bar{\eta},\bar{w}}[\bar{j}, \bar{\mu}, \bar{\tau}_{|\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})[\bar{w}]|}])^T \quad (8)$$

с  $|\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})[\bar{w}]|$  компонентом и последовательно построим векторы

$$H_2(v, i, \bar{\eta}, \bar{w}) = (H_1(v, i, \bar{\eta}, \bar{w}, \bar{j}_1, \bar{\mu}_1), \dots, H_1(v, i, \bar{\eta}, \bar{w}, \bar{j}_1, \bar{\mu}_{|L_2|}), \dots, H_1(v, i, \bar{\eta}, \bar{w}, \bar{j}_{|L_1|}, \bar{\mu}_{|L_2|}))^T,$$

$$H_3(v, i, \bar{\eta}) = (H_2(v, i, \bar{\eta}, \bar{w}_1), \dots, H_2(v, i, \bar{\eta}, \bar{w}_{|\Psi(\bar{\eta})|}))^T, \quad H_4(v, i) = (H_3(v, i, \bar{\eta}_1), \dots, H_3(v, i, \bar{\eta}_{|\Lambda(i)|}))^T, \quad (9)$$

$$H_5(v) = (H_4(v, 1), \dots, H_4(v, S))^T, \quad H = (H_5(1), \dots, H_5(k))^T.$$

Учитывая формулу (7), из блочной матрицы  $U$  получим обыкновенную матрицу  $U$  размерностью  $(N+1)(C_1+1)(C_2+1)k \times R$ , где  $R = k \cdot R_1$  и  $R_1 = \sum_{\chi=1}^S C_{r(n_0+1)\eta_2}^\chi$ . Также из блочного вектора  $H$  получим обыкновенный вектор  $H$  с  $R$  компонентами. Пусть

$$Y^0 = (y_1^0[0, 0, 0], \dots, y_1^0[N, 0, 0], y_1^0[0, 1, 0], \dots, y_1^0[N, 1, 0], \dots, y_1^0[N, C_1, C_2], \dots, y_k^0[N, C_1, C_2])^T,$$

$$Y = (y_1[0, 0, 0], \dots, y_1[N, 0, 0], y_1[0, 1, 0], \dots, y_1[N, 1, 0], \dots, y_1[N, C_1, C_2], \dots, y_k[N, C_1, C_2])^T.$$

Тогда задачу (2), (5) можем записать в следующем матрично-векторном виде:

$$Y = UH, \quad GF(2), \quad (10)$$

$$J = (Y - Y^0)^T(Y - Y^0) \rightarrow \min. \quad (11)$$

Пусть входная последовательность (3) такова, что матрица  $U$ , образованная из нее по обозначениям (6), (7), удовлетворяет условиям ортогональности

$$U^T U = \text{diag}\{d_{1,1}, \dots, d_{R,R}\}; \quad d_{\alpha,\alpha} > 0, \quad \alpha = 1, \dots, R, \quad (12)$$

где  $d_{\alpha,\alpha}$ ,  $\alpha = \overline{1, R}$ , есть элементы матрицы  $U^T U$ . Тогда последовательность (3) называется ортогональной входной последовательностью для 3D-МНМДС (2). Ясно, что матрица  $U$ , образованная из (3) при любой  $S > 1$ , не удовлетворяет условиям ортогональности (12).

### 3. Решение задачи синтеза 3D-МНМДС

Рассмотрим решение задачи синтеза 3D-МНМДС с ортогональными входными последовательностями. Пусть в разные блоки 3D-МНМДС поступают разные входные последовательности:

$$y_v[n, c_1, c_2] = \sum_{i=1}^S \sum_{\bar{\eta} \in \Lambda(i)} \sum_{\bar{w} \in \Psi(\bar{\eta})} \sum_{(\bar{j}, \bar{\mu}) \in L_1 \times L_2} \sum_{\bar{c} \in \Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})[\bar{w}]} h_{v,i,\bar{\eta},\bar{w}}[\bar{j}, \bar{\mu}, \bar{c}] \times$$

$$\times \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \prod_{(\alpha_\ell, \beta_\ell, \sigma) \in Q'_\ell(\eta_\ell, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell)} v_{\ell,i,\bar{\eta},\bar{w}}[n - \tau_\ell(\alpha_\ell, \beta_\ell, \sigma), c_1 + p_1(j_{\alpha_\ell}(\ell)), c_2 + p_2(\mu_{\beta_\ell}(\ell))], \quad GF(2), \quad (13)$$

$$v = \overline{1, k}.$$

В (13) на вход блока, соответствующего тройке  $\langle i, \bar{\eta}, \bar{w} \rangle$  3D-МНМДС, поступают последовательности  $\{v_{\ell,i,\bar{\eta},\bar{w}}[n, c_1, c_2] : n \in [0, N], c_1 \in [0, C_1], c_2 \in [0, C_2]\}$ ,  $\ell \in Q_0(\bar{\eta})$  и входные последовательности

$$\{v_{\ell,i,\bar{\eta},\bar{w}}[n, c_1, c_2] : n \in [0, N], c_1 \in [0, C_1], c_2 \in [0, C_2]\}, \quad \ell \in Q_0(\bar{\eta}), \quad \bar{w} \in \Psi(\bar{\eta}), \quad \bar{\eta} \in \Lambda(i), \quad i \in \{1, \dots, S\}, \quad (14)$$

ортогональные, т.е. удовлетворяются условия  $V^T \cdot V = \text{diag}\{d_{1,1}, \dots, d_{R,R}\}$ ;  $d_{\alpha,\alpha} > 0$ , где матрицы

$$V_0(i, \bar{\eta}, \bar{w}, \bar{j}, \bar{\mu}, \bar{c}), \quad V_1(i, \bar{\eta}, \bar{w}, \bar{j}, \bar{\mu}), \quad V_2(i, \bar{\eta}, \bar{w}), \quad V_3(i, \bar{\eta}), \quad V_4(i), \quad V_5, \quad V = \text{diag}\{V_5 \dots V_5\}, \quad (15)$$

строятся аналогично по формулам (6), (7). Задача (13), (5) имеет следующий матричный вид:

$$Y = VH, \quad GF(2), \quad (16)$$

$$J = (Y - Y^0)^T(Y - Y^0) \rightarrow \min. \quad (17)$$

Аналогично работе [23] решение задачи (16), (17) можно найти путем специфических округлений решения следующей континуальной задачи квадратичной оптимизации:

$$Y = VK, \quad J = (Y - Y_0)^T(Y - Y_0) \rightarrow \min, \quad (18)$$

где  $K$  есть  $R$ -мерный вектор. Если  $k_\alpha$  и  $h_\alpha$  есть  $\alpha$ -е компоненты векторов  $K$  и  $H$  соответственно, то решение задачи определяется следующим образом: если  $k_\alpha > 0,5$ , то  $h_\alpha = 1$ , иначе  $h_\alpha = 0$ .

Решение задачи (18) определяется по формуле  $K = (V^T V)^{-1} V^T Y_0$  [23].

Для нахождения оптимального значения импульсных характеристик  $h_{v,i,\bar{\eta},\bar{w}}[\bar{j},\bar{\mu},\bar{\tau}]$ ,  $\bar{\tau} \in \Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})[\bar{w}]$ ,  $(\bar{j}, \bar{\mu}) \in L_1 \times L_2$ ,  $\bar{w} \in \Psi(\bar{\eta})$ ,  $\bar{\eta} \in \Lambda(i)$ ,  $i \in \{1, \dots, S\}$ ,  $v \in \{1, \dots, k\}$ , определим номера компонентов вектора  $H_1(v, i, \bar{\eta}_\alpha, \bar{w}_\beta, \bar{j}_\sigma, \bar{\mu}_\theta) = (h_{v,i,\bar{\eta}_\alpha, \bar{w}_\beta}[\bar{j}_\sigma, \bar{\mu}_\theta, \bar{\tau}_1], \dots, h_{v,i,\bar{\eta}_\alpha, \bar{w}_\beta}[\bar{j}_\sigma, \bar{\mu}_\theta, \bar{\tau}_{|\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})[\bar{w}_\beta]}] )^T$  среди компонентов вектора  $H$ . Для этого рассмотрим компоненту  $h_{v,i,\bar{\eta}_\alpha, \bar{w}_\beta}[\bar{j}_\sigma, \bar{\mu}_\theta, \bar{\tau}_\xi]$  вектора  $H$ , где  $\xi \in \{1, \dots, |\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})[\bar{w}_\beta]|\}$ ,  $\theta \in \{1, \dots, |L_2|\}$ ,  $\sigma \in \{1, \dots, |L_1|\}$ ,  $\beta \in \{1, \dots, |\Psi(\bar{\eta})|\}$ ,  $\alpha \in \{1, \dots, |\Lambda(i)|\}$ . Ясно, что номер компоненты импульсной характеристики  $h_{v,i,\bar{\eta}_\alpha, \bar{w}_\beta}[\bar{j}_\sigma, \bar{\mu}_\theta, \bar{\tau}_\xi]$  можно определить по формуле

$$\begin{aligned} \gamma = & (v-1) \cdot \sum_{i=1}^S |\Psi(\bar{\eta}_i)| \cdot |L_1| \cdot |L_2| \cdot |\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})| + \sum_{i=1}^{i-1} |\Psi(\bar{\eta}_i)| \cdot |L_1| \cdot |L_2| \cdot |\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})| + \\ & + \sum_{\alpha=1}^{\alpha-1} |\Psi(\bar{\eta}_{\alpha_1})| \cdot |L_1| \cdot |L_2| \cdot |\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})| + \sum_{\beta=1}^{\beta-1} |L_1| \cdot |L_2| \cdot |\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})| + \\ & + (\sigma-1) \cdot |L_2| \cdot |\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})| + (\theta-1) |\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})| + \xi. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, при ортогональной входной последовательности (14) решение задачи (16), (17) можно найти по следующему алгоритму:

1. Последовательное построение матриц (15).

2. Определение вектора решения задачи (18) по формуле  $K = (V^T \cdot V)^{-1} \cdot V^T \cdot Y_0$ ;

3. Для каждого  $\xi \in \{1, \dots, |\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})|\}$ ,  $\theta \in \{1, \dots, |L_2|\}$ ,  $\sigma \in \{1, \dots, |L_1|\}$ ,  $\beta \in \{1, \dots, |\Psi(\bar{\eta})|\}$ ,  $\alpha \in \{1, \dots, |\Lambda(i)|\}$ ,  $i \in \{1, \dots, S\}$ ,  $v \in \{1, \dots, k\}$  определение  $h_{v,i,\bar{\eta}_\alpha, \bar{w}_\beta}[\bar{j}_\sigma, \bar{\mu}_\theta, \bar{\tau}_\xi]$  следующим образом: если  $k_\gamma > 0,5$ , то  $h_{v,i,\bar{\eta}_\alpha, \bar{w}_\beta}[\bar{j}_\sigma, \bar{\mu}_\theta, \bar{\tau}_\xi] = 1$ , иначе  $h_{v,i,\bar{\eta}_\alpha, \bar{w}_\beta}[\bar{j}_\sigma, \bar{\mu}_\theta, \bar{\tau}_\xi] = 0$ , где  $\gamma$  определяется по формуле (19).

Рассмотрим решение задачи синтеза 3D-МНМДС при произвольных входных последовательностях. Пусть входные последовательности (3) есть произвольные двоичные последовательности. Для решения поставленной задачи аналогично работе [23] поставим на вход 3D-МНМДС специальные преобразователи, с помощью которых входная последовательность (3) для каждого  $\bar{w} \in \Psi(\bar{\eta})$ ,  $\bar{\eta} \in \Lambda(i)$ ,  $i \in \{1, \dots, S\}$ , преобразуется в специальные ортогональные последовательности  $\{v_{\ell,i,\bar{\eta},\bar{w}}[n, c_1, c_2] : n \in [0, N], c_1 \in [0, C_1], c_2 \in [0, C_2]\}$ ,  $\ell \in Q_0(\bar{\eta})$ .

Для каждого  $\bar{w} \in \Psi(\bar{\eta})$ ,  $\bar{\eta} \in \Lambda(i)$ ,  $i \in \{1, \dots, S\}$ , в качестве преобразователя можно использовать линейную МДС, описываемую следующим уравнением:

$$v_{\ell,i,\bar{\eta},\bar{w}}[n, c_1, c_2] = \sum_{m=0}^{n-1} g_{\ell,i,\bar{\eta},\bar{w}}[n-m-1, c_1, c_2] u_\ell[m, c_1, c_2] + g_{\ell,i,\bar{\eta},\bar{w}}[n, c_1, c_2], \ell \in Q_0(\bar{\eta}), GF(2), \quad (20)$$

где  $g_{\ell,i,\bar{\eta},\bar{w}}[n, c_1, c_2]$  является импульсной характеристикой соответствующего преобразователя. Выход преобразователя (20) подается на вход тех блоков 3D-МНМДС (2), которые соответствуют  $\langle i, \bar{\eta}, \bar{w} \rangle$ , где  $\bar{w} \in \Psi(\bar{\eta})$ ,  $\bar{\eta} \in \Lambda(i)$ ,  $i \in \{1, \dots, S\}$ . Для каждого  $\bar{w} \in \Psi(\bar{\eta})$ ,  $\bar{\eta} \in \Lambda(i)$ ,  $i \in \{1, \dots, S\}$ , при известной последовательности  $\{v_{\ell,i,\bar{\eta},\bar{w}}[n, c_1, c_2] : n \in [0, N], c_1 \in [0, C_1], c_2 \in [0, C_2]\}$ ,  $\ell \in Q_0(\bar{\eta})$ , импульсную характеристику преобразователя (20) можно определить по формуле

$$g_{\ell,i,\bar{\eta},\bar{w}}[n, c_1, c_2] = \sum_{m=0}^{n-1} g_{\ell,i,\bar{\eta},\bar{w}}[n-m-1, c_1, c_2] u_\ell[m, c_1, c_2] + v_{\ell,i,\bar{\eta},\bar{w}}[n, c_1, c_2], \ell \in Q_0(\bar{\eta}), GF(2).$$

Таким образом, для решения задачи синтеза 3D-МНМДС с произвольными неизвестными входными последовательностями прежде всего осуществляем ортогонализацию ее входной последовательности, а после этого, применяя методику решения задачи синтеза 3D-МНМДС с ортогональными входными последовательностями, решаем поставленную задачу.

## Заключение

Рассмотрена задача синтеза одного класса двоичных трехпараметрических многомерных модулярных динамических систем с фиксированной памятью, ограниченной связью, заданной степенью, известным числом входов и выходов. Поставленная задача приведена в матрично-векторному виду. В случае с ортогональными входными последовательностями системы для решения задачи используется метод, основанный на округлении решения соответствующей континуальной задачи квадратичной оптимизации. В случае с неортогональными входными последовательностями системы для решения задачи предварительно входные последовательности ортогонализуются, после чего продолжается решение задачи, как в случае с ортогональными входными последовательностями.

## Список источников

1. Цыпкин Я.З., Попков Ю.С. Теория нелинейных импульсных систем. М. : Наука, 1973. 416 с.
2. Гилл А. Линейные последовательностные машины. М. : Наука, 1974. 288 с.
3. Фараджев Р.Г. Линейные последовательностные машины. М. : Сов. радио, 1975. 248 с.
4. Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г. Линейные клеточные машины: подход пространства состояний (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 125–163.
5. Фейзиев Ф.Г., Фараджева М.Р. Модулярные последовательностные машины: основные результаты по теории и приложению. Баку : Элм, 2006. 234 с.
6. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. М. : Мир, 1986. 576 с.
7. Фейзиев Ф.Г. Применение последовательностных машин в управлении работой скважины в газлифтной нефтедобыче // Известия НАН Азербайджана. Сер. физико-технических и математических наук. Информатика и проблемы управления. 1998, Т. 18, № 1. С. 218–221.
8. Фараджев Р.Г., Нагиев А.Т., Гусейнов И.Н. Критерии диагностируемости билинейных последовательностных машин // Доклады РАН. 1998. Т. 361, № 5. С. 606–607.
9. Mamedova G.G. On controllability and reversibility of two parametric bilinear sequential machines // Proc. of IMM Acad. Scien. Azerb. 2000. V. 13 (21). P. 171–178.
10. Nagiyev A.T., Feyziyev F.G. The sequential cellular-machining model of the continuous objects with distributing parameters // Seminarberichte, Fachbereich Mathematic. 2001. Bd. 71. S. 31–43.
11. Hacı Y. Optimal control problem for processes with multiparametric binary linear difference equation system // Applied and Computational Mathematics. 2009. V. 8, № 2. P. 263–269.
12. Hacı Y., Özen K. Terminal optimal control problem for processes represented by nonlinear multi-parametric binary dynamical system // Control and cybernetics. 2009. V. 38, № 3. P. 625–633.
13. Hacı Y., Candan M., Or A. On the Principle of Optimality for Linear Stochastic Dynamical System // International Journal in Foundations of Computer Science and Technology. 2016. V. 6, № 1. P. 57–63.
14. Фейзиев Ф.Г., Бабавад М.А. Описание декодирования циклических кодов в классе последовательностных машин, основанного на теореме Меггитта // Автоматика и вычислительная техника. 2012. Т. 46, № 4. С. 26–33.
15. Фейзиев Ф.Г., Мехтиева М.Р., Гусейнова Ф.Н. Представления решений одной модели многопараметрических билинейных модулярных динамических систем // Известия НАН Азербайджана. Сер. физико-технических и математических наук. Информатика и проблемы управления. 2013. Т. 33, № 6. С. 16–25.
16. Скобелев В.В. Автоматы на алгебраических структурах (обзор) // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 2. С. 58–66.
17. Сперанский Д.В. Эксперименты с нестационарными билинейными автоматами // Автоматика и телемеханика. 2015. № 9. С. 161–174.
18. Байбатшаев М.Ш., Попков Ю.С. Об одной задаче квадратичной оптимизации двоичных нелинейных последовательностных машин // Автоматика и телемеханика. 1978. № 12. С. 37–47.
19. Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г. Методы и алгоритмы решения задачи квадратичной оптимизации для двоичных последовательностных машин. Баку : Элм, 1996. 180 с.
20. Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г. К задаче квадратичной оптимизации для двоичных многомерных нелинейных последовательностно-клеточных машин // Автоматика и телемеханика. 1996. № 5. С. 104–119.
21. Фараджев Р.Г., Нагиев А.Т., Фейзиев Ф.Г. Аналитическое описание и квадратичная оптимизация двоичных многомерных нелинейных последовательностно-клеточных машин // Доклады РАН. 1998. Т. 360, № 6. С. 750–752.
22. Фейзиев Ф.Г., Абаева Н.Б. Полиномиальное соотношение для представления полной реакции одного класса двоичных 4D-модулярных динамических систем // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 2 (45). С. 46–54.
23. Фейзиев Ф.Г., Абаева Н.Б. Задача оптимального синтеза двоичных 4D-нелинейных модулярных динамических систем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. № 53. С. 102–109.

24. Фейзи́ев Ф.Г., Абаева Н.Б. Условия ортогональности входных последовательностей одного класса двоичных 4D-нелинейных модулярных динамических систем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2021. № 55. С. 80–90.
25. Фейзи́ев Ф.Г., Мехти́ева М.Р. Аналитическое представление полной реакции одного класса двоичных 3D-многомерных нелинейных модулярных динамических систем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 49. С. 82–91.

### References

1. Tsyarkin, Ya.Z. & Popkov, Yu.S. (1973) *Teoriya nelineynykh impul'snykh sistem* [Theory of Nonlinear Impulse Systems]. Moscow: Nauka.
2. Gill, A. (1974) *Lineynye posledovatel'nostnye mashiny* [Linear Sequential Machines]. Translated from English. Moscow: Nauka.
3. Faradzhev, R.G. (1975) *Lineynye posledovatel'nostnye mashiny* [Linear Sequential Machines]. Moscow: Sovetskoe radio.
4. Blyumin, S.L. & Faradzhev, R.G. (1982) Lineynye kletochnye mashiny: podkhod prostranstva sostoyaniy (obzor) [Linear cellular machine: The approach of the state space (review)]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2. pp. 125–163.
5. Feyziyev, F.G. & Faradzheva, M.R. (2006) *Modulyarnye posledovatel'nostnye mashiny: osnovnye rezul'taty po teorii i prilozheniyu* [Modular Sequential Machines: The Main Results of the Theory and Application]. Baku: Elm.
6. Blahut, R. (1986) *Teoriya i praktika kodov, kontroliruyushchikh oshibki* [Theory and Practice of Error Control Codes]. Translated from English. Moscow: Mir.
7. Feyziyev, F.G. (1998) Primenenie posledovatel'nostnykh mashin v upravlenii rabotoy skvazhiny v gazliftnoy neftedobyche [Application of sequential machines in control of wells in gaslift oil production]. *Izvestiya NAN Azerbaydzhana. Ser. fiziko-tekhnicheskikh i matematicheskikh nauk. Informatika i problemy upravleniya*. 33(1). pp. 218–221.
8. Faradzhev, R.G., Nagiev, A.T. & Guseynov, I.N. (1998) Kriterii diagnostiruемости bilineynykh posledovatel'nostnykh mashin [The criteria of diagnosability for bilinear sequential machines]. *Doklady RAN*. 361(5). pp. 606–607.
9. Mamedova, G.G. (2000) On controllability and reversibility of two parametric bilinear sequential machines. *Proc. of IMM Acad. Scien. Azerb.* 13(21). pp.171–178.
10. Nagiev, A.T. & Feyziyev, F.G. (2001) The sequential cellular-machining model of the continuous objects with distributing parameters. *Seminarberichte, Fachbereich Mathematic*. 71. pp. 31–43.
11. Haci, Y. (2009) Optimal control problem for processes with multiparametric binary linear difference equation system. *Applied and Computational Mathematics*. 8(2). pp. 263–269.
12. Haci, Y. & Özen, K. (2009) Terminal optimal control problem for processes represented by nonlinear multi-parametric binary dynamical system. *Control and Cybernetics*. 38(3). pp. 625–633.
13. Haci, Y., Candan, M. & Or, A. (2016) On the Principle of Optimality for Linear Stochastic Dynamical System. *International Journal in Foundations of Computer Science and Technology*. 6(1). pp. 57–63. DOI: 10.5121/ijfst.2016.6105.57
14. Feyziyev, F.G. & Babavand, M.A. (2012) Opisanie dekodirovaniya tsiklicheskich kodov v klasse posledovatel'nostnykh mashin, osnovannogo na teoreme Meggitta [The description of decoding of cyclic codes in a class sequential machines, based on Meggitt's theorem]. *Avtomatika i vychislitel'naya tekhnika – Automation Control and Computer Science*. 46(4). pp. 26–33.
15. Feyziyev, F.G., Mekhtieva, M.R. & Guseynova, F.N. (2013) Predstavleniya resheniy odnoy modeli mnogoparametricheskikh bilineynykh modulyarnykh dinamicheskikh sistem [The representation of solutions of one model of multiparameter bilinear modular dynamic systems]. *Izvestiya NAN Azerbaydzhana. Ser. fiziko-tekhnicheskikh i matematicheskikh nauk. Informatika i problemy upravleniya*. 33(6). pp. 16–25.
16. Skobelev, V.V. (2013) Automata on algebraic structures. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics* 13(2-2). pp. 58–66. DOI: 10.18500/1816-9791-2013-13-2-2-58-6
17. Speranskiy, D.V. (2015) Eksperiments with nonstationary bilinear finite state machines]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 9. pp. 161–174.
18. Baybatshaev, M.Sh. & Popkov, Yu.S. (1978) Ob odnoy zadache kvadrachnoy optimizatsii dvoichnykh nelineynykh posledovatel'nostnykh mashin [On one quadratic optimization problem for binary nonlinear sequential machines]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 12. pp. 37–47.
19. Faradzhev, R.G. & Feyziyev, F.G.(1996) *Metody i algoritmy resheniya zadachi kvadrachnoy optimizatsii dlya dvoichnykh posledovatel'nostnykh mashin* [Methods and algorithms for solving quadratic optimization problem for binary sequential machines]. Baku: Elm.
20. Faradzhev, R.G. & Feyziyev, F.G. (1996) K zadache kvadrachnoy optimizatsii dlya dvoichnykh mnogomernykh nelineynykh posledovatel'nostno-kletochnykh mashin [To the quadratic optimization problem for binary many-dimensional nonlinear sequential-cellular machines]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 5. pp. 104–119.
21. Faradzhev, R.G., Nagiev, A.T. & Feyziyev, F.G. (1998) Analiticheskoe opisanie i kvadrachnaya optimizatsiya dvoichnykh mnogomernykh nelineynykh posledovatel'nostno-kletochnykh mashin [Analytical description and quadratic optimization of binary many-dimensional nonlinear sequential-cellular machines]. *Doklady RAN*. 360(5). pp. 750–752.
22. Feyziyev, F.G. & Abayeva, N.B. (2019) The polynomial ratio for description of full reaction of one classes binary 4D-multidimensional modular dynamic systems. *Vestnik Permskogo Universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2(45). pp. 46–54. DOI: 10.17072/1993-0550-2019-2-46-54.

23. Feyziyev, F.G. & Abayeva, N.B. (2020) The problem of optimal synthesis of binary 4-D-nonlinear modular dynamic systems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'nayatekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 53. pp. 102–109. DOI: 10.17223/19988605/53/10
24. Feyziyev, F.G. & Abayeva, N.B. (2021) The conditions of orthogonality of the input sequences of one classes of binary 4D-nonlinear modular dynamic systems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'nayatekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 55. pp. 80–90. DOI: 10.17223/19988605/55/10
25. Feyziyev, F.G. & Mekhtiyeva, (2019.) M.R. Analytical description of full reaction of one classes binary 3D-multidimensional nonlinear modular dynamic systems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'nayatekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 49. pp. 82–91. DOI: 10.17223/19988605/49/10

**Информация об авторах:**

**Фейзи́ев Фикрат Гюльали оглы** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Дифференциальные уравнения и оптимизация» Сумгаитского государственного университета (Сумгаит, Азербайджан). E-mail: FeyziyevFG@mail.ru

**Мехтиева Марал Рзабала кызы** – кандидат физико-математических наук, доцент Бакинского государственного университета (Баку, Азербайджан). E-mail: mehdiyevamaral71@gmail.com

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Information about the authors:**

**Feyziyev Fikrat Gulali** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Sumgait State University (Sumgait, Azerbaijan). E-mail: FeyziyevFG@mail.ru

**Mekhtiyeva Maral Rzabala** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Baku State University (Baku, Azerbaijan). E-mail: mehdiyevamaral71@gmail.com

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

*Поступила в редакцию 26.07.2021; принята к публикации 28.02.2022*

*Received 26.07.2021; accepted for publication 28.02.2022*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

## MATHEMATICAL MODELING

Научная статья

УДК 004.93

doi: 10.17223/19988605/58/3

## Сравнительный анализ моделей случайных графов

Владимир Никифорович Кузьмин<sup>1</sup>, Федор Леонидович Шуваев<sup>2</sup>, Максим Валерьевич Розганов<sup>3</sup><sup>1, 2, 3</sup> Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия<sup>1</sup> kuzmindvn@ya.ru<sup>2</sup> cadetfed@mail.ru<sup>3</sup> mrozganov@mail.ru

**Аннотация.** Проведен сравнительный анализ основных математических моделей случайных графов. Рассмотрены экспоненциальные модели случайных графов, статистически доказана их адекватность реальным сетям. Показано, что такие модели расширяют инструментарий для исследования реальных сетей. Предложен усовершенствованный алгоритм настройки экспоненциальных моделей случайных графов.

**Ключевые слова:** граф; экспоненциальная модель; критерий согласия; мера близости, оценка

**Для цитирования:** Кузьмин В.Н., Шуваев Ф.Л., Розганов М.В. Сравнительный анализ моделей случайных графов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 58. С. 23–34. doi: 10.17223/19988605/58/3

Original article

doi: 10.17223/19988605/58/3

## Comparative analysis of random graph models

Vladimir N. Kuzmin<sup>1</sup>, Fedor L. Shuvaev<sup>2</sup>, Maxim V. Rozganov<sup>3</sup><sup>1, 2, 3</sup> Mozhaisky Military Space Academy, St. Petersburg, Russian Federation<sup>1</sup> kuzmindvn@ya.ru<sup>2</sup> cadetfed@mail.ru<sup>3</sup> mrozganov@mail.ru

**Abstract.** The study of networks of diverse nature, which are citation networks, social networks, or information and telecommunications networks, is given attention in various fields of science: physics, biology, computer science, and mathematics. In-depth studies of the topological properties of such networks contribute to the understanding of its functionality and other inherent features, such as stability. In studies of a diverse nature, much attention is paid to the construction and verification of the adequacy of models, since the reliability of the results depends on it. In the field of network research based on graph theory, there are about ten mathematical models, the main ones being the Erdos-Renyi random graph model (ER), the freely scalable Barabashi-Albert model (BA), and the exponential random graph model (ERGM). The most important quality of the ERGM models is shown in the fact that there are 15 basic network statistics that characterize real networks and allow us to draw statistically significant conclusions about which statistics control the network under study.

In this study, a comparative analysis of graph models is carried out, and a statistical assessment of their adequacy to real networks is carried out based on the calculation of the Euclidean distance between the networks. To calculate the Euclidean distance, graph models were presented in the space of parameters of graph characteristics, such as: average path distance (SR), density (PG), assortativity (AS), degree centrality (DC), closeness centrality (CC), betweenness centrality (BC), eigen vector centrality (EVC), transitivity (Tr), diameter (Di). The parameter space was reduced on the basis of McKay statistics. These statistics showed that the characteristics of the AS, BC, and EVC did not meet the requirements of data uniformity, so they were excluded.

As a result of the study, it is shown that the closest to real networks that reflect the types of human activity are ERGM. This proximity to real networks was achieved, among other things, by an improved algorithm for configuring ERGM, which consists in selecting the best combination of terminals according to the Akaike information criterion.

**Keywords:** graph; exponential model; criterion of agreement; measure of proximity; assessment

**For citation:** Kuzmin, V.N., Shuvaev, F.L., Rozganov, M.V. (2022) Comparative analysis of random graph models. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 58. pp. 23–34. doi: 10.17223/19988605/58/3

В настоящее время активно развивается научное направление анализа сетей, базирующееся на положениях теории графов. Это обусловлено существенным ростом вычислительных мощностей ЭВМ, появлением языков высокого уровня и специального программного обеспечения, позволяющего эффективно исследовать сети. При этом под сетями подразумеваются сети различной природы: сети взаимодействия белков в живых организмах, сети цитирования, информационно-коммуникационные сети (ИКС), социальные сети и др.

Для исследования сетей к настоящему времени разработан достаточно богатый инструментарий, базирующийся на графовых моделях [1–4]. С помощью таких моделей становится возможным тестировать гипотезы о сетевых структурах, процессах их формирования и динамике эволюции.

Кроме того, активное развитие методов машинного обучения и анализа данных открывает новые перспективы для использования моделей случайных графов, например при разработке систем распознавания топологий исследуемых сетей. Эти системы активно применяются для решения задач обеспечения информационной безопасности в информационно-телекоммуникационных сетях, при анализе социальных сетей и сетей цитирования. Формирование множества размеченных образов на основе той или иной модели случайного графа позволяет проверять точность систем распознавания.

Вместе с тем при всем многообразии моделей случайных графов не существует достаточных оснований для формирования суждения о том, какие же из этих моделей наиболее адекватно отражают природу реальных сетей. Целью исследования, основные результаты которого представлены в настоящей публикации, является разработка методической схемы сравнительного анализа адекватности моделей случайных графов реальным сетям.

## 1. Математические модели случайных графов

Современная теория графов предлагает около десяти математических моделей случайных графов, основными из которых считаются модель случайного графа Эрдеша–Реньи (ЭР), свободно масштабируемая модель Барабаши–Альберт (БА) и экспоненциальная модель случайного графа (ЭМСГ) [1, 3].

### 1.1. Модель случайного графа Эрдеша–Реньи

Модель случайного графа впервые предложена венгерскими математиками П. Эрдешем и Э. Реньи. Принцип построения случайного графа заключается в поочередном выборе натурального целого числа  $n$  из множества  $\{n \in N\}$  до  $n_{\text{треб}}$ , таким образом  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  – множество вершин моделируемого случайного графа. При этом  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  – все возможные ребра, которые можно образовать между парами элементов из  $V$ . Далее по схеме Бернулли выбираются ребра из множества  $\{e_1, \dots, e_n\}$  с заданной вероятностью успеха  $p$ , и в случае успеха очередное ребро вносится в строящееся

ся множество ребер  $E$ , а в случае неудачи – не вносится. Итогом этой схемы является реализация случайного графа  $G = \{V, E\}$  ЭР [3].

### 1.2. Модель предпочтительного присоединения Барабаши–Альберт

В реальных сетях новые вершины с большей вероятностью соединяются с вершинами, которые наиболее центральны по степени. Для анализа реальных сетей разработаны так называемые свободно масштабируемые модели, и самой распространенной среди них является модель предпочтительного присоединения, предложенная А. Барабаши и Р. Альберт [5, 6]. Эта модель описывает формирование случайного графа по следующим правилам:

1. В начальный момент времени  $t = 0$  задается  $V_t$  несвязных вершин.
2. На каждом временном шаге  $t = (1, 2, 3, \dots)$  добавляется новая вершина с  $E_t$  ребрами;
3. Количество ребер, с которыми приходит в граф новая вершина – фиксировано, но соединяется она с уже существующей вершиной сети с вероятностью, пропорциональной степени этой вершины.

Свойства реальных сетей наиболее полно описывает версия модели БА с фиксированным параметром распределения вероятностей соединения вершин [6] и вариативным числом новых ребер. Отличие заключается в том, что в модель вводится кортеж распределения вероятностей образования вершин, в котором  $p_0$  – вероятность изолированности вершины,  $p_1$  – вероятность соединения вершины с одной вершиной,  $p_2$  – вероятность соединения вершины с двумя вершинами,  $p_3$  – вероятность соединения вершины с тремя вершинами.

### 1.3. Экспоненциальная модель случайного графа

Экспоненциальные модели случайных графов нашли широкое применение при решении различных задач анализа сетей, в первую очередь социальных. При формировании ЭМСГ математический аппарат позволяет учитывать множество параметров, важных именно для рассматриваемой сети, например меры центральности [7–12], плотность графа, ассортативность, триадный вектор и т.п. [13–17].

Формируемая модель представляет собой граф  $G$  из пространства всех возможных графов для  $n$  вершин  $\Lambda$ . Ряд распределения графов по пространству  $\Lambda$  оценивается на основе следующего выражения:

$$P(G) = \frac{1}{c} \cdot e^{\Theta_1 \cdot z_1(G) + \Theta_2 \cdot z_2(G) + \dots + \Theta_p \cdot z_p(G)} \quad (1)$$

где  $c$  – нормирующая константа,  $\sum_{G \in \Lambda} e^{\Theta_1 \cdot z_1(G) + \Theta_2 \cdot z_2(G) + \dots + \Theta_p \cdot z_p(G)}$ ;  $\Theta_k$  – коэффициент, определяющий

склонность сети к образованию связей  $k$ -го типа (например, ребер, 2-star, 2-path и т.п.);  $z_k(G)$  – сетевая статистика / терм (от англ. *term*), характеризующая число связей  $k$ -го типа в модели. Таким образом вероятность графа  $G$  определяется суммой сетевых статистик, взвешенных коэффициентами, в степени экспоненты.

Мощность множества  $\Lambda$  для ненаправленного графа равна  $2^n$ , для направленного –  $2^{n(n-1)}$ . Несложно заметить, что даже для небольших  $n$  поиск графа с максимальной вероятностью методом полного перебора является крайне ресурсоемким процессом. Один из методов формирования ЭМСГ, получивший широкое распространение на практике, представляет собой Марковские цепи по методу Монте-Карло (МЦМК; англ. MCMC – Markov chain Monte Carlo), в частности реализация модели по алгоритму Метрополиса–Гастингса [13, 14]. В ходе таких испытаний параметры модели подбираются под реальную сеть, в результате чего исследователь получает представление о лежащих в основе сети процессах.

ЭМСГ являются относительно новым средством анализа, поэтому рассмотрим содержание основных этапов моделирования.

Формирование ЭМСГ по алгоритму Метрополиса–Гастингса – это итеративный процесс последовательного выбора графов ( $G_0, G_1, \dots, G_t, \dots, G_T$ ) из множества  $\Lambda$ , который включает в себя ряд этапов.

На первом этапе по реализации анализируемой сети оцениваются число вершин  $n$  и интересующие коэффициенты  $\Theta_k$ .

На втором этапе задается начальный граф  $G_0$  с  $n$  вершинами. Обычно начальный граф формируется без связей между вершинами, при этом он также может формироваться со случайными связями.

Этапы с третьего по пятый итеративно повторяются  $T$  раз. Необходимое число итераций для каждой сети определяется отдельно и зависит от скорости сходимости модели.

На третьем этапе случайным образом выбирается пара вершин  $h$  и  $k$  текущего графа  $G_t$ . Если между этими узлами связь отсутствует, то эта связь добавляется, если связь есть, то удаляется. Таким образом, формируется новый граф  $G_{t+1}$ .

На четвертом этапе, исходя из выражения (1), вычисляется отношение вероятностей графов: нового  $G_{t+1}$  и текущего  $G_t$ :

$$\frac{P(G_{t+1})}{P(G_t)} = \frac{e^{\Theta_1 \cdot z_1(G_{t+1}) + \Theta_2 \cdot z_2(G_{t+1}) + \dots + \Theta_p \cdot z_p(G_{t+1})}}{e^{\Theta_1 \cdot z_1(G_t) + \Theta_2 \cdot z_2(G_t) + \dots + \Theta_p \cdot z_p(G_t)}} = e^{\Theta_1 \cdot (z_1(G_{t+1}) - z_1(G_t)) + \Theta_2 \cdot (z_2(G_{t+1}) - z_2(G_t)) + \dots + \Theta_p \cdot (z_p(G_{t+1}) - z_p(G_t))}.$$

На пятом этапе принимается решение, какой граф выбирается в качестве текущего для последующей итерации. Для этого оценивается вероятность принятия нового графа  $G_{t+1}$  в качестве текущего:

$$P_{t+1} = \min \left\{ 1, \frac{P(G_{t+1})}{P(G_t)} \right\}.$$

Если  $P(G_{t+1}) > P(G_t)$ , то  $P_{t+1} = 1$  и в качестве текущего графа однозначно выбирается  $G_{t+1}$ . Если  $P(G_{t+1}) < P(G_t)$ , то  $P_{t+1} < 1$ . В этом случае генерируется одна реализация случайной величины  $u$  с равномерным законом распределения в диапазоне от 0 до 1. Когда  $u < P_{t+1}$ , в качестве текущего графа выбирается  $G_{t+1}$ , когда  $u \geq P_{t+1} - G_t$ .

В результате выполнения всех итераций формируется граф  $G_T$ , который представляет собой ЭМСГ анализируемой сети.

В исследованиях [15–17] показано, что существует около 15 основных базовых сетевых статистик, характеризующих реальные сети. Одно из важнейших качеств ЭМСГ заключается в том, что с их помощью можно сделать статистически значимые выводы: какие термы управляют исследуемой сетью. В табл. 1 приведены базовые термы, формирующие сети.

Таблица 1

Основные термы экспоненциальных моделей случайных графов

№ п/п	Наименование термина		Описание
	русскоязычное	англоязычное	
Общие			
1	Взаимосвязанность	Mutual	Взаимосвязанность сети
2	Эквивалентность ребер	Edges	Эквивалентность количества ребер
3	Изолированные вершины	Isolates	Эквивалентность количества изолированных вершин
4	Средняя степень вершины	Meandeg	Равенство средних степеней для вершин моделируемой сети
5	Плотность сети	Density	Равенство плотности сети
Структурные			
6	Транзитивность	Transitive	Эквивалентность транзитивности сети
7	Интранзитивность	Intransitive	Равенство триад типов 111D, 201, 111U, 021C и 030C
8	Двойной путь	Twopath	Эквивалентность количества элементов, представляющих собой минимально возможный путь от одной вершины к другой через транзитивную вершину
9	Симмелианская триада	Simmelian	Равенство триад simmelian (основаны на сильной взаимосвязи между двумя вершинами через третью)
10	Балансные триады	Balance	Равенство триад типов 102 и 300

Приведенные в табл. 1 термины предназначены только для направленных сетей. Вместе с русским наименованием указано и английское оригинальное имя термина; это сделано потому, что на русский язык они переводятся впервые. Таким образом, основная особенность ЭМСГ состоит в том, что при формировании графов, в частности при принятии решения о наличии связи между любыми двумя узлами, учитывается структура всего графа, а именно сколько интересующих базовых элементов в графе уже присутствует.

Термины разделены на две большие группы – общие и структурные. Общие отражают базовые характеристики графа, такие как степенное распределение, степень взаимосвязанности вершин графа, доля изолированных вершин и плотность графа. Структурные термины представляют собой минимальные элементы построения сети различной природы, иными словами, для каждой сети характерны свои уникальные термины [15–17].

Одним из преимуществ ЭМСГ является возможность работы с различными типами предикторов. Их можно разбить на четыре большие группы: предикторы узлов (ПУ), предикторы ребер (ПР), предикторы диад (ПД) и предикторы локальных структур (ПЛС). Существует более сотни вариантов предикторов, в настоящей статье, без ущерба для общности представления, ограничимся ПУ и ПР. Примерами ПУ являются номинативные или численные характеристики узла, например расстояние между узлами или гендерная принадлежность человека, представленного узлом, если рассматривается социальная сеть. Примером ПР является интенсивность передачи данных между узлами в ИКС. На этапе моделирования ЭМСГ оценивается статистическая значимость предикторов, и если гипотеза о их значимости подтверждается, то они включаются в модель, что может значительно повысить ее адекватность.

## 2. Подбор параметров математических моделей случайных графов

Исследование реальных сетей с использованием моделей случайных графов реализуется в два этапа. На первом этапе осуществляются выбор математической модели и подбор ее параметров, наиболее полно соответствующих исследуемой сети. На втором этапе проводится исследование сети с использованием выбранной модели. В этой связи особую важность имеет именно первый этап, представляющий собой этап структурной и параметрической идентификации сети, состоящий в отыскании наилучшей структуры и параметров модели.

Исходным параметром при моделировании является количество вершин  $n$  в исследуемой реальной сети. Это начальная установка, на основании которой осуществлялось моделирование в настоящем исследовании.

### 2.1. Подбор параметров для модели случайного графа Эрдеша–Реньи

Модель ЭР является двухпараметрической, т.е. при ее формировании используются число вершин  $n$  и число ребер  $m$ . Количество вершин фиксировано и соответствует исходной сети, а число ребер изменяется от 1 до  $m_{\max}$ , где  $m_{\max}$  – максимально возможное количество ребер при фиксированном количестве вершин ( $m_{\max} = n^2 - n$ ). Перебор параметров модели ЭР заключается в формировании множества реализаций случайных графов с заданным числом вершин для каждого значения варьируемого параметра – числа ребер.

### 2.2. Подбор параметров для модели предпочтительного присоединения Барабаши–Альберт

Как было отмечено, свойства реальных сетей наиболее полно описывает версия модели БА с кортежем распределений вероятностей образования вершин  $P = \langle p_0, p_1, p_2, p_3 \rangle$ . При этом, чтобы исключить наличие изолированных вершин, вероятность  $p_0$  приравнивается нулю. Каждая из вероятностей образования вершин (кроме  $p_0$ ) принимает значение на интервале (0; 1). В такой ситуации кортеж вероятностей всегда состоит из трех варьируемых элементов, а общее число кортежей равно  $9^3 = 729$ . Поиск параметров модели БА состоит в последовательном переборе возможных кортежей

вероятностей  $P$  с последующим формированием множества реализаций случайных графов для каждого кортежа.

### 2.3. Подбор параметров для экспоненциальной модели случайного графа

Для ЭМСГ оцениваемым параметром, позволяющим выбрать оптимальную модель, являются информационный критерий Акаике (AIC) и значение статистической значимости  $p$ -value для каждого термина. По AIC выбирается модель ЭМСГ с оптимальной комбинацией термов, одновременно с этим термины должны быть статистически значимы на заданном уровне  $p$ -value. Считается, что чем ниже значение AIC, тем лучше модель [18, 19]. Для подбора параметров ЭМСГ использован следующий алгоритм:

1. По 10 терминам, представленным в табл. 1, рассчитываются все возможные комбинации по 2, 3 и 4 термина;
2. Осуществляется построение ЭМСГ по каждой полученной комбинации из 2, 3, и 4 термов;
3. Выбираются только те модели, у которых статистическая значимость  $p$ -value термов не менее 0,05, а затем из них выбирается модель с наименьшим AIC.

## 3. Оценка адекватности модели

### 3.1. Структурная схема оценки адекватности модели

Под адекватностью модели понимают степень ее соответствия тому реальному явлению или объекту, для описания которого она строится. Вместе с тем создаваемая модель ориентирована, как правило, на исследование определенного подмножества свойств этого объекта. Поэтому можно считать, что адекватность модели определяется степенью ее соответствия не столько реальному объекту, сколько свойствам объекта в предметной области проводимого исследования.

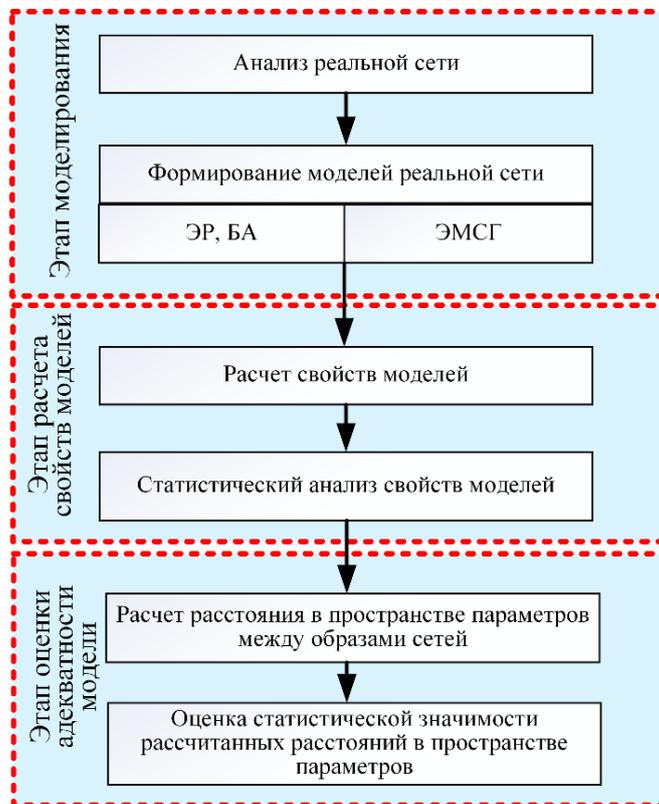


Рис. 1. Структурная схема сравнительного анализа адекватности моделей случайных графов  
 Fig. 1. Block diagram of the comparative analysis of mathematical models of random graphs

Если объектом исследования является сеть, то подмножеством ее свойств являются следующие характеристики, описанные в теории графов [7–12]: среднее расстояние пути (СРс), плотность (ПГ), ассортативность (АС), централизация по степени (СЦ), централизация по близости (СБ), централизация по посредничеству (СП), централизация по собственному вектору (СВЦ), транзитивность (Тр), диаметр (Ди) [13–17].

На рис. 1 представлена структурная схема проведения сравнительного анализа различных моделей реальных сетей. Она состоит из трех основных этапов, которые, в свою очередь, делятся на подэтапы.

**Этап моделирования.** На этом этапе производится первичный анализ реальной сети – объекта моделирования. В ходе анализа подсчитываются первичные характеристики реальной сети – число узлов и вершин, определяется ее тип – связанная или несвязанная, направленная или ненаправленная. На основе первичного анализа реальной сети формируются модели ЭР, БА и ЭМСГ.

**Этап расчета свойств моделей.** Для каждой реализации графа рассчитывается совокупность значений 9 основных свойств графов:

$$F = (f_{СРс}, f_{ПГ}, f_{АС}, f_{Ди}, f_{СЦ}, f_{СБ}, f_{СП}, f_{СВЦ}, f_{Тр}).$$

Элементы  $F$  формируют образ рассматриваемой модели графа или графа реальной сети в пространстве параметров. В результате расчета  $F$  для  $N$  реализаций графов получаем матрицу наблюдений  $Y_{[N,n]} = \left\| f_{ij} \right\|_N^n$ , где  $n$  – номер свойства графов.

Для полученной матрицы проводится статистический анализ изменчивости значений свойств графов, чтобы оценить однородность наблюдений. Статистический анализ осуществляется путем построения доверительных интервалов (ДИ) для коэффициента вариации ( $кв$ ) [20]. В статистике принято считать, что совокупность наблюдений, коэффициент вариации которых превышает 33%, является неоднородной. Таким образом, из матрицы наблюдений исключаются признаки, которые выходят за границы рассчитанного для них ДИ, и те,  $кв$  которых превышает 33%. ДИ (95%) рассчитываются на основе статистики Мак Кея [20, 21]:

$$\left( кв \left[ \left( \frac{u_1}{v} - 1 \right) (кв)^2 + \frac{u_1}{v} \right]^{-1/2} \leq кв \leq кв \left[ \left( \frac{u_2}{v} - 1 \right) (кв)^2 + \frac{u_2}{v} \right]^{-1/2} \right)$$

где  $u_1 = \chi_{v,1-\alpha/2}^2$  и  $u_2 = \chi_{v,\alpha/2}^2$ ,  $100(1-\alpha/2)\%$  и  $100(\alpha/2)\%$  – перцентили распределения Хи-квадрат с  $v = n - 1$  степенями свободы [22].

**Этап оценки адекватности модели.** На этом этапе рассчитывается матрица евклидовых расстояний между модельными образами и образом исследуемой реальной сети в пространстве значений  $F$ . По расстоянию между образами моделей различных типов и реальной сетью осуществляется оценка статистической значимости различия между образом реальной сети и образом модели графа по критерию согласия Пирсона (Хи-квадрат). Считается, что те модели, которые статистически незначимо отличаются по расстоянию в пространстве параметров от исходной реальной сети, являются адекватными.

### 3.2. Результаты экспериментальный исследований

Проведем сравнительный анализ моделей ЭР, БА и ЭМСГ с реальной сетью отношений между менеджерами одной из компаний США (англоязычное название сети ht\_friends), представленной в пакете «нетворкдата» (англ. networkdata), который является самым крупным набором сетевых данных для языка статистического моделирования R. Рассматриваемая реальная сеть № 1 является связанной и направленной, имеет 21 вершину и 102 ребра.

Произведем моделирование путем формирования множеств реализаций случайных графов с использованием рассмотренных моделей на множестве их параметров, как показано в п. 2. Для каждой полученной модели рассчитаем образ  $F$ . В результате получены три матрицы наблюдений:

для БА размерности  $Y_{[729000,9]}^{БА}$ , для ЭР размерности  $Y_{[420000,9]}^{ЭР}$ . Размерности матриц обусловлены особенностями установки параметров моделей, указанных в п. 2. Отдельно производится расчет ЭМСГ, на основе его получено минимальное значение AIC = 422 при комбинации термов intransitive + mutual + meandeg + simmelianties.

Для полученных матриц наблюдений был осуществлен статистический анализ изменчивости, который заключался в измерении  $kv$  и построении ДИ для него. Результаты анализа представлены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты расчета коэффициента вариации и ДИ

ДИ/Ф	СРс	ПГ	Ас	Ди	СЦ	СБ	СП	СВЦ	Тр
$kv$	21,6	31,6	46,5	30,3	29,2	103,3	10,7	41,3	27,6
ДИ нижний	20,7	29,0	44,3	29,0	28,0	96,3	9,3	39,4	26,2
ДИ верхний	22,5	33,5	48,9	31,8	30,6	111,9	11,4	43,4	28,3

Из табл. 2 видно, что однородны совокупности наблюдений СРс, Ди, СЦ, СП, ПГ и Тр (выделены серым), поэтому из дальнейшего анализа исключаем остальные три свойства и рассчитываем евклидово расстояние между образами сетей в пространстве шести оставшихся свойств графов.

На рис. 2 представлены зависимости евклидова расстояния между образами и тестовой сетью от номера модели для ЭР (черная пунктирная линия) и БА (красная сплошная линия), причем для наглядности представлены зависимости не только для сети ht\_friends, но и для сетей № 2–4 из табл. 3. На рис. 2, a показано евклидово расстояние образов моделируемых сетей от образа тестовой сети № 1 ht\_friends, на рис. 2, b – от образа сети № 2, на рис. 2, c – от образа сети № 3, на рис. 2, d – от образа сети № 4. Видно, что зависимость для модели ЭР изменчива, а для БА – однородна.

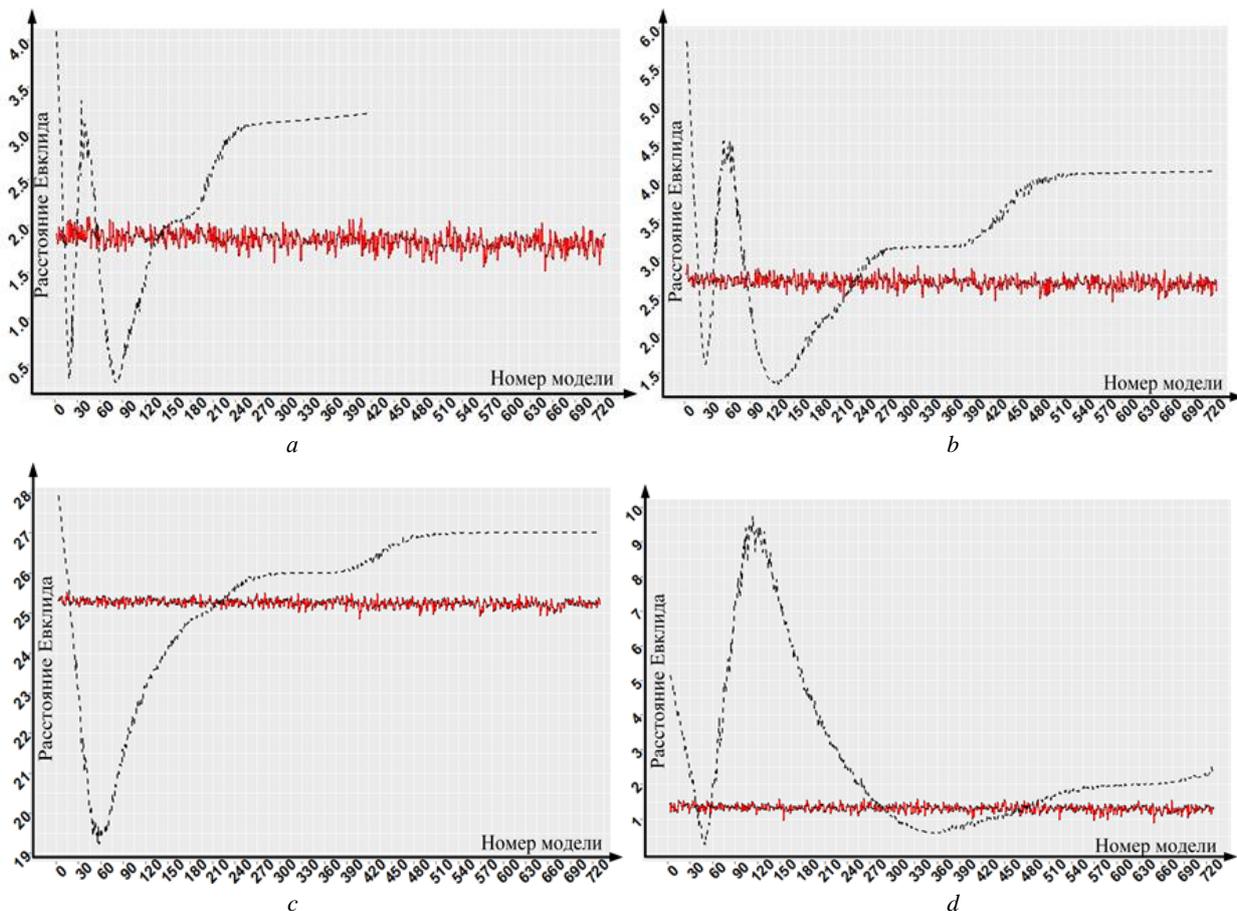


Рис. 2. Зависимости евклидова расстояния между образами сетей и номерами моделей сети  
 Fig. 2. Dependencies of Euclidean distance between network patterns and network model numbers

Из 729 моделей БА и 420 ЭР выбирается по одной, наиболее близкой к реальной сети. Для наилучшей по критерию АИС ЭМСГ аналогично рассчитываются образ и расстояние от него до образа реальной сети. По критерию согласия Пирсона (Хи-квадрат) осуществлена оценка статистической значимости расстояний между образами моделей и образом реальной сети. В соответствии с этой оценкой на уровне значимости  $p\text{-value} = 0,005$  статистически значимыми являются различия в расстоянии между образом реальной сети и образами моделей ЭМСГ, ЭР, БА. Следовательно, не представляется возможным сформировать адекватную модель сети № 1, т.е. статистически незначимо отличающуюся от нее в пространстве параметров свойств графов.

### 3.3. Сравнительный анализ моделей графов по тестовому набору реальных сетей

Для обобщения полученного выше результата верификации моделей по представленной на рис. 1 схеме осуществлен сравнительный анализ рассмотренных моделей случайных графов с использованием данных о реальных сетях, представленных в пакете «нетворкдата».

Выбранные реальные данные отражают различные стороны человеческой деятельности: сеть № 1 – сеть дружеских взаимоотношений в кампусе Австралийского национального университета, № 2, 3 – ИКС в датацентрах одной из коммерческих организаций, № 4 – иерархия в стае птиц, № 5 – сеть взаимоотношений в колледже штата Иллинойс, № 6 – сеть менеджеров крупной корпорации, № 7 – рабочая ИКС в адвокатской конторе, № 8 – транспортная сеть авиаперевозок в США, № 9 – сеть межбелковых взаимодействий в человеческом организме. Результаты анализа представлены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты сравнительного анализа моделей графов

Сеть	ЭМСГ			ЭР			БА		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
№ 1	intransitive + mutual + meandeg + simmelianties (AIC = 422)	5,05	3	$E = 58$	19,22	3	$P = \langle 0; 0,6; 0,2; 0,2 \rangle$	24,85	3
№ 2	twopath + density + intransitive (AIC = 630)	1,56	3	$E = 29$	0,41	Н	$P = \langle 0; 0,4; 0,2; 0,2 \rangle$	1,94	3
№ 3	intransitive + mutual + edges + simmelianties (AIC = 220)	0,48	Н	$E = 29$	0,46	Н	$P = \langle 0; 0,9; 0,1; 0,2 \rangle$	1,82	3
№ 4	intransitive + simmelianties + density + mutual (AIC = 689)	1,46	3	$E = 47$	0,69	3	$P = \langle 0; 0,8; 0,2; 0,2 \rangle$	1,11	3
№ 5	balance + intransitive + mutual + transitive (AIC = 3541)	14,14	3	$E = 102$	5,48	3	$P = \langle 0; 0,9; 0,1; 0,3 \rangle$	14,11	3
№ 6	density + edges + meandeg + mutual (AIC = 992)	0,1	Н	$E = 229$	0,12	Н	$P = \langle 0; 0,3; 0,1; 0,9 \rangle$	1,55	3
№ 7	intransitive + simmelianties + ПУ (AIC = 630,622)	0,42/0,23	Н	$E = 144$	0,45	3	$P = \langle 0; 0,7; 0,3; 0,2 \rangle$	0,69	3
№ 8	edges + mutual + simmelianties + 2ПУ (AIC = 482,432,411)	0,40/0,32/0,18	Н	$E = 147$	0,47	3	$P = \langle 0; 0,1; 0,2; 0,9 \rangle$	0,58	3
№ 9	edges + simmelianties + mutual + ПУ (AIC = 403)	0,32	Н	$E = 434$	0,60	3	$P = \langle 0; 0,8; 0,1; 0,2 \rangle$	10,45	3

Для каждого типа моделей созданы по три графы значений: графа 1 – уникальные параметры модели, графа 2 содержит евклидово расстояние в пространстве значений свойств между образами сформированной модели и реальной сети, графа 3 содержит индикатор значимости различия расстояния между образом модели и образом реальной сети. В табл. 3 представлено по одному представителю каждого типа моделей, которые в пространстве параметров свойств графов находятся ближе всего к сети-прототипу.

Реальные сети № 1–6 не содержали в себе атрибутов узлов и ребер, что не позволяло применять в ЭМСГ предикторы. Сети № 7–9 содержат атрибуты узлов, поэтому помимо термов при формировании ЭМСГ использовались ПУ, что заметно повысило адекватность модели: ЭМСГ – единственные модели, которые статистически незначимо отличаются от реальной сети. В графе 1 ЭМСГ наборы термов различны, что определяется механизмами установления связей между узлами в силу различной природы рассматриваемых сетей.

Необычными результатами отмечаются модели ЭР. Так, для сетей № 2, 3, 6 они показывают наилучшие значения по близости к реальной сети. Данное обстоятельство на данный момент не имеет научного объяснения и является направлением для дальнейших исследований.

Модели БА неожиданно отмечаются самыми низкими показателями. Из 9 моделей ни одна не показала статистически значимую близость к реальной сети. Можно отметить низкую изменчивость расстояния от реальной сети при моделировании БА, как видно из рис. 2.

### Заключение

В результате анализа моделей случайных графов показано, что наиболее близкими к реальным сетям, отражающим виды человеческой деятельности, являются сети типа ЭМСГ и ЭР. Проведено имитационное моделирование, в ходе которого получены практические результаты, подтверждающие выводы анализа.

Предложенная схема анализа может применяться на практике для создания адекватных моделей реальных сетей. Исследование адекватности проведено с использованием оригинальной авторской методики, в основе которой лежит апробированный подход сравнения евклидова расстояния между образами сетей, рассчитанных на основе измерения основных свойств графов. При этом расстояние оценивается статистически на основе критерия согласия Пирсона.

Предложенный алгоритм настройки ЭМСГ, заключающийся в подборе наилучшей комбинации термов по информационному критерию Акаике, позволил повысить точность настройки модели и, следовательно, повысить ее сходство с реальными сетями.

### Список источников

1. Chen P.-Y., Choudhury S., Hero A. Multi-centrality graph spectral decompositions and their application to cyber intrusion detection // IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). 2016. P. 4553–4557.
2. Шуваев Ф.Л., Татарка М.В. Анализ динамики мер центральности математических моделей случайных графов // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20, № 2. С. 249–256.
3. Hartmann A., Mézard M. Distribution of diameters for Erdős-Rényi random graphs // Phys. Rev. 2018. V. 97, № 3. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.032128
4. Gibson H., Vickers P. Using adjacency matrices to lay out larger small-world networks // Applied Soft Computing. 2016. V. 42. P. 80–92.
5. Шуваев Ф.Л., Татарка М.В. Анализ математических моделей случайных графов, применяемых в имитационном моделировании информационно-коммуникационных сетей // Вестник Санкт-Петербургского университета ГПС МЧС России. 2020. № 2. С. 67–77.
6. Barabasi A. Network Science. Glasgow : Cambridge university press, 2016. 453 p.
7. Bonchi F., De Francisci G., Riondato M. Centrality Measures on Big Graphs: Exact, Approximated, and Distributed Algorithms // Proc. of the 25th International Conference Companion on World Wide Web. 2016. P. 1017–1020.
8. Brandes U., Borgatti S., Freeman L. Maintaining the duality of closeness and betweenness centrality // Social Networks. 2016. V. 44. P. 153–159.
9. Mino A., Salehzadeh-Yazdi A., Razaghi-Moghadam Z., Hennig H., Wolkenhauer O. A Systematic survey of centrality measures for protein-protein interaction networks // Systems Biology. 2018. V. 12 (1). P. 80–88.
10. Seo H., Thorson S.J. ERGM approach to press freedom, regime type, and Internet connectedness // First Monday. 2019. V. 24, № 9. URL: <https://firstmonday.org/ojs/index.php/fm/article/view/9428> (accessed: 05.09.2020).
11. Wang P., Robins G., Pattison P., Lazega E. Social selection models for multilevel networks // Social Networks. 2015. V. 35. P. 96–115.
12. Golshid Sharifnia S., Saghaei A. A statistical approach for social network change detection: an ERGM based framework // Communications in Statistics – Theory and Methods. 2020. DOI: 10.1080/03610926.2020.1772981

13. Marnissi Y., Chouzenoux E., Benazza-Benyahia A., Pesquet J. Majorize-minimize adapted Metropolis-Hastings algorithm // *IEEE Xplore*, 2020. P. 2356–2369.
14. Teixeira J., Stutz L., Knupp D., Silva Neto A. A new adaptive approach of the Metropolis-Hastings algorithm applied to structural damage identification using time domain data // *Applied Mathematical Modelling*, 2020. V. 82 (1). P. 587–606.
15. Zvereva O. Triad Census Usage for Communication Network Analysis // *CEUR Workshop Proc.* 2016. V. 1710. P. 378–389.
16. Brunson J.C. Triadic analysis of affiliation networks // *Network Science*, 2015. V. 3(4). P. 480–508.
17. Faust K. A puzzle concerning triads in social networks: Graph constraints and the triad census // *Social Networks*, 2010. № 32. P. 221–233.
18. Package ‘network’. URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/network/network.pdf> (accessed: 05.09.2020).
19. Package ‘ergm’. URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/ergm/ergm.pdf> (accessed: 05.09.2020).
20. Panichkitkosolkul W. Confidence intervals for the coefficient of variation in a normal distribution with a known population mean // *Journal of probability and statistic*, 2013. № 2. P. 34–46.
21. Albatineh A., Golam Kibria B., Wilcox M., Zogheib B. Confidence interval estimation for the population coefficient of variation using ranked set sampling: a simulation study // *Journal of applied statistics*, 2014. V. 41. P. 733–751.
22. Beigy M. Coefficient of Variation: cv\_versatile. 2019. URL: [https://cran.r-project.org/web/packages/cvcqv/vignettes/cv\\_versatile.html](https://cran.r-project.org/web/packages/cvcqv/vignettes/cv_versatile.html) (accessed: 04.12.2020).

### References

1. Chen, P-Y., Choudhury, S. & Hero, A. (2016) Multi-centrality graph spectral decompositions and their application to cyber intrusion detection. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. pp. 4553–4557. DOI: 10.1109/ICASSP.2016.7472539
2. Shuvaev, F.L. & Tatarka, M.V. (2020) Dynamics of centrality measures of random graph mathematical models. *Nauchno-tehnicheskij vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki – Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 20(2). pp. 249–256. DOI: 10.17586/2226-1494-2020-20-2-249-256
3. Hartmann, A. & Mézard, M. (2018) Distribution of diameters for Erdős-Rényi random graphs. *Physical Review*, 97(3). DOI: 10.1103/PhysRevE.97.032128
4. Gibson, H. & Vickers, P. (2016) Using adjacency matrices to lay out larger small-world networks. *Applied Soft Computing*, 42. pp. 80–92. DOI: 10.1016/j.asoc.2016.01.036
5. Shuvaev, F.L. & Tatarka, M.V. (2020) Analysis of mathematical models of random graphs used in the simulation of information and communication networks. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta GPS MChS Rossii – Bulletin of St. Petersburg University State Fire Service of the Ministry of Emergencies of Russia*, 2. pp. 67–77.
6. Barabasi, A. (2016) *Network Science*. Glasgow: Cambridge University Press.
7. Bonchi, F., De Francisci, G. & Riondato, M. (2016) Centrality Measures on Big Graphs: Exact, Approximated, and Distributed Algorithms. *Proceedings of the 25th International Conference Companion on World Wide Web*. pp. 1017–1020.
8. Brandes, U., Borgatti, S. & Freeman, L. (2016) Maintaining the duality of closeness and betweenness centrality. *Social Networks*, 44. pp. 153–159. DOI: 10.1016/j.socnet.2015.08.003
9. Minoo, A., Salehzadeh-Yazdi, A., Razaghi-Moghadam, Z., Hennig, H. & Wolkenhauer, O. (2018) A Systematic Survey of Centrality Measures for Protein-Protein Interaction Networks. *Systems Biology*, 12(1). pp. 80–88. DOI: 10.1186/s12918-018-0598-2
10. Seo, H. & Thorson, S.J. (2019) ERGM approach to press freedom, regime type, and Internet connectedness. *First Monday*, 24(9). [Online] Available from: <https://firstmonday.org/ojs/index.php/fm/article/view/9428> (Accessed: 4th December 2020).
11. Wang, P., Robins, G., Pattison, P. & Lazega, E. (2015) Social selection models for multilevel networks. *Social Networks*, 35. pp. 96–115. DOI: 10.1016/j.socnet.2014.12.003
12. Golshid, S.S. & Saghaei, A. (2020) A statistical approach for social network change detection: an ERGM based framework. *Communications in Statistics – Theory and Methods*. pp. 2259–2280. DOI:10.1080/03610926.2020.1772981
13. Marnissi, Y., Chouzenoux, E., Benazza-Benyahia, A. & Pesquet, J. (2020) Majorize-minimize adapted Metropolis-Hastings algorithm. *IEEE Xplore*. pp. 2356–2369. DOI: 10.1109/TSP.2020.2983150
14. Teixeira, J., Stutz, L., Knupp, D. & Silva Neto, A. (2020) A new adaptive approach of the Metropolis-Hastings algorithm applied to structural damage identification using time domain data. *Applied Mathematical Modelling*, 82. pp. 587–606. DOI: doi.org/10.1016/j.apm.2020.01.021
15. Zvereva, O. (2016) Triad Census Usage for Communication Network Analysis. *CEUR Workshop Proc.* 2016. V. 1710. pp. 378–389.
16. Brunson, J.C. (2015) Triadic analysis of affiliation networks. *Network Science*, 3(4). pp. 480–508.
17. Faust, K. (2010) A puzzle concerning triads in social networks: Graph constraints and the triad census. *Social Networks*, 32. pp. 221–233. DOI: 10.1016/j.socnet.2010.03.004
18. Cran.r-project.org. (n.d.) Package ‘network’. [Online] Available from: <https://cran.r-project.org/web/packages/network/network.pdf> (Accessed: 5th September).
19. Cran.r-project.org. (n.d.) Package ‘ergm’. [Online] Available from: <https://cran.r-project.org/web/packages/ergm/ergm.pdf> (Accessed: 5th September 2020).
20. Panichkitkosolkul, W. (2013) Confidence intervals for the coefficient of variation in a normal distribution with a known population mean. *Journal of Probability and Statistics*. pp. 34–46. DOI: 10.1155/2013/324940

21. Albatineh, A., Golam, K.B., Wilcox, M. & Zogheib, B. (2013) Confidence interval estimation for the population coefficient of variation using ranked set sampling: a simulation study. *Journal of Applied Statistics*. 41. pp. 733–751. DOI: 10.1080/02664763.2013.847405
22. Beigy, M. (2019) *Coefficient of Variation: cv\_versatile*. [Online] Available from: [https://cran.r-project.org/web/packages/cvcqv/vignettes/cv\\_versatile.html](https://cran.r-project.org/web/packages/cvcqv/vignettes/cv_versatile.html) (Accessed: 4th December 2020).

**Информация об авторах:**

**Кузьмин Владимир Никифорович** – доктор военных наук, профессор, заслуженный деятель науки Российской Федерации, ведущий научный сотрудник Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: kuzmindvn@ya.ru

**Шуваев Федор Леонидович** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: cadetfed@mail.ru

**Розганов Максим Валерьевич** – старший научный сотрудник Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: mrozganov@mail.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Information about the authors:**

**Kuzmin Vladimir Nikiforovich** – Doctor of Science, Professor, Honored scientist of the Russian Federation, leading researcher, Mozhaisky Military Space Academy (St. Petersburg, Russian Federation). E-mail: kuzmindvn@ya.ru

**Shuvaev Fedor Leonidovich** – Candidate of Technical Science, Saint Researcher, Mozhaisky Military Space Academy (St. Petersburg, Russian Federation). E-mail: cadetfed@mail.ru

**Rozganov Maxim Valeryevich** – Saint Researcher, Mozhaisky Military Space Academy (St. Petersburg, Russian Federation). E-mail: mrozganov@mail.ru

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

*Поступила в редакцию 20.04.2021; принята к публикации 28.02.2022*

*Received 20.04.2021; accepted for publication 28.02.2022*

Научная статья

УДК 519.21

doi: 10.17223/19988605/58/4

## Вероятностная модель системы совместного доступа с коллизиями, *H*-настойчивостью и отказами

Анна Васильевна Полховская<sup>1</sup>, Елена Юрьевна Данилюк<sup>2</sup>,  
Светлана Петровна Моисеева<sup>3</sup>, Ольга Сергеевна Бобкова<sup>4</sup>

<sup>1, 2, 3, 4</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>1</sup> [anya.polhovskaya00@mail.ru](mailto:anya.polhovskaya00@mail.ru)

<sup>2</sup> [daniluc.elena.yu@gmail.com](mailto:daniluc.elena.yu@gmail.com)

<sup>3</sup> [smoiseeva@mail.ru](mailto:smoiseeva@mail.ru)

<sup>4</sup> [osia153@yandex.ru](mailto:osia153@yandex.ru)

**Аннотация.** Рассматривается математическая модель системы совместного доступа с коллизиями, *H*-настойчивостью и отказами в виде системы массового обслуживания с повторными вызовами вида M|M|1 и проводится анализ ее вероятностных характеристик. Разработан рекуррентный алгоритм вычисления вероятностей числа заявок на орбите, проведена численная реализация нахождения допредельного распределения вероятностей числа заявок на орбите, технических характеристик функционирования системы.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания с повторными вызовами, коллизии, *H*-настойчивость, отказы, рекуррентный алгоритм

### **Благодарности:**

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Томской области в рамках научного проекта № 19-41-703002.

**Для цитирования:** Полховская А.В., Данилюк Е.Ю., Моисеева С.П., Бобкова О.С. Вероятностная модель системы совместного доступа с коллизиями, *H*-настойчивостью и отказами // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 58. С. 35–46. doi: 10.17223/19988605/58/4

Original article

doi: 10.17223/19988605/58/4

## The probabilistic model of sharing system with collisions, *H*-persistence and rejections data processing

Anna V. Polkhovskaya<sup>1</sup>, Elena Y. Danilyuk<sup>2</sup>,  
Svetlana P. Moiseeva<sup>3</sup>, Olga S. Bobkova<sup>4</sup>

<sup>1, 2, 3, 4</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> [anya.polhovskaya00@mail.ru](mailto:anya.polhovskaya00@mail.ru)

<sup>2</sup> [daniluc.elena.yu@gmail.com](mailto:daniluc.elena.yu@gmail.com)

<sup>3</sup> [smoiseeva@mail.ru](mailto:smoiseeva@mail.ru)

<sup>4</sup> [osia153@yandex.ru](mailto:osia153@yandex.ru)

**Abstract.** A queuing system with repeated calls, one server, collisions (conflicts) of calls, *H*-persistence and rejections is considered. The input flow of calls is the Poisson process with an intensity  $\lambda$ . A call that found the device free occupies it, and service begins, which ends successfully if no other requests were received during it.

If the server is busy, then a conflict (collision) arises between the call that has come for service and the ones being serviced, and in the general case, both calls instantly go to the orbit and repeat the attempt to successfully serve after a random time. In this article, in the event of a collision, one of the calls, for example, which was in service (on the device), goes into orbit with probability  $1$ , the other goes into orbit with probability  $H$ , and with probability  $(1-H)$  refuses service and leaves the system.

We have two types of arriving calls: primary and repeated. Primary calls are calls received from the outside into the system; repeated calls are calls in the orbit after the collision and making a repeated attempt to occupy the device for servicing. When building models with repeated calls, it is usually assumed that the arrival of primary calls obeys Poisson's law. Nevertheless, this does not mean that the incoming flow of calls in the analyzed system is Poisson, we are talking only about the flow of primary calls. The total incoming arrival flow consists of a Poisson flow of primary calls and a flow of repeated calls.

The service time of a primary or repeated claim does not depend on its type and has an exponential distribution with the parameter  $\mu$ , and one unit of line resource is used to service requests. The random delay that a call carries out in orbit is exponentially distributed with the parameter  $\sigma$ .

The problem is to find the probabilities distribution of the calls number in the orbit. We write the Kolmogorov differential equations system for the stationary regime and then construct a recurrent algorithm to solve it. The numerical results obtained with recurrent algorithm made it possible to conclude that with a decrease in the random delay, which is carried out by a call in orbit under a conflict, the distribution of the number of calls in the orbit has the form of a Gaussian. The technical characteristics of the system, which are of practical importance for its design, are found.

**Keywords:** retrial queueing system; collisions; rejections;  $H$ -persistence; recurrent algorithm

**Acknowledgments:**

The research was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Tomsk Region as part of a scientific project № 19-41-703002.

**For citation:** Polkhovskaya, A.V., Danilyuk, E.Yu., Moiseeva, S.P., Bobkova O.S. (2022) The probabilistic model of sharing system with collisions,  $H$ -persistence and rejections. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnik i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 58. pp. 35–46. doi: 10.17223/19988605/58/4

Развитие современных инфокоммуникационных систем и сетей связи открывает множество различных услуг для использования абонентами. В современных условиях пользователем выступает не только человек, но и многообразие устройств, подключенных к сети. Стремительный рост генерируемой нагрузки при этом вызывает перегрузки на отдельных участках сети, что ведет к ухудшению качества предоставляемых услуг.

Пользователь имеет все больше возможностей влиять своим поведением на формирование входящих потоков, частоту посылки вызова, длину сообщений, их количество и т.д. В условиях, когда возникает временная недоступность сервиса, важным фактором становится повторный запрос (вызов) на предоставление услуги или сервиса. Множество мультимедийных и служебных приложений на абонентских устройствах может в автоматическом режиме генерировать подобные запросы, не имея при этом каких-либо ограничений, связанных, например, с временем набора номера или терпеливостью абонента. Такой неучтенный трафик будет занимать каналный ресурс сверх запланированного под нагрузку от первичных потоков вызовов. На участках сети возможны переполнения, которые приводят к отказу в обслуживании заявок, что порождает, в свою очередь, множество повторных обращений к системе. Нагрузка от потока повторных вызовов, как правило, не является учтенной, что приводит к выходу из строя сегментов сети до полного отказа ее работы. Выявление и исследование влияния подобных аспектов поведения на качество работы сети позволяет заранее спланировать и подготовить сеть таким образом, чтобы снизить потери вызовов на ее участках. Наибольший интерес для практики представляет рассмотрение экстремальных условий работы, т.е. условий перегрузки, отличающих ее от нормального (планируемого) состояния.

Все это определяет актуальность создания теоретических основ для построения математических моделей, позволяющих модифицировать, совершенствовать и разрабатывать методы анализа и расчета показателей качества обслуживания в инфокоммуникационных системах и сетях связи.

Теория систем массового обслуживания с повторными вызовами (Retrial Queueing Systems; RQ-системы) является важным разделом современной теории телетрафика: актуальность обусловлена

широкими практическими приложениями в области оценивания производительности и проектирования широкополосных и мобильных сотовых радиосетей, локальных вычислительных сетей с протоколами случайного множественного доступа. В таких системах запрос, поступивший в систему (запрос на соединение с сотой) и не получивший обслуживания, не уходит из системы (как в системах с отказами) и не становится в очередь (как в системах с ожиданием), а повторяет попытки через случайное время, пока не поступит на обслуживание. Явление повторных попыток является неотъемлемой чертой вышеуказанных систем передачи данных, и игнорирование его может привести к значительным погрешностям при принятии инженерных решений.

Исследованию RQ-систем посвящено большое количество работ. Например, в монографии J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral [1] приведено более семисот ссылок на публикации по этой тематике. В работах R. Wilkinson, J. Cohen, G. Gosztony и др. [2–5] отмечено, что математические модели RQ-систем применяются для проектирования и оптимизации реальных информационно-коммуникационных систем различного уровня (локальных, глобальных), управляемых протоколами случайного множественного доступа, цифровых сетей связи, а также сетей сотовой связи, вычислительных кластеров, call-центров и др. Имеющиеся на сегодняшний день научные публикации в данной области предлагают достаточно много различных задач и подходов к их решению. Наиболее полно исследованы марковские и немарковские RQ-системы с настойчивыми повторными заявками (базовая модель), получены рекуррентные формулы для вычисления распределения вероятностей числа заявок на орбите как для конечного, так и для бесконечного размера орбиты. Основными методами исследования RQ-систем являются матричные методы, численные методы, имитационное моделирование, так как точные аналитические формулы удается получить лишь для самых простых моделей [6–8].

Более сложными для исследования являются модели с конфликтами заявок. Рассмотрение RQ-систем с ситуацией конфликта заявок подразумевает, что заявка, нашедшая прибор занятым в момент прибытия ее в систему, и заявка, находящаяся на обслуживании, вступают в конфликт [9–13]. RQ-системы с конфликтами заявок имитируют поведение многих реальных ситуаций, например в телекоммуникационных сетях с протоколами множественного доступа с обнаружением коллизий (CSMA-CD), где передача данных должна быть гарантирована с безошибочной точностью с некоторой заданной вероятностью [14–18].

RQ-системы с нетерпеливостью заявок возникают при моделировании процессов обращения в call-центры [16–18]. Для характеристики поведения нетерпеливых клиентов помимо терминов «нетерпеливость», « $p$ -настойчивость» используется термин «отказ», понимаемый как решение не присоединяться к линии (прибору) после неудачной попытки получить обслуживание с последующим уходом из системы. Учет таких особенностей существенно усложняет математическую модель и ограничивает возможность получения аналитических выражений, поэтому применяют аппроксимационные методы [19–25].

Настоящая статья посвящена исследованию RQ-системы с одним обслуживающим прибором с коллизиями (конфликтами) заявок,  $H$ -настойчивостью и отказами.

## 1. Функциональная модель системы совместного доступа с коллизиями и отказами

Прежде чем построить математическую модель анализируемой системы связи, определим функциональную модель, являющуюся ее функциональным прототипом. Формализуем работу системы: выделим перечень событий, которые имеют существенное значение при использовании анализируемого ресурса передачи информации [26].

Рассмотрим однолинейную (с одним обслуживающим прибором) систему с конфликтами заявок,  $H$ -настойчивостью и отказами.

На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его, и начинается обслуживание, которое заканчивается успешно, если во время него другие заявки не поступали. Если прибор занят, то между пришедшей на обслуживание и обслуживаемой заявками возникает конфликт (коллизия), и в общем случае [16–17] обе заявки

мгновенно переходят на орбиту и повторяют попытку успешно обслужиться через случайное время. В настоящей статье в случае возникновения коллизии заявка, находившаяся на обслуживании (на приборе), уходит на орбиту с вероятностью 1, а поступившая на прибор и вызвавшая конфликт заявка с вероятностью  $H$  уходит на орбиту, а с вероятностью  $(1 - H)$  отказывается от обслуживания и покидает систему.

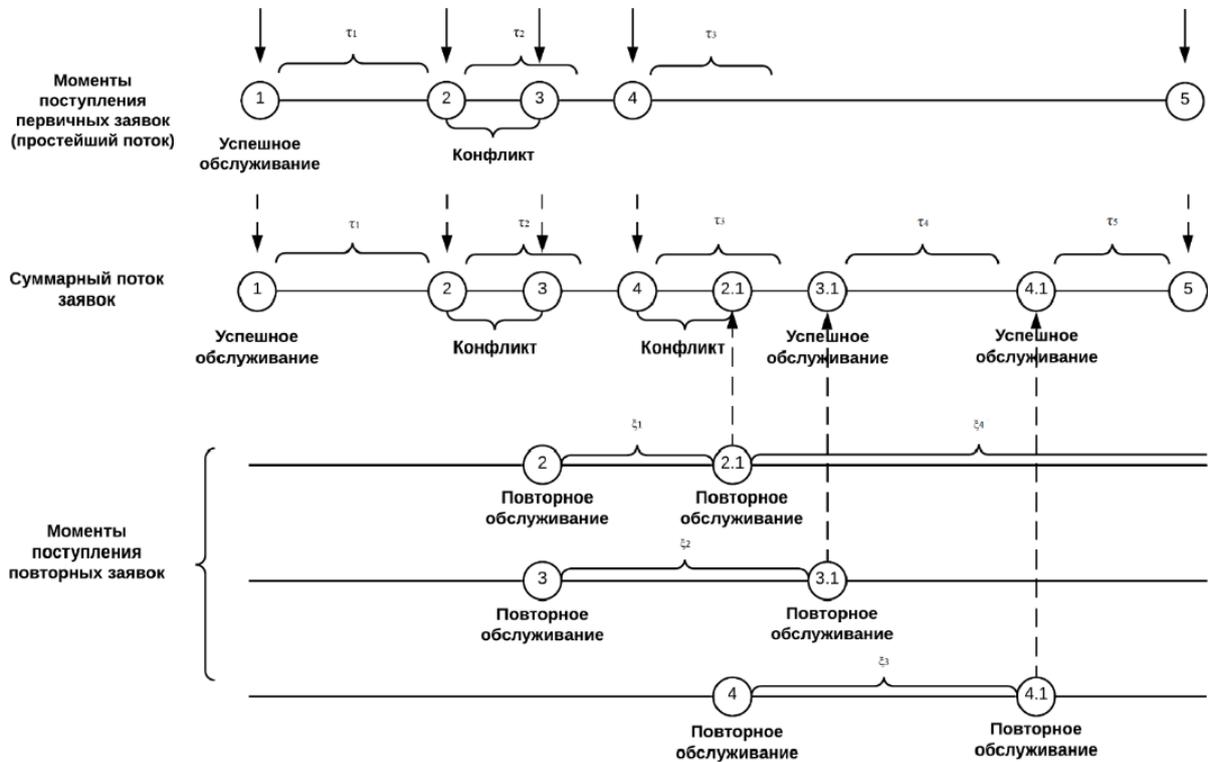


Рис. 1. Схема моделирования суммарного входящего потока заявок  
 Fig. 1. Scheme for modeling the total incoming arrival process

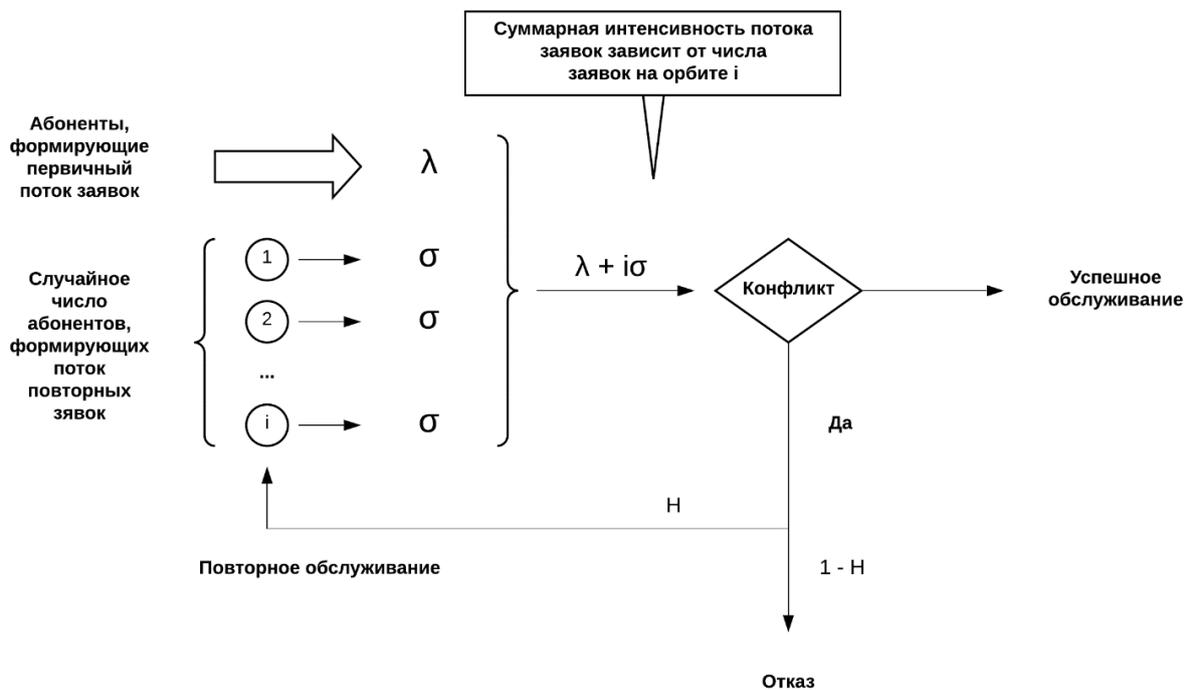


Рис. 2. RQ-система с коллизиями,  $H$ -настойчивостью и отказами  
 Fig. 2. RQ-system with collisions,  $H$ -persistence and rejections

Будем разделять поступающие на прибор заявки на две категории: первичные и повторные. Первичные – это заявки, поступившие в систему извне; повторные – заявки, оказавшиеся на орбите системы в результате коллизии и осуществляющие повторную попытку занять прибор для обслуживания. Суммарный входящий поток обращений в систему состоит из потока первичных заявок и потока повторных заявок. На рис. 1 приведена схема формирования суммарного входящего потока.

Время обслуживания первичной или повторной заявки не зависит от ее типа и имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\mu$ , и для обслуживания заявок используется одна единица ресурса линии. Случайная задержка, которую осуществляет заявка на орбите, экспоненциально распределена с параметром  $\sigma$ .

Описанная процедура доступа к каналному ресурсу (обслуживаемому прибору) и образования орбиты показана на рис. 2 как модель RQ-системы с коллизиями,  $H$ -настойчивостью и отказами.

В работе решается задача определения вероятностных характеристик работы системы: среднего числа повторных попыток соединения на одну первичную; среднего числа отказов на одно установленное соединение; доли повторных вызовов в общем потоке поступающих, – которые позволяют оценить работоспособность системы.

## 2. Математическая модель

Обозначим  $i(t)$  – случайный процесс, который описывает число заявок на орбите в момент времени  $t$  и задается следующим образом:  $i(t) = 0, 1, 2, \dots$ ,  $k(t)$  – случайный процесс, определяющий состояние прибора в момент времени  $t$ :

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Так как входящий поток – простейший, а время обслуживания – экспоненциальное, то случайный процесс  $\{k(t), i(t)\}$  изменения во времени состояний описанной RQ-системы является двумерной цепью Маркова с непрерывным временем.

Обозначим через  $P\{k(t) = k, i(t) = i\} = P_k(i, t)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ,  $k = 0, 1$ , вероятность того, что в момент времени  $t$  прибор находится в состоянии  $k$  и на орбите  $i$  заявок. Ставится задача нахождения распределения вероятностей случайного процесса – числа абонентов, повторяющих вызов, и состояния прибора в стационарном режиме функционирования системы.

Для распределения вероятностей  $P_k(i, t)$  согласно теореме о полной вероятности можно составить равенства:

Для  $i = 0$ :

$$\begin{cases} P_0(0, t + \Delta t) = P_0(0, t)(1 - \lambda\Delta t) + P_1(0, t)\mu\Delta t + o(\Delta t), \\ P_1(0, t + \Delta t) = P_1(0, t)(1 - \lambda\Delta t)(1 - \mu\Delta t) + P_0(0, t)\lambda\Delta t + P_0(1, t)(1 - \lambda\Delta t)\sigma\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

Для  $i = 1$ :

$$\begin{cases} P_0(1, t + \Delta t) = P_0(1, t)(1 - \lambda\Delta t)(1 - \sigma\Delta t) + P_1(1, t)\mu\Delta t + P_1(0, t)\lambda\Delta t(1 - H) + P_1(1, t)\sigma\Delta t(1 - H) + o(\Delta t), \\ P_1(1, t + \Delta t) = P_1(1, t)(1 - \lambda\Delta t)(1 - \mu\Delta t)(1 - \sigma\Delta t) + P_0(1, t)(1 - \sigma\Delta t)\lambda\Delta t + P_0(2, t)(1 - \lambda\Delta t)2\sigma\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

Для  $i \geq 2$ :

$$\begin{cases} P_0(i, t + \Delta t) = P_0(i, t)(1 - \lambda\Delta t)(1 - i\sigma\Delta t) + P_1(i, t)\mu\Delta t + P_1(i - 2, t)\lambda\Delta tH + P_1(i - 1, t)\lambda\Delta t(1 - H) \\ + P_1(i - 1, t)(i - 1)\sigma\Delta tH + P_1(i, t)i\sigma\Delta t(1 - H) + o(\Delta t), \\ P_1(i, t + \Delta t) = P_1(i, t)(1 - \lambda\Delta t)(1 - \mu\Delta t)(1 - i\sigma\Delta t) + P_0(i, t)(1 - i\sigma\Delta t)\lambda\Delta t + P_0(i + 1, t)(1 - \lambda\Delta t)(i + 1)\sigma\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

Отсюда нетрудно получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Для } i=0: \\
 \frac{\partial P_0(0,t)}{\partial t} = -\lambda P_0(0,t) + \mu P_1(0,t), \\
 \frac{\partial P_1(0,t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu)P_1(0,t) + \lambda P_0(0,t) + \sigma P_0(1,t). \\
 \text{Для } i=1: \\
 \frac{\partial P_0(1,t)}{\partial t} = -(\lambda + \sigma)P_0(1,t) + \mu P_1(1,t) + \lambda(1-H)P_1(0,t) + \sigma(1-H)P_1(1,t), \\
 \frac{\partial P_1(1,t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu + \sigma)P_1(1,t) + \lambda P_0(1,t) + 2\sigma P_0(2,t). \\
 \text{Для } i \geq 2: \\
 \frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} = -(\lambda + i\sigma)P_0(i,t) + \mu P_1(i,t) + \lambda H P_1(i-2,t) + \lambda(1-H)P_1(i-1,t) \\
 + (i-1)\sigma H P_1(i-1,t) + i\sigma(1-H)P_1(i,t), \\
 \frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu + i\sigma)P_1(i,t) + \lambda P_0(i,t) + (i+1)\sigma P_0(i+1,t).
 \end{array} \right. \quad (1)$$

Обозначим через  $\Pi_k(i)$  стационарные вероятности случайного процесса  $\{k(t), i(t)\}$ , перепишем для них систему (1).

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Для } i=0: \\
 -\lambda \Pi_0(0) + \mu \Pi_1(0) = 0, \\
 -(\lambda + \mu)\Pi_1(0) + \lambda \Pi_0(0) + \sigma \Pi_0(1) = 0. \\
 \text{Для } i=1: \\
 -(\lambda + \sigma)\Pi_0(1) + \lambda(1-H)\Pi_1(0) + [\mu + \sigma(1-H)]\Pi_1(1) = 0, \\
 -(\lambda + \mu + \sigma)\Pi_1(1) + \lambda \Pi_0(1) + 2\sigma \Pi_0(2) = 0. \\
 \text{Для } i \geq 2: \\
 -(\lambda + i\sigma)\Pi_0(i) + [\mu + i\sigma(1-H)]\Pi_1(i) + [\lambda(1-H) + (i-1)\sigma H]\Pi_1(i-1) + \lambda H \Pi_1(i-2) = 0, \\
 -(\lambda + \mu + i\sigma)\Pi_1(i) + \lambda \Pi_0(i) + (i+1)\sigma \Pi_0(i+1) = 0.
 \end{array} \right. \quad (2)$$

Для решения системы (2) построим итерационный (рекуррентный) алгоритм. Положим  $\Pi(0) = a$ , где  $a$  – некоторая произвольная положительная константа,  $\Pi(i) = \Pi_0(i) + \Pi_1(i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , и запишем следующие равенства:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Для } i=0: \\
 \Pi_1(0) = \frac{\lambda}{\mu} \Pi_0(0), \\
 \Pi_0(1) = \frac{1}{\sigma} \{(\lambda + \mu)\Pi_1(0) - \lambda \Pi_0(0)\}. \\
 \text{Для } i=1: \\
 \Pi_1(1) = \frac{1}{\mu + \sigma(1-H)} \{(\lambda + \sigma)\Pi_0(1) - \lambda(1-H)\Pi_1(0)\}, \\
 \Pi_0(2) = \frac{1}{2\sigma} \{(\lambda + \mu + \sigma)\Pi_1(1) - \lambda \Pi_0(1)\}. \\
 \text{Для } i \geq 2: \\
 \Pi_1(i) = \frac{1}{\mu + i\sigma(1-H)} \{(\lambda + i\sigma)\Pi_0(i) - [\lambda(1-H) + (i-1)\sigma H]\Pi_1(i-1) - \lambda H \Pi_1(i-2)\}, \\
 \Pi_0(i+1) = \frac{1}{(i+1)\sigma} \{(\lambda + \mu + i\sigma)\Pi_1(i) - \lambda \Pi_0(i)\}.
 \end{array} \right. \quad (3)$$

С помощью системы (3) найдем  $\Pi(i) = \Pi_0(i) + \Pi_1(i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , после чего нормируем  $\Pi\Pi(i) = \Pi(i) / \sum_{i=0}^N \Pi(i)$ .

Этот алгоритм довольно прост в реализации и позволяет численно получить допредельные характеристики исследуемой RQ-системы. Следует отметить, что алгоритм применим только для исследования RQ-системы с простейшим входящим потоком, но позволяет сделать предположения о виде распределения вероятностей числа заявок на орбите при различных параметрах системы.

### 3. Численный анализ

В результате численных экспериментов выявлено, что при уменьшении случайной задержки, которую осуществляет заявка на орбите в случае возникновения конфликта, распределение числа заявок на орбите имеет вид гауссовского. На рис. 3, 4 изображены графики распределения вероятностей числа заявок на орбите, полученного с помощью рекуррентного алгоритма и дискретизированного нормального распределения при разных значениях вероятности  $H$  и параметра  $\sigma$ .

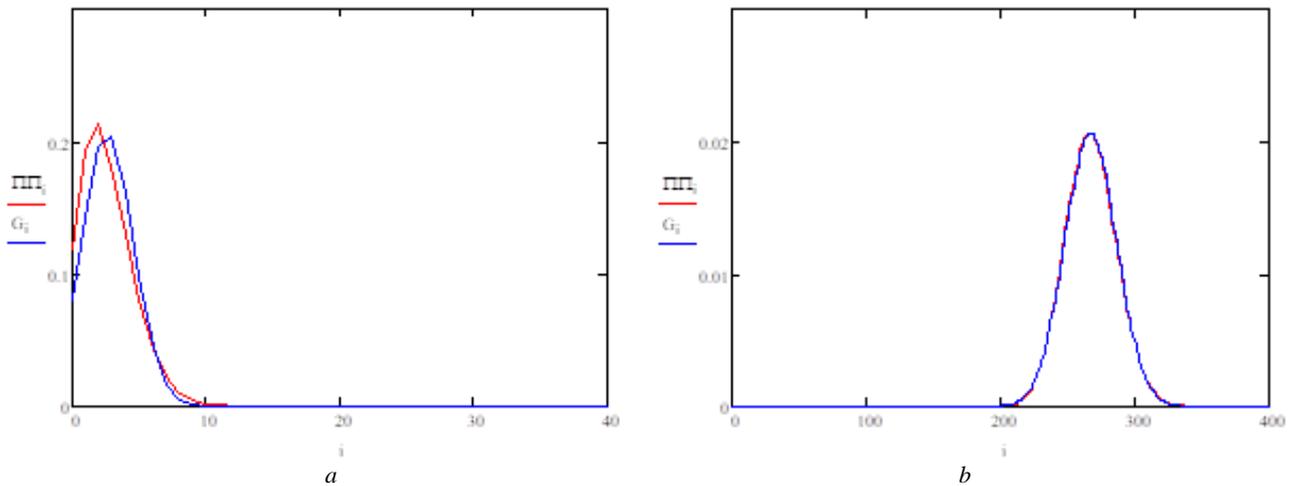


Рис. 3. Изменение числа заявок на орбите для RQ-системы с коллизиями,  $H$ -настойчивостью и отказами при  $H = 0,4$ :  
 $a - \lambda = 0,4, \mu = 1, \sigma = 0,1$ ;  $b - \lambda = 0,4, \mu = 1, \sigma = 0,001$

Fig. 3. Variation the number of calls in orbit for RQ-system with collisions,  $H$ -persistence and rejections under  $H = 0,4$ :  
 $a - \lambda = 0,4, \mu = 1, \sigma = 0,1$ ;  $b - \lambda = 0,4, \mu = 1, \sigma = 0,001$

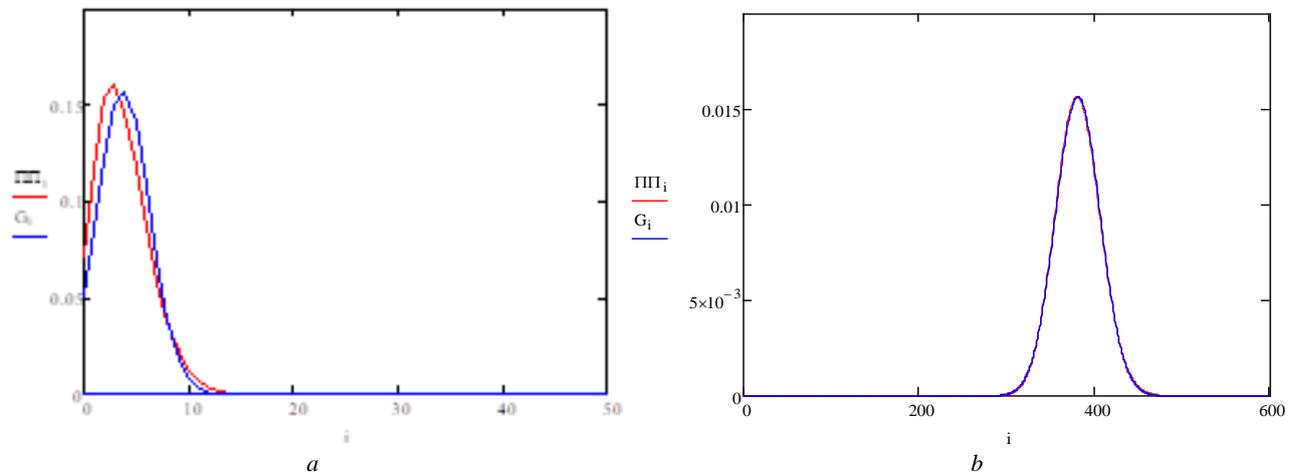


Рис. 4. Изменение числа заявок на орбите для RQ-системы с коллизиями,  $H$ -настойчивостью и отказами при  $H = 0,6$ :  
 $a - \sigma = 0,1$ ;  $b - \sigma = 0,001$

Fig. 4. Variation the number of calls in orbit for RQ-system with collisions,  $H$ -persistence and rejections under  $H = 0,6$ :  
 $a - \sigma = 0,1$ ;  $b - \sigma = 0,001$

Для сравнения распределения вероятностей, полученного с помощью рекуррентного алгоритма ПП( $i$ ), и дискретизированного нормального распределения  $G_i$  воспользуемся расстоянием Колмогорова:

$$\Delta = \max_v \left\{ \left| \sum_{i=0}^v \text{ПП}(i) - \sum_{i=0}^v G_i \right| \right\}.$$

Результаты сравнения для различных значений параметра  $\sigma$  приведены в табл. 1.

Таблица 1

Расстояние Колмогорова для RQ-системы с коллизиями при уменьшении  $\sigma$

$\sigma$	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 0,05$	$\sigma = 0,01$
Значение $\Delta$ для параметров $\lambda = 0,4, \mu = 1, H = 0,4$	0,049	0,023	0,004
Значение $\Delta$ для параметров $\lambda = 0,4, \mu = 1, H = 0,8$	0,022	0,01	0,0018
Значение $\Delta$ для параметров $\lambda = 0,8, \mu = 1, H = 0,4$	0,010	0,005	0,0009
Значение $\Delta$ для параметров $\lambda = 0,8, \mu = 1, H = 0,8$	0,002	0,01	0,0002

Приведенные в таблице значения показывают, что с уменьшением значения параметра  $\sigma$  точность аппроксимации возрастает.

Следует отметить, что существование стационарного режима в рассматриваемой системе зависит от значения  $H$ . Для  $H < 1$  стационарный режим существует для любых значений интенсивности поступления первичных заявок. Если выполняется соотношение  $H = 1$ , то для существования стационарного режима необходимо ограничить поток первичных заявок [17].

#### 4. Вероятностные характеристики и показатели качества

Выражения для вычисления показателей качества обслуживания заявок [27] следуют из их физического смысла и определяются через отношение интенсивностей анализируемых событий или суммирование стационарных вероятностей модели; к ним относятся: доля потерянных первичных и повторных заявок; среднее число повторных попыток соединения на одну первичную; среднее число отказов на одно установленное соединение; доля повторных вызовов в общем потоке поступающих заявок. Для анализа представляются технические характеристики рассматриваемой системы, значения которых приведены в табл. 2.

Таблица 2

Технические характеристики функционирования RQ-системы с коллизиями и отказами

Характеристики системы	Параметры входящего потока											
	$\lambda = 0,2, \mu = 1$				$\lambda = 0,4, \mu = 1$				$\lambda = 0,6, \mu = 1$		$\lambda = 1, \mu = 1$	
	$\sigma = 0,1$		$\sigma = 0,001$		$\sigma = 0,1$		$\sigma = 0,001$		$\sigma = 0,1$	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 0,1$
	$H = 0,4$	$H = 0,8$	$H = 0,4$	$H = 0,8$	$H = 0,4$	$H = 0,8$	$H = 0,4$	$H = 0,8$	$H = 0,4$	$H = 0,8$	$H = 0,4$	$H = 0,8$
Интенсивность суммарного потока поступающих заявок $\lambda + \sigma \sum_{i=0}^N i \text{ПП}(i)$	0,264	0,308	0,264	0,303	0,665	1,005	0,667	1,000	1,176	2,288	2,363	5,833
Среднее число абонентов, повторяющих вызов $\sum_{i=0}^N i \text{ПП}(i)$	0,644	1,080	63,769	102,83	2,651	6,053	266,648	600,045	5,756	16,877	13,629	48,327
Интенсивность отказов первичных и повторных заявок $(1 - H) \left( \lambda + \sigma \sum_{i=0}^N i \text{ПП}(i) \right)$	0,159	0,062	0,158	0,061	0,339	0,201	0,400	0,200	0,705	0,458	1,418	1,167

Характеристики системы	Параметры входящего потока											
	$\lambda = 0,2, \mu = 1$				$\lambda = 0,4, \mu = 1$				$\lambda = 0,6, \mu = 1$		$\lambda = 1, \mu = 1$	
	$\sigma = 0,1$		$\sigma = 0,001$		$\sigma = 0,1$		$\sigma = 0,001$		$\sigma = 0,1$		$\sigma = 0,1$	
	$H = 0,4$	$H = 0,8$	$H = 0,4$	$H = 0,8$	$H = 0,4$	$H = 0,8$	$H = 0,4$	$H = 0,8$	$H = 0,4$	$H = 0,8$	$H = 0,4$	$H = 0,8$
Среднее число повторных попыток соединения на одну первичную												
$\frac{\sigma \sum_{i=0}^N i \Pi\Pi(i)}{\lambda}$	0,322	0,540	0,319	0,514	0,663	1,513	0,667	1,500	0,959	2,813	1,363	4,833
Доля повторных вызовов в общем потоке поступающих заявок												
$\frac{\sigma \sum_{i=0}^N i \Pi\Pi(i)}{\lambda + \sigma \sum_{i=0}^N i \Pi\Pi(i)}$	0,243	0,351	0,242	0,340	0,399	0,602	0,400	0,600	0,490	0,738	0,577	0,829

Полученные данные показывают, что среднее число абонентов, повторяющих вызов, пропорционально растет с уменьшением значений параметра  $\sigma$ , на долю повторных вызовов в общем потоке этот параметр особого влияния не оказывает.

В области малых значений загрузки системы ( $\rho = \lambda/\mu < 0,5$ ) влияние повторных заявок несущественно, но при высокой загрузке и повышенной настойчивости абонента нарастающие потоки повторных вызовов, инициированные настойчивостью абонента в установлении соединения, приводят к лавинообразному росту трафика и переходу сети в состояние перегрузки. Это влияние становится особенно заметным, когда абонент абсолютно настойчив в установлении соединения, а значение интенсивности поступления первичных заявок близко к максимальной пропускной способности системы.

### Заключение

В настоящей статье представлено исследование системы массового обслуживания с повторными вызовами и одним обслуживающим прибором, коллизиями заявок,  $H$ -настойчивостью и отказом от обслуживания. С помощью разработанного авторами рекуррентного алгоритма сделан вывод об асимптотически гауссовском распределении вероятностей числа заявок на орбите и найдены технические характеристики системы, имеющие практическое значение для ее проектирования. Полученные результаты будут полезны при проектировании реальных информационных и телекоммуникационных систем.

Вместе с тем следует отметить, что представленный алгоритм работает только для марковской модели, поэтому альтернативным подходом является применение метода асимптотического анализа, что позволяет найти асимптотическое распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов. В дальнейших работах планируется обобщение результатов на случай с различными вероятностями настойчивости заявок, а также применение метода асимптотического анализа для модели с непуассоновскими входящими потоками.

### Список источников

1. Artalejo J.R., Gómez-Corral A. Retrial Queueing Systems: a Computational Approach. Berlin : Springer-Verlag, 2008. 318 p.
2. Wilkinson R.I. Theories for toll traffic engineering in the USA // The Bell Syst. Techn. J. 1956. V. 35, № 2. P. 421–507.
3. Cohen J.W. Basic problems of telephone traffic and the influence of repeated calls // Philips Telecommun. Rev. 1957. V. 18, № 2. P. 49–100.
4. Gosztony G. Repeated call attempts and their effect on traffic engineering // Budavox Telecommun. Rev. 1976. V. 2. P. 16–26.
5. Falin G.I., Templeton J.G.C. Retrial queues. London : Chapman & Hall, 1997. 320 p.

6. Artalejo J.R. Numerical calculation of the stationary distribution of the main multiserver retrial queue // *Ann. Oper. Res.* 2002. № 116. P. 41–56.
7. Neuts M.F., Rao B.M. Numerical investigation of a multiserver retrial model // *Queueing Syst.* 1990. V. 7, № 2. P. 169–189.
8. Dudin A.N., Klimenok V.I., Vishnevsky V.M. *The Theory of Queuing Systems with Correlated Flows*. Cham : Springer International Publishing, 2020. 410 p. DOI: 10.1007/978-3-030-32072-0
9. Krishna Kumar B., Vijayalakshmi G., Krishnamoorthy A., Sadiq Basha S. A single server feedback retrial queue with collisions // *Computer and operations research*. 2010. № 37. P. 1247–1255. DOI: 10.1016/j.cor.2009.04.019
10. Lakaour L., Aïssani D., Adel-Aïssanou K. M/M/1 Retrial Queue with Collisions and Transmission Errors // *Methodol. Comput. Appl. Probab.* 2019. V. 21. P. 1395–1406. DOI: 10.1007/s11009-018-9680
11. Aguir M.S., Aksin O.Z., Karaesmen F., Dallery Y. On the interaction between retrials and sizing of call centers // *European Journal of Operational Research*. 2008. V. 191, № 2. P. 398–408.
12. Gómez-Corral A. On the applicability of the number of collisions in p-persistent CSMA/CD protocols // *Computers & Operations Research*. 2010. V. 37, № 7. P. 1199–1211.
13. Artalejo J.R., Pla V. On the impact of customer balking, impatience and retrials in telecommunication systems // *Computers and Mathematics with Applications*. 2009. V 57, № 2. P. 217–229.
14. Choi B.D., Shin Y.W., Ahn W.C. Retrial queues with collision arising from unslotted CSMA/CD protocol // *Queueing systems*. 1992. V. 11, № 4. P. 335–356.
15. Хомичков И.И. Расчет характеристик локальной сети с  $p$ -настойчивым протоколом случайного множественного доступа // *Автоматика и вычислительная техника*. 1995. № 2. С. 67–80.
16. Назаров А.А., Судыко Е.А. Исследование марковской RQ-системы с конфликтами заявок и простейшим входящим потоком // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2010. № 3 (12). С. 97–106.
17. Назаров А.А., Судыко Е.А. Условия существования стационарного режима в немарковских RQ-системах с конфликтами заявок // *Известия Томского политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2011. Т. 318, № 5. С. 166–168.
18. Kim J. Retrial queueing system with collision and impatience // *Commun. Korean Math. Soc.* 2010. № 4. P. 647–653.
19. Wang K., Li N., Jiang Z. Queueing system with impatient customers: A review // *Service Operations and Logistics, and Informatics: Proc. of 2010 IEEE International Conference*. 2010. P. 82–87. DOI: 10.1109/SOLI.2010.5551611
20. Kim C.S., Dudin S., Taramin O., Baek J. Queueing system MMAP/PH/N/N + R with impatient heterogeneous customers as a model of call center // *App. Math. Model.* 2013. V. 37, № 3. P. 958–976.
21. Danilyuk E.Y., Fedorova E.A., Moiseeva S.P. Asymptotic Analysis of an Retrial Queueing System M|M|1 with Collisions and Impatient Calls // *Automation and Remote Control*. 2018. V. 79, № 12. P. 2136–2146.
22. Nazarov A., Sztrik J., Kvach A. et al. Asymptotic analysis of finite-source M/M/1 retrial queueing system with collisions and server subject to breakdowns and repairs // *Annals of Operations Research*. 2019. V. 277. P. 213–229.
23. Danilyuk E., Moiseeva S., Nazarov A. Asymptotic Analysis of Retrial Queueing System M/GI/1 with Collisions and Impatient Calls // *Communications in Computer and Information Science*. 2019. V. 1109. P. 230–242.
24. Danilyuk E.Yu., Moiseeva S.P., Sztrik Ja. Asymptotic Analysis of Retrial Queueing System M/M/1 with Impatient Customers, Collisions and Unreliable Server // *Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics*. 2020. V. 13, № 2. P. 218–230.
25. Fedorova E., Danilyuk E., Nazarov A., Melikov A. Retrial Queueing System MMPP/M/1 with Impatient Calls under Heavy Load Condition // *Lecture Notes in Computer Science*. 2019. V. 11688 LNCS. P. 3–15.
26. Danilyuk E., Vygorskaya O., Moiseeva S. Retrial Queue M/M/N with Impatient Customer in the Orbit // *Distributed Computer and Communication Networks*. 2018. V. 919. P. 493–504.
27. Степанов С.Н. Теория телетрафика: концепции, модели, приложения. М. : Горячая линия–Телеком, 2015. 867 с.

#### References

1. Artalejo, J.R. & Gómez-Corral, A. (2008) *Retrial Queueing Systems: A Computational Approach*. Berlin: Springer-Verlag.
2. Wilkinson, R.I. (1956) Theories for toll traffic engineering in the USA. *The Bell System Technical Journal*. 35(2). pp. 421–507. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1956.tb02388.x
3. Cohen, J.W. (1957) Basic problems of telephone traffic and the influence of repeated calls. *Philips Telecommunication Review*. 18(2). pp. 49–100.
4. Gosztony, G. (1976) Repeated call attempts and their effect on traffic engineering. *Budavox Telecommunication Review*. 2. pp. 16–26.
5. Falin, G.I. & Templeton, J.G.C. (1997) *Retrial Queues*. London: Chapman & Hall.
6. Artalejo, J.R. (2002) Numerical calculation of the stationary distribution of the main multiserver retrial queue. *Annals of Operations Research*. 116. pp. 41–56. DOI: 10.1023/A:1021359709489
7. Neuts, M.F. & Rao, B.M. (1990) Numerical investigation of a multiserver retrial model. *Queueing Systems: Theory and Applications*. 7(2). pp. 169–189. DOI: 10.1007/BF01158473
8. Dudin, A.N., Klimenok, V.I. & Vishnevsky, V.M. (2020) *The Theory of Queuing Systems with Correlated Flows*. Cham: Springer International Publishing. DOI: 10.1007/978-3-030-32072-0

9. Krishna Kumar, B., Vijayalakshmi, G., Krishnamoorthy, A. & Sadiq Basha, S. (2010) A single server feedback retrial queue with collisions. *Computer and Operations Research*. 37. pp. 1247–1255. DOI: 10.1016/j.cor.2009.04.019
10. Lakaour, L., Aissani, D. & Adel-Aissanou, K. (2019) M/M/1 Retrial Queue with Collisions and Transmission Errors. *Methodology and Computing in Applied Probability*. 21. pp. 1395–1406. DOI: 10.1007/s11009-018-9680
11. Aguir, M.S., Aksin, O.Z., Karaesmen, F. & Dallery, Y. (2008) On the interaction between retrials and sizing of call centers. *European Journal of Operational Research*. 191(2). pp. 398–408. DOI: 10.1016/j.ejor.2007.06.051
12. Gómez-Corral, A. (2010) On the applicability of the number of collisions in p-persistent CSMA/CD protocols. *Computers & Operations Research*. 37(7). pp. 1199–1211.
13. Artalejo, J.R. & Pla, V. (2009) On the impact of customer balking, impatience and retrials in telecommunication systems. *Computers and Mathematics with Applications*. 57(2). pp. 217–229. DOI: 10.1016/j.camwa.2008.10.084
14. Choi, B.D., Shin, Y.W. & Ahn, W.C. (1992) Retrial queues with collision arising from unslotted CSMA/CD protocol. *Queueing Systems*. 11(4). pp. 335–356. DOI: 10.1007/BF01163860
15. Khomichkov, I.I. (1995) Computation of the characteristics of a local network with a p-persistent protocol of random multiple access. *Avtomatika i vychislitel'naya tekhnika – Automation and Remote Control*. 2. pp. 67–80.
16. Nazarov, A.A. & Sudyko, E.A. (2010) Analysis of Markov RQ-system with conflicts of service requests and Poisson incoming flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(12). pp. 97–106.
17. Nazarov, A.A. & Sudyko, E.A. (2011) The Existence of a Stationary Regime for a non-Markov Systems with Conflicts of Requests. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universitet – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. 318(5). pp. 166–168.
18. Kim, J. (2010) Retrial queueing system with collision and impatience. *Communications of the Korean Mathematical Society*. 4. pp. 647–653.
19. Wang, K., Li, N. & Jiang, Z. (2010) Queueing system with impatient customers: A review. *Service Operations and Logistics, and Informatics: Proc. of 2010 IEEE International Conference*. pp. 82–87. DOI: 10.1109/SOLI.2010.5551611.
20. Kim, C.S., Dudin, S., Taramin, O. & Baek, J. (2013) Queueing system MMAP/PH/N/N+R with impatient heterogeneous customers as a model of call center. *Applied Mathematical Modelling*. 37(3). pp. 958–976.
21. Danilyuk, E.Y., Fedorova, E.A. & Moiseeva, S.P. (2018) Asymptotic Analysis of an Retrial Queueing System M|M|1 with Collisions and Impatient Calls. *Automation and Remote Control – Automation and Remote Control*. 79(12). pp. 2136–2146. DOI: 10.31857/S000523100002856-5
22. Nazarov, A., Sztrik, J., Kvach, A. et al. (2018) Asymptotic analysis of finite-source M/M/1 retrial queueing system with collisions and server subject to breakdowns and repairs. *Annals of Operations Research*. 277. pp. 213–229.
23. Danilyuk, E., Moiseeva, S. & Nazarov, A. (2019) Asymptotic Analysis of Retrial Queueing System M/GI/1 with Collisions and Impatient Calls. *Communications in Computer and Information Science*. 1109. pp. 230–242.
24. Danilyuk, E.Yu., Moiseeva, S.P. & Sztrik, Ja. (2020) Asymptotic Analysis of Retrial Queueing System M/M/1 with Impatient Customers, Collisions and Unreliable Server. *Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics*. 13(2). pp. 218–230.
25. Fedorova, E., Danilyuk, E., Nazarov, A. & Melikov, A. (2019) Retrial Queueing System MMPP/M/1 with Impatient Calls under Heavy Load Condition. *Lecture Notes in Computer Science*. 11688 LNCS. pp. 3–15.
26. Danilyuk, E., Vygorskaya, O. & Moiseeva, S. (2018) Retrial Queue M/M/N with Impatient Customer in the Orbit. *Distributed Computer and Communication Networks*. 919. pp. 493–504.
27. Stepanov, S.N. (2020) *Teoriya teletrafika: kontseptsii, modeli, prilozheniya* [Teletraffic Theory: Concepts, Models, Applications]. Moscow: Goryachaya liniya–Telekom.

#### **Информация об авторах:**

**Полховская Анна Васильевна** – магистрант кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: anya.polhovskaya00@mail.ru

**Данилюк Елена Юрьевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: daniluc.elena.yu@gmail.com

**Моисеева Светлана Петровна** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: smoiseeva@mail.ru

**Бобкова Ольга Сергеевна** – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: osia153@yandex.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

***Information about the authors:***

**Polkhovskaya Anna Vasilievna** – Student, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: anya.polxovskaya00@mail.ru

**Danilyuk Elena Yurievna** – Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: daniluc.elena.yu@gmail.com

**Moiseeva Svetlana Petrovna** – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: smoiseeva@mail.ru

**Bobkova Olga Sergeevna** – Post-Graduate Student, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: osia153@yandex.ru

***Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.***

*Поступила в редакцию 29.09.2021; принята к публикации 28.02.2022*

*Received 29.09.2021; accepted for publication 28.02.2022*

Научная статья

УДК 519.2

doi: 10.17223/19988605/58/5

## Исследование СМО вида ММРР|M|N с обратной связью методом асимптотического анализа

Анатолий Андреевич Назаров<sup>1</sup>, Екатерина Алексеевна Павлова<sup>2</sup><sup>1,2</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия<sup>1</sup> nazarov.tsu@gmail.com<sup>2</sup> pavlovakaty\_a\_2010@mail.ru

**Аннотация.** Рассматривается система массового обслуживания с  $N$  обслуживающими приборами с обратной связью и орбитой. Считается, что ограничений на количество заявок, поступающих на орбиту, нет. Входящий поток является марковски модулированным пуассоновским (ММРР). Методом асимптотического анализа находятся распределения вероятностей числа занятых приборов в системе и числа заявок на орбите.

**Ключевые слова:** многоканальная система массового обслуживания; орбита; мгновенная обратная связь; отложенная обратная связь; метод асимптотического анализа

**Для цитирования:** Назаров А.А., Павлова Е.А. Исследование СМО вида ММРР|M|N с обратной связью методом асимптотического анализа // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 58. С. 47–57. doi: 10.17223/19988605/58/5

Original article

doi: 10.17223/19988605/58/5

## Asymptotical analysis of queueing system MMPP|M|N with feedback

Anatoly A. Nazarov<sup>1</sup>, Ekaterina A. Pavlova<sup>2</sup><sup>1,2</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation<sup>1</sup> nazarov.tsu@gmail.com<sup>2</sup> pavlovakaty\_a\_2010@mail.ru

**Abstract.** Let us consider a queueing system MMPP|M|N with two types of feedback. Customer, entering the system in accordance with the MMPP flow, is sent to the server if at least one of the  $N$  servers is idle, otherwise it goes into the orbit, where it delays for a random time distributed exponentially with the parameter  $\sigma$ . Customer services during a random time exponentially distributed with the parameter  $\mu$ ; at the moment of service completion, customer may leave the system with probability  $r_0$ ; perform instantaneous feedback with probability  $r_1$  or perform delayed feedback with probability  $r_2$ . The problem is to obtain the probability distribution of the process  $n(t)$  is the number of occupied servers in the system and process  $i(t)$  is the number of customers in the orbit.

In Section 2, we write system of Kolmogorov differential equations for stationary probability distribution  $P\{k(t) = k, n(t) = n, i(t) = i\} = P(k, n, i)$  and a system of Kolmogorov differential equations is written in matrix form for a vector of partial characteristic functions.

Section 3 contains an asymptotic analysis of the matrix equation for the vector of partial characteristic functions of the number of customers in the orbit. The main results of the research are the following theorems.

**Theorem 1.** In the considered feedback system under asymptotic condition  $\varepsilon \rightarrow 0$  asymptotic characteristic function of the normalized number  $i(t)$  of customers has the form

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M \{ e^{jw\sigma i(t)} \} = e^{jw\kappa},$$

where parameter  $\kappa$  is a positive root  $x = \kappa$  of the scalar equation

$$\mathbf{R}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0)\mathbf{e} = 0,$$

where row-vector  $\mathbf{R} = \{R(0), R(1), \dots, R(N)\}$  is probability distribution of number of occupied servers in the system, and is a solution of the system of equations

$$\mathbf{R} \{ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) \} = 0,$$

$$\mathbf{R}\mathbf{e} = 1.$$

**Theorem 2.** In the considered feedback system asymptotic characteristic function of centered and normalized number of customers in the orbit has the form

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M \{ e^{jw\sqrt{\sigma}(i(t) - \frac{\kappa}{\sigma})} \} = \Phi(w) = e^{-\frac{(jw)^2 \kappa_2}{2}},$$

where

$$\kappa_2 = \frac{\kappa \mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} + \mathbf{g}(\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}_0) \mathbf{e}}{\mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} - \varphi(\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}_0) \mathbf{e}},$$

row-vectors  $\varphi$  и  $\mathbf{g}$  are solutions of the following systems of equations:

$$\varphi(\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) = \mathbf{R}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1),$$

$$\varphi \mathbf{e} = 0;$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) = \mathbf{R}\kappa(\mathbf{I}_1 - \mathbf{B}),$$

$$\mathbf{g}\mathbf{e} = 0.$$

Section 4 presents the results of a numerical experiment, performing its accuracy and area of applicability of the proposed asymptotic method comparing with the results of simulation.

**Keywords:** multi-channel queueing system; orbit; instantaneous feedback; delayed feedback; asymptotic analysis

**For citation:** Nazarov, A.A., Pavlova, E.A. (2022) Asymptotical analysis of queueing system MMPP|M|N with feedback. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 58. pp. 47–57. doi: 10.17223/19988605/58/5

Обратная связь в контексте систем массового обслуживания понимается как повторное обращение заявки к обслуживающему устройству. Считается, что качество предоставленного обслуживания определяется интенсивностью повторного обращения заявок. Клиент может вернуться в систему за повторным обслуживанием по разным причинам: качественное первичное обслуживание, как гарантия качества последующих обращений или, наоборот, прерванное обслуживание или по каким-либо причинам не удовлетворяющее требованиям клиента. Самым очевидным примером таких систем являются сети коммуникации, при использовании которых искажение данных приводит к повторному отправлению данных адресату.

В исследуемых системах существует два типа обратной связи, которые называют мгновенной и отсроченной обратной связью. После завершения обслуживания заявка может покинуть систему или потребовать повторного обслуживания мгновенно. Отсроченная связь реализуется посредством отправки заявки на орбиту, где она ожидает повторного обращения к обслуживающему устройству в течение случайного времени.

Одни из первых публикаций, представляющих результаты исследований систем с повторными обращениями, принадлежат Л. Такачу [1, 2]. В них исследованы одноканальные системы массового обслуживания с неограниченной очередью и орбитой методом производящих функций.

Исследования Такача в свое время были уникальными в данной тематике, и после его работ длительное время новые публикации не появлялись. В последние три десятилетия СМО с обратной связью активно исследуются. Отметим, что в [1, 3–10] представлены результаты исследований СМО с мгновенной обратной связью, а в [2, 11–21] изучены СМО с отсроченной, или отложенной, обратной связью. Также ряд работ [22–25] посвящен исследованию систем с обоими типами связей (в [22] имеется обзор публикаций до 2015 г.).

Основная задача исследования систем массового обслуживания с обратной связью заключается в получении распределения вероятностей для многомерных цепей Маркова, представляющих мате-

математический смысл моделей. При исследовании моделей умеренной размерности с этой задачей помогают справиться программные средства, основанные на решении балансовых уравнений [26–27]. Также, используя различные подходы в решении основной задачи, ученые применяют матрично-геометрический метод [28] и спектральный метод [29], а также их модификации. Следует отметить, что в использовании вышеуказанных методов встречаются и достаточно серьезные вычислительные проблемы, что серьезно повышает сложность решения.

В настоящей работе при изучении СМО с мгновенной и отложенной обратной связью использован метод асимптотического анализа.

### 1. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с  $N$  обслуживающими устройствами и обратной связью (рис. 1). На вход системы поступает ММРР-поток заявок, заданный диагональной матрицей условных интенсивностей  $\Lambda = [\lambda_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , матрицей инфинитезимальных характеристик  $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ , управляющей цепи Маркова  $k(t) = 1, 2, \dots, K$ .

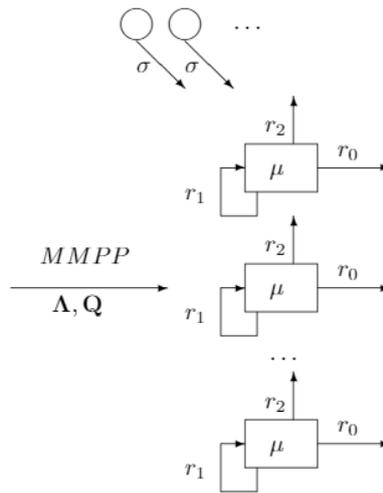


Рис. 1. СМО вида ММРР/М/Н с обратной связью  
 Fig. 1. Queueing system MMPP|M|N with feedback

При поступлении в систему заявка занимает свободный прибор, где получает обслуживание в течение случайного времени, распределенного экспоненциально с параметром  $\mu$ . Если в момент поступления в систему заявка обнаружит прибор занятым, она немедленно отправляется на орбиту, где осуществляет задержку в течение случайного времени, экспоненциально распределенного с параметром  $\sigma$ .

В момент окончания обслуживания заявка может покинуть систему с вероятностью  $r_0$ , отправиться на повторное обслуживание, осуществляя мгновенную обратную связь, с вероятностью  $r_1$ , отправиться на орбиту, осуществляя отсроченную обратную связь с вероятностью  $r_2$ , где она задерживается в течение случайного времени, экспоненциально распределенного с параметром  $\sigma$ , после чего требует повторного обслуживания. Если в момент поступления заявки с орбиты устройство оказывается свободным, то она занимает его в течение случайного времени, которое имеет экспоненциальное распределение с тем же параметром  $\mu$ . Иными словами, первичные (заявки, которые поступают извне) и повторные заявки (заявки, которые поступают с орбиты) являются идентичными по времени их обслуживания, т.е. первичные и повторные заявки в приборах не различаются. Если в момент поступления повторной заявки с орбиты все приборы заняты, то она остается на орбите для повторения своего запроса. Предполагается, что возможны многократные повторения запросов для обслуживания, т.е. не имеется ограничений на число повторений обслуживания.

Обозначим  $k(t) = k$  – состояние цепи Маркова, управляющей ММРР-поток в момент времени  $t$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ ,  $n(t)$  – число занятых приборов в системе в момент времени  $t$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $i(t)$  – число заявок на орбите в момент времени  $t$ .

Ставится задача получения трехмерного стационарного распределения вероятностей

$$P(k, n, i) = P\{k(t) = k, n(t) = n, i(t) = i\}.$$

## 2. Система уравнений Колмогорова

Рассмотрим трехмерный марковский процесс  $\{k(t), n(t), i(t)\}$ , для его стационарного распределения вероятностей  $P\{k(t) = k, n(t) = n, i(t) = i\} = P(k, n, i)$  запишем систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} & -(\lambda_k + (1 - r_1)n\mu + i\sigma)P(k, n, i) + \lambda_k P(k, n - 1, i) + \\ & + (i + 1)\sigma P(k, n - 1, i + 1) + (n + 1)r_0\mu P(k, n + 1, i) + \\ & + (n + 1)r_2\mu P(k, n + 1, i - 1) + \sum_v q_{vk} P(v, n, i) = 0, 0 \leq n \leq N - 1, \\ & -(\lambda_k + (1 - r_1)N\mu)P(k, N, i) + \lambda_k P(k, N - 1, i) + \\ & + \lambda_k P(k, N, i - 1) + (i + 1)\sigma P(k, N - 1, i + 1) + \sum_v q_{vk} P(v, N, i) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Введем частичные характеристические функции вида

$$H(k, n, u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju} P(k, n, i),$$

где  $j = \sqrt{-1}$  мнимая единица. Тогда можем переписать систему (1):

$$\begin{aligned} & -(\lambda - k + n\mu(1 - r_1))H(k, n, u) + \lambda_k H(k, n - 1, u) + j\sigma \frac{\partial H(k, n, u)}{\partial u} + \\ & + (n + 1)\mu(r_0 + r_2 e^{ju})H(k, n + 1, u) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H(k, n - 1, u)}{\partial u} + \\ & + \sum_v q_{vk} H(v, n, u) = 0, 0 \leq n \leq N - 1, \\ & (\lambda_k (e^{ju} - 1) - N\mu(1 - r_1))H(k, N, u) + \\ & + \lambda_k H(k, N - 1, u) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H(k, N - 1, u)}{\partial u} + \sum_v q_{vk} H(v, N, u) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим вектор-строки

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(n, u) &= \{H(1, n, u), \dots, H(K, n, u)\}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}(n, u)}{\partial u} &= \left\{ \frac{\partial H(1, n, u)}{\partial u}, \dots, \frac{\partial H(K, N, u)}{\partial u} \right\} \end{aligned}$$

и перепишем (2) в матричном виде с учетом введенных обозначений:

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}(n, u)(\mathbf{Q} - \Lambda - n\mu(1 - r_1)\mathbf{I}) + \mathbf{H}(n - 1, u)\Lambda + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(n, u)}{\partial u} + \\ & + (n + 1)\mu(r_0 + r_2 e^{ju})\mathbf{H}(n + 1, u) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(n - 1, u)}{\partial u} = 0, 0 \leq n \leq N - 1, \\ & \mathbf{H}(N, u)(\mathbf{Q} - (1 - e^{ju})\Lambda - N\mu(1 - r_1)\mathbf{I}) + \mathbf{H}(n - 1, u)\Lambda - \\ & - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(N - 1, u)}{\partial u} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

здесь  $\mathbf{I}$  – единичная матрица размерности  $K \times K$ .

Введем следующие векторные обозначения:

$$\mathbf{H}(u) = \{\mathbf{H}(0, u), \mathbf{H}(1, u), \dots, \mathbf{H}(N, u)\},$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{H}(0,u)}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{H}(1,u)}{\partial u}, \dots, \frac{\partial \mathbf{H}(N,u)}{\partial u} \right\},$$

и перепишем уравнения (3) в новой матричной форме:

$$\mathbf{H}(u)(\mathbf{A} + e^{ju}\mathbf{B}) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} (\mathbf{I}_0 - e^{-ju}\mathbf{I}_1) = 0,$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} - \Lambda & \Lambda & 0 & \dots & 0 \\ \mu r_0 \mathbf{I} & \mathbf{Q} - \Lambda - \mu \mathbf{I}(r_0 + r_2) & \Lambda & \dots & 0 \\ 0 & 2\mu \mathbf{I}r_0 & \mathbf{Q} - \Lambda - 2\mu \mathbf{I}(r_0 + r_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Q} - \Lambda - N\mu \mathbf{I}(r_0 + r_2) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu \mathbf{I}r_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu \mathbf{I}r_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & N\mu \mathbf{I}r_2 & \Lambda \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Умножим матричное уравнение на единичный вектор-столбец  $\mathbf{e}$ , принимая во внимание  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{e} = 0$  и  $(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)\mathbf{e} = 0$ , получим

$$\mathbf{H}(u)\mathbf{B}\mathbf{e} + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} = 0.$$

Таким образом, матричная система (3) и скалярное уравнение примут вид:

$$\mathbf{H}(u)(\mathbf{A} + e^{ju}\mathbf{B}) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} (\mathbf{I}_0 - e^{-ju}\mathbf{I}_1) = 0,$$

$$\mathbf{H}(u)\mathbf{B}\mathbf{e} + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} = 0. \quad (4)$$

Будем искать решение задачи (4) методом асимптотического анализа в условии большой задержки заявки на орбите, т.е.  $\sigma \rightarrow 0$ .

### 3. Метод асимптотического анализа

Обозначим  $\sigma = \varepsilon$  и выполним следующие замены в (4):

$$u = \varepsilon w, \mathbf{H}(u) = \mathbf{F}(w, \varepsilon). \quad (5)$$

С учетом замен (5) перепишем уравнения (4):

$$\mathbf{F}(w, \varepsilon)(\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w}\mathbf{B}) + j \frac{\partial \mathbf{F}(w, \varepsilon)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I}_1) = 0,$$

$$\mathbf{F}(w, \varepsilon)\mathbf{B}\mathbf{e} + j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial \mathbf{F}(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} = 0. \quad (6)$$

Для решения системы (6) в условии  $\varepsilon \rightarrow 0$  особо важными являются следующие утверждения.

**Теорема 1.** В рассматриваемой системе с обратной связью в предельном условии  $\varepsilon \rightarrow 0$  предельная характеристическая функция нормированного числа  $i(t)$  заявок на орбите имеет вид:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M\{e^{j\omega i(t)}\} = e^{j\omega \kappa}, \quad (7)$$

где значением параметра  $\kappa$  является положительный корень  $x = \kappa$  скалярного уравнения

$$\mathbf{R}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0)\mathbf{e} = 0, \quad (8)$$

где вектор-строка  $\mathbf{R} = \{R(0), R(1), \dots, R(N)\}$  – распределение вероятностей числа занятых приборов в системе, является решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\{(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)\} &= 0, \\ \mathbf{R}\mathbf{e} &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

*Доказательство.* Рассмотрим первое равенство в системе (6) в предельном условии  $\varepsilon \rightarrow 0$ , обозначим  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}(w, \varepsilon) = \mathbf{F}(w)$  и получим

$$\mathbf{F}(w)(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + j \frac{\partial \mathbf{F}(w)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) = 0. \quad (10)$$

Будем искать решение  $\mathbf{F}(w)$  системы (10) в виде  $\mathbf{F}(w) = \mathbf{R}e^{j\omega x}$ , тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\{(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)\} &= 0, \\ \mathbf{R}\mathbf{e} &= 1, \end{aligned} \quad (11)$$

что совпадает с (9) из формулировки теоремы.

Так как  $F(w)\mathbf{e} = e^{j\omega x}$ , необходимо найти значение  $x = \kappa$  из (7). Рассмотрим теперь второе равенство (6) в предельном условии  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\mathbf{F}(w)\mathbf{B}\mathbf{e} + j \frac{\partial \mathbf{F}(w)}{\partial w} \mathbf{I}_0\mathbf{e} = 0,$$

и подставим решение в виде  $\mathbf{F}(w) = \mathbf{R}e^{j\omega x}$ , тогда

$$\mathbf{R}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_0)\mathbf{e} = 0. \quad (12)$$

Таким образом, значением параметра  $\kappa$  является решение последнего скалярного уравнения, что совпадает с (8).

Для дальнейшего исследования системы с обратной связью в (4) выполним замену

$$\mathbf{H}(u) = e^{j\frac{u}{\sigma}\kappa} \mathbf{H}^{(2)}(u),$$

получим систему

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(2)}(u)(\mathbf{A} + e^{ju}\mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - e^{-ju}\mathbf{I}_1)) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u)}{\partial u} (\mathbf{I}_0 - e^{-ju}\mathbf{I}_1) &= 0, \\ \mathbf{H}^{(2)}(u)(\mathbf{B}\mathbf{e} - \kappa e^{-ju}\mathbf{I}_0\mathbf{e}) + e^{-ju} j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u)}{\partial u} \mathbf{I}_0\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Обозначим  $\sigma = \varepsilon^2$  и выполним в (13) следующие замены:

$$u = \varepsilon w, \mathbf{H}^{(2)}(u) = \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon), \quad (14)$$

получим

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon)(\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w}\mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I}_1)) + \\ + j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I}_1) &= 0, \\ \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon)(\mathbf{B}\mathbf{e} - \kappa e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I}_0\mathbf{e}) + e^{-j\varepsilon w} j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{I}_0\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Основным результатом исследования рассматриваемой системы является следующее утверждение.

**Теорема 2.** Предельная характеристическая функция централизованного и нормированного числа заявок на орбите в рассматриваемой системе с обратной связью имеет вид:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M\{e^{jw\sqrt{\sigma}(i(t)-\frac{\kappa}{\sigma})}\} = \Phi(w) = e^{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2},$$

где

$$\kappa_2 = \frac{\kappa \mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} + \mathbf{g}(\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}_0) \mathbf{e}}{\mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}_0) \mathbf{e}}, \quad (16)$$

здесь вектор-строки  $\boldsymbol{\varphi}$  и  $\mathbf{g}$  определяются соответственно следующими системами уравнений:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) = \mathbf{R}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1), \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\varphi} \mathbf{e} = 0;$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) = \mathbf{R} \kappa(\mathbf{I}_1 - \mathbf{B}), \quad (18)$$

$$\mathbf{g} \mathbf{e} = 0.$$

*Доказательство.* Запишем первое уравнение системы (15), используя разложение  $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$ :

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon)[\mathbf{A} + \mathbf{B} + j\varepsilon w \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - (1 - j\varepsilon w)\mathbf{I}_1)] + \\ & + j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) = O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Решение будем искать в виде:

$$\mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon) = \Phi(w)\{\mathbf{R} + j\varepsilon w \mathbf{f}\} + O(\varepsilon^2), \quad (19)$$

здесь  $\Phi(w)$  – некоторая скалярная функция, которую определим ниже.

Получаем

$$\begin{aligned} & \Phi(w)\{\mathbf{R} + j\varepsilon w \mathbf{f}\}[\mathbf{A} + \mathbf{B} + j\varepsilon w \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 + j\varepsilon w \mathbf{I}_1)] + \\ & + j\varepsilon \frac{\partial \Phi(w)}{\partial w} \mathbf{R}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) = O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

тогда, принимая во внимание (11), получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{R} j\varepsilon w (\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}_1) + j\varepsilon w \mathbf{f}[\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)] + \\ & + j\varepsilon \frac{\partial \Phi(w) / \partial w}{\Phi(w)} \mathbf{R}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) = O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Разделим последнее уравнение на  $j\varepsilon w$  и, устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$\mathbf{R}(\mathbf{B} - \kappa \mathbf{I}_1) + \mathbf{f}[\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)] + \frac{\partial \Phi(w) / \partial w}{w \Phi(w)} \mathbf{R}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) = 0.$$

Из последней системы следует, что выражение  $\frac{\partial \Phi(w) / \partial w}{w \Phi(w)}$  не зависит от  $w$ , поэтому обозначим

$$\frac{\partial \Phi(w) / \partial w}{w \Phi(w)} = -\kappa_2,$$

перепишем систему с учетом нового обозначения:

$$\mathbf{f}[\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)] = \kappa_2 \mathbf{R}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) + \mathbf{R} \kappa(\mathbf{I}_1 - \mathbf{B}). \quad (20)$$

Решение  $\mathbf{f}$  последней системы можем записать в виде:

$$\mathbf{f} = \mathbf{C} \mathbf{R} + \mathbf{g} + \kappa_2 \boldsymbol{\varphi}. \quad (21)$$

Подставив это разложение в (20), для векторов  $\boldsymbol{\varphi}$  и  $\mathbf{g}$  получим системы

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) = \mathbf{R}(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0),$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) = \mathbf{R}\kappa(\mathbf{I}_1 - \mathbf{B}),$$

совпадающие с (17) и (18). Векторы  $\boldsymbol{\varphi}$  и  $\mathbf{g}$  являются частными решениями неоднородных систем (17) и (18), поэтому они удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, которые выберем в виде  $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{e} = 0$  и  $\mathbf{g}\mathbf{e} = 0$ . Тогда решения  $\boldsymbol{\varphi}$  и  $\mathbf{g}$  систем (17) и (18), удовлетворяющие этим условиям, определяются однозначно.

Теперь рассмотрим второе уравнение (15) и подставим в него разложение (19), принимая во внимание (8), можем записать

$$\mathbf{R}\kappa\mathbf{I}_0\mathbf{e} + \mathbf{f}(\mathbf{B} - \kappa\mathbf{I}_0)\mathbf{e} + \frac{\partial\Phi(w)/\partial w}{w\Phi(w)}\mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{e} = 0. \quad (22)$$

Так как

$$\frac{\partial\Phi(w)/\partial w}{w\Phi(w)} = -\kappa_2,$$

то

$$\mathbf{f}(\mathbf{B} - \kappa\mathbf{I}_0)\mathbf{e} + \kappa\mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{e} - \kappa_2\mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{e} = 0, \quad (23)$$

вектор  $\mathbf{f}$  в полученном равенстве запишем в виде (21). Принимая во внимание (8) и преобразовывая (23), запишем равенство

$$\kappa_2[\mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{e} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{B} - \kappa\mathbf{I}_0)]\mathbf{e} = \kappa\mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{e} + \mathbf{g}(\mathbf{B} - \kappa\mathbf{I}_0)\mathbf{e},$$

откуда получаем выражение для  $\kappa_2$

$$\kappa_2 = \frac{\kappa\mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{e} + \mathbf{g}(\mathbf{B} - \kappa\mathbf{I}_0)\mathbf{e}}{\mathbf{R}\mathbf{I}_0\mathbf{e} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{B} - \kappa\mathbf{I}_0)\mathbf{e}},$$

которое совпадает с (16) в формулировке теоремы. Теорема доказана.

#### 4. Асимптотически гауссовская аппроксимация

Обозначим  $G(x)$  – функцию гауссовского распределения с параметрами  $\frac{\kappa}{\sigma}$  и  $\sqrt{\frac{\kappa_2}{\sigma}}$ . Дискретное распределение вероятностей

$$P_1(i) = (G(i + 0,5) - G(i - 0,5))(1 - G(-0,5))^{-1} \quad (24)$$

будем называть асимптотически гауссовской аппроксимацией распределения вероятностей  $P(i) = P\{i(t) = i\}$  числа  $i(t)$  заявок на орбите для рассматриваемой системы ММРР|М|N с обратной связью.

Нетрудно показать, что условием существования стационарного режима рассматриваемой системы является неравенство

$$\lambda < r_0\mu N,$$

которое запишем в виде

$$\lambda = \rho r_0\mu N, \quad 0 < \rho < 1. \quad (25)$$

При любой аппроксимации, в том числе и для (24), принципиально важным является определение ее точности и области применимости, т.е. области тех значений сетевых параметров загрузки  $\rho$  и параметра  $\sigma$ , значения которого в теоретических исследованиях являются бесконечно малыми ( $\sigma \rightarrow 0$ ).

Точность аппроксимации будем определять расстоянием Колмогорова

$$\Delta = \max_{0 \leq i < \infty} \left| \sum_{n=0}^i (P(n) - P_1(n)) \right|. \quad (26)$$

Для нахождения значений величины  $\Delta$  необходимо знать исходное распределение вероятностей  $P(i)$ . Это распределение вероятностей найдем в частном случае для рассматриваемой системы с обратной связью при  $N = 5$ , т.е. для системы М|М|5 с обратной связью в результате имитационного

моделирования. Матрицы  $Q$  и  $\Lambda_1 = \rho\Lambda$ , определяющие входящий ММРР-поток, заданы следующим образом:

$$Q = \begin{bmatrix} -0,7 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & -0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & -0,8 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 1,2 & 0 & 0 \\ 0 & 2,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Для  $\mu=1$ ,  $r_0=0,5$ ,  $r_1=0,2$ ,  $r_2=0,3$  в нижеприведенной таблице указаны значения  $\Delta$  из (26) при указанных значения параметров  $\rho$  и  $\sigma$ .

**Расстояние Колмогорова**

	$\sigma = 0,5$	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 0,05$
$\rho = 0,6$	0,083	0,047	0,038	0,030
$\rho = 0,7$	0,098	0,069	0,049	0,038
$\rho = 0,8$	0,114	0,094	0,079	0,056
$\rho = 0,9$	0,179	0,123	0,100	0,074

Предположим, что приближение  $P_1(n)$  приемлемо, если его точность составляет  $\Delta < 0,05$ . Таким образом, можно сделать вывод: предложенное приближение  $P_1(n)$  приемлемо практически во всем диапазоне значений параметров  $\rho$  и  $\sigma$ . Точность аппроксимации возрастает ( $\Delta$  уменьшается) с уменьшением значения параметра  $\sigma$ , что довольно естественно из-за условия  $\sigma \rightarrow 0$ .

### Заключение

В данной работе рассмотрена система вида ММРР/М/Н с обратной связью. В предельном условии большой задержки ( $\sigma \rightarrow 0$ ) заявок на орбите с возможностью осуществить отложенную обратную связь получены распределения вероятностей числа занятых приборов в системе и предельное гауссовское распределение вероятностей нормированного числа заявок на орбите. Предложена асимптотически гауссовская аппроксимация для дискретного распределения вероятностей числа заявок на орбите.

### Список источников

1. Takacs L. A single-server queue with feedback // Bell System Technical Journal. 1963. V. 42. P. 505–519.
2. Takacs L. A queuing model with feedback // Operations Research. 1977. V. 11. P. 345–354.
3. Назаров А.А., Моисеева С.П., Морозова А.С. Исследования СМО с повторным обслуживанием и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, вып. 5. С. 88–92.
4. Моисеева С.П., Захорольная И.А. Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями // Автометрия. Т. 47, вып. 6. С. 51–58.
5. Dudin A.N., Kazimirsky A.V., Klimenok V.I., Breuer L., Krieger U. The queuing model MAP/PH/1/N with feedback operating in a Markovian random environment // Austrian Journal of Statistics. 2005. V. 34, is. 2. P. 101–110.
6. Wortman M.A., Disney R.L., Kiessler P.C. The M/GI/1 Bernoulli feedback queue with vacations // Queueing Systems. 1991. V. 9, is. 4. P. 353–363.
7. D'Avignon G.R., Disney R.L. Queues with instantaneous feedback // Management Sciences. 1997. V. 24, is. 2. P. 168–180.
8. Berg J.L., Voxma O.J. The M/G/1 queue with processor sharing and its relation to feedback queue // Queueing Systems. 1991. V. 9, is. 4. P. 365–402.
9. Hunter J.J. Sojourn time problems in feedback queue // Queueing Systems. 1989. V. 5, is. 1-3. P. 55–76.
10. Melikov A.Z., Zadiranova A., Moiseev A. Two asymptotic conditions in queue with MMPP arrivals and feedback // Communications in Computer and Information Science. 2016. V. 678. P. 231–240.
11. Pekoz E.A., Joglekar N. Poisson traffic flow in a general feedback // Journal of Applied Probability. 2002. V. 39, is. 3. P. 630–636.
12. Lee H.W., Seo D.W. Design of a production system with feedback buffer // Queueing Systems. 1997. V. 26, is. 1. P. 187–198.
13. Lee H.W., Ahn B.Y. Analysis of a production system with feedback buffer and general dispatching time // Mathematical Problems in Engineering. 2000. V. 5. P. 421–439.

14. Foley R.D., Disney R.L. Queues with delayed feedback // *Advances in Applied Probability*. 1983. V. 15, is. 1. P. 162–182.
15. Ayyapan G., Subramanian A.M.G., Sekar G. M/M/1 retrial queuing system with loss and feedback under non-pre-emptive priority service by matrix geometric method // *Applied Mathematical Sciences*. 2010. V. 4. P. 2379–2389.
16. Ayyapan G., Subramanian A.M.G., Sekar G. M/M/1 retrial queuing system with loss and feedback under pre-emptive priority service // *International Journal of Computer Applications*. 2010. V. 2. P. 27–34.
17. Bouchentouf A.A., Belarbi F. Performance evaluation of two Markovian retrial queuing model with balking and feedback // *Acta Univ. Sapientiae. Mathematica*. 2013. V. 5. P. 132–146.
18. Choi B.D., Kim Y.C., Lee Y.W. The M/M/c retrial queue with geometric loss and feedback // *Computers and Mathematics with Applications*. 1998. V. 36. P. 41–52.
19. Krishna Kumar B., Rukmani R., Thangaraj V. On multiserver feedback retrial queue with finite buffer // *Applied Mathematical Modeling*. 2009. V. 33. P. 2062–2083.
20. Do T.V. An efficient computation algorithm for a multiserver feedback retrial queue with a large queuing capacity // *Applied Mathematical Modeling*. 2010. V. 34. P. 2272–2278.
21. Mokaddis G.S., Metwally S.A., Zaki B.M. A feedback retrial queuing system with starting failures and single vacation // *Tamkang Journal of Science and Engineering*. 2007. V. 10. P. 183–192.
22. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M. Methods for analysis of queuing models with instantaneous and delayed feedbacks // *Communications in Computer and Information sciences*. 2015. V. 564. P. 185–199.
23. Koroliuk V.S., Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M. Methods for analysis of multi-channel queuing models with instantaneous and delayed feedbacks // *Cybernetics and System Analysis*. 2016. V. 52, is. 1. P. 58–70.
24. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M. Hierarchical space merging algorithm to analysis of open tandem queuing networks // *Cybernetics and System Analysis*. 2016. V. 52, is. 6. P. 867–877.
25. Melikov A.Z., Aliyeva S.H. Refined approximate algorithm for steady-state probabilities of the large-scale queuing systems with instantaneous and delayed feedbacks // *Communications in Computer and Information sciences*. 2019. V. 1109. P. 188–201.
26. Sztrik J., Efosinin D. Tool supported reliability analysis of finite-source retrial queues // *Automation and Remote Control*. 2010. V. 71. P. 1388–1393.
27. Berczes T., Sztrik J., Toth A., Nazarov A.A. Performance modeling of finite-source retrial queueing systems with collisions and non-reliable server using MOSEL // *Communications in Computer and Information Science*. 2017. V. 700. P. 248–258.
28. Neuts M.F. *Matrix-geometric solutions in stochastic models: An algorithmic approach*. Baltimore : John Hopkins University Press, 1981. 332 p.
29. Mitrani I., Chakka R. Spectral expansion solution for a class of Markov models: application and comparison with the matrix-geometric method // *Performance Evaluation*. 1995. V. 23. P. 241–260.

## References

1. Takacs, L. (1963) A single-server queue with feedback. *Bell System Technical Journal*. 42. pp. 505–519. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1963.tb00510.x
2. Takacs, L. (1977) A queuing model with feedback. *Operations Research*. 11. pp. 345–354.
3. Nazarov, A.A., Moiseeva, S.P. & Morozova, A.S. (2008) Analysis of RQ-system with an unlimited number of servers by the method of limiting decomposition. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computing Technology*. 13(5). pp. 88–92.
4. Moiseeva, S.P. & Zakhornaya, I.A. (n.d.) Mathematical model of parallel service of multiple customers with feedback. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 47(6). pp. 51–58.
5. Dudin, A.N., Kazimirsky, A.V., Klimenok, V.I., Breuer, L. & Krieger, U. (2005) The queuing model MAP/PH/1/N with feedback operating in a Markovian random environment. *Austrian Journal of Statistics*. 34(2). pp. 101–110. DOI: 10.17713/ajs.v34i2.403
6. Wortman, M.A., Disney, R.L. & Kiessler, P.C. (1991) The M/GI/1 Bernoulli feedback queue with vacations. *Queueing Systems*. 9(4). pp. 353–363. DOI: 10.1007/BF01159222
7. D'Avignon, G.R. & Disney, R.L. (1997) Queues with instantaneous feedback. *Management Sciences*. 24(2). pp. 168–180. DOI: 10.1287/mnsc.24.2.168
8. Berg, J.L. & Boxma, O.J. (1991) The M/G/1 queue with processor sharing and its relation to feedback queue. *Queueing Systems*. 9(4). pp. 365–402. DOI: 10.1007/BF01159223
9. Hunter, J.J. (1989) Sojourn time problems in feedback queue. *Queueing Systems*. 5(1–3). pp. 55–76.
10. Melikov, A.Z., Zadiranova, A. & Moiseev, A. (2016) Two asymptotic conditions in queue with MMPP arrivals and feedback. *Communications in Computer and Information Science*. 678. pp. 231–240.
11. Pekoz, E.A. & Joglekar, N. (2002) Poisson traffic flow in a general feedback. *Journal of Applied Probability*. 39(3). pp. 630–636. DOI: 10.1239/jap/1034082133
12. Lee, H.W. & Seo, D.W. (1997) Design of a production system with feedback buffer. *Queueing Systems*. 26(1). pp. 187–198.
13. Lee, H.W. & Ahn, B.Y. (2000) Analysis of a production system with feedback buffer and general dispatching time. *Mathematical Problems in Engineering*. 5. pp. 421–439. DOI: 10.1155/S1024123X99001179
14. Foley, R.D. & Disney, R.L. (1983) Queues with delayed feedback. *Advances in Applied Probability*. 15(1). pp. 162–182.
15. Ayyapan, G., Subramanian, A.M.G. & Sekar, G. (2010) M/M/1 retrial queuing system with loss and feedback under non-pre-emptive priority service by matrix geometric method. *Applied Mathematical Sciences*. 4. pp. 2379–2389.

16. Ayyapan, G., Subramanian, A.M.G. & Sekar, G. (2010) M/M/1 retrial queuing system with loss and feedback under pre-emptive priority service. *International Journal of Computer Applications*. 2. pp. 27–34. DOI: 10.5120/672-945
17. Bouchentouf, A.A. & Belarbi, F. (2013) Performance evaluation of two Markovian retrial queuing model with balking and feedback. *Acta Univ. Sapientiae. Mathematica*. 5. pp. 132–146. DOI: 10.2478/ausm-2014-0009
18. Choi, B.D., Kim, Y.C. & Lee, Y.W. (1998) The M/M/c retrial queue with geometric loss and feedback. *Computers and Mathematics with Applications*. 36. pp. 41–52. DOI: 10.1016/S0898-1221(98)00160-6
19. Krishna Kumar, B., Rukmani, R. & Thangaraj, V. (2009) On multiserver feedback retrial queue with finite buffer. *Applied Mathematical Modeling*. 33. pp. 2062–2083. DOI: 10.1016/J.APM.2008.05.011
20. Do, T.V. (2010) An efficient computation algorithm for a multiserver feedback retrial queue with a large queuing capacity. *Applied Mathematical Modeling*. 34. pp. 2272–2278. DOI: 10.1016/j.apm.2009.10.025
21. Mokaddis, G.S., Metwally, S.A. & Zaki, B.M. (2007) A feedback retrial queuing system with starting failures and single vacation. *Tamkang Journal of Science and Engineering*. 10. pp. 183–192.
22. Melikov, A.Z., Ponomarenko, L.A. & Rustamov, A.M. (2015) Methods for analysis of queuing models with instantaneous and delayed feedbacks. *Communications in Computer and Information Sciences*. 564. pp. 185–199. DOI: 10.1007/s10559-016-9800-y
23. Koroliuk, V.S., Melikov, A.Z., Ponomarenko, L.A. & Rustamov, A.M. (2016) Methods for analysis of multi-channel queuing models with instantaneous and delayed feedbacks. *Cybernetics and System Analysis*. 52(1). pp. 58–70.
24. Melikov, A. Z., Ponomarenko, L.A. & Rustamov, A.M. (2016) Hierarchical space merging algorithm to analysis of open tandem queuing networks. *Cybernetics and System Analysis*. 52(6). pp. 867–877. DOI: 10.1007/s10559-016-9888-0
25. Melikov, A.Z. & Aliyeva, S.H. (2019) Refined approximate algorithm for steady-state probabilities of the large-scale queuing systems with instantaneous and delayed feedbacks. *Communications in Computer and Information Sciences*. 1109. pp. 188–201.
26. Sztrik, J. & Efronin, D. (2010) Tool supported reliability analysis of finite-source retrial queues. *Automation and Remote Control*. 71. pp. 1388–1393. DOI: 10.1134/S0005117910070118
27. Berczes, T., Sztrik, J., Toth, A. & Nazarov, A.A. (2017) Performance modeling of finite-source retrial queuing systems with collisions and non-reliable server using MOSEL. *Communications in Computer and Information Science*. 700. pp. 248–258.
28. Neuts, M.F. (1981) *Matrix-geometric solutions in stochastic models: An algorithmic approach*. Baltimore: John Hopkins University Press.
29. Mitrani, I. & Chakka, R. (1995) Spectral expansion solution for a class of Markov models: application and comparison with the matrix-geometric method. *Performance Evaluation*. 23. pp. 241–260. DOI: 10.1016/0166-5316(94)00025-F

**Информация об авторах:**

**Назаров Анатолий Андреевич** – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

**Павлова Екатерина Алексеевна** – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: pavlovakatya\_2010@mail.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Information about the authors:**

**Nazarov Anatoly Andreevich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

**Pavlova Ekaterina Alekseevna** – Post-graduate Student, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: pavlovakatya\_2010@mail.ru

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 08.11.2021; принята к публикации 28.02.2022

Received 08.11.2021; accepted for publication 28.02.2022

## ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

## DATA PROCESSING

Научная статья

УДК 519.2

doi: 10.17223/19988605/58/6

**ММ-оценка параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени в полусинхронном потоке событий в особом случае**Александр Михайлович Горцев<sup>1</sup>, Анна Васильевна Веткина<sup>2</sup><sup>1, 2</sup> *Томский государственный университет, Томск, Россия*<sup>1</sup> *a-gortsev@mail.ru*<sup>2</sup> *anyavetkina@stud.tsu.ru*

**Аннотация.** Исследуется полусинхронный поток событий, относящийся к классу дважды стохастических потоков событий. Функционирование потока рассматривается в условиях непродлевающегося случайного мертвого времени, распределенного по равномерному закону на отрезке  $[0, T^*]$ . Рассматривается особый случай, когда на параметры потока накладываются ограничения. Производится оценивание параметра  $T^*$  равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени методом моментов. Приводятся результаты статистических экспериментов, показывающие адекватность полученных оценок.

**Ключевые слова:** полусинхронный поток событий; непродлевающееся случайное мертвое время; равномерное распределение; оценка параметра; метод моментов

**Для цитирования:** Горцев А.М., Веткина А.В. ММ-оценка параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени в полусинхронном потоке событий в особом случае // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 58. С. 58–70. doi: 10.17223/19988605/58/6

Original article

doi: 10.17223/19988605/58/6

**ММ-estimation of the parameter of the uniform distribution of the duration of unextendable random dead time in the semi-synchronous events flow in the special case**Alexander M. Gortsev<sup>1</sup>, Anna V. Vetkina<sup>2</sup><sup>1, 2</sup> *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*<sup>1</sup> *a-gortsev@mail.ru*<sup>2</sup> *anyavetkina@stud.tsu.ru*

**Abstract.** The paper describes semi-synchronous events flow that is a common mathematical model of information flows of messages operating in telecommunication and information-computing networks, and that belongs to the class of doubly stochastic event flows. A special case is considered when restrictions are imposed on the flow

parameters. The functioning of the flow is considered under the conditions of a random unextendable dead time distributed according to a uniform law on the interval  $[0, T^*]$ . Parameter  $T^*$  of the dead time is estimated using the method of moments. The results of statistical experiments are presented.

Mathematical expectation of the duration of  $\tau$  is the interval between adjacent events of the observed flow is defined by the formula

$$M(\tau | T^*) = \frac{T^*}{2} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{p\alpha_2}{\lambda_1(p\lambda_1 + \alpha_2)} + \frac{\lambda_1}{T^*} \left( \frac{p\alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \int_0^{T^*} \tau (1 - \lambda_1 \tau) e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) \tau}} g_1(x) dx d\tau +$$

$$+ \frac{1}{T^* (p\lambda_1 + \alpha_2)} \left( \frac{p\lambda_1 \alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \int_0^{T^*} \tau e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) \tau}} g_2(x) dx d\tau - \left( \frac{p\alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 e^{-\lambda_1 T^*} \left( 1 + \lambda_1 T^* + \frac{1}{\lambda_1 T^*} \right) \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) T^*}} g_1(x) dx +$$

$$+ \frac{\lambda_1}{p\lambda_1 + \alpha_2} \left( \frac{p\lambda_1 \alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{\lambda_1 T^*} \right) e^{-\lambda_1 T^*} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) T^*}} g_2(x) dx,$$

where  $g_1(x) = x^{-\frac{p\lambda_1 - \lambda_2}{p\lambda_1 + \alpha_2}} / ((1-p)\lambda_2 - \lambda_1 x)$ ,  $g_2(x) = x^{-\frac{p\lambda_1 - \lambda_2}{p\lambda_1 + \alpha_2}} \ln x / ((1-p)\lambda_2 - \lambda_1 x)$ .

The estimate  $\hat{T}^*$  is found numerically from the equation of moments  $M(\tau | T^*) = C_1$ ,  $C_1 = (1/n) \sum_{k=1}^n (t_{k+1} - t_k)$ , where  $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$  are moments of occurrence of events in the observed flow. Value of  $C_1$  is found using simulation modeling of the observed flow. Analysis of the numerical results shows that in the sense of the introduced criterion  $\hat{V}(\hat{T}^*)$  (sample variance of the estimate  $\hat{T}^*$ ), an increase of the parameter  $T^*$  has a negative effect on the quality of estimates  $\hat{T}^*$ , that is quite natural: increasing the parameter  $T^*$  leads to an increase in the number of lost events of the initial flow.

According to the results of the research, there are the following conclusions: 1) it is shown analytically that the equation of moments has a unique solution; 2) the results of simulation modelling show that the quality of the estimates in the sense of the introduced criterion (sample variance of the estimate  $\hat{T}^*$ ) is quite satisfactory.

**Keywords:** semi-synchronous events flow; unextendable random dead time; uniform distribution; estimation of the parameter; method of moments

**For citation:** Gortsev, A.M., Vetkina, A.V. (2022) MM-estimation of the parameter of the uniform distribution of the duration of unextendable random dead time in the semi-synchronous events flow in the special case. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnik i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 58. pp. 58–70. doi: 10.17223/19988605/58/6

В настоящее время, как показывает практика, наиболее адекватной математической моделью реальных информационных потоков запросов в телекоммуникационных сетях являются дважды стохастические потоки событий – потоки, у которых случайными являются и моменты наступления событий, и интенсивность потока. В общем случае дважды стохастические потоки событий являются коррелированными потоками. В связи с этим исследование различных разновидностей дважды стохастических потоков являлось и является важной актуальной задачей.

Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: первый класс составляют потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть непрерывный случайный процесс [1, 2]; второй – потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным (произвольным) числом состояний. Последние, в зависимости от того, каким образом происходит переход интенсивности из состояния в состояние, делятся на три типа: 1) синхронные потоки (потоки, у которых состояние интенсивности меняется в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий) [3–5]; 2) асинхронные потоки (потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий) [6–8]; 3) полусинхронные потоки (потоки, у которых одна часть состояний интенсивности меняется в моменты наступления событий потока, другая часть состояний интенсивности меняется в произвольные моменты времени, не связанные с моментами наступления событий потока) [9–11].

В реальных ситуациях часто приходится иметь дело с потоками, у которых не все события доступны наблюдению. Как правило, причиной ненаблюдаемости служит так называемое мертвое время регистрирующих приборов [12], порожденное зарегистрированным событием, в течение которого

другие события, наступившие в этот период, недоступны наблюдению (теряются). Регистрирующие приборы делятся на два вида: с непродлевающимся мертвым временем и продлевающимся. Кроме того, длительность мертвого времени может быть как детерминированной величиной, одинаковой для всех событий [13], так и случайной с тем или иным законом распределения [14].

В этой связи можно считать, что мертвое время выступает искажающим фактором при решении различного рода задач оценивания, по измерениям моментов наступления наблюдаемых событий исходного дважды стохастического потока (часть событий исходного потока не наблюдается (теряется)). В настоящей статье в качестве искажающего фактора рассматривается непродлевающееся случайное мертвое время.

В данной работе исследуется полусинхронный дважды стохастический поток событий с интенсивностью, являющейся кусочно-постоянным случайным процессом с двумя состояниями, параметры которого связаны определенным условием, так что рассматривается особый случай функционирования потока. В общем случае поток был исследован в работе [15]. Производится оценивание параметра длительности случайного мертвого времени. Для этого выводится аналитическая формула математического ожидания длительности интервала между соседними событиями наблюдаемого потока и находится оценка параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени с использованием уравнения моментов. С помощью построенной имитационной модели наблюдаемого потока реализуются статистические эксперименты для получения численных результатов оценивания.

### 1. Математическая модель наблюдаемого потока

Рассматривается полусинхронный дважды стохастический поток событий, сопровождающий процесс (интенсивность) которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс  $\lambda(t)$  с двумя состояниями  $S_1$  и  $S_2$ . Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса (потока)  $S_1$ , если  $\lambda(t) = \lambda_1$ , и, наоборот, имеет место второе состояние процесса (потока)  $S_2$ , если  $\lambda(t) = \lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$ ). Если имеет место первое состояние процесса  $S_1$ , то в течение временного интервала, когда  $\lambda(t) = \lambda_1$ , поступает пуассоновский поток событий с интенсивностью  $\lambda_1$ . Если имеет место второе состояние процесса  $S_2$ , то в течение временного интервала, когда  $\lambda(t) = \lambda_2$ , поступает пуассоновский поток событий с интенсивностью  $\lambda_2$ . Переход из состояния  $S_1$  процесса  $\lambda(t)$  в состояние  $S_2$  возможен только в момент наступления события (свойство синхронности потока), при этом этот переход осуществляется с вероятностью  $p$  (с вероятностью  $1 - p$  процесс  $\lambda(t)$  остается в состоянии  $S_1$ ). Переход из состояния  $S_2$  процесса  $\lambda(t)$  в состояние  $S_1$  может осуществляться в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события (свойство асинхронности потока). При этом длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  во втором состоянии есть случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону  $F(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$ ,  $t \geq 0$ , где  $\alpha_2$  – интенсивность смены состояния  $S_2$  на  $S_1$ . Так как переход из второго состояния в первое не привязан к моменту наступления события во втором состоянии, то поток называется полусинхронным дважды стохастическим потоком событий. Рассматривается особый случай, когда введенные выше параметры связаны условием  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$ . В сделанных предположениях  $\lambda(t)$  – скрытый марковский процесс ( $\lambda(t)$  – принципиально ненаблюдаемый процесс; наблюдаемыми являются только моменты наступления событий потока).

После каждого зарегистрированного события в момент времени  $t_k$  наступает период мертвого времени случайной длительности, который порождается этим событием, так что другие события исходного потока, наступившие в течение этого периода мертвого времени, недоступны наблюдению и не вызывают его продления (непродлевающееся мертвое время). Принимается, что случайная длительность мертвого времени распределена по равномерному закону с плотностью вероятности  $p(T) = 1/T^*$ , где  $T$  – значение длительности мертвого времени,  $0 \leq T \leq T^*$ .

Возможный вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где  $S_1$  и  $S_2$  – состояния случайного процесса  $\lambda(t)$ ; временная ось  $(0, t)$  – ось моментов наступления наблюдаемых событий в моменты времени  $t_1, t_2, \dots$ ; временная ось  $(0, t^{(1)})$  – ось наступления событий в моменты времени  $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots$  в первом ( $S_1$ ) состоянии процесса  $\lambda(t)$ , на которой также указаны значения длительностей  $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, \dots$  мертвых времен, порождаемых наблюдаемыми событиями потока; аналогично для временной оси  $(0, t^{(2)})$ ; белыми кружками обозначены наблюдаемые события, черными – ненаблюдаемые, штриховкой – периоды мертвого времени; траектория процесса  $\lambda(t)$  привязана к временной оси  $(0, t^{(1)})$ .

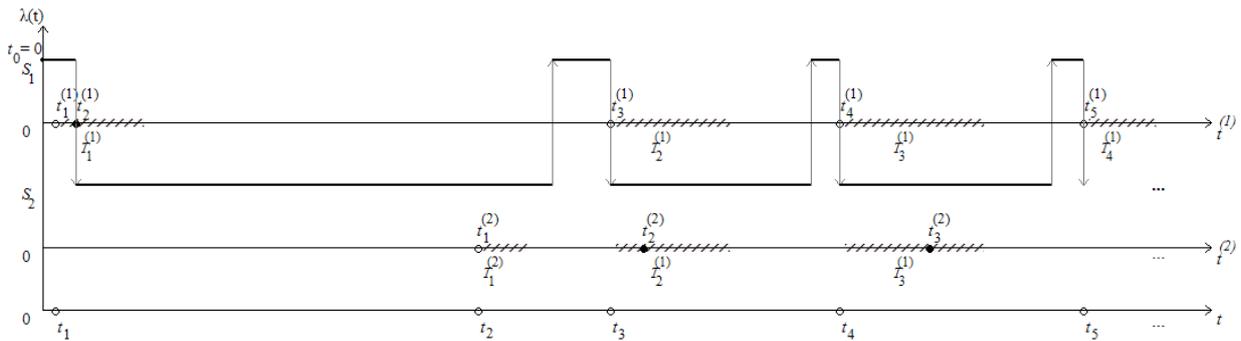


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий  
Fig. 1. Formation of the observed event flow

Отметим, что в работе рассматривается стационарный режим функционирования наблюдаемого потока, т.е. аналитические формулы получены для случая, при котором поток функционирует бесконечно долго ( $t \rightarrow \infty$ ).

Цели данной работы:

1) На основании выборки моментов наступления событий наблюдаемого потока  $t_1, t_2, \dots, t_n$  на временном интервале  $(0, T_m)$ , где  $T_m$  – время наблюдения за потоком ( $t_n < T_m$ ), оценить параметр равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени  $T^*$ .

2) Исследовать оценку  $\hat{T}^*$ . Для этого провести статистические эксперименты на имитационной модели наблюдаемого потока, устанавливающие стационарный режим и определяющие свойства полученной оценки.

## 2. Уравнение моментов для оценивания параметра $T^*$

Обозначим  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , – значение длительности  $k$ -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ( $\tau_k \geq 0$ ). Так как рассматривается стационарный режим функционирования наблюдаемого потока, то плотность вероятности значений длительности  $k$ -го интервала есть  $p(\tau_k) = p(\tau)$ ,  $\tau \geq 0$ , для любого  $k$ , т.е. момент наступления события есть  $\tau = 0$ .

Для оценки неизвестного параметра  $T^*$  используется метод моментов [16]. Для этого находится теоретический момент – математическое ожидание случайной величины  $\tau$  (длительность интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке)  $M(\tau | T^*)$ , после чего ММ-оценка параметра  $T^*$  находится численно из уравнения моментов  $M(\tau | T^*) = C$ , где  $C$  – выборочное среднее,  $C = (1/n) \sum_{k=1}^n \tau_k$ ,  $\tau_k = t_{k+1} - t_k > 0$ , являющееся оценкой математического ожидания  $M(\tau | T^*)$ .

В статье [10] приводится выражение для плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в коррелированном полусинхронном потоке, функционирующем

в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности  $T$  для случая  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$ :

$$p(\tau|T) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \left[ \lambda_1 - \alpha_2 \pi_2(T) (1 - \lambda_1(\tau - T)) \right] e^{-\lambda_1(\tau - T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (1)$$

$$\alpha_2 = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \pi_2(T) = \frac{\lambda_1 p}{\alpha_2 + \lambda_1 p} - \left[ \frac{\lambda_1 p}{\alpha_2 + \lambda_1 p} - \pi_2(0|T) \right] e^{-(\alpha_2 + \lambda_1 p)T},$$

$$\pi_2(0|T) = \frac{p\lambda_1 + \lambda_2 \pi_2(1-p) \left[ 1 - e^{-(\alpha_2 + \lambda_1 p)T} \right]}{\lambda_1 - (1-p)\lambda_2 e^{-(\alpha_2 + \lambda_1 p)T}}, \quad \pi_2 = \frac{\lambda_1 p}{\lambda_1 p + \alpha_2},$$

$\pi_2$  – априорная финальная вероятность состояния  $S_2$  процесса  $\lambda(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Подчеркнем, что внесение непродлевающегося случайного мертвого времени в математическую модель полусинхронного потока событий может только изменить (в меньшую или большую сторону) корреляцию в потоке по сравнению с ситуацией отсутствия мертвого времени ( $T^* = 0$ ) либо с ситуацией наличия детерминированного мертвого времени ( $T > 0$ ), но не устранить ее полностью.

Тогда искомая плотность вероятности  $p(\tau)$  примет вид

$$p(\tau) = \int_{(T)} p(\tau, T) dT = \int_{(T)} p(T) p(\tau|T) dT,$$

где  $p(\tau, T)$  – совместная плотность вероятности значений  $\tau$  и  $T$ ; условная плотность вероятности  $p(\tau|T)$  определена выражением (1); равномерная плотность  $p(T)$  определена в разд. 1;  $(T)$  – область интегрирования значений случайной величины – длительности непродлевающегося случайного мертвого времени.

Возможны два варианта расположения значений величины  $\tau$  ( $\tau \geq 0$ ) относительно значения параметра  $T^*$ : 1)  $0 < T < \tau < T^*$ ; 2)  $0 < T < T^* \leq \tau$ . В соответствии с этими вариантами в системе координат  $(\tau, T)$  определяется область  $(T)$ , точки которой удовлетворяют неравенствам: 1)  $\tau > T > 0$ ,  $\tau < T^*$ ,  $T^* \geq T$ ; 2)  $\tau > T > 0$ ,  $\tau \geq T^*$ ,  $T^* \geq T$ . Отсюда следует, что операция интегрирования по переменной  $T$  выполняется для двух областей –  $(T_1)$ , где  $0 \leq \tau < T^*$ , и  $(T_2)$ , где  $\tau \geq T^*$ :  $(T) = (T_1) \cup (T_2)$ .

Тогда выражение для плотности  $p(\tau)$  примет следующий вид:

$$p(\tau) = \begin{cases} p_1(\tau) = \int_0^\tau p(T) p(\tau|T) dT, & 0 \leq \tau < T^*, \\ p_2(\tau) = \int_0^{T^*} p(T) p(\tau|T) dT, & \tau \geq T^*. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя выражение (1) в (2) и учитывая, что  $p(T) = 1/T^*$ ,  $0 \leq T < T^*$ , находим

$$p_1(\tau) = \frac{1}{T^*} \left\{ 1 - (1 + \alpha_2 \pi_2 \tau) e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{p \alpha_2^2 \pi_2}{p \lambda_1 + \alpha_2} (1 - \lambda_1 \tau) e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(p \lambda_1 + \alpha_2) \tau}} g_1(x) dx + \right. \\ \left. + \frac{p \lambda_1 \alpha_2^2 \pi_2}{(p \lambda_1 + \alpha_2)^2} e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(p \lambda_1 + \alpha_2) \tau}} g_2(x) dx \right\}, \quad 0 \leq \tau < T^*, \quad (3)$$

$$p_2(\tau) = \frac{e^{-\lambda_1 \tau}}{T^*} \left\{ -(1 + \alpha_2 \pi_2 \tau) + (1 + \alpha_2 \pi_2 \tau - \alpha_2 \pi_2 T^*) e^{\lambda_1 T^*} + \frac{p \alpha_2^2 \pi_2}{p \lambda_1 + \alpha_2} (1 - \lambda_1 \tau) \int_1^{e^{(p \lambda_1 + \alpha_2) T^*}} g_1(x) dx + \right. \\ \left. + \frac{p \lambda_1 \alpha_2^2 \pi_2}{(p \lambda_1 + \alpha_2)^2} \int_1^{e^{(p \lambda_1 + \alpha_2) T^*}} g_2(x) dx \right\}, \quad \tau \geq T^*, \quad (4)$$

$$\text{где } g_1(x) = \frac{x^{-\frac{p\lambda_1 - \lambda_2}{p\lambda_1 + \alpha_2}}}{(1-p)\lambda_2 - \lambda_1 x}, \quad g_2(x) = \frac{x^{-\frac{p\lambda_1 - \lambda_2}{p\lambda_1 + \alpha_2}} \ln x}{(1-p)\lambda_2 - \lambda_1 x}.$$

Отметим, что в точке  $\tau = T^*$  имеет место равенство двух плотностей  $p_1(T^*) = p_2(T^*)$  и неравенство их производных  $p_1'(T^*) \neq p_2'(T^*)$ , т.е. функция  $p(\tau)$ , задаваемая формулой (2), где  $p_1(\tau)$  определяется формулой (3),  $p_2(\tau)$  – формулой (4), есть непрерывная функция и в точке  $\tau = T^*$  имеет излом.

По определению математического ожидания случайной величины  $\tau$  – длительности интервала между двумя соседними событиями наблюдаемого потока – с учетом формулы (2) имеем

$M(\tau | T^*) = \int_0^{T^*} \tau p_1(\tau) d\tau + \int_{T^*}^{\infty} \tau p_2(\tau) d\tau$ . Подставляя сюда плотности вероятности  $p_1(\tau)$ ,  $p_2(\tau)$ , определенные в (3), (4), находим

$$\begin{aligned} M(\tau | T^*) = & \frac{T^*}{2} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{p\alpha_2}{\lambda_1(p\lambda_1 + \alpha_2)} + \frac{\lambda_1}{T^*} \left( \frac{p\alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \int_0^{T^*} \tau (1 - \lambda_1 \tau) e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)\tau}} g_1(x) dx d\tau + \\ & + \frac{1}{T^*(p\lambda_1 + \alpha_2)} \left( \frac{p\lambda_1 \alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \int_0^{T^*} \tau e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)\tau}} g_2(x) dx d\tau - \\ & - \left( \frac{p\alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 e^{-\lambda_1 T^*} \left( 1 + \lambda_1 T^* + \frac{1}{\lambda_1 T^*} \right) \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)T^*}} g_1(x) dx + \\ & + \frac{\lambda_1}{p\lambda_1 + \alpha_2} \left( \frac{p\lambda_1 \alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{\lambda_1 T^*} \right) e^{-\lambda_1 T^*} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)T^*}} g_2(x) dx, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $g_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ , определены в (3), (4).

Отметим, что интегралы, входящие в (5), в элементарных функциях не выражаются.

**Теорема.** Математическое ожидание  $M(\tau | T^*)$ , определяемое формулой (5), является возрастающей функцией переменной (параметра)  $T^*$  ( $T^* \geq 0$ ).

**Доказательство.** Сначала рассмотрим случай  $T^* = 0$ , означающий, что непродлевающееся случайное мертвое время в полусинхронном потоке событий отсутствует. Полагая в (5)  $T^* = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} M(\tau | T^* = 0) = & \frac{1}{\lambda_1} + \frac{p\alpha_2}{\lambda_1(p\lambda_1 + \alpha_2)} + \lambda_1 \left( \frac{p\alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \lim_{T^* \rightarrow 0} \left\{ \left( 1/T^* \right) \int_0^{T^*} \tau (1 - \lambda_1 \tau) e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)\tau}} g_1(x) dx d\tau \right\} + \\ & + \frac{1}{(p\lambda_1 + \alpha_2)} \left( \frac{p\lambda_1 \alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \lim_{T^* \rightarrow 0} \left\{ \left( 1/T^* \right) \int_0^{T^*} \tau e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)\tau}} g_2(x) dx d\tau \right\} - \\ & - \left( \frac{p\alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \lim_{T^* \rightarrow 0} \left\{ e^{-\lambda_1 T^*} \left( 1 + \lambda_1 T^* + \frac{1}{\lambda_1 T^*} \right) \times \right. \\ & \left. \times \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)T^*}} g_1(x) dx \right\} + \frac{\lambda_1}{p\lambda_1 + \alpha_2} \left( \frac{p\lambda_1 \alpha_2}{p\lambda_1 + \alpha_2} \right)^2 \lim_{T^* \rightarrow 0} \left\{ e^{-\lambda_1 T^*} \left( 1 + \frac{1}{\lambda_1 T^*} \right) \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)T^*}} g_2(x) dx \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

В (6) в выражениях в фигурных скобках при  $T^* \rightarrow 0$  имеют место неопределенности 0/0, раскрывая которые, находим

$$M(\tau | T^* = 0) = (p\lambda_1 + \alpha_2) / \lambda_1 (p\lambda_2 + \alpha_2) > 0. \quad (7)$$

Рассмотрим производную математического ожидания  $M(\tau | T^*)$  по  $T^*$ . Используя выражение (5), получаем

$$M'(\tau|T^*) = \frac{1}{T^*} \left\{ T^* + \frac{p\lambda_1 + (1+p)\alpha_2}{\lambda_1(p\lambda_1 + \alpha_2)} - M(\tau|T^*) - \frac{(p\alpha_2)^2}{\lambda_1(p\lambda_1 + \alpha_2)[(1-p)\lambda_2 - \lambda_1 e^{(p\lambda_1 + \alpha_2)T^*}]} \right\}, \quad (8)$$

где  $M(\tau|T^*)$  определено выражением (5).

Сначала найдем  $\lim_{T^* \rightarrow 0} M'(\tau|T^*)$ . Раскрывая в (8) неопределенности 0/0, возникающие при  $T^* \rightarrow 0$ , и производя необходимые преобразования, находим

$$M'(\tau|T^* = 0) = \lim_{T^* \rightarrow 0} M'(\tau|T^*) = \frac{[p\lambda_2 + \alpha_2(1+p)][p\lambda_2 + \alpha_2(1-p)]}{2(p\lambda_2 + \alpha_2)^2} > 0. \quad (9)$$

Запишем (8) в виде

$$M'(\tau|T^*) = \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{T^*} \right)^2 F(T^*) = \frac{(T^*)^2 + F(T^*)}{2(T^*)^2}, \quad (10)$$

$$F(T^*) = 2T^* \left\{ \frac{T^*}{2} + \frac{p\lambda_1 + (1+p)\alpha_2}{\lambda_1(p\lambda_1 + \alpha_2)} - M(\tau|T^*) - \frac{(p\alpha_2)^2}{\lambda_1(p\lambda_1 + \alpha_2)[(1-p)\lambda_2 - \lambda_1 e^{(p\lambda_1 + \alpha_2)T^*}]} \right\},$$

где  $M(\tau|T^*)$  определено выражением (5).

Покажем, что производная математического ожидания (5) больше нуля:  $M'(\tau|T^*) > 0$  для  $T^* > 0$ . Тогда  $M'(\tau|T^*) > 0$  для  $T^* \geq 0$ , так как имеет место  $M'(\tau|T^* = 0) > 0$  (формула (9)). Отсюда будет следовать, что математическое ожидание  $M(\tau|T^*)$  есть возрастающая функция переменной (параметра)  $T^*$  ( $T^* \geq 0$ ), и тем самым устанавливается утверждение теоремы.

Так как знаменатель в (10) больше нуля для  $T^* > 0$ , то рассмотрим числитель в (10):  $\Psi(T^*) = (T^*)^2 + F(T^*)$ ,  $T^* \geq 0$ . Имеем  $\Psi(T^* = 0) = 0$ ;  $\lim_{T^* \rightarrow \infty} \Psi(T^*) = \infty$ ;

$$\Psi'(T^*) = 2T^* \left\{ 1 - \left[ \frac{p\alpha_2}{\lambda_1 - (1-p)\lambda_2 e^{-(p\lambda_1 + \alpha_2)T^*}} \right]^2 e^{-(p\lambda_1 + \alpha_2)T^*} \right\}, \quad T^* > 0. \quad (11)$$

Нужно показать, что  $\Psi'(T^*) > 0$  для  $T^* > 0$ . Тогда функция  $\Psi(T^*)$  – возрастающая функция переменной (параметра)  $T^*$  (возрастает от нуля до бесконечности), т.е.  $\Psi(T^*) > 0$  для  $T^* > 0$ , и тогда  $M'(\tau|T^*) > 0$  для  $T^* > 0$ . Обозначим  $h(T^*)$  – функция в фигурных скобках формулы (11). Тогда имеем

$$h(T^*) > 1 - \left( \frac{p\alpha_2}{p\lambda_2 + \alpha_2} \right)^2 = \frac{[p\lambda_2 + (1-p)\alpha_2][p\lambda_2 + (1+p)\alpha_2]}{(p\lambda_2 + \alpha_2)^2} > 0, \quad T^* > 0.$$

Таким образом, функция  $h(T^*)$ ,  $T^* > 0$ , является положительной функцией:  $h(T^*) > 0$ ,  $T^* > 0$ . Последнее, во-первых, доказывает, что  $\Psi'(T^*) > 0$ ,  $T^* > 0$ , и, во-вторых, доказывает теорему.

Так как  $M(\tau|T^*)$  – возрастающая функция переменной (параметра)  $T^*$ ,  $T^* > 0$ , то уравнение моментов имеет единственное решение. Уравнение моментов может не иметь решения только в единственном случае, когда  $C < (p\lambda_1 + \alpha_2) / \lambda_1(p\lambda_2 + \alpha_2)$  ( $C < M(\tau|T^* = 0)$ , формула (7)); тогда принимается  $\hat{T}^* = 0$ . Подчеркнем, что решение уравнения моментов возможно только численно.

### 3. Результаты статистических экспериментов для наблюдаемого потока в особом случае

С целью установления качества получаемых ММ-оценок  $\hat{T}^*$  параметра  $T^*$  поставлены статистические эксперименты.

Первый статистический эксперимент (установление стационарного режима). Для параметров потока  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1,1$ ,  $\alpha_2 = 0,9$ ,  $p = 0,6$  и параметров точности  $\varepsilon = 0,0001$ ,  $\Delta T^* = 0,001$ , получено 100 реализаций ( $N = 100$ ) имитационной модели наблюдаемого потока и, соответственно, получено 100 решений уравнения моментов, для двух значений параметра  $T^* = 1; 3$  и для каждого значения единиц времени моделирования  $T_m = 50, 100, \dots, 1\ 500$ . На основании полученных данных вычислялось выборочное среднее искомой оценки  $\hat{M}(T^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{T}_i^*$  и ее выборочная вариация  $\hat{V}(T^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{T}_i^* - T^*)^2$ , где  $T^*$  – известное из имитационной модели значение параметра.

Имитационная модель наблюдаемого потока построена с привлечением традиционных подходов к имитации входящих потоков событий в системах массового обслуживания [17]. Численное решение уравнения моментов осуществляется методом простой итерации [18].

В табл. 1 приведены результаты для  $\hat{M}(T^*)$ . В первой строке таблицы указано время моделирования  $T_m$  (время наблюдения за потоком) ( $T_m = 50, 100, \dots, 1\ 450$  ед. времени); во второй и третьей строках указано выборочное среднее  $\hat{M}(T^*)$  для  $T^* = 1$  и  $T^* = 3$  соответственно.

Таблица 1

Численные результаты первого статистического эксперимента для  $\hat{M}(T^*)$

$T_m$		50	100	150	200	250	300	350	400	450	
$\hat{M}(T^*)$	$T^* = 1$	0,7504	0,7722	0,7494	0,7609	0,7608	0,7515	0,7603	0,7516	0,7484	
	$T^* = 3$	2,817	2,737	2,72	2,783	2,74	2,741	2,727	2,775	2,748	
$T_m$		500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
$\hat{M}(T^*)$	$T^* = 1$	0,7492	0,7487	0,7572	0,7617	0,7547	0,7562	0,7507	0,7477	0,754	0,7601
	$T^* = 3$	2,743	2,762	2,741	2,729	2,74	2,735	2,767	2,744	2,749	2,731
$T_m$		1 000	1 050	1 100	1 150	1 200	1 250	1 300	1 350	1 400	1 450
$\hat{M}(T^*)$	$T^* = 1$	0,7548	0,7466	0,7539	0,7592	0,7539	0,7507	0,7553	0,757	0,748	0,7551
	$T^* = 3$	2,742	2,757	2,755	2,733	2,743	2,752	2,751	2,731	2,75	2,755

Для наглядности на рис. 2 и 3 приведены графики зависимости  $\hat{M}(T^*)$  от значения времени моделирования  $T_m$  для  $T^* = 1$  и  $T^* = 3$ , построенные по данным табл. 1.

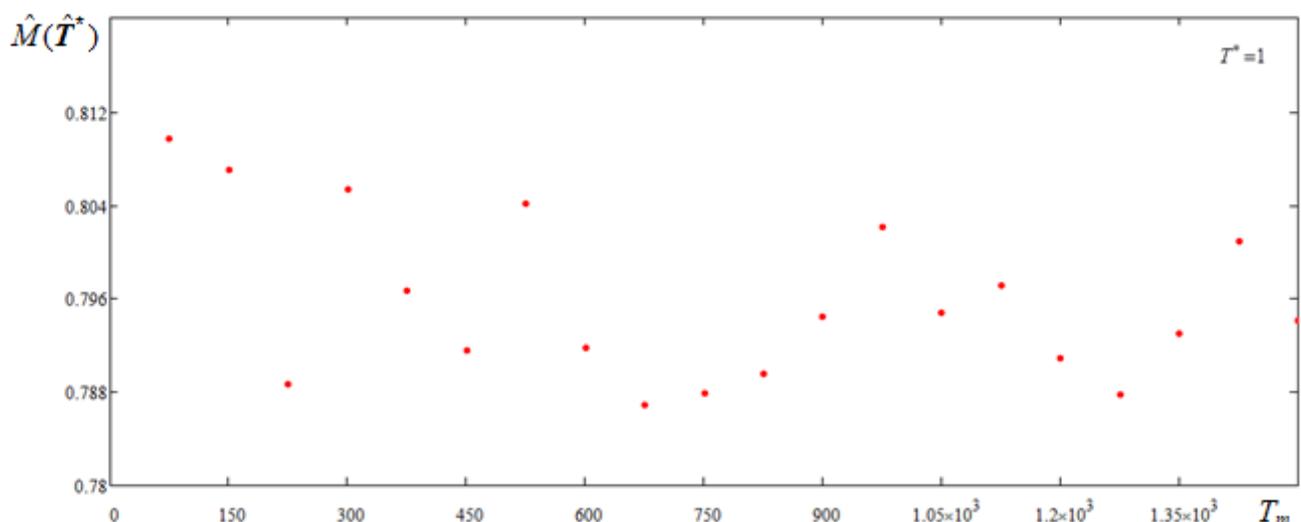


Рис. 2. График зависимости  $\hat{M}(T^*)$  от  $T_m$  при  $T^* = 1$

Fig. 2. Plot of  $\hat{M}(T^*)$  versus  $T_m$  with  $T^* = 1$

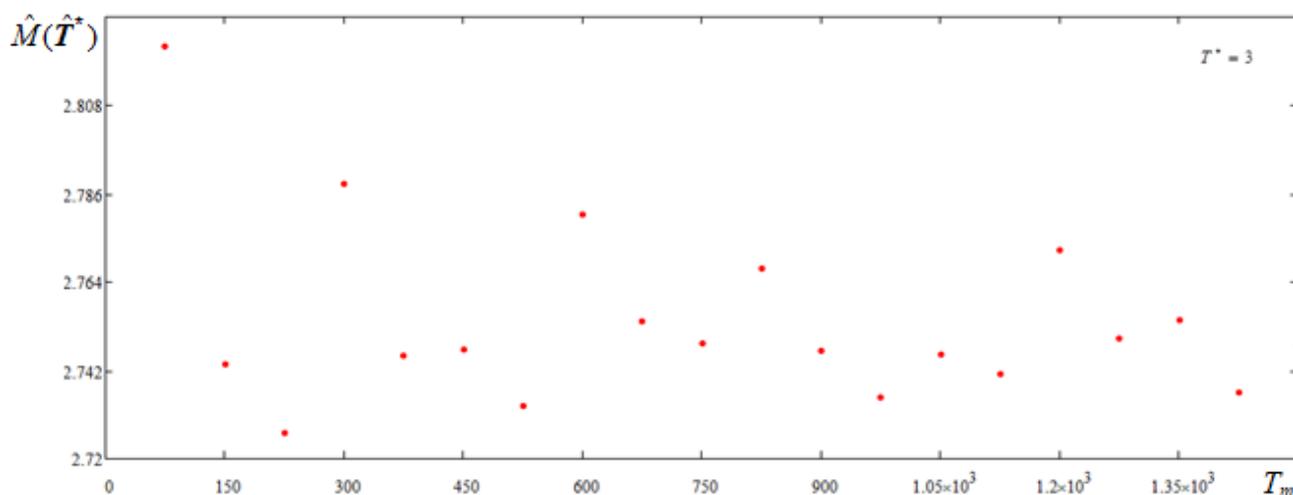


Рис. 3. График зависимости  $\hat{M}(\hat{T}^*)$  от  $T_m$  при  $T^* = 3$

Fig. 3. Plot of  $\hat{M}(\hat{T}^*)$  versus  $T_m$  with  $T^* = 3$

Из анализа результатов табл. 1 и графиков зависимости  $\hat{M}(\hat{T}^*)$  от значения  $T_m$  следует:

1) стационарный режим функционирования наблюдаемого потока устанавливается при  $T_m \geq 850$  ед. времени;

2) оценка  $\hat{T}^*$  является смещенной оценкой; абсолютная погрешность вычислений равна 0,07 и 0,06 для  $T^* = 1$  и  $T^* = 3$  соответственно; причиной смещения оценки  $\hat{T}^*$  ( $\hat{T}^* < T^*$ ) относительно истинного  $T^*$  (известного из имитационной модели) является то, что значения случайного мертвого времени  $T$  сосредоточены около теоретического среднего ( $T^*/2$ ).

В табл. 2 приведены результаты для  $\hat{V}(\hat{T}^*)$ . Структура табл. 2 аналогична структуре табл. 1.

Таблица 2

Численные результаты первого статистического эксперимента для  $\hat{V}(\hat{T}^*)$

$T_m$		50	100	150	200	250	300	350	400	450
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	$T^* = 1$	0,089	0,070	0,067	0,070	0,060	0,066	0,061	0,058	0,062
	$T^* = 3$	0,233	0,119	0,121	0,106	0,098	0,105	0,090	0,092	0,078
$T_m$	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0,062	0,062	0,063	0,066	0,063	0,059	0,061	0,060	0,064	0,063
	0,080	0,079	0,070	0,074	0,071	0,075	0,081	0,079	0,068	0,067
$T_m$	1 000	1 050	1 100	1 150	1 200	1 250	1 300	1 350	1 400	1 450
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0,060	0,060	0,061	0,064	0,060	0,060	0,064	0,061	0,058	0,063
	0,075	0,075	0,072	0,069	0,070	0,075	0,069	0,067	0,077	0,071

На рис. 4 и 5 приведены графики зависимости выборочной вариации  $\hat{V}(\hat{T}^*)$  от времени моделирования  $T_m$  для  $T^* = 1$  и  $T^* = 3$ , построенные по данным табл. 2.

Результаты эксперимента указывают на смещенность построенной оценки, так как выборочная вариация, т.е. разброс значений случайной величины  $\hat{T}^*$  не стремится к 0; однако вариация стремится к числу, близкому к нулю, т.е. методика оценивания качественна и полученную оценку можно принимать за истинную с достаточно малой погрешностью. Также заметим, что выборочная вариация устанавливается возле своего стационарного значения при времени моделирования  $T_m \geq 650$  ед. времени. Таким образом, можно считать, что при  $T_m \geq 650$  достигается нужная для практики точность.

Подчеркнем, что выборочная вариация при  $T^* = 3$  больше, чем при  $T^* = 1$ . Последнее является естественным, так как при больших  $T^*$  происходит большая потеря событий исходного потока, что влечет за собой ухудшение качества оценивания при одинаковых  $T_m$ .

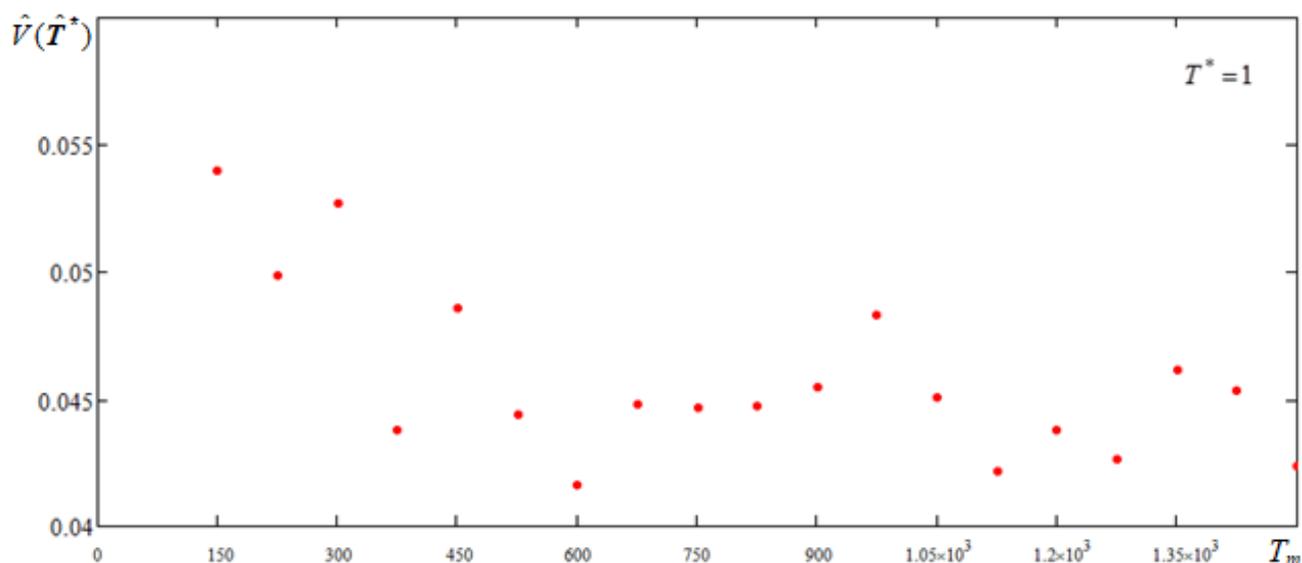


Рис. 4. График зависимости  $\hat{V}(\hat{T}^*)$  от  $T_m$  при  $T^* = 1$

Fig. 4. Plot of  $\hat{V}(\hat{T}^*)$  versus  $T_m$  with  $T^* = 1$

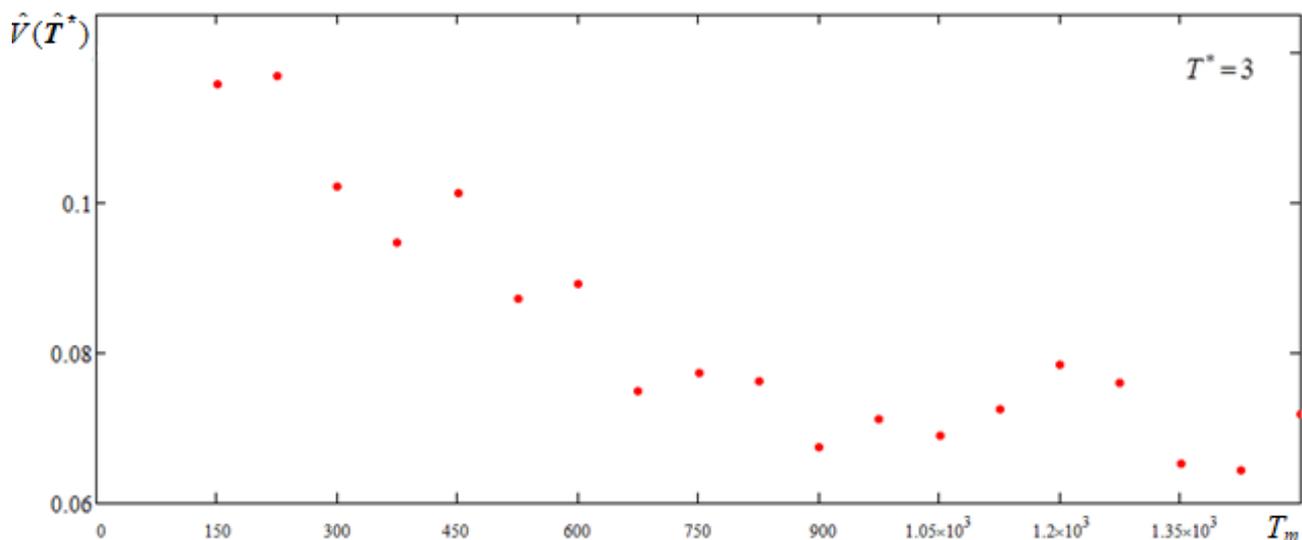


Рис. 5. График зависимости  $\hat{V}(\hat{T}^*)$  от  $T_m$  при  $T^* = 3$

Fig. 5. Plot of  $\hat{V}(\hat{T}^*)$  versus  $T_m$  with  $T^* = 3$

*Второй статистический эксперимент (исследование влияния параметра  $T^*$  на качество оценок).* Второй статистический эксперимент организован аналогично первому и поставлен при фиксированном времени моделирования  $T_m = 1\,000$  ед. времени, что соответствует, как следует из табл. 1, 2, времени установления стационарного режима, и при тех же значениях параметров имитационной модели, что и первый статистический эксперимент, за исключением значений  $T^*$ . Сначала второй статистический эксперимент реализуется для  $T^* = 1$ , затем для  $T^* = 2, \dots$ , затем для  $T^* = 5$ .

Результаты второго статистического эксперимента приведены в табл. 3.

Таблица 3

Численные результаты второго статистического эксперимента

$T^*$	1	2	3	4	5
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	0,75589	1,73959	2,754	3,7257	4,7408
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0,06058	0,07089	0,06818	0,08088	0,08848

Данный эксперимент демонстрирует, что при увеличении значений параметра равномерного распределения мертвого времени  $T^*$  увеличивается выборочная вариация оценки. Это объясняется тем, что при больших значениях  $T^*$  увеличивается число потерянных событий исходного потока и, как следствие, ухудшается качество оценивания.

### Заключение

В данной работе рассмотрен коррелированный полусинхронный дважды стохастический поток событий с непродлевающимся случайным мертвым временем, распределенным по равномерному закону. В реальных регистрирующих устройствах величина и характер мертвого времени зависят от многих факторов [12]. Регистрирующие приборы при этом обладают значением длительности мертвого времени  $T$ , ограниченным сверху некоторой величиной  $T^*$  ( $T \leq T^*$ ). Переходя к случайному мертвому времени [12], вполне естественно рассматривать его распределение как равномерное на некотором отрезке  $[0, T^*]$ .

Аналитически получены формулы (3), (4), определяющие плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке при случайном мертвом времени для особого случая  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$ , доказана непрерывность данной плотности, выведена формула (5) для математического ожидания длительности интервала между соседними событиями и доказано возрастание данной функции для  $T^* > 0$ .

Методом моментов найдена ММ-оценка параметра  $T^*$  равномерного распределения длительности случайного мертвого времени, полученная оценка экспериментально исследована на качество. Приведенные результаты численных расчетов указывают на приемлемое качество оценивания.

В заключение отметим роль отечественных ученых научной школы Г.П. Башарина, статьи которых [19, 20] послужили толчком к исследованию дважды стохастических потоков событий как математических моделей реальных информационных потоков сообщений в телекоммуникационных сетях и системах [21, 22].

### Список источников

1. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51, № 3. P. 433–441.
2. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, № 4. P. 923–930.
3. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № S6. С. 232–239.
4. Nezhel'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 141–151.
5. Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного MAP-потока событий и условия рекуррентности потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 57–67.
6. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
7. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
8. Васильева Л.А. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях присутствия мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. 2002. № S1-1. С. 9–13.
9. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
10. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–29.

11. Калягин А.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3 (32). С. 23–32.
12. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
13. Nezhelskaya L. Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 342–350.
14. Горцев А.М., Загородняя М.Е. Оценивание параметра непродлевающегося мертвого времени случайной длительности в пуассоновском потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 40. С. 32–40.
15. Горцев А.М., Веткина А.В. Оценивание параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося мертвого времени в полусинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2021. № 54. С. 28–37.
16. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.
17. Лифшиц А.Л., Мальц Э.А. Статистическое моделирование систем массового обслуживания. М. : Сов. радио, 1978. 248 с.
18. Самохин А.Б. Метод простой итерации для решения линейных операторных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1988. Т. 28, № 10. С. 1578–1583.
19. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
20. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
21. Вишневицкий В.М., Дудин А.Н., Клименок В.Н. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М. : Техносфера, 2018. 564 с.
22. Нежелская Л.А. Оценка состояний и параметров дважды стохастических потоков событий : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Томск, 2016. 341 с.

#### References

1. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
2. Kingman, Y.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930.
3. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobyitij [Dead time period and parameter estimation of synchronous alternating flow of events]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 6. pp. 232–239.
4. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated map event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Sciences*. 564. pp. 141–151. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4\_12
5. Nezhelskaya, L.A. (2015) Joint probability density of the intervals duration in modulated map event flows and its recurrence conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 57–67.
6. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88–101.
7. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 32–42.
8. Vasilieva, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobyitij v usloviyakh prisutstviya mertvogo vremeni [The abstract of clause estimation of parameters twice-stochastic flow of events in conditions of presence of dead time]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S1-1. pp. 9–13.
9. Nezhelskaya, L. (2000) Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobyitij v usloviyakh ego chastichnoy na-blyudaemosti [Optimal estimation of the states of semi-synchronous event flow under conditions of its partial observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95–98.
10. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semisynchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19–29.
11. Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(32). pp. 23–32. DOI: 10.17223/19988605/32/3

12. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperime* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
13. Nezhelskaya, L.A. (2014) Optimal State Estimation in Modulated MAP Event Flows with Unextendable Dead Time]. *Communications in Computer and Information Sciences*. 487. pp. 342–350.
14. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (2017) Estimation of the parameter of unextendable dead time random duration in the Poisson flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 40. pp. 32–40. DOI: 10.17223/19988605/40/4
15. Gortsev, A.M. & Vetkina, A.V. (2021) Estimation of the parameter of the uniform distribution of the duration of unextendable dead time in the semi-synchronous events flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 54. pp. 28–37. DOI: 10.17223/19988605/54/4
16. Malinkovsky, Yu.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability Theory and Mathematical Statistics]. Gomel: Francisk Skorina Gomel State University.
17. Lifshits, A.L. & Malts, E.A. (1978) *Statisticheskoe modelirovanie sistem massovogo obsluzhivaniya* [Statistical modeling of queuing systems]. Moscow: Sovetskoe radio.
18. Samokhin, A.B. (1988) Metod prostoy iteratsii dlya resheniya lineynykh operatornykh uravneniy [The simple iteration method for solving linear operator equations]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 28(10). pp. 1578–1583.
19. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 1]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
20. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 2 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication network]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
21. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.N. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primeneniye v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic Systems with Correlated Flows. Theory and Application in Telecommunication Networks]. Moscow: Tekhnosfera.
22. Nezhelskaya, L.A. (2016) *Otsenka sostoyaniy i parametrov dvazhdy stokhasticheskikh potokov sobyitiy* [Estimation of States and Parameters of Doubly Stochastic Event Flows]. Physical and Mathematical Sciences Dr. Diss. Tomsk.

**Информация об авторах:**

**Горцев Александр Михайлович** – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: a-gortsev@mail.ru

**Веткина Анна Васильевна** – магистрант Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: anyavetkina@stud.tsu.ru

**Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

**Information about the authors:**

**Gortsev Alexander Mikhailovich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: dekanat@fpmk.tsu.ru

**Vetkina Anna Vasil'evna** – National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: anyavetkina@stud.tsu.ru

**Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.**

*Поступила в редакцию 24.08.2021; принята к публикации 28.02.2022*

*Received 24.08.2021; accepted for publication 28.02.2022*

Научная статья

УДК 519.2

doi: 10.17223/19988605/58/7

## Подход к распознаванию именованных сущностей на примере технологических терминов в условиях ограниченной обучающей выборки

Алексей Дмитриевич Кульневич<sup>1</sup>, Александр Алексеевич Кошечкин<sup>2</sup>,  
Святослав Васильевич Карев<sup>3</sup>, Александр Владимирович Замятин<sup>4</sup>

<sup>1, 2, 3, 4</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>1</sup> kulnevich94@mail.ru

<sup>2</sup> kaa1994g@mail.ru

<sup>3</sup> svyatoslav.karev@live.ru

<sup>4</sup> avzamyatin@inbox.ru

**Аннотация.** Предлагается подход к распознаванию именованных сущностей применительно к области технологических терминов в условиях ограниченной выборки с применением предварительно обученных нейронных сетей в комбинации со статистической моделью. Исследуется применимость каждой модели в отдельности и их комбинация. Обосновывается применимость предложенного подхода для ограниченной обучающей выборки.

**Ключевые слова:** распознавание технологических терминов; распознавание именованных сущностей; комбинирование моделей; Bi-LSTM (bidirectional long short-term memory); CRF (conditional random field)

**Для цитирования:** Кульневич А.Д., Кошечкин А.А., Карев С. В., Замятин А.В. Подход к распознаванию именованных сущностей на примере технологических терминов в условиях ограниченной обучающей выборки // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 58. С. 71–81. doi: 10.17223/19988605/58/7

Original article

doi: 10.17223/19988605/58/7

## An approach to recognizing named entities using the example of technological terms in a limited training sample

Alexey D. Kulnevich<sup>1</sup>, Alexander A. Koshechkin<sup>2</sup>,  
Svyatoslav V. Karev<sup>3</sup>, Alexander V. Zamyatin<sup>4</sup>

<sup>1, 2, 3, 4</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> kulnevich94@mail.ru

<sup>2</sup> kaa1994g@mail.ru

<sup>3</sup> svyatoslav.karev@live.ru

<sup>4</sup> avzamyatin@inbox.ru

**Abstract.** The paper considers the problem of recognizing named entities by the example of technological terms, a named entity is a word or phrase denoting an object or phenomena of a certain category. Automatic recognition of technological terms allows companies to optimize business processes. Recognizing named entities for a limited training sample is a non-trivial task.

Currently, the standard for recognizing named entities are conditional random field methods (conditional random field, CRF) and bidirectional long-term short-term memory network (bidirectional long-term short-term memory, Bi-LSTM).

The paper proposes an approach that is a combination of a statistical (CRF) and a neural network (Bi-SM-CRF) model. The main advantage of using the CRF model is a slight increase in training time against the background of providing additional information for the subsequent Bi-LSTM-CRF model, which will allow you to learn more effectively in a limited sample. Two approaches are used to convert text to feature space: extracting the syntactic properties of words for a statistical model and converting text to a vector using the Sci-Bert language model.

Within the framework of the work, a significant improvement in the quality of recognition of technological terms was demonstrated due to the combination of statistical and neural network models of machine learning and the use of a domain-oriented language model for vector representation of scientific texts. This made it possible to improve the quality of recognition of technological terms using the f1-score metric by 12% when training on 800 texts compared to the traditional approach.

**Keywords:** technology term recognition; named entity recognition; model combination; Bi-LSTM (bidirectional long short-term memory); CRF (conditional random field)

**For citation:** Kulnevich, A.D., Koshechkin, A.A., Karev, S.V., Zamyatin, A.V. An approach to recognizing named entities using the example of technological terms in a limited training sample. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 58. pp. 71–81. doi: 10.17223/19988605/58/7

Именованная сущность – это термин, обозначающий предмет или явление определенной категории. Распознавание именованных сущностей – задача поиска в текстах именованных сущностей определенной категории для последующего анализа [1]. Одним из примеров такой категории являются технологические термины.

На сегодняшний день в научных журналах публикуется значительное число статей, описывающих новые технологические тренды, позволяющие решать передовые задачи в различных отраслях промышленности. Количество материала, требующего изучения, уже давно превосходит возможности человека. В связи с этим автоматическое распознавание технологических терминов в таких статьях представляет интерес для индустрии, поскольку их своевременное выявление позволит компаниям быстро принимать решения по оптимизации внутренних бизнес-процессов и корректировке приоритетов. При этом на данный момент существуют многочисленные сложности по распознаванию технологических терминов. Например, такой термин может представлять собой аббревиатуру, несколько слов, терминов-словосочетаний, при этом ситуация усложняется и тем, что слова могут размещаться в различных частях одного предложения.

На данный момент задача распознавания именованных сущностей успешно решается для таких категорий, как персоны, локации и организации, поскольку их контекст достаточно однообразен [2]. Задачи распознавания именованных сущностей, относящихся к специализированным категориям, решаются при аналогичном объеме обучающей выборки с более низким качеством. Однако увеличение размеров обучающей выборки с целью увеличения качества распознавания не всегда возможно в силу необходимости предметной экспертизы для разметки данных [3].

Сегодня наиболее популярными и эффективными методами для решения задачи распознавания именованных сущностей являются метод условных случайных полей CRF [4] и двунаправленная сеть долгосрочной краткосрочной памяти Bi-LSTM [5, 6].

В работе [7] представлено успешное применение метода CRF для распознавания именованных сущностей на примере технологических терминов. Авторами предложен следующий каскадный подход: проводится классификация предложений в анализируемых текстах на предмет наличия в них технологических терминов с последующим распознаванием технологических терминов внутри классифицированных предложений. Используемый набор данных содержал 240 тыс. предложений, из которых 10 тыс. предложений содержали различные технологические термины. Оценка качества классификации предложений на предмет присутствия технологических терминов и их распознавания внутри предложений по метрике f1-score достигла 93 и 96%, соответственно.

В работе [8] представлены результаты применения Bi-LSTM в задачах распознавания именованных сущностей. Для обучения модели использовались признаки GloVe [9] для слов, признаки символов, извлекаемые с помощью CNN, а также наличие заглавной буквы в начале слова и то, является ли слово лексиконом. Использовались два набора данных: CoNLL-2003 и OntoNotes 5.0/CoNLL-2012,

содержащих 23 499 и 81 828 именованных сущностей соответственно. Оценка качества распознавания именованных сущностей по метрике f1-score составила 94,03 ( $\pm 0,23$ ) и 84,57% ( $\pm 0,27$ ) для каждого набора данных соответственно.

В свою очередь, перед применением Bi-LSTM, как и любой другой нейронной сети, к текстам необходимо провести операцию векторизации [10, 11]. На данный момент использование языковых моделей, таких как Bert (Bidirectional encoder representations from transformers), является базовым подходом в данной области в силу особенности преобразования входных данных: каждое слово имеет разное векторное представление в зависимости от контекста предложения, в то время как при использовании word2vec векторное представление каждого слова является фиксированным [12]. Однако для векторизации научных публикаций предпочтительнее использовать модель Sci-Bert, являющуюся языковой моделью Bert, дообученной на большом массиве научных текстов [13].

Стандартные языковые модели предполагают использование для векторизации текста весов только последнего слоя сети. Однако в работе [14] показано, что использование весов нескольких последних слоев сети благоприятно сказывается на конечном результате в задаче распознавания именованных сущностей. В работе [15] для повышения качества извлечения именованных сущностей предлагают использовать технику Scalar mix (Scalar Mixing Weights). Ее смысл заключается в вычислении среднего арифметического по нескольким скрытым слоям и использовании его при вычислении результатов работы языковой модели.

Помимо правильного преобразования слов в вектор, для задачи распознавания именованных сущностей важно правильно подобрать модель. Одним из популярных и наиболее качественных подходов для задачи распознавания именованных сущностей является объединение моделей CRF и Bi-LSTM (Bi-LSTM-CRF) [16]. Предложенный авторами гибридный подход заключается в использовании метода CRF вместо стандартной функции активации на последнем слое Bi-LSTM. Это привело к увеличению качества распознавания именованных сущностей на 3% по метрике f1-score по сравнению с Bi-LSTM, показавшей результаты на уровне 81% для набора данных CoNLL-2003.

Основной проблемой описанных выше работ является необходимость использования больших объемов данных для обучения применяемых моделей, что, в свою очередь, требует как временных, так и высококвалифицированных экспертных ресурсов для разметки данных. Особенно остро данная проблема проявляется в случае поиска технологических терминов, так как для точной разметки выборки необходимы экспертные знания в различных предметных областях. В связи с этим в данной работе предлагается подход к распознаванию именованных сущностей в условиях обучающей выборки ограниченного размера, который позволит быстрее сходиться к приемлемому качеству, не требуя огромных размеченных выборок.

## **1. Распознавание на основе комбинирования статистической (CRF) и нейросетевой (Bi-LSTM-CRF) моделей**

Ситуация в рамках задачи распознавания технологических терминов является стандартной для моделей глубокого обучения – недостаток размеченных данных не позволяет решить ее существующими методами, так как они требуют больших объемов данных. В связи с этим предлагается подход, представляющий собой комбинирование статистической (CRF) и нейросетевой (Bi-LSTM-CRF) моделей. Основным преимуществом привлечения CRF-модели является незначительное увеличение времени обучения на фоне предоставления для последующей Bi-LSTM-CRF-модели дополнительной информации, что позволит эффективнее обучаться в условиях ограниченной выборки.

На рис. 1 представлен подход, являющийся базовым на практике (а), и подход, предложенный в данной работе (b).

Входными данными для предложенного подхода являются аннотации научных статей. Для преобразования текста в признаковое пространство на следующем шаге используется два подхода – извлечение синтаксических свойств слов для статистической модели и преобразование текста в вектор с помощью языковой модели Sci-Bert.

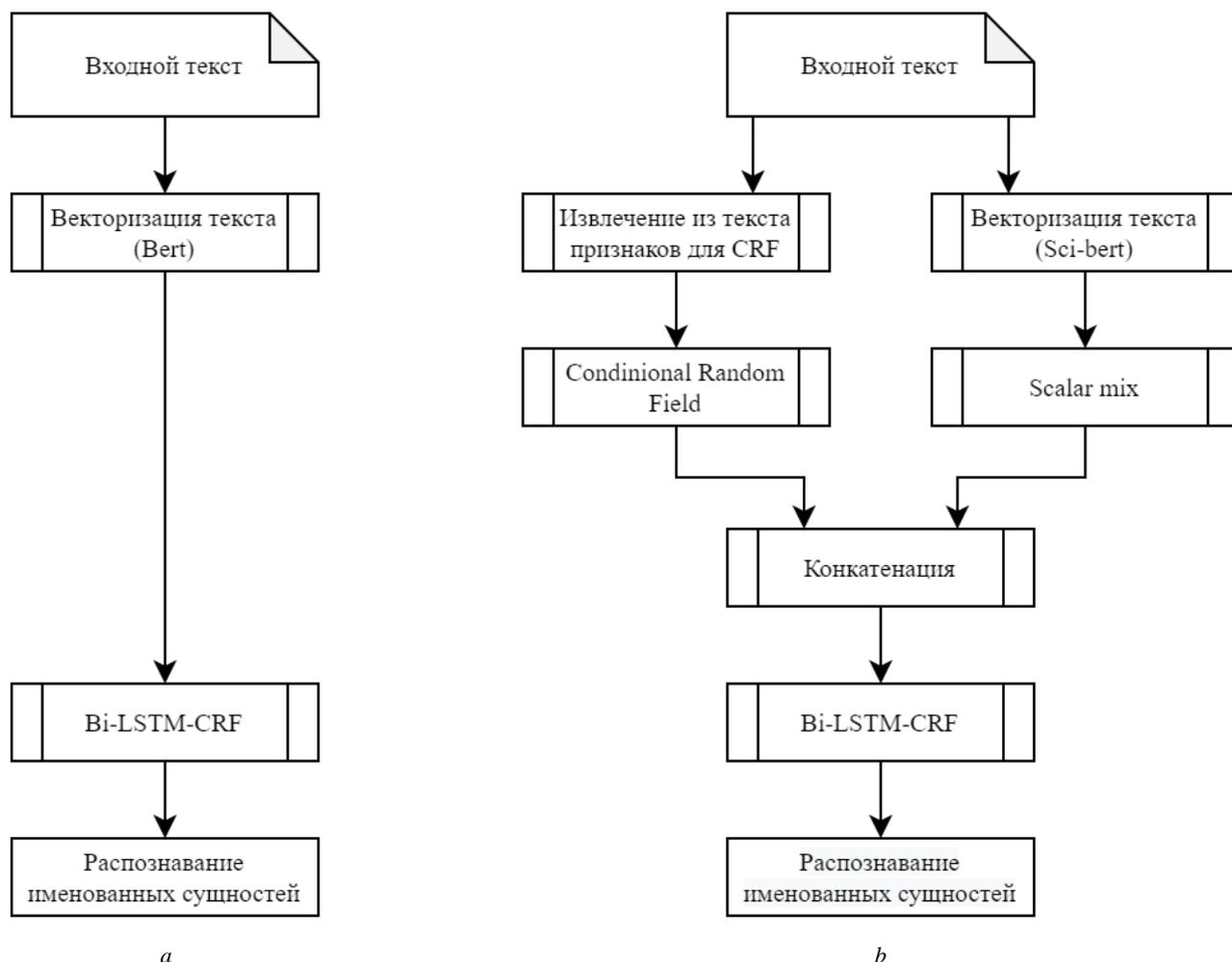


Рис. 1. Подходы к распознаванию именованных сущностей  
 Fig. 1. Approaches to recognizing named entities

В основе Sci-Bert лежит языковая модель BERT, основанная на трансформере – архитектуре глубоких нейронных сетей с механизмом внимания, изучающим взаимоотношения между словами в тексте [17]. Как правило, трансформер включает две части – энкодер и декодер, но, поскольку исходная задача BERT – восстанавливать пропущенные слова, для задачи векторного представления слов требуется только энкодер.

В противоположность направленным архитектурам, которые считывают текст последовательно слева направо или наоборот, трансформер считывает последовательность слов за один раз. Таким образом, можно сказать, что это ненаправленная модель, позволяющая изучить контекст сразу как слева, так и справа.

При обучении BERT решает две задачи:

1. Создание маскированной языковой модели.
2. Предсказание следующего предложения.

**Создание маскированной языковой модели.** Перед подачей последовательности слов в BERT 15% слов заменяется маскирующим токеном, и модель пытается их предсказать (рис. 2). Технически это происходит следующим образом:

1. Добавление слоя классификации после энкодера.
2. Маскированные слова помечаются специальным тэгом, который имеет специальное обозначения для токенизатора.
3. Добавление слоя для классификации (состоит, как правило, из одного или нескольких скрытых слоев и softmax-функции активации).

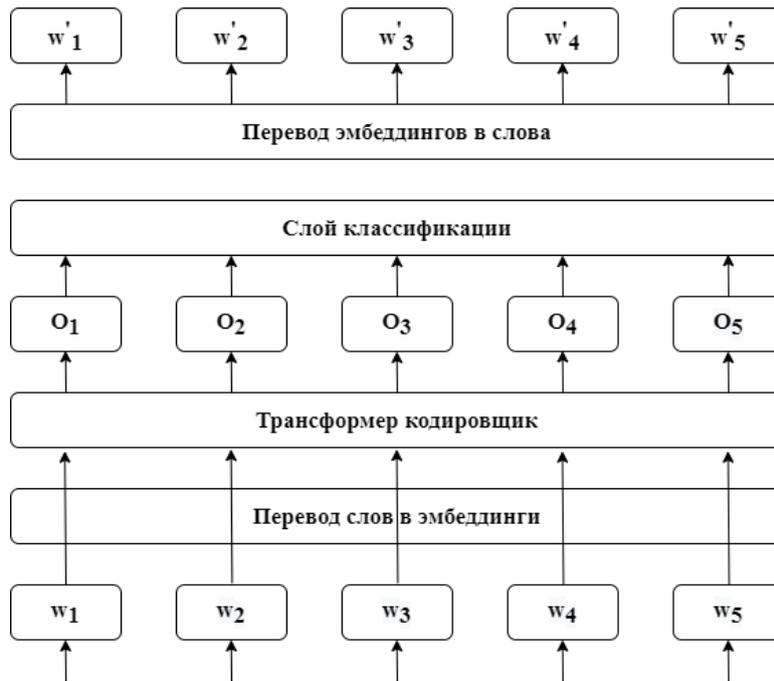


Рис. 2. Маскированная языковая модель  
Fig. 2. Masked language model

**Предсказание следующего предложения.** Для разметки моделью, где начинается следующее предложение, текстовый вход обрабатывается следующим образом (рис. 3):

1. CLS-токен вставляется в начало первого предложения и SEP-токен вставляется в конец каждого.
2. Вектор предложения, обозначающий предложение *A* или предложение *B*, добавляется к каждому токenu.
3. Вектор позиции слова складывается с каждым токеном, показывая, где его место в предложении относительно других.

Вход	[CLS]	моя	собака	[MASK]	очень	добрая
Эмбединги слов	$E_{cls}$	$E_{моя}$	$E_{собака}$		$E_{очень}$	$E_{добрая}$
	+	+	+		+	+
Эмбединги предложения	$E_A$	$E_A$	$E_A$		$E_A$	$E_A$
	+	+	+		+	+
Кодирование позиции	$E_0$	$E_1$	$E_2$		$E_3$	$E_4$

Рис. 3. Предсказание недостающих слов с помощью BERT  
Fig. 3. Predicting missing words using BERT

Сам процесс предсказания выглядит следующим образом:

1. Предложение проходит через трансформер-модель.
2. Выход CLS-токена трансформируется в вектор размерности  $2 \times 1$ , используя скрытый слой.
3. Результирующий вектор передается в softmax-функцию активации.

Для увеличения качества распознавания из модели Sci-Bert извлекается не только вектор последнего слоя, но и несколько последних скрытых слоев. После извлечения их значения усредняются (Scalar

Mix), чтобы информация сохранилась в векторе и при этом размерность не изменилась по сравнению со стандартным извлечением последнего слоя. В сумме это дает следующее преимущество: нейросетевая модель получает на вход оптимизированное признаковое пространство по сравнению с традиционным подходом, что благоприятно влияет на качество распознавания именованных сущностей.

После извлечения признаков из текста синтаксические свойства слов подаются в модель CRF, а ее предсказания используются как признак для конечной модели. Предсказания CRF-модели и векторное представление текста, сформированное с помощью Sci-Bert с применением Scalar Mix, объединяются с помощью операции конкатенации, и ее результат поступает на вход модели Bi-LSTM-CRF. Выходом модели Bi-LSTM-CRF является размеченная последовательность с информацией о принадлежности каждого слова к классу технологических терминов.

## 2. Вычислительный эксперимент

Для проверки работоспособности и оценки эффективности предложенного метода для задачи распознавания именованных сущностей необходимо сравнить предложенный метод с аналогами (CRF, Bi-LSTM-CRF), а также продемонстрировать оправданность отдельной модификации исходной модели (Bi-LSTM-CRF с применением Sci-Bert-Scalar mix).

В экспериментах с Bi-LSTM использовались подобранные оптимальные гиперпараметры:

- размерность Sci-Bert embeddings: 768;
- количество слоев: 2;
- размерность LSTM-ячеек слоев: 64;
- dropout: 0.2;
- оптимизатор: Adam.

В экспериментах CRF использовались следующие признаки, стандартные для данной модели:

- регистр (нижний, верхний);
- начало с заглавной буквы;
- заголовок;
- число;
- форма слова;
- является ли токен стоп-словом;
- частеречная разметка.

При проведении эксперимента необходимо соблюсти баланс между временем вычислений и объективностью оценки. Стандартным методом формирования обучающей и тестовой выборок является случайное разбиение в заданной пропорции, которое проводится несколько раз с последующим усреднением результатов. Данный метод идеально подходит для ситуаций, когда нужно оценить эффективность различных моделей при изменяющемся объеме обучающей выборки. Для рассмотрения работы моделей в условиях обучающей выборки различного размера обучение проводилось на 1/5, 2/5, 3/5 и 4/5 от всех текстов, а тестирование – на оставшихся. На каждой стадии обучающая и тестовая выборки формировались 10 раз случайным образом с соблюдением соответствующих пропорций с последующим усреднением результатов. В качестве метрики оценки качества распознавания именованных сущностей использовалась метрика f1-score.

Для сравнения предложенного подхода распознавания именованных сущностей с аналогами использовался набор аннотаций научных статей, собранных с arXiv.org и относящихся к тематике компьютерных наук и нефтегазовой отрасли [18]. Набор данных представляет собой 1 000 аннотаций научных публикаций, что в сравнении с публичными наборами данных, которые обычно содержат десятки тысяч текстов, является ограниченной выборкой. Каждая аннотация характеризуется небольшим количеством слов – не более 250, из которых 1–2 слова являются технологическими терминами. Набор данных размечался вручную в соответствии с ВЮ-разметкой при помощи специализированного инструмента Brat [19]. Далее представлен пример разметки одного предложения.

Предложения, содержащие технологические термины, имеют следующий вид: «*A proper computing grid-infrastructure has been constructed at the RDMS institutes for the participation in the running phase of the CMS experiment*». Маска предложения после разметки имеет вид: «*O O B I O O O O O O O O O O O O O O O O O O*». В представленном случае в предложении присутствует два класса: слова, относящиеся к какой-либо технологии, и остальные слова предложения. Слова *computing* и *grid-infrastructure* принадлежат к искомому классу технологических терминов.

Таблица содержит результаты работы исследуемых методов распознавания именованных сущностей по метрике f1-score при различных размерах обучающей выборки. Значения в таблице представляют собой оценку математического ожидания  $\bar{X}$  и оценку стандартного отклонения  $\sigma$ , которые вычисляются по формулам

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}},$$

где  $x_i$  –  $i$ -е значение метрики f1-score на  $i$ -й обучающей выборке,  $n$  – количество формирований обучающей выборки, в нашем случае  $n = 10$ .

**Результаты оценки качества распознавания именованных сущностей по метрике f1-score (оценка среднего отклонения и оценка стандартного отклонения)**

Размер обучающей выборки / модели	CRF		Bi-LSTM-CRF		Bi-LSTM-CRF (Scalar Mix)		Предложенный подход	
	$\bar{X}$	$\sigma$	$\bar{X}$	$\sigma$	$\bar{X}$	$\sigma$	$\bar{X}$	$\sigma$
200	0,43	0,07	0,54	0,04	0,54	0,05	0,61	0,03
400	0,44	0,04	0,64	0,03	0,66	0,04	0,66	0,04
600	0,47	0,05	0,71	0,02	0,72	0,03	0,77	0,06
800	0,52	0,06	0,74	0,03	0,76	0,05	0,86	0,06

Как видно из таблицы, предложенный метод показывает лучшие результаты по метрике f1-score в задаче по распознаванию именованных сущностей при всех исследуемых размерах обучающей выборки. Единственным исключением является равенство предложенного метода и Bi-LSTM-CRF\_SM в ситуации, когда для обучения использовалось 400 текстов.

Данный эффект во многом связан с низким приростом качества распознавания именованных сущностей с помощью метода CRF, а так как он используется как часть предложенного метода, этот эффект накладывается и на него. Данную особенность отчетливо видно на рис. 4: изменения качества распознавания (при переходе от 200 до 400 текстов) для предложенного метода (около 5%) представляют собой что-то среднее между низким ростом у CRF (около 1%) и значительным у методов, основанных на применении Bi-LSTM-CRF (10–12%). Данный эффект показывает, что методу CRF не хватает используемых признаков для качественного распознавания именованных сущностей при объемах выборки 200–400 текстов.

Однако стоит отметить, что на отрезке 400–800 текстов в обучающей выборке прирост качества распознавания для предложенного подхода составил около 20%, в то время как методы, основанные на Bi-LSTM-CRF, показали прирост около 10%. Фактически это свидетельствует о том, что хотя предложенный метод при объемах обучающей выборки до 400 текстов лучше своих аналогов, весь его потенциал раскрывается уже на выборках больше 400 текстов.

На рис. 5 приведена зависимость значения f1-score распознавания именованных сущностей от размера обучающей выборки с учетом разброса предсказаний. Здесь необходимо отметить три наиболее важных момента:

- большой межквартильный размах для метода CRF при размере выборки в 200 текстов, что еще раз подтверждает высказанное ранее предположение о недостатке используемых признаков;
- выброс (отмечено точками) у метода Bi-LSTM-CRF\_SM в районе 75% при размере обучающей выборки в 400 текстов, что также косвенно повлияло на равенство результатов работы данного метода и предложенного подхода;

– разнице между 75-м и 25-м квартилем относительно медианы у предложенного подхода при обучающей выборке размером 800 текстов. Расстояние между медианой и 25-м квартилем в несколько раз больше, что является признаком вытянутого влево «хвоста», который занижает значение среднего арифметического (оно равно 86%), тогда так медиана практически равна 90%.

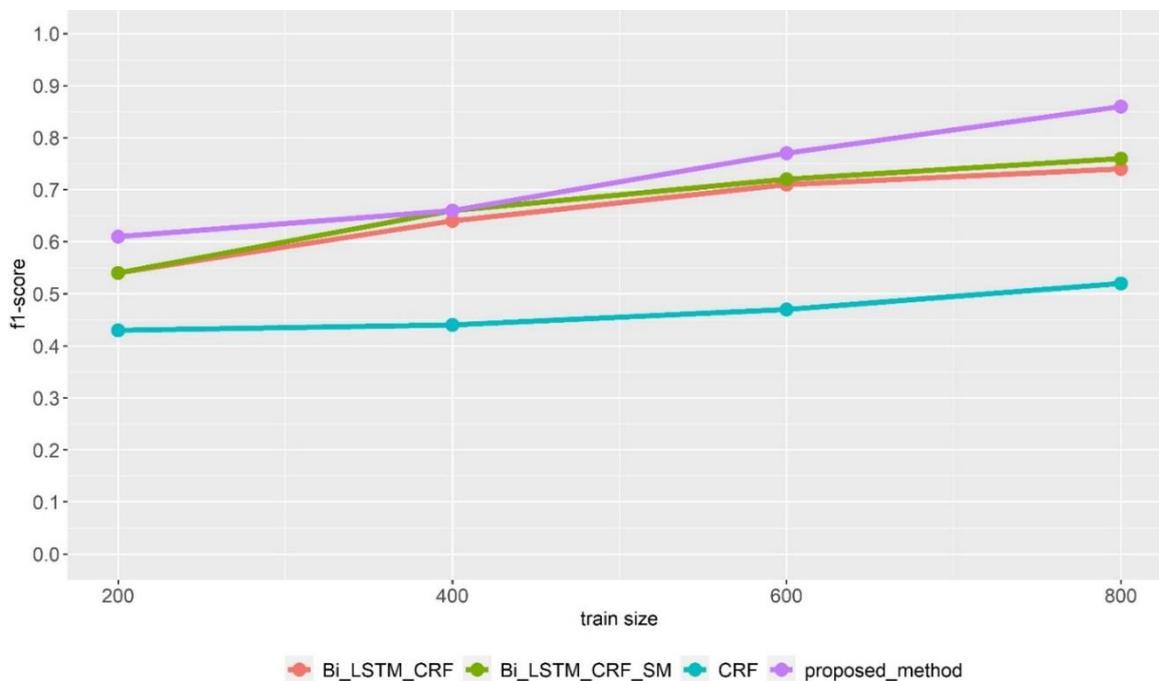


Рис. 4. Зависимость значения f1-score распознавания именованных сущностей от размера обучающей выборки  
 Fig. 4. Dependence of the f1-score value of named entity recognition on the size of the training sample

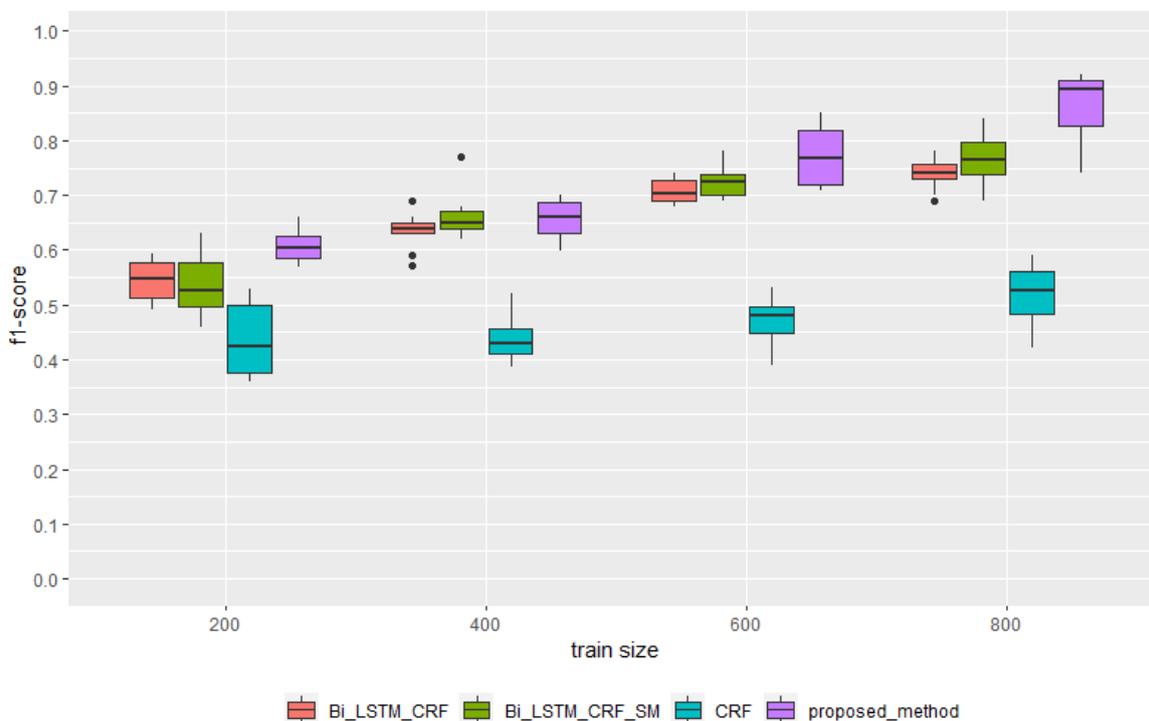


Рис. 5. Зависимость значения f1-score распознавания именованных сущностей от размера обучающей выборки с учетом разброса предсказаний  
 Fig. 5. Dependence of the f1-score value of named entity recognition on the size of the training sample taking into account the spread of predictions

В целом методы CRF и Bi-LSTM-CRF, используемые по отдельности, не способны достичь точности распознавания именованных сущностей, демонстрируемой предложенным подходом. Благодаря расширению входной информации в виде результатов предсказания CRF для Bi-LSTM-CRF, модель способна лучше обучаться по сравнению с аналогами. В свою очередь, применение Scalar mix, в отличие от комбинирования моделей, не позволяет значительно повысить качество обнаружения именованных сущностей, прирост находится в пределах 1–2%.

### Заключение

В рамках исследования продемонстрировано повышение качества распознавания технологических терминов за счет комбинирования статистической и нейросетевой моделей машинного обучения и применения доменно-ориентированной языковой модели для векторного представления научных текстов. Это позволило повысить качество распознавания технологических терминов по метрике f1-score на 12% при обучении на 800 текстах по сравнению с традиционным подходом. Помимо этого, стоит отметить пользу использования техники усреднения значений скрытых слоев языковой модели, что также положительно повлияло на итоговый результат.

В данной работе рассматривались тексты только на английском языке, но имеется возможность масштабирования алгоритма на другие языки, в том числе на русский. Для таких случаев предполагается использование мультязыковых моделей, обученных на параллельных корпусах данных, благодаря чему одни и те же термины в векторном пространстве находятся достаточно близко друг к другу.

### Список источников

1. Nadeau D., Sekine S. A survey of named entity recognition and classification // *Linguisticae Investigationes*. 2007. V. 30, № 1. P. 3–26.
2. Marrero M. et al. Named entity recognition: fallacies, challenges and opportunities // *Computer Standards & Interfaces*. 2013. V. 35, № 5. P. 482–489.
3. Korkontzelos I. et al. Boosting drug named entity recognition using an aggregate classifier // *Artificial intelligence in medicine*. 2015. V. 65, № 2. P. 145–153.
4. Lafferty J., McCallum A., Pereira F.C.N. Conditional random fields: Probabilistic models for segmenting and labeling sequence data. 2001. URL: [https://repository.upenn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1162&context=cis\\_papers](https://repository.upenn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1162&context=cis_papers)
5. Schuster M., Paliwal K.K. Bidirectional recurrent neural networks // *IEEE transactions on Signal Processing*. 1997. V. 45, № 11. P. 2673–2681.
6. Jing L., Aixin S., Ray H., Chenliang L. A Survey on Deep Learning for Named Entity Recognition // *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. 2020. DOI: 10.1109/TKDE.2020.2981314
7. Hossari M., Dev S., Kelleher D.J., TEST: A Terminology Extraction System for Technology Related Terms // *ICCAE 2019*, February 23–25, 2019. URL: <https://arxiv.org/pdf/1812.09541.pdf>
8. Jason P.C., Chiu N.E. Named Entity Recognition with Bidirectional LSTM-CNNs // *arXiv preprint:1511.08308v5*. 2016. URL: <https://arxiv.org/pdf/1511.08308.pdf>
9. Pennington J., Socher R., Christopher D.M. GloVe: Global Vectors for Word Representation / Computer Science Department, Stanford University. 2014. URL: <https://nlp.stanford.edu/pubs/glove.pdf>
10. Wang S., Zhou W., Jiang C. A survey of word embeddings based on deep learning // *Computing*. 2020. V. 102, № 3. P. 717–740.
11. Wang Y. et al. From static to dynamic word representations: a survey // *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*. 2020. V. 11 (4). P. 1–20.
12. Devlin J. et al. BERT: Pre-training of deep bidirectional transformers for language understanding // *arXiv preprint arXiv:1810.04805*. 2018. URL: <https://arxiv.org/pdf/1810.04805.pdf>
13. Beltagy I., Lo K., Cohan A. SciBERT: a pretrained language model for scientific text // *Proc. of the 2019 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing and the 9th International Joint Conference on Natural Language Processing (EMNLP-IJCNLP)*. 2019. DOI: 10.18653/v1/D19-1371
14. Tenney I. et al. What do you learn from context? probing for sentence structure in contextualized word representations // *arXiv preprint arXiv:1905.06316*. 2019. URL: <https://arxiv.org/pdf/1903.10676.pdf>
15. Tenney I., Das D., Pavlick E. BERT rediscovers the classical NLP pipeline // *Proc. of the 57th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*. 2019. P. 4593–4601.
16. Huang Z., Xu W., Yu K. Bidirectional LSTM-CRF models for sequence tagging // *arXiv preprint arXiv:1508.01991*. 2015. URL: <https://arxiv.org/pdf/1508.01991.pdf>

17. Vaswani A. et al. Attention is all you need // arXiv preprint arXiv:1706.03762. 2017. URL: <https://arxiv.org/pdf/1706.03762.pdf>
18. Service for the free distribution of articles in the fields of physics, mathematics, computer science and other. URL: <https://arxiv.org/> (accessed: 22.10.2020).
19. Stenetorp P. et al. BRAT: a web-based tool for NLP-assisted text annotation // Proc. of the Demonstrations at the 13th Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics. 2012. P. 102–107.

### References

1. Nadeau, D. & Sekine, S. (2007) A survey of named entity recognition and classification. *Linguisticae Investigationes*. 30(1). pp. 3–26. DOI: 10.1075/li.30.1.03nad
2. Marrero, M. et al. (2013) Named entity recognition: fallacies, challenges and opportunities. *Computer Standards & Interfaces*. 35(5). pp. 482–489. DOI: 10.1016/j.csi.2012.09.004
3. Korkontzelos, I. et al. (2015) Boosting drug named entity recognition using an aggregate classifier. *Artificial Intelligence in Medicine*. 65(2). pp. 145–153. DOI: 10.1016/j.artmed.2015.05.007
4. Lafferty, J., McCallum, A. & Pereira, F.C.N. (2001) *Conditional random fields: Probabilistic models for segmenting and labeling sequence data*. [Online] Available from: [https://repository.upenn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1162&context=cis\\_papers](https://repository.upenn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1162&context=cis_papers)
5. Schuster, M. & Paliwal, K.K. (1997) Bidirectional recurrent neural networks. *IEEE transactions on Signal Processing*. 45(11). pp. 2673–2681.
6. Jing, L., Aixin, S., Ray, H. & Chenliang, L. (2020) A Survey on Deep Learning for Named Entity Recognition. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. DOI: 10.1109/TKDE.2020.2981314
7. Hossari, M., Dev, S. & Kelleher, D.J. (2019) TEST: A terminology extraction system for technology related terms. *ICCAE 2019*, February 23–25.
8. Jason, P.C. & Chiu, N.E. (2016) *Named entity recognition with bidirectional LSTM-CNNs*. arXiv preprint:1511.08308v5.
9. Pennington, J., Socher, R. & Christopher, D.M. (2014) GloVe: Global vectors for word representation. *Computer Science Department*. Stanford University, Stanford, CA 94305.
10. Wang, S., Zhou, W. & Jiang, C. (2020) A survey of word embeddings based on deep learning. *Computing*. 102(3). pp. 717–740. DOI: 10.1007/s00607-019-00768-7
11. Wang, Y. et al. (2020) From static to dynamic word representations: a survey. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*. pp. 1–20. DOI: 10.1007/s13042-020-01069-8
12. Devlin, J. et al. (2018) *Bert: Pre-training of deep bidirectional transformers for language understanding*. arXiv preprint arXiv:1810.04805.
13. Beltagy, I., Lo, K. & Cohan, A. (2019) *SciBERT: A pretrained language model for scientific text*. arXiv preprint arXiv:1903.10676.
14. Tenney, I. et al. (2019) *What do you learn from context? probing for sentence structure in contextualized word representations*. arXiv preprint arXiv:1905.06316.
15. Tenney, I., Das D. & Pavlick, E. (2019) *BERT rediscovers the classical NLP pipeline*. arXiv preprint arXiv:1905.05950.
16. Huang, Z., Xu, W. & Yu, K. (2015) *Bidirectional LSTM-CRF models for sequence tagging*. arXiv preprint arXiv:1508.01991.
17. Vaswani, A. et al. (2017) *Attention is all you need*. arXiv preprint arXiv:1706.03762.
18. Arxiv.org. (n.d.) *Service for the free distribution of articles in the fields of physics, mathematics, computer science and other*. [Online] Available from: <https://arxiv.org/> (Accessed: 22nd October 2020).
19. Stenetorp, P. et al. (2012) BRAT: a web-based tool for NLP-assisted text annotation. *Proc. of the Demonstrations at the 13th Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics*. pp. 102–107.

### Информация об авторах:

**Кульневич Алексей Дмитриевич** – аспирант кафедры теоретических основ информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kulnevich94@mail.ru

**Кошечкин Александр Алексеевич** – аспирант кафедры теоретических основ информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kaa1994g@mail.ru

**Карев Святослав Васильевич** – аспирант кафедры теоретических основ информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: svyatoslav.karev@live.ru

**Замятин Александр Владимирович** – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой теоретических основ информатики, директор Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: avzamyatin@inbox.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Information about the authors:**

**Kulnevich Alexey Dmitrievich** – Post-graduate Student, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: kulnevich94@mail.ru

**Koshechkin Alexander Alekseevich** – Post-graduate Student, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: kaa1994g@mail.ru

**Karev Svyatoslav Vasilyevich** – Post-graduate Student, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: svyatoslav.karev@live.ru

**Zamyatin Alexander Vladimirovich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: avzamyatin@inbox.ru

*Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.*

*Поступила в редакцию 24.07.2021; принята к публикации 28.02.2022*

*Received 24.07.2021; accepted for publication 28.02.2022*

Научная статья

УДК 519.872

doi: 10.17223/19988605/58/8

## Системы обслуживания с гетерогенными серверами и зависящими от состояния скачкообразными приоритетами

Агаси Зарбали оглы Меликов<sup>1</sup>, Эсмירה Видади кызы Мехбалиева<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт систем управления Национальной академии наук Азербайджана, Баку, Азербайджан, [agassi.melikov@gmail.com](mailto:agassi.melikov@gmail.com)

<sup>2</sup> Сумгаитский государственный университет, Сумгаит, Азербайджан, [esmira.mehbaliyeva@mail.ru](mailto:esmira.mehbaliyeva@mail.ru)

**Аннотация.** Предложены две марковские модели систем обслуживания с гетерогенными серверами, заявками различных типов и скачкообразными приоритетами. Первая модель предполагает наличие конечных отдельных буферов для разнотипных заявок, а во второй модели имеется общий бесконечный буфер. Заявки высокого приоритета всегда обслуживаются сервером с высокой скоростью, в то время как заявки низкого приоритета могут обслуживаться в обоих серверах. При этом скачкообразные приоритеты в зависимости от состояния очередей разнотипных заявок определяются правилами перехода заявки низкого приоритета в очередь заявок высокого приоритета. Показано, что математическими моделями изучаемых систем являются двумерные цепи Маркова с конечными или бесконечными пространствами состояний. Разработаны точный и приближенный методы нахождения их стационарных распределений и решены задачи расчета и оптимизации основных характеристик изучаемых систем.

**Ключевые слова:** система обслуживания; гетерогенные серверы; скачкообразные приоритеты; разнотипные заявки; анализ; оптимизация

**Для цитирования:** Меликов А.З., Мехбалиева Э.В. Системы обслуживания с гетерогенными серверами и зависящими от состояния скачкообразными приоритетами // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 58. С. 82–96. doi: 10.17223/19988605/58/8

Original article

doi: 10.17223/19988605/58/8

## Queuing systems with heterogeneous servers and state-dependent jump priorities informatics and programming

Agassi Z. Melikov<sup>1</sup>, Esmira V. Mekhbaliyeva<sup>2</sup>

<sup>1</sup> National Academy of Sciences of Azerbaijan, Institute of Control Systems, Baku, Azerbaijan, [agassi.melikov@gmail.com](mailto:agassi.melikov@gmail.com)

<sup>2</sup> Sumgayit State University, Sumgayit, Azerbaijan, [esmira.mehbaliyeva@mail.ru](mailto:esmira.mehbaliyeva@mail.ru)

**Abstract.** We consider the Markovian models of queuing systems with heterogeneous servers, calls of different types and jump priorities. Both types of models with finite individual buffers and an infinite common buffer are investigated. The calls of high priority are served by the fast server while the calls of low priority can be served in both the servers. State-dependent jump priorities determine the rules for transferring a low priority calls to a queue of high priority calls. In order to define state-dependent jump priorities two threshold parameters  $r_l$  and  $r_h$  are introduced as follows. If upon the arrival of low priority call the number of such kind of calls in system is more than  $r_l$  and the number of high priority calls is less than  $r_h$ , then in accordance to the Bernoulli trials either one of low priority call joins the queue of high priority calls or arrived call joins the end of low priority calls. If upon the arrival of low priority call the number of such kind of calls in system is more than  $r_l$  and the number of high priority calls is more than  $r_h$ , then the arrived call joins the end of low priority calls if there is a free place in buffer; otherwise it is a loss with the probability one. If upon the arrival of low priority call the number of appropriate buffers is full and the num-

ber of high priority calls is less than  $r_n$ , then the low priority call at the head of the own queue in accordance to the Bernoulli trials either joins the queue of high priority calls or the arrived call is lost.

It is shown that the mathematical models of the investigated systems are a certain two-dimensional Markov chain with a finite or infinite set of states. The main performance measures are the loss probabilities of various kinds of calls (for the model with separate and finite buffers), the average rate of jumps from one queue to another, the average number of calls in the system and average waiting time in queues. The exact and approximate algorithms for calculating the steady-state probabilities as well as the performance measures are developed and the optimization problem is solved.

**Keywords:** queuing system; heterogeneous servers; jump priority; calls of different types; calculation method; optimization

**For citation:** Melikov, A.Z., Mekhbaliyeva, E.V. (2022) Queuing systems with heterogeneous servers and state-dependent jump priorities informatics and programming. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 58. pp. 82–96. doi: 10.17223/19988605/58/8

Одно из основных допущений при разработке математических моделей процессов обработки запросов в системах телетрафика состоит в том, что серверы являются идентичными по всем показателям, т.е. считается, что все серверы имеют одинаковую скорость, их надежностные показатели идентичны, а также совпадают их стоимости эксплуатации. Однако это допущение плохо соотносится с реальной ситуацией, так как в процессе расширения существующих компьютерных и коммуникационных систем приходится одновременно использовать гетерогенные серверы (heterogeneous servers; HS). Серверы с различными скоростями особенно часто встречаются в системах, где в процессе обработки запросов участвуют не машины, а люди, в частности в колл-центрах.

Достаточно подробный обзор работ, посвященных исследованию моделей систем с HS, можно найти в монографии [1]. Важное направление исследований составляют работы, в которых рассматриваются проблемы организации доступа запросов к гетерогенным серверам [2–5]. Среди них наиболее актуальными являются рандомизированный доступ (randomized access), упорядоченный доступ (ordered entry) и доступ, основанный на схеме «первым используется быстрый сервер» (fast server first).

В ранних работах изучались модели систем обслуживания с HS при наличии идентичных заявок, а модели систем обслуживания с HS и разнотипными заявками недостаточно исследованы. Однако очевидно, что для повышения экономической эффективности работы системы с HS следует выделить высокоприоритетные ( $h$ -заявки) и низкоприоритетные заявки ( $l$ -заявки) и организовать обработку  $h$ -заявок в высокоскоростных серверах ( $f$ -серверах), а медленные серверы ( $s$ -серверы) назначить для обслуживания  $l$ -заявок.

В последние годы изучались модели систем обслуживания с HS и без буфера для ожидания разнотипных заявок [6–8]. Так, в работе [6] рассмотрена модель системы с HS, в которой серверы для обслуживания заявок высокого и низкого приоритетов являются сепаратными, при этом в случаях занятости всех серверов в соответствующих группах допускается обслуживание поступившей заявки в другой группе. Считается, что вероятности переназначения заявок зависят от числа занятых серверов в соответствующей группе. Модели систем обслуживания с HS и общими и отдельными очередями разнотипных заявок изучены в работах [7] и [8]. В работе [7] исследована модель системы с двумя гетерогенными серверами и предложена рандомизированная  $N$ -политика включения медленного сервера, согласно которой при достижении длины очереди заявок величины  $N$  медленный сервер включается с определенной вероятностью, а с дополнительной вероятностью он остается в спящем режиме. Первой публикацией, посвященной изучению моделей систем с HS и конечными и / или бесконечными очередями разнотипных заявок при наличии скачкообразных приоритетов (Jump Priorities, JP), была работа [8]. При использовании этих приоритетов за счет введения зависящих от состояния системы JP можно организовать переход  $l$ -заявки в очередь  $h$ -заявок. Введение таких приоритетов позволяет избежать нежелательной ситуации «старения»  $l$ -заявок в очереди. При этом, конечно, следует учитывать ограничения, предъявляемые к качеству обслуживания  $h$ -заявок, так как переходы  $l$ -заявок в очередь  $h$ -заявок приводят к ухудшению качества обслуживания  $h$ -заявок. В работе [8] показана актуальность изучения систем с зависящими от состояния системы скачкообразными приори-

татами, при этом зависимость JP от состояния может быть учтена различными способами. В указанной работе изучена модель, в которой JP зависят от разности текущего числа разнотипных заявок в системе: если разность числа разнотипных заявок в системе превышает определенное пороговое значение, то одна  $l$ -заявка с некоторой вероятностью может переходить в очередь  $h$ -заявок, т.е. в указанной схеме определения JP имеется только одна степень свободы. В [6] решены различные задачи оптимизации введенных приоритетов.

В данной работе предложена новая схема определения скачкообразных приоритетов в системах обслуживания с HS: переход  $l$ -заявки в очередь  $h$ -заявок зависит от наличия конкретного числа заявок каждого типа. Иными словами, здесь, в отличие от работы [8], имеются две степени свободы, т.е. за счет выбора двух параметров можно управлять показателями качества функционирования системы. Изучены модели систем с гетерогенными серверами и скачкообразными приоритетами, при этом рассматриваются модели с отдельными очередями разнотипных заявок и общим бесконечным буфером.

### 1. Описание моделей и постановка задачи

Изучаемая система содержит два гетерогенных сервера: быстрый ( $f$ -сервер) и медленный ( $s$ -сервер). Эти серверы обслуживают потоки заявок двух типов – высокоприоритетные ( $h$ -заявки) и низкоприоритетные ( $l$ -заявки). При этом  $h$ -заявки всегда обслуживаются в  $f$ -сервере, а  $l$ -заявки могут быть обслужены в обоих серверах. Оба потока заявок являются пуассоновскими с интенсивностями  $\lambda_h$  и  $\lambda_l$  для  $h$ -заявок и  $l$ -заявок соответственно. Времена обслуживания заявок в обоих серверах являются случайными величинами (с.в.) с показательной функцией распределения (ф.р.), при этом средние времена обслуживания в  $f$ -сервере и  $s$ -сервере равны  $\mu_f^{-1}$  и  $\mu_s^{-1}$  соответственно. Скорость обслуживания  $f$ -сервера больше, чем скорость обслуживания  $s$ -сервера, т.е.  $\mu_f > \mu_s$ .

В модели с конечными очередями предполагается, что для ожидания заявок в очереди имеются отдельные буферы конечных размеров, при этом максимальные количества  $h$ -заявок и  $l$ -заявок в системе равны  $K_h$  и  $K_l$ . Это означает, что размер буфера для  $h$ -заявок ( $h$ -буфер) равен  $K_h - 1$ , а соответствующий буфер для  $l$ -заявок ( $l$ -буфер) имеет размерность  $K_l - 1$ . В модели с общей очередью разнотипные заявки ожидают в общем буфере неограниченного размера.

Здесь рандомизированные скачкообразные приоритеты, которые зависят от состояния системы, определяются следующим образом. Введенные рандомизированные JP зависят от текущего состояния системы, при этом состояние системы в каждый момент времени задается двумерным вектором  $(h, l)$ , где компоненты  $h$  и  $l$  указывают на число  $h$ -запросов и  $l$ -запросов в системе соответственно. Для определения указанных приоритетов вводятся два пороговых параметра:  $r_l$ ,  $1 \leq r_l \leq K_l$ , и  $r_h$ ,  $1 \leq r_h \leq K_h$ .

– Поступающие  $h$ -заявки всегда присоединяются к  $h$ -буферу, если там имеется свободное место; иначе эти заявки теряются с вероятностью 1.

– Если в момент поступления  $l$ -заявки число заявок такого типа в системе меньше параметра  $r_l$ , то независимо от числа  $h$ -заявок в системе эта  $l$ -заявка присоединяется к  $l$ -буферу.

– Если в момент поступления  $l$ -заявки число заявок такого типа в системе не меньше параметра  $r_l$  и при этом число  $h$ -заявок меньше порогового параметра  $r_h$ , то одна из  $l$ -заявок (для определенности считается, что  $l$ -заявка, стоящая в начале очереди) согласно схеме Бернулли либо с вероятностью  $\alpha$  присоединяется к  $h$ -буферу, либо поступившая  $l$ -заявка с вероятностью  $1 - \alpha$  переходит в конец очереди  $l$ -буфера, если там имеется свободное место.

– Если в момент поступления  $l$ -заявки число заявок такого типа в системе не меньше параметра  $r_l$  и число  $h$ -заявок не меньше порогового параметра  $r_h$ , то поступившая  $l$ -заявка с вероятностью 1 присоединяется к  $l$ -буферу, если там имеется свободное место; иначе поступившая  $l$ -заявка теряется с вероятностью 1.

– Если в момент поступления  $l$ -заявки соответствующий буфер полностью заполнен и число  $h$ -заявок меньше указанного выше порогового параметра  $r_h$ , то  $l$ -заявка, стоящая в начале очереди, либо с вероятностью  $\alpha$  присоединяется к  $h$ -буферу, либо поступившая  $l$ -заявка теряется с вероятностью  $1 - \alpha$ .

Следовательно, в предложенной схеме рандомизированные  $JP$  определяются так:

$$J(h,l) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } l \geq r_l, h < r_h, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (1)$$

Если в соотношении (1) принять, что  $\alpha = 1$ , то получаются детерминированные  $JP$ , т.е. каждый раз, когда в момент поступления  $l$ -заявки выполняется условие  $l \geq r_l, h < r_h$ ,  $l$ -заявка присоединяется к  $h$ -буферу; в случае  $\alpha = 0$  исходная система распадается на две сепарабельные системы обслуживания.

Отметим, что если происходит переход  $l$ -заявки в  $h$ -буфер, то в дальнейшем она рассматривается как  $h$ -заявка, т.е. ее среднее время обслуживания равно  $\mu_f^{-1}$ .

В модели с бесконечным общим буфером рандомизированные  $JP$  определяются аналогичным образом, при этом необходимо учитывать, что отсутствуют потери заявок.

Задача состоит в нахождении совместного распределения числа разнотипных заявок в системе и разработке метода вычисления ее характеристик. В качестве основных характеристик изучаемой системы принимаются следующие величины: вероятности потери разнотипных заявок (для модели с конечными сепарабельными буферами); средняя интенсивность скачков  $l$ -заявок в  $h$ -буфер; среднее число разнотипных заявок в системе; среднее время ожидания в очереди разнотипных заявок.

## 2. Расчет вероятностей состояний изучаемых систем

Вначале рассмотрим систему с отдельными очередями разнотипных заявок. Математической моделью этой системы является двумерная цепь Маркова (Two Dimensional Markov Chain; 2D MC) с состояниями вида  $(h, l)$ , при этом ее пространство состояний (ПС) имеет вид (рис. 1):

$$E = \{(h, l) : h = \overline{0, K_h}, l = \overline{0, K_l}\}. \quad (2)$$

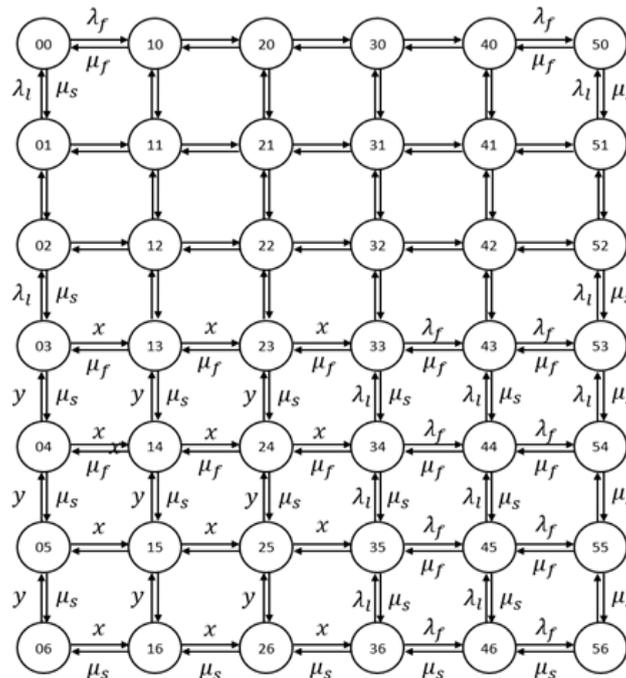


Рис. 1. Граф переходов между состояниями ( $K_h = 5, K_l = 6, r_h = r_l = 3; x = \lambda_h + \lambda_l \alpha, y = \lambda_l (1 - \alpha)$ )

Fig.1. Graph of transitions between states ( $K_h = 5, K_l = 6, r_h = r_l = 3; x = \lambda_h + \lambda_l \alpha, y = \lambda_l (1 - \alpha)$ )

Находим элементы производящей матрицы данной 2D МС, которые определяют интенсивности переходов между ее состояниями. С этой целью в ПС (2) выделим следующее подпространство:

$$E_a = \{(h, l) \in E : h < r_h, l > r_l\}, \quad (3)$$

которое геометрически задается с помощью прямоугольника с вершинами в точках  $(0, r_l + 1)$ ,  $(r_f - 1, r_l + 1)$ ,  $(0, K_l)$ ,  $(r_f - 1, K_l)$  (см. рис.1). Введенные рандомизированные JP определяются в точках внутри этого прямоугольника.

Интенсивность перехода из состояния  $(n_H, n_L) \in E$  в состояние  $(n'_H, n'_L) \in E$  обозначим через  $q((h, l), (h', l'))$ . Переходы между состояниями возможны лишь в моменты поступления разнотипных заявок и в моменты завершения их обслуживания. Исходя из этого заключаем, что указанные величины определяются из следующих соображений.

– Если в момент поступления  $h$ -заявки система находится в состоянии  $(h, l) \in E$ , где  $h < K_h$ , то система переходит в состояние  $(h + 1, l) \in E$  с интенсивностью  $\lambda_h$ .

– Если в момент поступления  $l$ -заявки система находится в состоянии  $(h, l) \in E - E_a$ , где  $l < K_l$ , то система переходит в состояние  $(h, l + 1) \in E$  с интенсивностью  $\lambda_l$ .

– Если в момент поступления  $l$ -заявки система находится в состоянии  $(h, l) \in E_a$ , где  $l < K_l$ , то система переходит в состояние  $(h, l + 1) \in E$  с интенсивностью  $\lambda_l \alpha$ .

– Если в момент поступления  $l$ -заявки система находится в состоянии  $(h, l) \in E_a$ , где  $l < K_l$ , то система переходит в состояние  $(h + 1, l) \in E$  с интенсивностью  $\lambda_l (1 - \alpha)$ .

– Если в момент завершения обслуживания  $h$ -заявки система находится в состоянии  $(h, l) \in E$ , где  $h > 0$ , то система переходит в состояние  $(h - 1, l) \in E$  с интенсивностью  $\mu_f$ .

– Если в момент завершения обслуживания  $l$ -заявки система находится в состоянии  $(h, l)$ , где  $l > 0$ , то система переходит в состояние  $(h, l - 1)$  с интенсивностью  $\mu_s$ .

Из вышеизложенного заключаем, что искомые величины определяются следующим образом: случаи  $(h, l) \in E - E_a$ :

$$q((h, l), (h', l')) = \begin{cases} \lambda_h, & \text{если } h < K_h, h' = h + 1, l' = l, \\ \lambda_l, & \text{если } l < K_l, h' = h, l' = l + 1, \\ \mu_f, & \text{если } h > 0, h' = h - 1, l' = l, \\ \mu_s, & \text{если } l > 0, h' = h, l' = l; \end{cases} \quad (4)$$

случаи  $(h, l) \in E_a$ :

$$q((h, l), (h', l')) = \begin{cases} \lambda_h + \alpha \lambda_l, & \text{если } h' = h + 1, l' = l, \\ (1 - \alpha) \lambda_l, & \text{если } h' = h, l' = l + 1, \\ \mu_f, & \text{если } h > 0, h' = h - 1, l' = l, \\ \mu_s, & \text{если } l > 0, h' = h, l' = l. \end{cases} \quad (5)$$

Из соотношений (4) и (5) заключаем, что построенная конечная 2D МС является неприводимой, т.е. при любых положительных значениях исходных параметров системы в ней существует стационарный режим (см. рис. 1).

Пусть  $p(h, l)$  обозначает вероятность состояния  $(h, l) \in E$ . Эти вероятности находятся в результате решения соответствующей системы уравнений равновесия (СУР), которая составляется на основе соотношений (4), (5). Из-за очевидности составления явный вид этой СУР здесь не приводится.

После нахождения стационарных вероятностей состояний изучаемой 2D МС можно вычислить искомые характеристики системы. Так,  $h$ -заявки теряются лишь тогда, когда в моменты их поступле-

ния в системе уже имеется  $K_h$  заявок данного типа, т.е. вероятность потери  $h$ -заявок ( $PB_h$ ) определяется следующим образом:

$$PB_h = \sum_{l=0}^{K_l} p(K_h, l). \quad (6)$$

Для вычисления вероятности потери  $l$ -заявок следует рассматривать состояния типа  $(h, K_l)$ , при этом необходимо различать два случая: (1)  $0 \leq h < r_h$ ; (2)  $r_h \leq h \leq K_h$ . Если в момент поступления  $l$ -заявки имеет место случай (1), то она теряется с вероятностью  $1 - \alpha$ , а в случае (2) эта заявка теряется с вероятностью 1. Таким образом, вероятность потери  $l$ -заявок ( $PB_l$ ) определяется следующим образом:

$$PB_l = (1 - \alpha) \sum_{h=0}^{r_h-1} p(h, K_l) + \sum_{h=r_h}^{K_h} p(h, K_l). \quad (7)$$

Скачки  $l$ -заявок в  $h$ -буфер происходят в моменты поступления  $l$ -заявок с вероятностью  $\alpha$ , если в эти моменты система находится в состоянии  $(h, l) \in E_a$ . Иными словами, средняя интенсивность скачков  $l$ -заявок в  $h$ -буфер ( $RJ_{lh}$ ) вычисляется как

$$RJ_{lh} = \lambda_l \alpha \sum_{l=r_h+1}^{K_l} \sum_{h=0}^{r_h-1} p(h, l). \quad (8)$$

Средние количества  $h$ -заявок ( $N_h$ ) и  $l$ -заявок ( $N_l$ ) в системе определяются как математические ожидания соответствующих с.в., т.е.

$$N_h = \sum_{h=1}^{K_h} h \sum_{l=0}^{K_l} p(h, l), \quad (9)$$

$$N_l = \sum_{l=1}^{K_l} l \sum_{h=0}^{K_h} p(h, l). \quad (10)$$

Средние времена ожидания в очереди  $h$ -заявок ( $W_h$ ) и  $l$ -заявок ( $W_l$ ) вычисляются из модифицированной формулы Литтла:

$$W_x = N_x / \lambda_x (1 - PB_x), x \in \{h, l\}. \quad (11)$$

Отметим, что указанная выше СУР для стационарных вероятностей состояний изучаемой 2D МС представляет собой систему линейных алгебраических уравнений размерности  $(K_h + 1)(K_l + 1)$ , и поскольку изучаемая 2D МС является неприводимой, то при любых положительных значениях исходных параметров она всегда имеет единственное решение. Для решения СУР могут быть использованы известные численные методы линейной алгебры, которые реализованы в доступных пакетах прикладных программ.

Ниже описан разработанный приближенный метод нахождения стационарных вероятностей состояний для моделей высокой размерности, т.е. когда величина  $K_h K_l$  имеет большое значение. Такой подход ранее использован в работе [8].

Как и в работе [8], принимается допущение о том, что интенсивность  $h$ -запросов намного больше, чем интенсивность  $l$ -запросов, и рассматривается следующее расщепление ПС (1):

$$E = \bigcup_{l=0}^{K_l} E_l, E_l \cap E_{l_2} = \emptyset, l_1 \neq l_2, \quad (12)$$

где  $E_l = \{(h, l) \in E : h = \overline{0, K_h}\}, l = \overline{0, K_l}$ .

Принятие допущения о том, что  $\lambda_h \gg \lambda_l$  позволяет корректно использовать подход, основанный на принципах фазового укрупнения состояний 2D МС, так как при выполнении этого допущения в расщеплении (12) интенсивности переходов между состояниями внутри классов  $E_l, l = \overline{1, K_l}$ , намного превосходят интенсивности переходов между состояниями из разных классов (см. рис. 1).

Далее все состояния внутри каждого класса  $E_l$  объединяются в одно укрупненное состояние  $\langle l \rangle$ , и, таким образом, определяется множество укрупненных состояний  $\Omega = \{\langle l \rangle : l = \overline{0, K_l}\}$ . Приближенные значения вероятностей состояний  $\tilde{p}(h, l)$ ,  $(h, l) \in E$  исходной модели определяются [8]:

$$\tilde{p}(h, l) = \rho_l(h) \pi(\langle l \rangle), \quad (13)$$

где  $\rho_l(h)$  – вероятность состояния  $(h, l)$  внутри расщепленной модели с пространством состояний  $E_l$ , а  $\pi(\langle l \rangle)$  – вероятность укрупненного состояния  $\langle l \rangle \in \Omega$ .

При вычислении вероятностей состояний внутри расщепленных моделей необходимо различать следующие случаи: 1)  $0 \leq l \leq r_l$ ; 2)  $r_l + 1 \leq l \leq K_L$ . В первом случае вероятности состояний внутри всех расщепленных моделей с пространством состояний  $E_l$ ,  $0 \leq l \leq r_l$ , совпадают с вероятностями состояний классической модели одноканальной СМО с ограниченным буфером  $M(\lambda_h) / M(\mu_f) / 1 / K_h$  (см. рис. 1), т.е.

$$\rho_l(h) = v^h (1 - v) / (1 - v^{K_h + 1}), \quad h = \overline{0, K_h}, \quad (14)$$

где  $v = \lambda_h / \mu_f$ .

Во втором случае вероятности состояний внутри всех расщепленных моделей с пространством состояний  $E_l$ ,  $r_l + 1 \leq l \leq K_L$ , совпадают с вероятностями состояний одномерного процесса размножения-гибели с переменными интенсивностями (см. рис. 1), т.е.

$$\rho_l(h) = \begin{cases} \left( \frac{\lambda_h + \lambda_l \alpha}{\mu_f} \right)^h \rho_l(0), & \text{если } 0 \leq h \leq r_h, \\ \left( 1 + \frac{\lambda_l}{\lambda_h} \alpha \right)^{r_h} v^h \rho_l(0), & \text{если } r_h + 1 \leq h \leq K_h, \end{cases} \quad (15)$$

где  $\rho_l(0)$  находится из условия нормировки, т.е.  $\sum_{h=0}^{K_h} \rho_l(h) = 1$ .

Используя соотношения (4), (5), (14) и (15), после определенных математических выкладок находим, что интенсивности переходов между укрупненными состояниями вычисляются следующим образом:

$$q(\langle l_1 \rangle, \langle l_2 \rangle) = \begin{cases} \lambda_l, & \text{если } 0 \leq l_1 < r_l, l_2 = l_1 + 1, \\ \tilde{\lambda}_l, & \text{если } r_l + 1 \leq l_1 < K_L, l_2 = l_1 + 1, \\ \mu_s, & \text{если } l_2 = l_1 - 1, \end{cases} \quad (16)$$

где  $\tilde{\lambda}_l = \lambda_l \left( (1 - \alpha) \sum_{h=0}^{r_l-1} \rho_l(h) + \sum_{h=r_l}^{K_l} \rho_l(h) \right)$ .

Таким образом, из (16) находим вероятности укрупненных состояний:

$$\pi(\langle l \rangle) = \begin{cases} \theta^l \pi(\langle 0 \rangle), & \text{если } 0 \leq l \leq r_l, \\ \left( \frac{\lambda_l}{\tilde{\lambda}_l} \right)^{r_l} \theta^l \pi(\langle 0 \rangle), & \text{если } r_l + 1 \leq l \leq K_l, \end{cases} \quad (17)$$

где  $\theta = \tilde{\lambda}_l / \mu_s$ , и вероятность  $\pi(\langle 0 \rangle)$  находится из условия нормировки, т.е.  $\sum_{l=0}^{K_l} \pi(\langle l \rangle) = 1$ .

С учетом соотношений (14)–(17) из (13) определяются приближенные значения вероятностей состояний исходной 2D МС, и далее после определенных математических преобразований находятся следующие явные формулы для вычисления характеристик (6)–(10) системы с отдельными очередями:

$$PB_H \approx \rho_0(K_h) \sum_{l=0}^{r_l} \pi(<l>) + \rho_{r_l+1} \sum_{l=r_l+1}^{K_l} \pi(<l>); \quad (18)$$

$$PB_L \approx \pi(<K_l>) \left( (1-\alpha) \sum_{h=0}^{r_h-1} \rho_{K_l}(h) + \sum_{h=r_h}^{K_h} \rho_{K_l}(h) \right); \quad (19)$$

$$RJ_{LH} \approx \lambda_l \alpha \left( \sum_{h=0}^{r_h-1} \rho_{K_l}(h) \right) \cdot \left( \sum_{l=r_l+1}^{K_l} \pi(<l>) \right); \quad (20)$$

$$N_h \approx \sum_{h=1}^{K_h} h \sum_{l=0}^{K_l} \rho_l(h) \pi(<l>); \quad (21)$$

$$N_l \approx \sum_{l=1}^{K_l} l \pi(<l>). \quad (22)$$

**Замечание 1.** При выводе формул (18) и (20) существенным образом учитывается, что  $\rho_{l'}(h) = \rho_{l''}(h), 0 \leq l', l'' \leq r_l$  и  $\rho_{l'}(h) = \rho_{l''}(h), r_l + 1 \leq l', l'' \leq K_l$  для любого  $h = 0, 1, \dots, K_h$ .

Приближенные значения средних времен ожидания в очереди разнотипных заявок определяются из (11), (18), (19), (21) и (22).

Теперь рассмотрим систему с бесконечным размером буфера. В данной модели все допущения предыдущей модели остаются без изменений, однако здесь невозможны потери заявок. Это означает, что скачкообразные приоритеты определяются по формуле (1) и пространство состояний модели определяется аналогично (2). При этом здесь учитывается, что  $K_l = K_h = \infty$ . Элементы производящей матрицы полученной бесконечномерной 2D МС определяются из соотношений (4) и (5).

Существование стационарного режима устанавливается ниже. В отличие от модели с конечными буферами здесь не удастся использовать СУР для стационарных вероятностей состояний, поэтому следует разработать альтернативный метод. Использование метода двумерных производящих функций для данной модели сталкивается с известными техническими и методологическими трудностями, и потому этот подход также не является эффективным. Вместе с тем предложенный выше подход может быть использован и для данной модели. Поскольку он подробно изложен выше, то его применение описывается кратко.

Аналогично (12) рассматривается расщепление исходного пространства состояний и вычисляется стационарное распределение внутри классов  $E_l, l = 0, 1, 2, \dots$

В случае  $0 \leq l \leq r_l$  вероятности состояний внутри всех расщепленных моделей с пространством состояний  $E_l$  существуют, если выполняется условие  $\nu < 1$ . Если это условие выполняется, то искомые величины совпадают с вероятностями состояний классической модели одноканальной СМО с ограниченным буфером  $M(\lambda_h) / M(\mu_f) / 1 / \infty$ , т.е.

$$\rho_l(h) = (1-\nu)\nu^h, \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Если  $\nu < 1$ , то и в случае  $l > r_l$  существуют стационарные вероятности состояний внутри всех расщепленных моделей с пространством состояний  $E_l$ , при этом эти величины вычисляются следующим образом:

$$\rho_l(h) = \begin{cases} \left( \frac{\lambda_h + \lambda_l \alpha}{\mu_f} \right)^h \rho_l(0), & \text{если } 0 \leq h \leq r_h, \\ \left( 1 + \frac{\lambda_l}{\lambda_h} \alpha \right)^{r_h} \nu^h \rho_l(0), & \text{если } h > r_h, \end{cases} \quad (24)$$

где  $\rho_l(0)$  находится из условия нормировки, т.е.

$$\rho_l(0) = \left( \sum_{h=0}^{r_h} \left( \frac{\lambda_h + \lambda_l \alpha}{\mu_f} \right)^h + \left( 1 + \frac{\lambda_l}{\lambda_h} \alpha \right)^{r_h} \frac{v^{r_h}}{1-v} \right)^{-1}.$$

Используя соотношения (4), (5), (23) и (24) находим, что в данной модели интенсивности переходов между укрупненными состояниями вычисляются по формуле (16), где указанный там параметр  $\tilde{\lambda}_l, l > r_l$ , здесь определяется как

$$\tilde{\lambda}_l = \lambda_l \left( 1 - \alpha \sum_{h=0}^{r_h-1} \rho_l(h) \right).$$

Следовательно, стационарные вероятности укрупненных состояний существуют, если выполняется условие  $\gamma < 1$ , где  $\gamma = \tilde{\lambda}_l / \mu_s$ . Если последнее условие выполняется, то вероятности укрупненных состояний вычисляются аналогично формуле (17), где во второй строке условие  $r_l + 1 \leq l \leq K_l$  заменяется условием  $l > r_l$ . Кроме того, здесь  $\pi(<0>)$  определяется так:

$$\pi(<0>) = \left( \sum_{l=0}^{r_l} \gamma^l + \left( \frac{\lambda_l}{\tilde{\lambda}_l} \right)^{r_h} \frac{\gamma^{r_l}}{1-\gamma} \right)^{-1}.$$

Объединяя условия  $v < 1$  и  $\gamma < 1$ , получаем, что условием существования стационарного режима данной системы является следующее соотношение:

$$\max \{v, \gamma\} < 1. \quad (25)$$

Если выполняется условие (25), то приближенные значения характеристик системы с бесконечным буфером находятся из следующих формул:

$$RJ_{LH} \approx \lambda_l \alpha \left( \sum_{h=0}^{r_h-1} \rho_{r_l+1}(h) \right) \cdot \left( 1 - \sum_{l=0}^{r_l} \pi(<l>) \right); \quad (26)$$

$$N_h \approx \sum_{h=1}^{\infty} h \left( \rho_0(h) \sum_{l=0}^{r_l} \pi(<l>) + \rho_{r_l+1}(h) \left( 1 - \sum_{l=0}^{r_l} \pi(<l>) \right) \right); \quad (27)$$

$$N_l \approx \sum_{l=1}^{\infty} l \pi(<l>) = \pi(<0>) \left( \sum_{l=0}^{r_l} l \left( \frac{\lambda_l}{\mu_s} \right)^l + \frac{\gamma^{r_l+1} (1 + r_l (1-\gamma))}{(1-\gamma)^2} \right). \quad (28)$$

Приближенные значения средних времен ожидания в очереди разнотипных заявок определяются из классической формулы Литтла с использованием (27) и (28).

Отметим, что в формулу (27) входит бесконечный ряд, и, к сожалению, не удастся найти явную формулу для вычисления его суммы. Однако эту сумму можно вычислить приближенно. Для этого покажем, что ряд сходится. Действительно, из (27) заключаем, что

$$N_h \leq \sum_{h=1}^{\infty} h \max \{ \rho_0(h), \rho_{r_l+1}(h) \}.$$

Отсюда следует, что если  $\max \{ \rho_0(h), \rho_{r_l+1}(h) \} = \rho_0(h)$ , то мажорантный ряд  $\sum_{h=1}^{\infty} h \rho_0(h)$  сходится, так как  $\sum_{h=1}^{\infty} h \rho_0(h) = v / (1-v)$ ;

Если  $\max \{ \rho_0(h), \rho_{r_l+1}(h) \} = \rho_{r_l+1}(h)$ , то мажорантный ряд  $\sum_{h=1}^{\infty} h \rho_{r_l+1}(h)$  также сходится, так как

$$\sum_{h=1}^{\infty} h \rho_{r_l+1}(h) = \rho_{r_l+1}(0) \left( \sum_{h=0}^{r_h} \left( \frac{\lambda_h + \lambda_l \alpha}{\mu_f} \right)^h + \left( 1 + \frac{\lambda_l}{\lambda_h} \alpha \right)^{r_h} \frac{v^{r_h} (1 + r_h (1-v))}{(1-v)^2} \right).$$

Иными словами, ряд в правой части формулы (27) всегда сходится, так как соответствующие мажорантные ряды сходятся. Потому для ее суммы можно использовать метод отсечения хвоста ряда, т.е. верхнюю границу суммы можно заменить достаточно большой (конечной) величиной, далее ее нужно постепенно увеличивать, и эту процедуру следует продолжать до тех пор, пока значения соответствующей суммы практически перестают изменяться.

### 3. Численные результаты

Основной целью проводимых здесь численных экспериментов является изучение зависимостей характеристик системы от значений вводимых параметров скачкообразных приоритетов  $r_h$  и  $r_l$ , а также решение задачи нахождения оптимальных значений этих параметров относительно выбранного критерия качества работы системы (из-за ограниченности объема работы результаты, которые показывают высокую точность разработанных приближенных формул, здесь не приводятся. Отметим, что аналогичные показатели соответствуют результатам, полученным в работах [6–11]).

Сначала рассмотрим результаты для модели с конечными очередями. На рис. 2–5 показаны зависимости характеристик системы от параметра  $r_l$  при фиксированных значениях параметра  $r_h$ , где символ «x» соответствует случаю  $r_h = 5$ , а символ «◇» –  $r_h = 10$ . Исходные параметры системы выбирались следующими:

$$\lambda_h = 30, \lambda_l = 15, \mu_f = 35, \mu_s = 10, \alpha = 0,5, K_h = 20, K_l = 35.$$

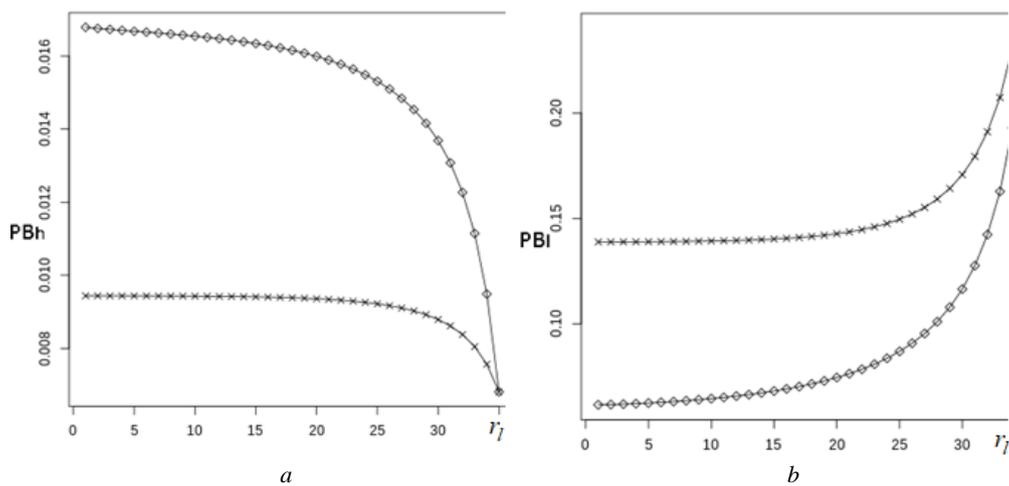


Рис. 2. Зависимость вероятности потери  $h$ -заявок (а) и  $l$ -заявок (б) от параметра  $r_l$  в модели с конечными буферами  
Fig. 2. Dependence of the probability of losing  $h$ -orders (a) and  $l$ -orders (b) on the parameter  $r_l$  in the model with finite buffers

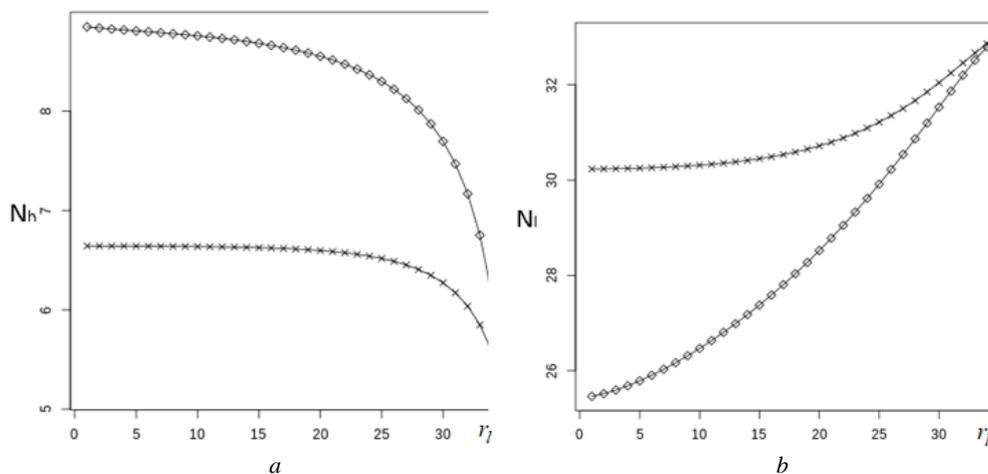


Рис. 3. Зависимость среднего числа  $h$ -заявок (а) и  $l$ -заявок (б) от параметра  $r_l$  в модели с конечными буферами  
Fig. 3. Dependence of the average number of  $h$ -requests (a) and  $l$ -requests (b) on the parameter  $r_l$  in the model with finite buffers

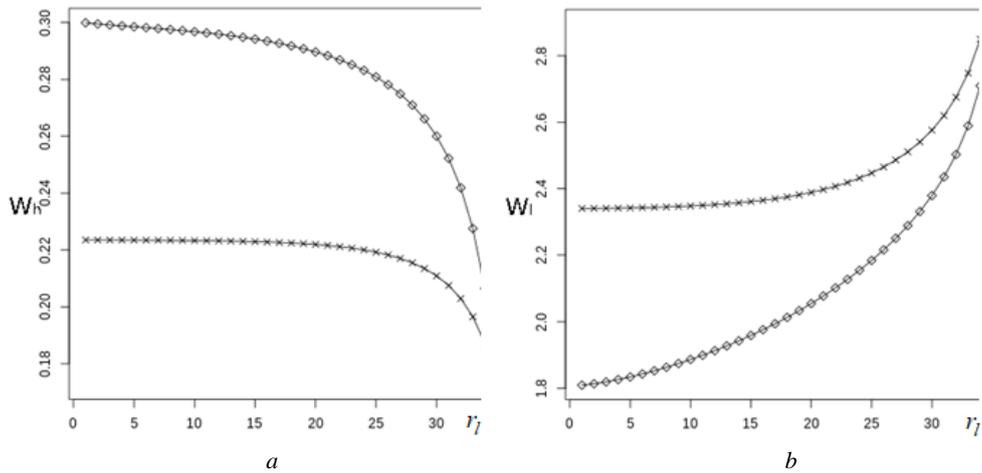


Рис. 4. Зависимость среднего времени ожидания в очереди  $h$ -заявок (а) и  $l$ -заявок (б) от параметра  $r_l$  в модели с конечными буферами

Fig. 4. Dependence of the average waiting time in the queue of  $h$ -customers (a) and  $l$ -customers (b) on the parameter  $r_l$  in the model with finite buffers

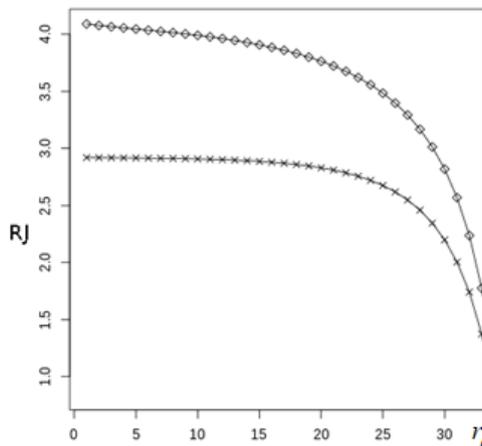


Рис. 5. Зависимость средней интенсивности скачков  $l$ -заявок в  $h$ -буфер от параметра  $r_l$  в модели с конечными буферами

Fig. 5. Dependence of the average intensity of jumps of  $l$ -orders into the  $h$ -buffer on the parameter  $r_l$  in the model with finite buffers

Видно, что функция  $PB_h$  является невозрастающей, при этом ее значения растут с ростом значений параметра  $r_h$ . (см. рис. 2, а) Этого следовало ожидать, так как с ростом значений параметра  $r_l$   $l$ -заявки реже переходят в  $h$ -буфер, и тем самым увеличиваются шансы  $h$ -заявок для доступа в свой буфер. Также ожидаемым является тот факт, что с ростом значений параметра  $r_h$  вероятность потери  $h$ -заявок растет, так как с ростом указанного параметра растут шансы поступления  $l$ -заявок в  $h$ -буфер, и тем самым уменьшаются шансы  $h$ -заявок для доступа в свой буфер. Обратная картина наблюдается для функции  $PB_l$ , т.е. эта функция является неубывающей, при этом ее значения уменьшаются с ростом значений параметра  $r_h$  (см. рис. 2, б). Такое поведение этой функции также является логичным, так как с ростом значений параметра  $r_l$  уменьшаются шансы заявок данного типа для доступа в  $h$ -буфер, и тем самым уменьшаются их шансы для доступа в свой буфер. Заметим, что с ростом значений параметра  $r_h$  вероятность потери  $l$ -заявок уменьшается, так как с ростом указанного параметра растут шансы  $l$ -заявок для доступа в  $h$ -буфер, и тем самым увеличиваются шансы заявок данного типа для доступа в систему (либо в свой буфер, либо в  $h$ -буфер).

Функция  $N_h$  является невозрастающей (см. рис. 3, а), так как с ростом параметра  $r_l$  уменьшается интенсивность перехода  $l$ -заявок в  $h$ -буфер, и тем самым уменьшается среднее число  $h$ -заявок в си-

стеме. При этом значения этой функции растут с ростом параметра  $r_h$ , так как с ростом этого параметра растет интенсивность перехода  $l$ -заявок в  $h$ -буфер, и потому растет среднее число  $h$ -заявок в системе. Здесь, как и выше, обратная картина наблюдается для функции  $N_l$ , так как с ростом параметра  $r_l$  уменьшается интенсивность перехода  $l$ -заявок в  $h$ -буфер, и тем самым увеличивается среднее число  $l$ -заявок в системе. При этом значения этой функции уменьшаются с ростом параметра  $r_h$ , так как с ростом этого параметра растет интенсивность перехода  $l$ -заявок в  $h$ -буфер, и потому уменьшается среднее число  $l$ -заявок в системе.

Функция  $W_h$  является невозрастающей, так как с ростом параметра  $r_l$  уменьшается число  $h$ -заявок в системе, при этом уменьшается вероятность их потери (см. формулы (11)); ее значения растут с ростом параметра  $r_h$ , так как с ростом этого параметра растут шансы  $l$ -заявок на переход в  $h$ -буфер, и тем самым увеличивается время ожидания в очереди  $h$ -заявок (см. рис. 4, а). Поскольку с ростом параметра  $r_l$  уменьшаются шансы  $l$ -заявок для перехода в  $h$ -буфер, то функция  $W_h$  является неубывающей, ее значения уменьшаются с ростом параметра  $r_h$ , так как в связи с ростом интенсивности переходов  $l$ -заявок в  $h$ -буфер уменьшается время ожидания в очереди  $l$ -заявок (см. рис. 4, б).

Функция  $RJ_{lh}$  является невозрастающей, так как с ростом параметра  $r_l$  уменьшается интенсивность перехода  $l$ -заявок в  $h$ -буфер, при этом ее значения растут с ростом параметра  $r_h$ , так как с ростом этого параметра растут шансы  $l$ -заявок на переход в  $h$ -буфер (см. рис. 5).

Рассмотрим результаты для модели с бесконечной очередью. Соответствующие графики показаны на рис. 6. Здесь исходные параметры системы выбираются так:

$$\lambda_h = 45, \lambda_l = 15, \mu_f = 60, \mu_s = 15, \alpha = 0,5.$$

Как и выше, представлены зависимости характеристик системы от параметра  $r_l$  при фиксированных значениях параметра  $r_h$ ; символ «x» соответствует случаю  $r_h = 5$ , а символ «o» –  $r_h = 10$ ; параметр  $r_l$  принимает значения в интервале [1, 35].

Как и в случае модели с конечными сепаратными буферами, здесь также функция  $N_h$  является невозрастающей (см. рис. 6, а), а функция  $N_l$  строго возрастает относительно изменения параметра  $r_l$  (см. рис. 6, б). При этом с ростом параметра  $r_l$  значения функции  $N_h$  при различных значениях параметра  $r_h$  почти совпадают, а значения функции  $N_l$  при различных значениях параметра  $r_h$  существенно отличаются друг от друга при больших значениях параметра  $r_l$ . В данной модели функция  $RJ_{lh}$  также является невозрастающей, так как с ростом параметра  $r_l$  уменьшается интенсивность изменения приоритета  $l$ -заявок, при этом ее значения растут с ростом параметра  $r_h$ , так как с ростом этого параметра растут шансы изменения приоритета  $l$ -заявок; здесь с ростом параметра  $r_l$  значения функции  $RJ$  при различных значениях параметра  $r_h$  почти совпадают (см. рис. 6, в). Характеры изменения указанных функций объясняются аналогично модели с конечными сепаратными буферами.

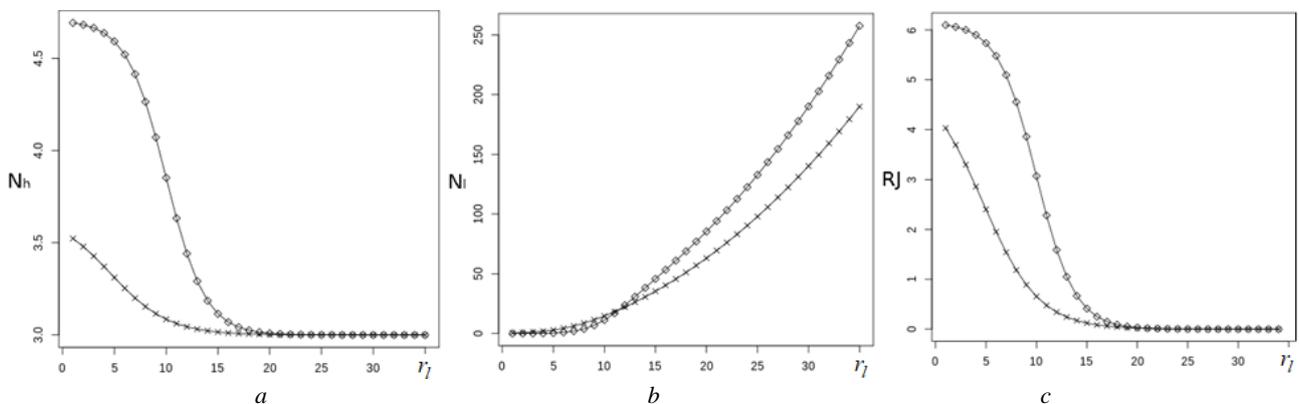


Рис. 6. Зависимость среднее число  $h$ -заявок (а),  $l$ -заявок (б) и средней интенсивности скачков  $l$ -заявок в  $h$ -буфер (с) от параметра  $r_l$  в модели с бесконечным буфером

Fig. 6. Dependence of the average number of  $h$ -customers (a),  $l$ -customers (b) and the average intensity of jumps of  $l$ -customers into the  $h$ -buffer (c) on the parameter  $r_l$  in the model with an infinite buffer

В конце данного раздела отметим, что все показатели качества обслуживания системы имеют монотонный характер относительно параметров введенных скачкообразных приоритетов. Эти факты позволяют нам сформулировать и решить различные задачи по их улучшению. Так, например, можно найти такие значения указанных параметров, чтобы минимизировать вероятности потери заявок определенного типа (или взвешенной суммы вероятностей потери разнотипных заявок) при заданных ограничениях на другие показатели.

Для конкретности изложения здесь рассматривается задача минимизации суммарных штрафов (Total Cost, TC), связанных с функционированием системы с сепаратными конечными буферами. Предположим, что размеры буферов, а также нагрузочные параметры системы являются фиксированными величинами. Параметрами оптимизации являются пороговые параметры  $r_h$  и  $r_l$ .

В стационарном режиме суммарные штрафы определяются следующим образом:

$$TC(r_h, r_l) = c_{JP}RJ(r_h, r_l) + \lambda_h c_{lh}PB_h(r_h, r_l) + \lambda_l c_{ll}PB_l(r_h, r_l) + c_{wh}N_h(r_h, r_l) + c_{wl}N_l(r_h, r_l), \quad (29)$$

где  $c_{JP}$  – цена одного скачка из  $l$ -очереди в  $h$ -очередь;  $c_{lh}$  ( $c_{ll}$ ) – штрафы за потери одного  $h$ -запроса ( $l$ -запроса);  $c_{wh}$  ( $c_{wl}$ ) – цена единицы времени пребывания в системе одного  $h$ -запроса ( $l$ -запроса).

Следовательно, задача оптимизации записывается так:

$$(r_h^*, r_l^*) = \arg \min_{(r_h, r_l)} TC(r_h, r_l). \quad (30)$$

Поскольку множество допустимых решений является дискретным и конечным, то при любых значениях входных параметров задача (30) имеет решение.

В таблице приводятся результаты решения задачи (30) для моделей обеих типов со следующими исходными данными:  $\lambda_h = 25, \lambda_l = 35, \mu_h = 30, \mu_l = 20, \alpha = 0,7$ .

Коэффициенты в выражении функционала (29) выбирались так же, как в работе [6]:

$$c_{JP} = 0,5, c_{lh} = 3, c_{ll} = 2, c_{wh} = 0,7, c_{wl} = 0,2.$$

Решения задачи (30);  $TC^*$  – минимальное значение TC

$(K_h, K_l)$	$(r_h^*, r_l^*)$	$TC^*$	$PB_h$	$PB_l$	$N_h$	$N_l$	$W_h$	$W_l$	RJ
(10, 10)	(9, 10)	18,159	0,031	0,149	3,289	8,690	0,127	0,211	10,472
(10, 15)	(9, 15)	18,152	0,031	0,149	3,289	13,669	0,127	0,332	10,451
(10, 20)	(9, 20)	18,175	0,031	0,149	3,289	18,667	0,127	0,454	10,449
(15, 10)	(12, 10)	15,403	0,011	0,147	4,085	8,690	0,162	0,211	8,159
(15, 15)	(12, 15)	15,399	0,011	0,147	4,085	13,669	0,162	0,332	8,143
(15, 20)	(12, 20)	15,422	0,011	0,147	4,085	18,667	0,162	0,454	8,142
(20, 10)	(15, 10)	13,976	0,004	0,142	4,533	8,690	0,181	0,213	7,051
(20, 15)	(15, 15)	13,973	0,004	0,142	4,533	13,669	0,181	0,335	7,037
(20, 20)	(15, 20)	13,996	0,004	0,142	4,533	18,667	0,181	0,458	7,036

Анализ результатов оптимального решения задачи (30) позволяет сделать следующие выводы (эти выводы относятся исключительно к выбранным ранее исходным данным).

– Значение параметра  $r_l^* = K_l$ , при этом даже двукратное увеличение объема буфера для  $l$ -заявок не влияет ни на оптимальное значение параметра  $r_h^*$ , ни на оптимальное значение суммарных штрафов; вместе с тем увеличение объема буфера для  $h$ -заявок приводит к существенному уменьшению (более 20%) оптимального значения суммарных штрафов.

– Значение вероятности потери  $l$ -заявок почти не зависит от объемов буферов, однако значения вероятности потери  $h$ -заявок существенным образом уменьшаются с ростом объема буфера для таких заявок.

– Среднее число  $h$ -заявок меньше 30% от всего объема  $h$ -буфера, однако соответствующий показатель для  $l$ -заявок составляет более 80%.

– Среднее время ожидания в очереди  $h$ -заявок почти не зависит от объема буфера для  $l$ -заявок, однако соответствующий показатель для  $l$ -заявок зависит от размеров обоих буферов. При этом, как

ожидалось, с ростом объема  $l$ -буфера этот показатель растет существенным образом, т.е. двукратное увеличение  $l$ -буфера приводит к почти двукратному увеличению этого показателя.

– Значения функции  $RJ$  почти не зависят от объема буфера для  $l$ -заявок. Этот факт объясняется тем, что в оптимальном решении  $r_l^* = K_l$ , т.е. скачки  $l$ -заявок в  $h$ -буфер происходят лишь тогда, когда  $l$ -буфер является полностью заполненным.

### Заключение

Предложены марковские модели систем обслуживания с гетерогенными серверами и конечными отдельными очередями разнотипных заявок, а также с общим буфером бесконечного размера при наличии зависящих от состояния системы скачкообразных приоритетов. Определена новая схема назначения рандомизированных скачкообразных приоритетов, которые зависят от текущего состояния системы. Переход заявки низкого приоритета к очереди заявок высокого приоритета осуществляется согласно схеме Бернулли лишь тогда, когда в момент поступления заявки низкого приоритета число заявок данного приоритета выше определенной величины и при этом число заявок высокого приоритета меньше заданной величины. Показано, что математическими моделями изучаемых систем являются двумерные цепи Маркова, и предложены алгоритмы построения производящих матриц этих цепей. Разработаны точный и приближенный методы расчета стационарных вероятностей состояний изучаемых цепей и получены формулы для вычисления характеристик системы. Решена задача нахождения оптимальных значений параметров введенных скачкообразных приоритетов для минимизации суммарных штрафов системы.

### Список источников

1. Efrosinin D. Controlled Queuing Systems with Heterogeneous Servers. Saarbrucken : VDM Verlag, 2008. 236 p.
2. Fakinos D. The M/G/k Blocking System with Heterogeneous Servers // J. Oper. Res. 1980. V. 31. P. 919–927.
3. Fakinos D. The Generalized M/G/k Blocking System with Heterogeneous Servers // J. Oper. Res. 1982. V. 33. P. 801–809.
4. Nath G., Enns E. Optimal Service Rates in the Multiserver Loss System with Heterogeneous Servers // J. Appl. Prob. 1981. V. 18. P. 776–781.
5. Alpaslan F., Shahbazov A. An Analysis and Optimization of Stochastic Service with Heterogeneous Channels and Poisson Arrivals // Pure and Appl. Math. Sci. 1996. V. 43. P. 15–20.
6. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Mekhbaliyeva E.V. Analysis of models of systems with heterogeneous servers // Cyber. Syst. Anal. 2020. V. 56, is. 1. P. 89–99.
7. Меликов А.З., Мехбалиева Э.В. Численное исследование системы с гетерогенными серверами и рандомизированной N-политикой // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. № 53. С. 25–37.
8. Melikov A.Z., Mekhbaliyeva E.V. Analysis and optimization of system with heterogeneous servers and jump priorities // J. Comp. Syst. Sci. Int. 2019. V. 58, is. 5. P. 718–735.
9. Maertens T., Walraevens J., Bruneel H. On Priority Queues with Priority Jumps // Perform. Eval. 2006. V. 63, is. 12. P. 1235–1252.
10. Maertens T., Walraevens J., Bruneel H. A Modified HOL Priority Scheduling Discipline: Performance Analysis // Eur. J. Oper. Res. 2007. V. 180, is. 3. P. 1168–1185.
11. Maertens T., Walraevens J., Bruneel H. Performance Comparison of Several Priority Schemes with Priority Jumps // Ann. Oper. Res. 2008. V. 162. P. 109–125.

### References

1. Efrosinin, D. (2008) *Controlled Queuing Systems with Heterogeneous Servers*. Saarbrucken: VDM Verlag.
2. Fakinos, D. (1980) The M/G/k blocking system with heterogeneous servers. *Journal of Operational Research*. 31. pp. 919–927. DOI: 10.1057/jors.1980.167
3. Fakinos, D. (1982) The Generalized M/G/k Blocking System with Heterogeneous Servers. *Journal of Operational Research*. 33. pp. 801–809. DOI: 10.2307/2581581
4. Nath, G. & Enns, E. (1981) Optimal Service Rates in the Multiserver Loss System with Heterogeneous Servers. *Journal of Applied Probability*. 18. pp. 776–781. DOI: 10.2307/3213336
5. Alpaslan, F. & Shahbazov, A. (1996) An Analysis and Optimization of Stochastic Service with Heterogeneous Channels and Poisson Arrivals. *Pure and Applied Math. Sci.* 43. pp. 15–20.

6. Melikov, A.Z., Ponomarenko, L.A. & Mekhbaliyeva, E.V. (2020) Analysis of models of systems with heterogeneous servers. *Cyber. Syst. Anal.* 56(1). pp. 89–99.
7. Melikov, A.Z. & Mekhbaliyeva, E.V. (2020) Numerical investigation of queue with heterogeneous servers and randomized N-policy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 53. pp. 25–37. DOI: 10.17223/19988605/53/3
8. Melikov, A.Z. & Mekhbaliyeva, E.V. (2019) Analysis and optimization of system with heterogeneous servers and jump priorities. *Journal of Computer and System Sciences International.* 58(5). pp. 718–735. DOI: 10.1134/S1064230719050113
9. Maertens, T., Walraevens, J. & Bruneel, H. (2006) On Priority Queues with Priority Jumps. *Perform. Eval.* 63(12). pp. 1235–1252.
10. Maertens, T., Walraevens, J. & Bruneel, H. (2007) A Modified HOL Priority Scheduling Discipline: Performance Analysis. *European Journal of Operational Research.* 180(3). pp. 1168–1185. DOI: 10.1016/j.ejor.2006.05.004
11. Maertens, T., Walraevens, J. & Bruneel, H. (2008) Performance Comparison of Several Priority Schemes with Priority Jumps. *Annals of Operations Research.* 162. pp. 109–125. DOI: 10.1007/s10479-008-0314-5

**Информация об авторах:**

**Меликов Агаси Зарбали оглы** – действительный член академии наук Азербайджана, профессор, доктор технических наук, Институт систем управления Национальной академии наук Азербайджана (Баку, Азербайджан). E-mail: agassi.melikov@gmail.com  
**Мехбалиева Эмира Видади кызы** – кандидат технических наук, докторант Сумгаитского государственного университета (Сумгаит, Азербайджан). E-mail: esmira.mehbaliyeva@mail.ru

**Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

**Information about the authors:**

**Melikov Agassi** – Associate member of National academy of Sciences of Azerbaijan, Professor, Head of Department of Teletraffic Theory, Institute of Control Systems (Baku, Azerbaijan). E-mail: agassi.melikov@gmail.com  
**Mekhbalieva Esmira** – Sumgayit State University (Sumgayit, Azerbaijan). E-mail: esmira.mehbaliyeva@mail.ru

**Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.**

*Поступила в редакцию 03.08.2021; принята к публикации 28.02.2022*

*Received 03.08.2021; accepted for publication 28.02.2022*

## ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

## INFORMATICS AND PROGRAMMING

Original article

doi: 10.17223/19988605/58/9

**Automated detection of COVID-19 coronavirus infection based on analysis of chest X-ray images by deep learning methods****Evgenii Yu. Shchetinin<sup>1</sup>, Leonid A. Sevastyanov<sup>2</sup>**<sup>1</sup> *Financial University under the Government of Russian Federation, Moscow, Russian Federation, riviera-molto@mail.ru*<sup>2</sup> *Peoples Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation, sevast@sci.pfu.edu.ru*

**Abstract.** Early detection of COVID-19 infected patients is essential to ensure adequate treatment and reduce the load on the healthcare systems. One of effective methods for detecting COVID-19 is deep learning models of chest X-ray images. They can detect the changes caused by COVID-19 even in asymptomatic patients, so they have great potential as auxiliary systems for diagnostics or screening tools.

This paper proposed a methodology consisting of the stage of pre-processing of X-ray images, augmentation and classification using deep convolutional neural networks Xception, InceptionResNetV2, MobileNetV2, DenseNet121, ResNet50 and VGG16, previously trained on the ImageNet dataset. Next, they fine-tuned and trained on prepared data set of chest X-rays images. The results of computer experiments showed that the VGG16 model with fine tuning of the parameters demonstrated the best performance in the classification of COVID-19 with accuracy 99,09%, recall=98,318%, precision=99,08% and f1\_score=98,78. This signifies the performance of proposed fine-tuned deep learning models for COVID-19 detection on chest X-ray images.

**Keywords:** COVID-19; chest X-rays; deep learning; convolutional neural networks

**Acknowledgments:**

This paper has been supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program.

**For citation:** Shchetinin, Eu.Yu., Sevastyanov, L.A. (2022) Automated detection of COVID-19 coronavirus infection based on analysis of chest X-ray images by deep learning methods. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 58. pp. 97–105. doi: 10.17223/19988605/58/9

Научная статья

УДК 519-7

doi: 10.17223/19988605/58/9

**Компьютерная система обнаружения COVID-19 по рентгеновским снимкам легких методами глубокого обучения****Е.Ю. Щетинин<sup>1</sup>, Л.А. Севастьянов<sup>2</sup>**<sup>1</sup> *Финансовый университет при Правительстве России (Москва, Россия), riviera-molto@mail.ru*<sup>2</sup> *Российский университет дружбы народов (Москва, Россия), sevast@sci.pfu.edu.ru*

**Аннотация.** Одним из эффективных методов обнаружения коронавирусной инфекции COVID-19 является рентгенография легких. В работе предложена методика компьютерного анализа рентгеновских снимков с использованием глубоких сверточных нейронных сетей Xception, MobileNetV2, DenseNet121, ResNet50, InceptionResNetV2 и VGG16, предварительно обученных на наборе данных ImageNet. Компьютерные экспе-

рименты показали, что модель VGG16 обладает наилучшей производительностью при классификации COVID-19 с показателями точности (accuracy) 99,09%, чувствительности (recall) 98,318%.

**Ключевые слова:** COVID-19; рентгеновские снимки; глубокое обучение; сверточные нейронные сети

**Благодарности:**

Работа выполнена при поддержке программы стратегического академического лидерства Российского университета дружбы народов.

**Для цитирования:** Щетинин Е.Ю., Севастьянов Л.А. Компьютерная система обнаружения COVID-19 по рентгеновским снимкам легких методами глубокого обучения // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 58. С. 97–105. doi: 10.17223/19988605/58/9

The 2019 coronavirus (COVID-19) pandemic, caused by the Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2 (SARS-CoV-2), continues to have a devastating global impact with far-reaching social and economic consequences. The COVID-19 pandemic has placed a huge burden on healthcare systems around the world struggling to provide care and treatment for patients due to limited numbers of healthcare workers and clinical resources such as ventilators, oxygen, personal protective equipment and other medical supplies [1, 2]. Due to the exponential increase in the number of covid 19 cases, there is a high demand for its quick and accurate testing. The standard for testing is reverse transcription polymerase chain reaction (RT-PCR). Other testing methods include antigen testing for coronavirus disease. But as a rule, patients experiencing symptoms of coronavirus disease are asked to undergo a chest CT scan or X-ray scans.

Chest X-ray has several important advantages as a screening tool for COVID-19 diagnostics. First, chest X-ray equipment is one of the most affordable medical imaging techniques in healthcare settings. Chest X-ray equipment is relatively quick to decontaminate compared to other medical imaging equipment, and the widespread availability of portable systems allows screening to be performed in isolated rooms, which greatly reduces the likelihood of infection transmission. Finally, chest X-ray is commonly used to assess respiratory complaints, which is one of the key symptoms of COVID-19 and can therefore be used in parallel with other tests. Finally, a chest X-ray can be used to assess the severity of a patient with a positive COVID-19, which cannot be done using PCR tests [3].

Despite the many benefits of chest X-ray for screening for COVID-19, one challenge is the limited number of expert radiologists needed to interpret the data, visualize it for screening, and assess disease severity. Thus, the development and implementation of automated clinical decision support systems to assist radiographers to accelerate the interpretation of imaging data can significantly help the clinical process of COVID-19, improve the medical care of large numbers of patients and manage the course of the COVID-19 pandemic [4]. Artificial intelligence and deep learning are currently the most advanced methods of predicting results in almost all areas. Computer systems based on artificial intelligence demonstrate serious advances in the field of healthcare, and their use will significantly reduce the time for identifying patients infected with the COVID-19 virus [5, 6].

The main goal of this work is to develop effective deep learning models for detecting and classifying COVID-19 and pneumonia based on the analysis of chest X-rays. We developed four models based on pre-trained deep neural networks VGG16 [7], DenseNet121, ResNet50 [8], Xception [9], InceptionResNetV2 and MobileNetV2. They were then trained and tested on the designed data set of chest X-rays from different public data sets. The results showed that the models proposed in the paper achieved the accuracy 99.09%, recall=98,318%, precision=99,08% and f1\_score=98,78, which are exceeds or comparable to the indicators in similar studies.

The main contribution of this paper to the research of the detection of COVID-19 using computer systems are the constructed deep learning models, as well as quantitative estimates of their performance for three classes of images from a designed set of X-ray chest images.

## **1. Development of computer models for automatic detection of COVID-19 cases based on chest X-ray images analysis**

Automated diagnosis of pneumonia, including those associated with COVID-19 infection, based on chest X-ray images, is a computer vision problem that has been proposed to be solved as an image

classification problem. Extensive research is currently underway to determine an accurate and reliable deep learning (DL) model for the detection and classification of COVID-19 disease. Researchers classify chest X-rays and CT images of patients using various deep learning models. As a rule, in these works devoted to similar studies, the problem of binary classification for the classes {COVID-19, No\_COVID-19} is solved and rather high values of the COVID-19 detection accuracy metrics are obtained. Authors of [10] proposed different convolutional network (CNN) models that used as binary classifiers and reached 99% accuracy. Authors of [11] classified normal and COVID-19 X-ray images using deep CNN pretrained models ResNet50, ResNet18, ResNet101, VGG19 and VGG16. They found 92.6% accuracy for ResNet50 model. Ozturk et al. [12] proposed the DarkNet model for binary classes, it has 98.08% accuracy, and for multi-class cases, it has 87% accuracy. In paper [13] authors proposed a convolutional neural network (CNN) model to classify Normal, Pneumonia and COVID-19 classes with accuracy of 92.4% [13]. Similarly, other researchers also put efforts to detect COVID-19 cases from chest X-ray images using various deep models [14–19].

However, in our opinion, the task of detecting pneumonia and its distinguishing from COVID-19 is also significant in clinical practice, since it is solved together with the detection of COVID-19 and has similar symptoms when these diseases are detected, but different methods of their treatment. In our work, we conducted research on the development of deep learning models aimed at classifying three classes of chest X-rays containing signs of COVID-19 disease, pneumonia, as well as the lungs of healthy people. For this, the ResNet50, MobileNetv2, VGG16, Xception, InceptionResNetV2 and DenseNet121 basic models of deep neural networks were used, pre-trained on the ImageNet image set [20], and then tuned to the set of studied X-ray images. This approach is standard in the practice of training deep learning models, as it helps to speed up and simplify the development and training of models on other data.

First, we need to create a sequential model in the Keras deep learning library [21]. To build a classification model for X-ray images, we imported the weights of the base models from the ImageNet library and ‘frozen’ them, setting the value of the training parameter for each layer as ‘False’. Thus, the values of the parameters of the convolutional layers of the model are saved in the process of its training. The sizes of the input data for the initial layer of pretrained models can vary, so you need to change the `input_shape` parameter of the input layer to match the input sizes of the neural network (`IMG_SIZE = 224`, `IMG_SIZE = 224,3`). Next, Flatten layer, two Dense layers with activation functions ‘relu’ and ‘softmax’, respectively, separated by Dropout(0,2) and Batch\_Normalization layer were sequentially attached to the frozen layers of the model, which avoids overfitting. In addition, the output layer of the pretrained models needs to be changed, since it is configured to classify 1000 image classes, while we have three classes (‘COVID-19’ – 0, ‘Normal’ –1, ‘Pneumonia’ – 2). The model constructed in this way was trained with the ‘sparse\_categorical\_crossentropy’ loss function and accuracy, recall, f1-score, AUC metrics for several epochs (epochs = 20).

Then, in order to improve the performance metrics, the models have been fine-tuned as follows. First, the upper part of the convolutional blocks of the model is unfrozen, namely, the parameters of these layers are set as ‘True’, which are later to be updated during the retraining process. For example, the VGG16 model contains 13 convolutional blocks, of which we unfrozen the last three. Then we attached the Global Average Pooling\_2D, Batch Normalization and Dropout (0,2) layers to the model. Finally, the layers Dense(units = 512, activation = ‘relu’), Batch Normalization and Dropout (0,5), Dense (3, activation = ‘softmax’) were attached. The model was compiled using the ‘categorical\_crossentropy’ loss function and the Adam optimizer (lr = 0,0001). Next, the model was retrained and its performance metrics were calculated on X-ray images from the `train_set`. The fine tuning was carried out in the same way for the rest of the models.

## **2. Description of the data set of chest X-rays**

In our investigations we used chest X-rays images of COVID19 patients, healthy patients, patients with opaque lungs, and patients with viral pneumonia. We collected images from publicly available data [22, 23]. We combined all X-ray images into three classes: COVID-19 (3865 images), Normal (9850) and Pneumonia (1440), a total 15170 images. In addition, the images have been resized from 1024x1024 to 224x224

to reduce the computational costs of training the models. Then the data set was divided into training set (train\_set) with dimension (12124,1), on which the models training will be carried out and testing set (test\_set) with dimension (3031,1). The examples of X-ray images are shown on Fig. 1.

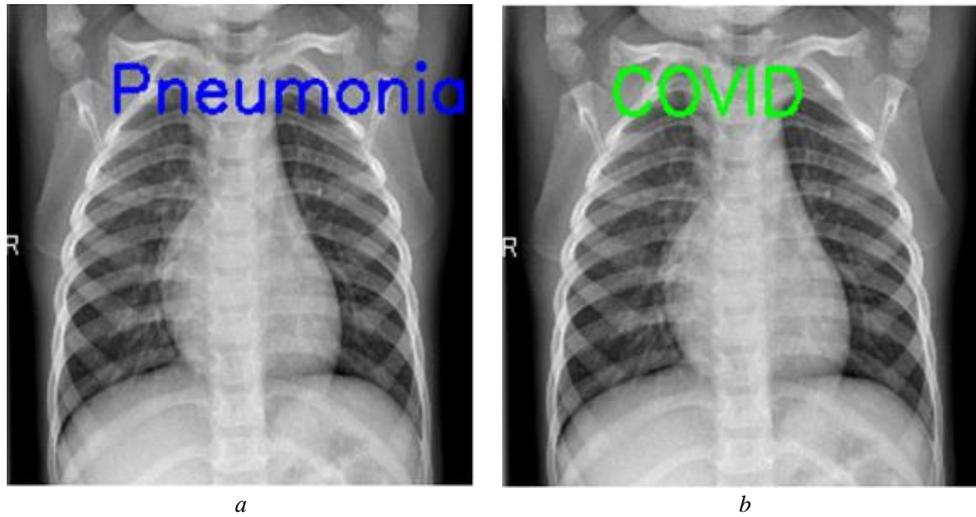


Fig. 1. Chest X-ray images from classes: (a) Pneumonia (b) COVID-19

### 3. Investigation of the performance of deep models in the problem of classification of chest X-rays

On the set of X-ray images described above, computer experiments were carried out to classify them for three classes, the performance of deep learning models VGG16, ResNet50, DenseNet121, Xception, InceptionResNetV2 and MobileNetv2 was evaluated and their accuracy, precision, recall and f1-score metrics were calculated. They are shown in Table 1. As follows from the results presented here, the VGG16 and Xception turned out to be the best among all proposed models. This choice was based on the analysis of the values of the accuracy and recall metrics for the classes COVID-19 and Pneumonia. This means that the priority in choice the best model is the value of its sensitivity and accuracy in detection of patients with COVID-19, as well as pneumonia. Recall metrics indicates how well the model is correctly detecting what it is supposed to detect. For our classes, it shows what percentage of patients that the model has detected as having COVID-19 or pneumonia are actually these ones.

$$recall = \frac{TP}{TP+FN'} \quad (1)$$

where  $TP$  are the true positive cases for a given class,  $FN'$  are the false negative cases for a given class (in particular, for the case of COVID-19 it is the number of patients with COVID-19, predicted by the model as not COVID-infected). Specificity is the proportion of predicted true negatives to the summation of predicted true negatives and false positives. The specificity is calculated as

$$specificity = \frac{TN}{TN+FP} \quad (2)$$

where  $TN$  is the number of the true negative cases (in particular, true number of patients with pneumonia and healthy lungs),  $FP$  are the false positive cases for a given class (in particular, the X-rays from other classes, falsely predicted by the model as X-rays with signs of COVID-19). Precision is the proportion of predicted true positive values to the total number of predicted true positive and false positive values. Precision can be calculated as

$$precision = \frac{TP}{TP+FP} \quad (3)$$

The accuracy is calculated as follows:

$$accuracy = \frac{TP+TN}{TP+TN+FP+FN'} \quad (4)$$

Metrics f1-score is calculated as follows:

$$f1\text{-score} = \frac{2 * specificity * sensitivity}{specificity + sensitivity} \tag{5}$$

To evaluate the performance of machine learning model, it is customary to use the confusion matrix. For Xception and VGG16 models, they are presented in Fig. 2 and Fig. 3. Signature ‘Actual’ denotes the true class of X-ray image to be predicted (Normal, Pneumonia, COVID-19). Signature ‘Predicted’ denotes the class of predicted images class. Diagonal cells in blue color represent true positive values (TP,%) and true negative values (TN,%). If percentages are indicated in the cells, they are considered to contain the values of the accuracy index for the corresponding class. The yellow cells of the matrix contain the percentage of images that are evaluated by the model as false positive (vertical elements, FP,%) and false negative (horizontal elements, FN,%) images. A higher recall value means a higher true positive value and a lower false negative value. However, a higher precision value will mean a higher true positive value and a lower false positive rate. Therefore, both false positive and false negative values should be as low as possible. But we are interested first in all in true number of detected COVID-19 and Pneumonia patients. So, we prefer to control recall and accuracy metrics for the best model selection.

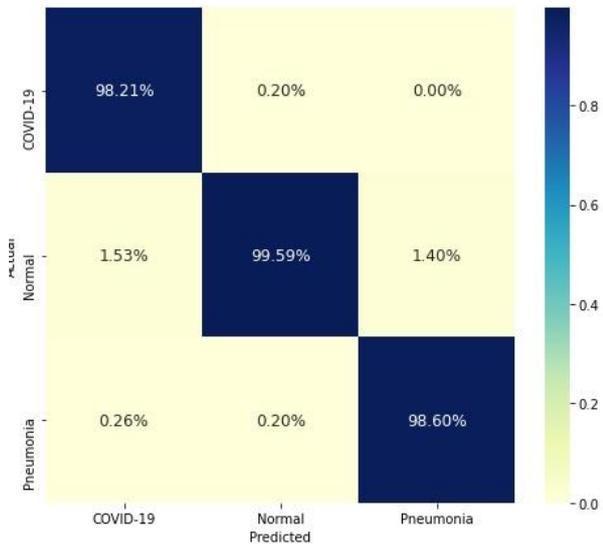


Fig. 2. The confusion matrix for the Xception model

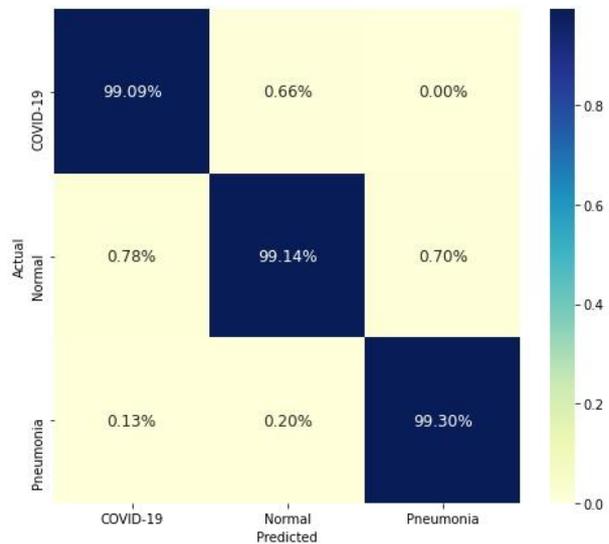


Fig. 3. The confusion matrix of the VGG16 model

From Table we can conclude that VGG16 model outperforms the Xception model in classification of images from the COVID-19, Pneumonia and Normal classes. The accuracy of classification of images from the COVID-19 class (accuracy) for the VGG16 model is 99,09%, for the Xception model is 98,21%. The accuracy score for VGG16 is 99,142%, while for Xception it equals 99,062%. The precision and recall metrics of Xception model are lower due to the greater error in classifying healthy patients as COVID-19-positive (1,53% in Xception versus 0,78% in VGG16) and as patients with pneumonia (1,41% in Xception versus 0,7% in VGG16). Also, necessary to note 100% accuracy in distinguishing COVID-19 from Pneumonia classes by these models. All this made it possible to establish VGG16 as the best model for classifying X-rays of the lungs and detecting COVID-19 diseases and pneumonia from them.

**Performance metrics of deep learning models for COVID-19 class**

Deep model	class_accuracy, %	precision, %	recall, %	f1-score, %	accuracy model, macro, %
DenseNet121	95,93	95,373	97,542	96,729	97,691
ResNet50	95,77	95,771	99,612	97,654	98,482
MobileNetV2	90,39	90,387	99,741	94,834	96,866
VGG16	99,09	99,081	98,318	98,78	99,142
Xception	98,21	98,212	99,483	98,843	99,062
InceptionResNetV2	96,13	96,135	99,741	97,905	98,251

Using the VGG16 model, a prediction of X-ray images from the test\_set belonging to the corresponding classes for was also performed. The result is shown in Fig. 4. Label ‘Actual’ denotes the true class of X-ray image to be predicted (Normal, Pneumonia, COVID-19). Label on image denotes images predicted class. In our prediction, 0,78% of healthy patients (class Normal) and 0,13% of patients with pneumonia (class Pneumonia) were mistakenly classified as patients with COVID-19; 0,7% of healthy patients were mistakenly recognized as patients with pneumonia, 0,66% of healthy patients were mistakenly recognized as patients with COVID-19 and 0,2% of images from class Normal were recognized as images from Pneumonia class.

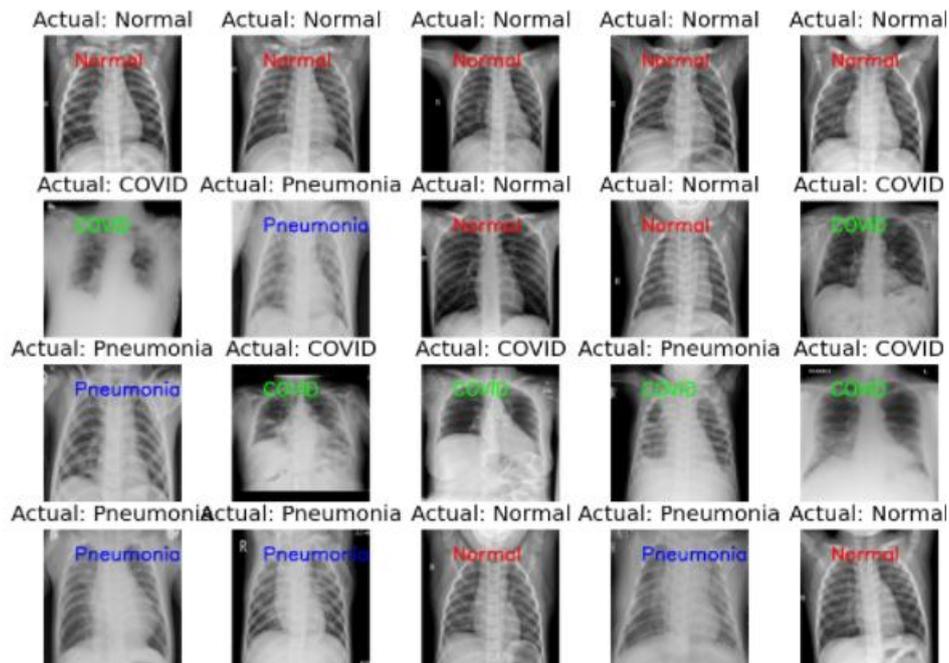


Fig. 4. Results of prediction of the class of chest images from test\_set

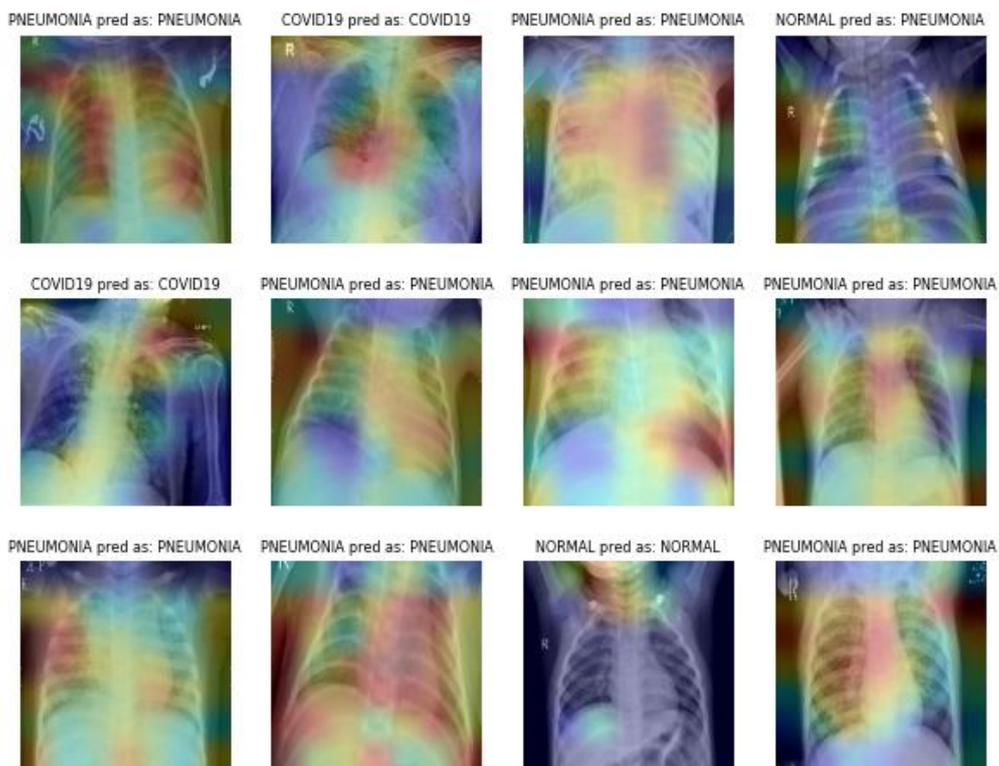


Fig. 5. The heatmap of predicted chest X-ray images from test\_set

Additionally, the gradient-based class activation mapping (Grad-CAM) [24] was used to represent the decision area on a heatmap. Figure 5 illustrates the heatmaps for three COVID-19 cases, confirming that the proposed method extracted correct features for detection of COVID-19, Pneumonia and Normal classes, and the model is mostly concentrated on the lung area. Radiologists might use these heatmaps to evaluate the chest area more accurately.

#### **4. Results discussion**

In this paper we proposed and investigated a lot of deep models for the automated detection of COVID-19 and pneumonia clinical cases based on the analysis of chest X-rays images. Deep convolutional neural network models Xception, MobileNetV2, DenseNet121, ResNet50, InceptionResNetV2 and VGG16 were developed, pretrained on the ImageNet, and then fine-tuned on a set of chest X-rays [22, 23]. As we noted later many of the earlier studies implied the classification of X-ray images into two classes: COVID-19 and Not COVID-19 [10, 11, 15, 17, 18]. However, despite the high performance of these models, they do not consider the class of images containing features of pneumonia. Such images are either not included in the calculations or are included in other image classes. Despite the fact that at an early stage, the clinical symptoms of pneumonia and COVID-19 are very similar, the course of these diseases and the methods of their treatment are different. Therefore, it is fundamentally important to differentiate them already at an early stage of detection. In our study, the task of classifying into three classes was solved: COVID-19, Normal, and Pneumonia.

Evaluation of the effectiveness of the studied models was carried out using the metrics of accuracy, precision, recall, f1-score and AUC. Based on their analysis, the VGG16 model was found to be the best model of all considered in our paper. It classifies X-rays images from the COVID-19 class with an accuracy of 99,09%, which means that the model has a high performance for images belonging to this class. In addition, the model rarely misclassifies COVID-positive patients as healthy or with pneumonia. This fact is confirmed by the high value of recall metrics, which is equal to 98,318%. Moreover, fine-tuned VGG16 model classifies X-rays images from class Pneumonia with accuracy of 99,14% and from class Normal with accuracy=99,30%. With an error 0,7% this model classifies healthy patients as Pneumonia class, and with an error of 0,13% it detected patients with pneumonia to COVID-19 class, which allows asserting the high performance of the model in pneumonia detection.

Also, we performed the fine-tuning of deep classification models to improve their performance. Such studies also used a variety of deep learning models, pre-trained on large datasets, as a rule, on ImageNet [20]. So, in paper [11] ResNet50 model have resulted the average accuracy 92,6%, whilst end-to-end training of the developed CNN model produced average accuracy=91,6%. In paper [12] accuracy=89,33%, recall=88,17%. Muhammad Talha Nafees and coauthors [13] developed CNN model trained on three classes with average accuracy of 92,3%. H. Nasiri and S. Hasani [14] employed DenseNet169 to extract features from X-ray images and used XGBoost for classification; so, they gained 98,24% and 89,70% in binary, and three-class classification, respectively. In papers [14] authors applied transfer learning method for COVID-19 images recognition and for pre-trained ResNet50 model achieved accuracy=92,32%, precision=95,69% and recall=95,62%. In paper [16] binary classifications with four classes (COVID-19, normal (healthy), viral pneumonia and bacterial pneumonia) by using 5-fold cross validation have implemented. Considering the performance results obtained, it has seen that pre-trained ResNet50 model provides the highest classification performance accuracy=99,7% among other four used models. Hamid Nasiri, Seyyed Ali Alavi [17] proposed deep model with ANOVA features selection that achieved evaluated accuracy=92% and recall=88,46%. Authors of papers [18, 19] developed several deep learning architecture are deployed for the detection of COVID-19 such as ResNet, Inception, Googlenet etc. as binary classifiers. The best model is ResNet50 with accuracy=98%.

#### **Conclusion**

The proposed models significantly exceed or comparable to the results in papers mentioned above, which confirms the effectiveness of proposed approach of preprocessing x-ray images and followed by their

fine-tuning deep learning models to solve the task of multiclass classification with imbalance of images in classes. For future research, it is necessary to eliminate a number of shortcomings. In particular, a more detailed analysis requires a larger volume of patient data, especially those associated with COVID-19. In addition, such effective deep learning models as VGG16 are trained on images from ImageNet that are not medical. So, the methods of synthetic data generation are most prospective in this task solution.

In future work, we intend to develop a mobile application for wearable devices and mobile X-ray units, with the aim of detecting COVID-19 and pneumonia on the early stages of the disease. We are also planning to extend our work to the segmentation of COVID-19 chest X-rays and CT scans to give more information for the radiologists.

### References

1. World Health Organization. (n.d.) [Online] Available from: <https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019> (Accessed: 25th October 2021).
2. Sohrabi, C. et al. (2020) World Health Organization declares global emergency: A review of the 2019 novel coronavirus (COVID-19). *International Journal of Surgery*. 76. pp. 71–76. DOI: 10.1016/j.ijssu.2020.02.034
3. Cleverley, J. Piper, & Jones, M.M. (2020) The role of chest radiography in confirming covid-19 pneumonia. *BMJ*. 370. DOI: 10.1136/bmj.m2426
4. Kim, M., Yan, C., Yang, D. & Wu, G. (2020) Deep learning in biomedical image analysis. *Biomedical Information Technology*. pp. 239–263.
5. Mei, X. & Lee, H.C. (2020) Artificial intelligence-enabled rapid diagnosis of patients with COVID-19. *Nat. Med.* 26. pp. 1224–1228. DOI: 10.1038/s41591-020-0931-3
6. Kong, W. & Agarwal, P.P. (2020) Chest imaging appearance of COVID-19 infection. *Radiol. Cardiothorac. Imaging*. 2(1). p. e200028.
7. Simonyan, K. & Zisserman, A.J. (2014) *Very deep convolutional networks for large-scale image recognition*. arXiv:1409.1556 [cs.CV].
8. He, K., Zhang, X., Ren, S. & Sun, J. (2016) Deep Residual Learning for Image Recognition. *2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. pp. 770–778. DOI: <https://doi.org/10.1109/CVPR.2016.90>
9. Szegedy, C. et al. (2015) *Rethinking the Inception Architecture for Computer Vision*. arXiv: 1512.00567[cs.CV].
10. Chowdhury, M.E., Rahman, T., Khandakar, A. et al. (2020) Can AI help in screening viral and covid-19 pneumonia? *IEEE Access*. 8. pp. 132665–132676.
11. Ismael, A.M. & Sengur, A. (2021) Deep learning approaches for COVID-19 detection based on chest x-ray images. *Expert Systems with Applications*. 164. p. 114054.
12. Ozturk, T., Talo, M., Yildirim, E.A., Baloglu, U.B., Yildirim, O. & Acharya, U.R. (2020) Automated detection of COVID-19 cases using deep neural networks with X-ray images. *Comput. Biol. Med.* 121. p. 103792.
13. Nafees, M. T., Rizwan, M., Khan, M.I. & Farhan, M. (2021) A Novel Convolutional Neural Network for COVID-19 detection and classification using Chest X-Ray images. *medRxiv preprint*. DOI: 10.1101/2021.08.11.21261946
14. Nasiri, H. & Hasani, S. (2021) *Automated detection of COVID-19 cases from chest X-ray images using deep neural network and XGBoost*. arXiv:2109.02428.
15. Katsamenis, I., Protopapadakis, E. & Voulodimos, A. (2020) Transfer learning for COVID-19 pneumonia detection and classification in chest X-ray images. *PCI 2020: 24th Pan-Hellenic Conference on Informatics*. DOI: <https://doi.org/10.1101/2020.12.14.20248158>, medRxiv preprint
16. Narin, A., Ceren, K. & Ziyinet, P. (2021) Automatic Detection of Coronavirus Disease (COVID-19) Using X-ray images and deep convolutional neural networks. *Pattern Anal Appl*. pp. 1–14. DOI: 10.1007/s10044-021-00984-y
17. Nasiri, H. & Alavi, S.A. (2021) *Novel framework based on deep learning and ANOVA feature selection method for diagnosis of COVID-19 cases from chest X-ray Images*. medRxiv preprint. DOI: 10.1101/2021.10.10.21264809
18. Shenoy, V. & Malik, S. (2021) *CovXR: Automated Detection of COVID-19 Pneumonia in Chest X-Rays through Machine Learning*. arXiv:2110.06398v1 [eess.IV].
19. Ilyas, M., Rehman, H. & Nait-Ali, A. (2020) *Detection of Covid-19 from chest X-ray images using artificial intelligence: an early review*. ArXiv:2004.05436v1 [eess.IV].
20. Deng, J., Dong, W., Socher, R., Li, L., Kai, L. & Fei-Fei, L. (2009) Imagenet: A large-scale hierarchical image database. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. pp. 248–255.
21. Chollet, F. (2017) *Deep Learning with Python*. Manning.
22. Patel, P. (2020) *Chest X-ray (COVID-19 & Pneumonia)*. [Online] Available from: <https://www.kaggle.com/prashant268/chest-xray-covid19-pneumonia> (Accessed: 25th October 2021).
23. Tawsifur, R. et al. (2021) Exploring the effect of image enhancement techniques on COVID-19 detection using chest X-ray images. *Computers in Biology and Medicine*. 132. p. 104319. DOI: 10.1016/j.compbiomed.2021.104319
24. Selvaraju, R.R., Cogswell, M., Das, A., Vedantam, R., Parikh, D. & Batra, D. (2017) Grad-cam: Visual explanations from deep networks via gradient-based localization. *Proceedings of the IEEE international conference on computer vision*. pp. 618–626.

***Information about the authors:***

**Shchetinin Evgenii Yurievich** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematics, Financial University under the Government of Russian Federation (Moscow, Russian Federation). E-mail: riviera-molto@mail.ru

**Sevastianov Leonid Antonovich** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Department of Applied Informatics and Probability of Peoples Friendship University of Russia (Moscow, Russian Federation). E-mail: sevast@sci.pfu.edu.ru

***Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.***

***Информация об авторах:***

**Щетинин Евгений Юрьевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Финансового университета при Правительстве России (Москва, Россия). E-mail: riviera-molto@mail.ru

**Севастьянов Леонид Антонович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов (Москва, Россия). E-mail: sevast@sci.pfu.edu.ru

***Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.***

*Received 21.10.2021; accepted for publication 28.02.2022*

*Поступила в редакцию 21.10.2021; принята к публикации 28.02.2022*

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

### DESIGNING AND DIAGNOSTICS OF COMPUTER SYSTEMS

Научная статья

УДК 004.052.32+681.518.5

doi: 10.17223/19988605/58/10

#### Структуры схем коррекции ошибок на основе логического дополнения с контролем вычислений по коду с суммированием взвешенных переходов от разряда к разряду

Дмитрий Викторович Ефанов

*Российский университет транспорта, Москва, Россия,*

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия,*

*TrES-4b@yandex.ru*

**Аннотация.** Предложены новые структуры отказоустойчивых цифровых вычислительных устройств и систем, в основе которых лежит использование принципа логического дополнения для фиксации искаженных сигналов и схем встроенного контроля. Последние реализуются с применением кода с суммированием взвешенных переходов от разряда к разряду в информационном векторе, при построении которого использована последовательность весовых коэффициентов, образующая ряд возрастающих степеней числа 2. Использование данного кода с суммированием позволяет обнаруживать любые комбинации искажений на выходах объекта диагностирования, за исключением одновременного искажения всех выходов, что на практике бывает достаточно редко. Дано описание четырех структур: структуры с двойной модульной избыточностью и контролем вычислений основным блоком по выбранному коду, структуры с двойной модульной избыточностью и контролем вычислений резервным блоком по выбранному коду, структуры с контролем вычислений основным блоком по выбранному коду и блоком фиксации искаженных сигналов на основе логического дополнения, структуры с блоком фиксации искаженных сигналов на основе логического дополнения с непосредственным контролем вычислений данным блоком. Приводятся примеры синтеза отказоустойчивых устройств и дана оценка их эффективности по сравнению с использованием традиционной структуры отказоустойчивых устройств и систем, основанной на тройной модульной избыточности с мажоритарной коррекцией сигналов. Освещены результаты экспериментов с контрольными комбинационными схемами LG'93 и MCNC Benchmarks, также показавшие эффективность предлагаемых отказоустойчивых структур. Использование принципа логического дополнения позволяет синтезировать отказоустойчивые цифровые устройства и системы, в которых не требуется прямого резервирования и внесения модульной избыточности, что на практике может давать существенное снижение структурной избыточности конечного объекта.

**Ключевые слова:** отказоустойчивые цифровые устройства и системы; модульная избыточность; схема встроенного контроля; коррекция сигналов; контроль вычислений; код с суммированием взвешенных переходов; структурная избыточность

**Для цитирования:** Ефанов Д.В. Структуры схем коррекции ошибок на основе логического дополнения с контролем вычислений по коду с суммированием взвешенных переходов от разряда к разряду // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 58. С. 105–125. doi: 10.17223/19988605/58/10

## Error correction circuits structures based on Boolean complement with calculation checking by code with summation of weighted transitions from bit to bit

Dmitry V. Efanov

*Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation,  
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation,  
TrES-4b@yandex.ru*

**Abstract.** Methods for introducing modular redundancy are widely used in fault-tolerant digital devices and systems synthesis. Such methods involve the use of the original device's exact copies (analogues) and error correction circuits. There are structures based on the introduction of triple and double modular redundancy widespread and knowing. Research shows that fault-tolerant structures can be obtained without using modular redundancy techniques. At the same time, it is possible to achieve a decrease in the introduced hardware redundancy to endow the device with the property of fault tolerance concerning methods based on the introduction of modular redundancy.

An effective technical solution is the use of the logical complement principle with the built-in control circuits organization, the diagnostics object, or a Boolean complement block in the fixing circuit of distorted signals. When organizing built-in control circuits using the Boolean complement method, it is possible to consider the structural features of the diagnosed object itself, and this makes it possible to reduce the structural redundancy relative to known methods.

The article proposes standard structures of fault-tolerant devices based on the weight-transition sum code from bit to bit. Such a code is obtained by dividing the bits of the data vector into  $k = m - 1$  pairs, starting with the least significant bit (pairs  $(f_1, f_2)$ ,  $(f_2, f_3)$ , ...,  $(f_{m-1}, f_{m-2})$ ,  $(f_m, f_{m-1})$ ), are formed), assigning the pairs of weight coefficients from a series of increasing powers of the number 2 ( $2^0, 2^1, \dots, 2^{m-3}, 2^{m-2}$ ), the subsequent addition of the weighting coefficients values of the digits pairs according to the formula  $W = \sum_{i=1}^{m-1} w_{i,i+1} q_{i,i+1}$ , where  $q_{i,i+1} = f_i \oplus f_{i+1}$  is the activating function the transition between the digits  $f_i$  and  $f_{i+1}$ . This code is designated as a  $T_m$ -code. It has  $k = m - 1$  check bit, each of which is implemented as a convolution modulo  $M = 2$  bits in the corresponding pair. In previous author research, it was proved that this code detects any errors in data vectors, except for errors with maximum multiplicity  $d = m$ . The noted property can be effectively used in the built-in control circuits synthesis, if exclude the diagnostic object faults influence immediately all its outputs, any combination of distortions can be detected. The use of the  $T_m$ -code in the built-in control circuits synthesis gives a decrease in the introduced structural redundancy with the duplication method use. This feature is proposed to be used in the synthesis of fault-tolerant devices.

The paper proposes four typical fault-tolerant structures based on the use of the  $T_m$ -code. The 1st two structures are based on the use of the duplication with computations control principle by one of the devices. In the first case, the calculations at the outputs of the main block are controlled. In the second, the calculations at the outputs of the additional block are controlled. The differences between the structures are in the method of signal correction when fixing computational errors. The other two structures are based on the use of only one source device and the implementation of a special block for fixing distorted signals using the Boolean complement method. In the first case, the calculations by the main unit are controlled by the  $T_m$ -code, and the fixation of distortions is performed in fixing the distorted signals. In the second case, the calculations are controlled in the block for fixing the distorted signals. The use of Boolean complement makes it possible to synthesize many variants of blocks for fixing distorted signals, which makes it possible to choose the variant that gives the least introduced structural redundancy.

The block for fixing the distorted bits includes a Boolean complement block and a block for calculating correction functions. In the second case, this block also includes a built-in  $T_m$ -code control circuit, which controls the calculations at the control logic block outputs. The task of synthesizing a block for fixing distorted bits is to synthesize a built-in control circuit, a block for calculating correction functions, and a Boolean complement block. The first two, as shown in the article, have a standard implementation. For the Boolean complement block synthesis, the article proposes two algorithms. An example of the synthesis of all four structures is given.

The theoretical results are complemented by the results obtained in experiments with combinational benchmarks LG'93 and MCNC Benchmarks. The results show the effectiveness of the proposed structures in comparison with the known ones.

The use of Boolean complement and code methods for the self-checking and fault-tolerant digital devices and systems synthesis makes it possible to expand the number of methods for their implementation and to minimize the structural redundancy indicators. The results obtained in the article should be taken into account in practice when choosing an approach to the synthesis of fault-tolerant digital devices and systems.

**Keywords:** fault-tolerant digital devices and systems; modular redundancy; built-in control circuit; correction of signals; checking of calculations; code with summation of weighted transitions; structural redundancy

**For citation:** Efanov, D.V. (2022) Error correction circuits structures based on Boolean complement with calculation checking by code with summation of weighted transitions from bit to bit. *Vestnik Tomского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 58. pp. 105–125. doi: 10.17223/19988605/58/10

Методы коррекции ошибок в вычислениях повсеместно используются при построении надежных цифровых устройств и систем [1–4]. Все они подразумевают внесение избыточности по определенным правилам, например внесение модульной избыточности с проверкой вычислений и выбором верного значения по принципу большинства (мажоритарный принцип) или использование предварительно при синтезе устройства помехоустойчивого кодирования состояний или выходов устройства и т.д. [5–14].

Как показано в ряде работ [15, 16], для синтеза устройств и систем, не чувствительных к проявлениям ошибок, возможно применение принципа логического дополнения с организацией схем встроенного контроля (СВК) либо объекта диагностирования, либо блока логического дополнения в схеме фиксации искаженных сигналов (ФИС). Это позволяет учитывать особенности структуры самого объекта диагностирования и снижать структурную избыточность, необходимую для реализации отказоустойчивой системы.

Метод логического дополнения описан в [17, 18] и подразумевает преобразование значений функций некоторого объекта диагностирования (исходного устройства) в СВК в функции специального вида. Такое преобразование осуществляется с использованием двухвходовых элементов сложения по модулю  $M = 2$  (элементов *XOR*) и блока логического дополнения, имеющего такое же (или меньшее) число выходов, как и исходное устройство. Преобразования, таким образом, осуществляются по формуле:  $f_i \oplus g_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $m$  – число выходов исходного устройства. В качестве диагностического признака может быть выбран признак принадлежности вектора функций, формируемых на выходах каскада элементов преобразования, заранее выбранному избыточному блочному коду [19], принадлежность преобразованной функции к классу самодвойственных функций алгебры логики [20], контроль по обоим этим признакам [21] и т.д. Интересным является использование в качестве диагностического признака принадлежности вектора, формируемого на выходах каскада элементов преобразования, коду с суммированием взвешенных переходов от разряда к разряду в информационном векторе, при построении которого используется последовательность возрастающих степеней числа 2:  $\{2^0, 2^1, \dots, 2^{m-3}, 2^{m-2}\}$  [22, 23]. Такой код имеет избыточность, практически сравнимую с кодом с повторением:  $k = m - 1$ . При этом данным кодом, обозначим его как  $T_m$ -код, обнаруживаются любые сочетания искажений информационных разрядов, кроме одновременного искажения всех разрядов информационного вектора. Как показано в [22, 23], использование  $T_m$ -кода при синтезе СВК позволяет получать самопроверяемые логические устройства автоматики и вычислительной техники со структурной избыточностью, меньшей, чем при использовании принципа дублирования со сравнением результатов вычислений. В [24, 25] предложено применять  $T_m$ -код совместно с внесением двойной модульной избыточности при синтезе отказоустойчивых цифровых устройств и систем, а также приведены результаты экспериментов, позволяющие судить об эффективности применения такого подхода. Например, для представленных 25 комбинационных устройств было получено среднее значение уменьшения структурной избыточности примерно до 94,614% по сравнению с применением традиционного подхода реализации мажоритарной структуры (структуры с тройной модульной избыточностью). Для отдельных устройств были получены показатели уменьшения структурной избыточности более чем на 10%.

В данной статье рассматриваются возможности использования  $T_m$ -кода при реализации отказоустойчивых устройств по принципу логического дополнения с контролем вычислений исходным устройством либо блоком логического дополнения в схеме ФИС. Применение логического дополнения позволяет уменьшать сложность технической реализации отказоустойчивых устройств и систем

по сравнению с подходами, подразумевающими внесение модульной избыточности, при высокой корректирующей способности.

### 1. Отказоустойчивая структура на основе дублирования с контролем вычислений по коду с суммированием взвешенных переходов

Исследования [26, 27] показывают, что при синтезе СВК могут эффективно использоваться разнообразные равномерные избыточные коды, обладающие различными избыточностью и характеристиками обнаружения ошибок. Среди таких кодов можно выделить специальный код с суммированием взвешенных переходов от разряда к разряду в информационном векторе, который строится по следующим правилам [22, 23]:

1. Переходам от разряда к разряду информационного вектора присваиваются весовые коэффициенты  $w_{i,i+1}$  из ряда возрастающих степеней числа 2:  $[w_{i,i+1}] = [w_{1,2}, w_{2,3}, \dots, w_{m-2,m-1}, w_{m-1,m}] = [2^{m-2}, 2^{m-3}, \dots, 2^1, 2^0]$ . Будем их приписывать переходам в информационном векторе, начиная справа налево.

2. Подсчитывается суммарный вес активных переходов:

$$W = \sum_{i=1}^{m-1} w_{i,i+1} q_{i,i+1}, \quad (1)$$

где  $q_{i,i+1} = f_i \oplus f_{i+1}$  – функция активации перехода между разрядами  $f_i$  и  $f_{i+1}$ .

3. Полученное число представляется в двоичном виде и записывается в разряды контрольного вектора.

К примеру, получим контрольный вектор для информационного вектора  $\langle f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 \rangle = \langle 101101 \rangle$   $T_6$ -кода:  $W = 2^4 \cdot 1 + 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 = 16 + 8 + 2 + 1 = 27$ ,  $[W]_2 = \langle 11011 \rangle$ .

Как отмечалось ранее,  $T_m$ -код имеет  $k = m - 1$  контрольный разряд. Значения контрольных разрядов могут быть определены по формулам

$$\begin{aligned} h_1 &= f_1 \oplus f_2; \\ h_2 &= f_2 \oplus f_3; \\ &\dots \\ h_{m-1} &= f_{m-1} \oplus f_m. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как для получения значений контрольных разрядов кода с суммированием взвешенных переходов используются только операции сложения по модулю  $M = 2$ , структура кодера данного кода будет стандартной и содержать в себе  $m - 1$  элемент сложения по модулю два. Наличие стандартной структуры кодера позволяет синтезировать типовую структуру СВК по данному коду, подробно описанную в [22, 23].

$T_m$ -код будет обнаруживать любые искажения в контролируемом кодовом векторе, за исключением ошибок с максимальной кратностью  $d = m$ . Это объясняется тем, что значение суммарного веса информационного вектора, вычисленного по формуле (1), не изменится только в том случае, если оно будет вычислено для двух векторов с полностью противоположными значениями разрядов. Такая особенность  $T_m$ -кода позволяет весьма эффективно использовать его для организации СВК логических устройств. При этом на структуры контролируемых устройств накладывается только одно ограничение – отсутствие путей от каких-либо внутренних логических элементов, ведущих сразу же ко всем их выходам (можно сказать, что это структурное ограничение). Однако даже при наличии таких элементов может быть проверено условие невозможности одновременного искажения всех  $m$  выходов устройства:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y_\alpha} \cdot \dots \cdot \frac{\partial f_m}{\partial y_\alpha} = 0, \quad (3)$$

где  $y_\alpha$  – функция, реализуемая на выходе логического элемента  $G_\alpha$ , связанного путями со всеми выходами устройства.

Если выражение в левой части формулы (3) равно нулю, то не существует ни одного входного набора, на котором происходит трансляция ошибок на все выходы устройства.

На рис. 1, 2 изображены отказоустойчивые структуры, основанные на использовании принципов дублирования (внесении двойной модульной избыточности) с контролем вычислений одним из устройств (исходным  $F(x)$  или его копией  $F^*(x)$ ).

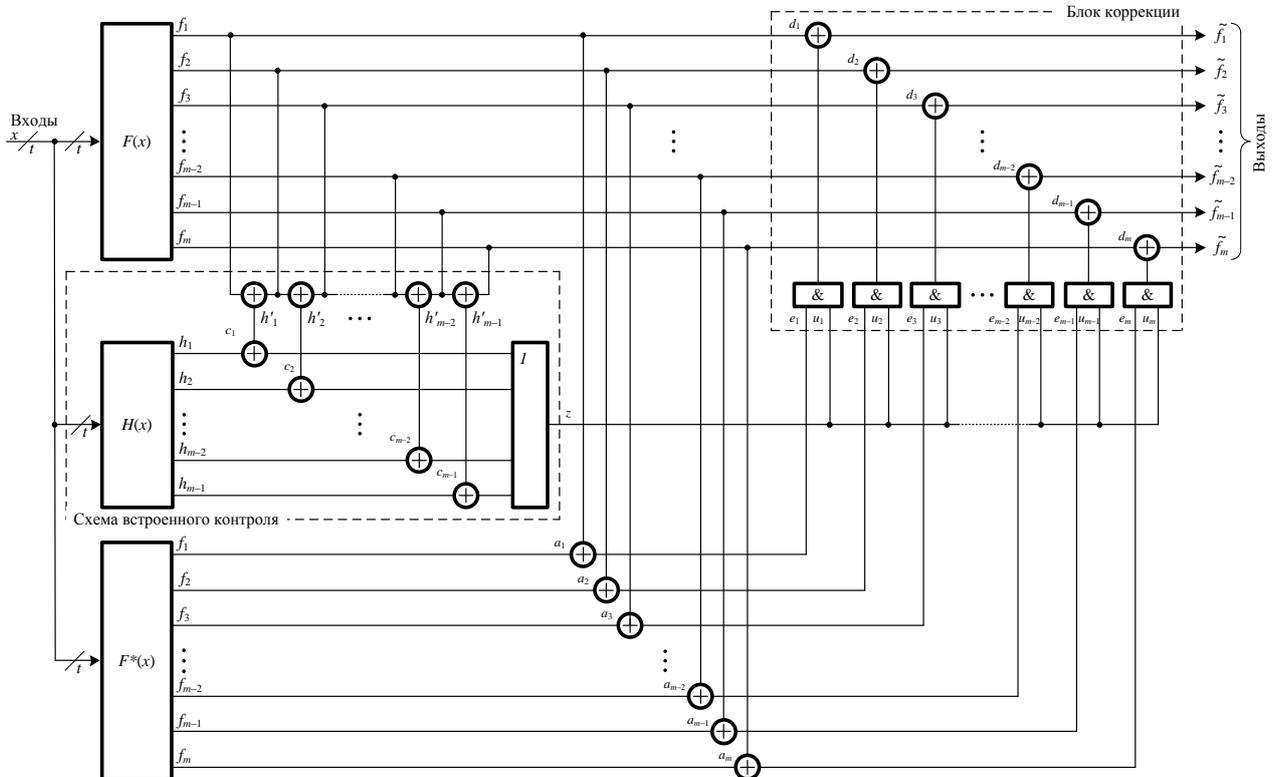


Рис. 1. Отказоустойчивая структура на основе дублирования с контролем вычислений основным устройством по  $T_m$ -коду  
 Fig. 1. Fault-tolerant structure based on duplication with checking of calculations by the main device according to the  $T_m$ -code

В обеих структурах для выявления ошибок на выходах исходного объекта  $F(x)$  используются дополнительное устройство  $F^*(x)$ , являющееся копией исходного устройства, и каскад элементов сложения по модулю  $M = 2$   $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$  для выявления выходов с ошибками. Если на каком-либо из выходов присутствует ошибка, то на соответствующем выходе элемента сравнения будет присутствовать единичное значение. Такая организация позволяет выявлять любые одиночные неисправности на выходах объекта  $F(x)$ . Для определения устройства, на выходах которого возникла ошибка, используется СВК по  $T_m$ -коду. В первом случае осуществляется контроль вычислений исходным объектом  $F(x)$ , а во втором – объектом  $F^*(x)$ . Наличие СВК позволяет установить, на выходах какого из объектов возникла ошибка, и осуществить коррекцию только в том случае, если ошибка возникла на выходах основного объекта  $F(x)$ .

СВК содержит каскад сумматоров по модулю  $M = 2$ , позволяющих реализовать кодер  $T_m$ -кода с выходами  $h'_1, h'_2, \dots, h'_{m-2}, h'_{m-1}$ , блок  $H(x)$ , вычисляющий аналогичные функции  $h_1, h_2, \dots, h_{m-2}, h_{m-1}$ , но по значениям входных воздействий, а также схему сравнения, образованную каскадом сумматоров  $c_1, c_2, \dots, c_{m-2}, c_{m-1}$  и элементом логического сложения с  $m - 1$  входами (элементом  $OR$ ), на выходах которого формируется сигнал  $z$ , свидетельствующий об отсутствии или наличии ошибки. Схема сравнения может быть реализована в виде полностью самопроверяемого устройства с использованием модулей сжатия парафазных сигналов (two-rail checkers [28]).

Для коррекции ошибок используется специализированный блок коррекции сигналов, включающий в себя элементы принятия решения о коррекции (элементы  $AND$ ) и элементы коррекции сигналов (элементы  $XOR$   $d_1, d_2, \dots, d_{m-1}, d_m$ ). Элементы принятия решения о коррекции имеют по два входа:

на первые входы поступают сигналы  $e_1, e_2, \dots, e_{m-1}, e_m$  от элементов сравнения  $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$  и определяют те выходы, на которых необходимо произвести коррекцию сигналов. На вторые входы поступают сигналы  $u_1, u_2, \dots, u_{m-1}, u_m$  от СВК:  $u_1 = u_2 = \dots = u_{m-1} = u_m = z$ . Коррекция в случае структуры рис. 1, когда СВК контролирует вычисления основным комплектом, осуществляется в том случае, если сигнал  $z = 1$ . Поэтому в ней на входах каждого элемента  $AND$  рассчитывается функция  $ze_i, i = \overline{1, m}$ . Коррекция в случае структуры рис. 2, когда вычисления контролируются резервным комплектом, осуществляется только в том случае, если сигнал  $z = 0$  (коррекция производится только при наличии ошибок в вычислениях основным блоком). Поэтому в данной структуре на входах каждого элемента  $AND$  рассчитывается функция  $\bar{z}e_i, i = \overline{1, m}$ .

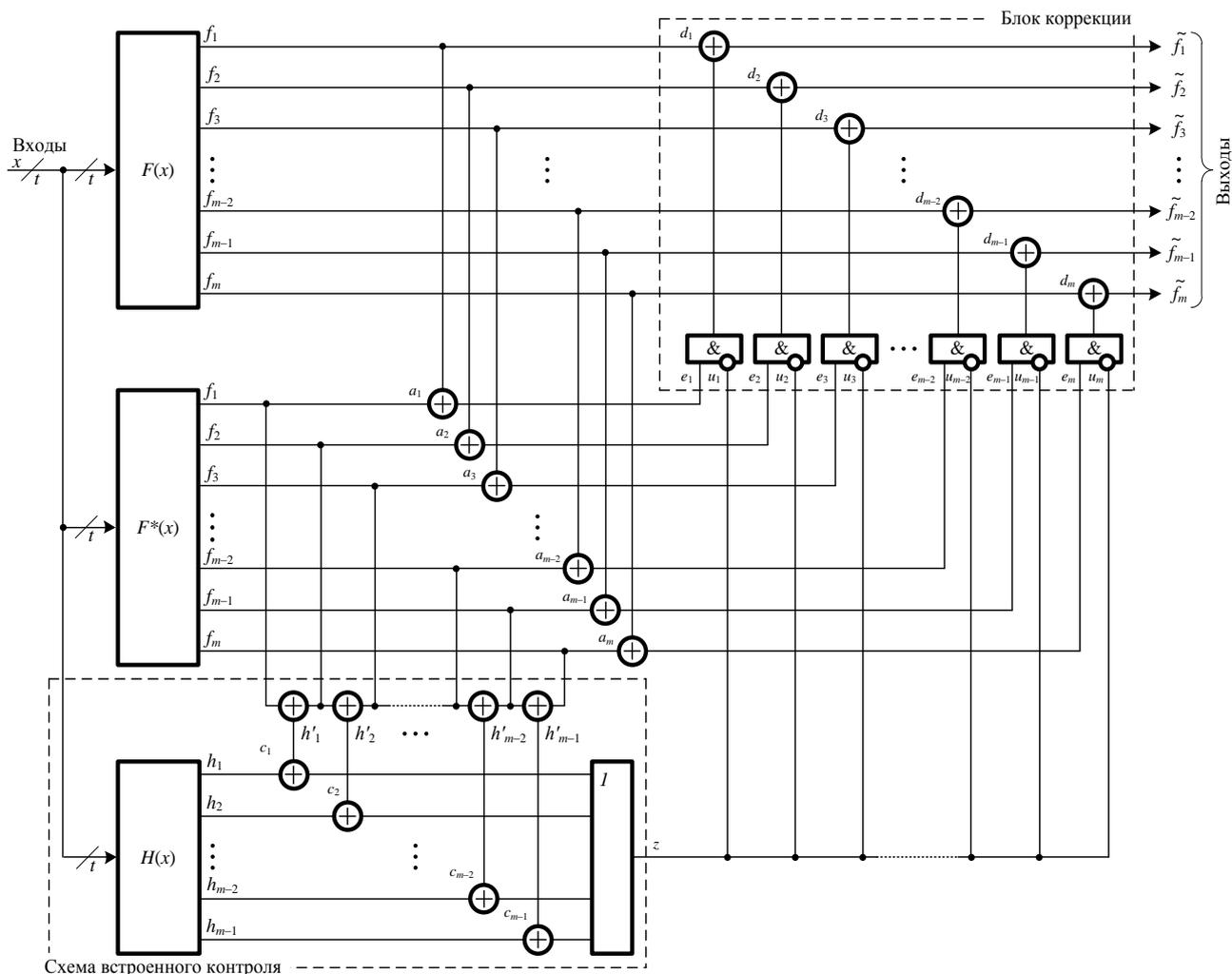


Рис. 2. Отказоустойчивая структура на основе дублирования с контролем вычислений дополнительным устройством по  $T_m$ -коду

Fig. 2. Fault-tolerant structure based on duplication with checking of calculations by an additional device according to the  $T_m$ -code

Следует отметить, что структуры, приведенные на рис. 1, 2, не защищены от неисправностей элементов блока коррекции сигналов. Такой же недостаток присущ и традиционной схеме мажоритарной коррекции сигналов [1, 2, 6]. На практике данный недостаток нивелируется применением высоконадежных элементов при синтезе блока коррекции сигналов, имеющих низкие интенсивности потоков отказов, внутреннее резервирование и реализуемых в виде полностью самопроверяемых устройств [29].

Обе структуры имеют высокую корректирующую способность на выходах исходного объекта за счет применения  $T_m$ -кода.

## 2. Отказоустойчивая структура на основе логического дополнения с контролем вычислений по коду с суммированием взвешенных переходов

Исследования показывают, что могут быть реализованы отказоустойчивые устройства, имеющие в своем составе только один блок  $F(x)$ . При этом возможно уменьшение структурной избыточности конечного устройства не только по сравнению с применением мажоритарной структуры, но и по сравнению с описанными выше структурами, основанными на принципе дублирования. Новые структуры реализуются за счет применения логического дополнения при синтезе блока ФИС. Для контроля корректности вычислений используется СВК на основе  $T_m$ -кода. В структуре рис. 3 контролируются вычисления исходным объектом  $F(x)$ . В структуре рис. 4 контролируются вычисления блоком логического дополнения  $G(x)$ . Для этого используется блок  $H^*(x)$ .

Отличием обеих структур – рис. 3 и рис. 4 – от структур, приведенных на рис. 1, 2, является использование блока ФИС.

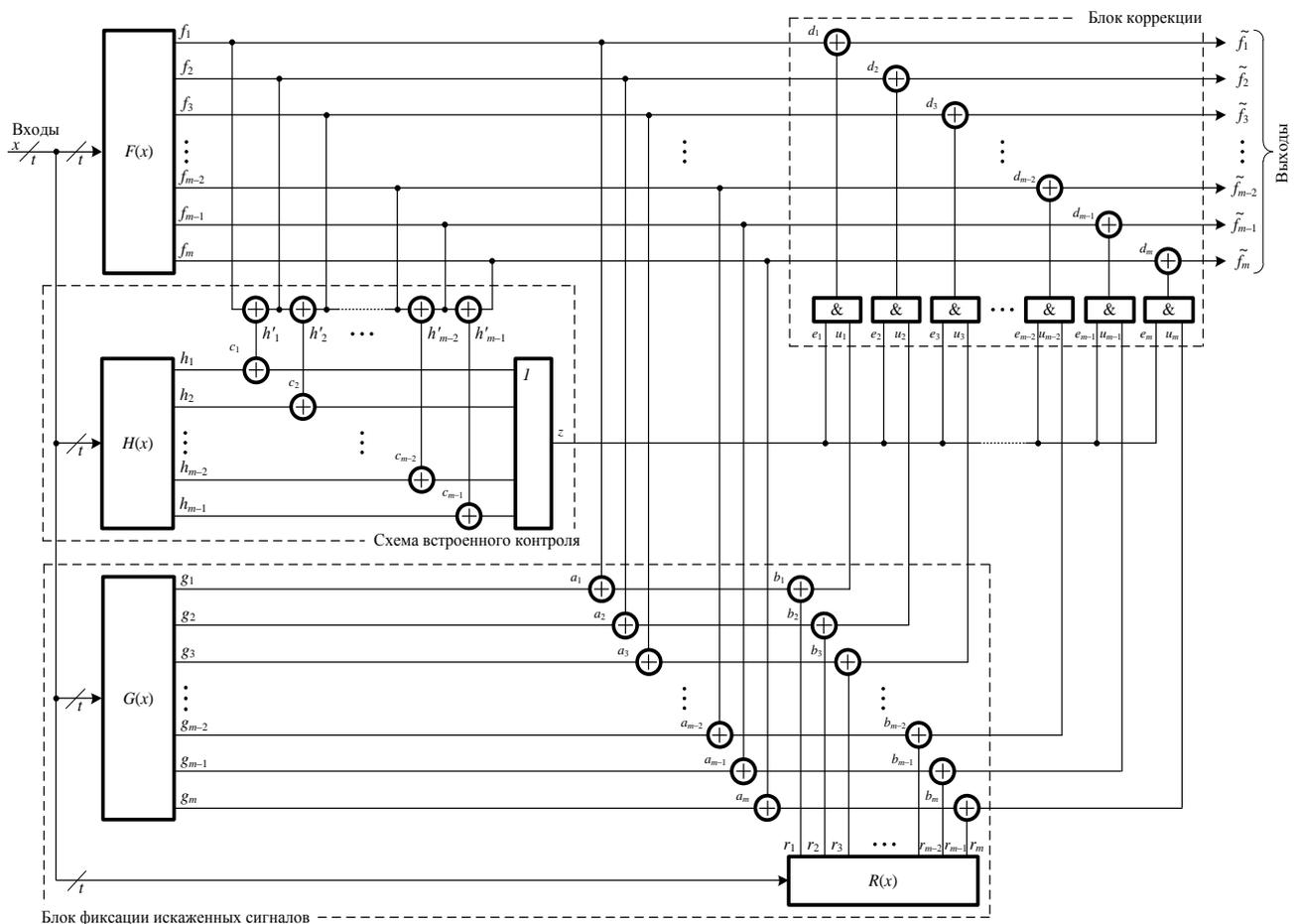


Рис. 3. Отказоустойчивая структура на основе логического дополнения с контролем вычислений исходным устройством по  $T_m$ -коду

Fig. 3. Fault-tolerant structure based on Boolean complement with checking of calculations by the source device according to the  $T_m$ -code

В структуру блока ФИС для структуры, приведенной на рис. 3, входит блок логического дополнения  $G(x)$ , на выходах которого вычисляются специальные функции дополнения  $g_1, g_2, \dots, g_{m-1}, g_m$ , а также блок вычисления функций коррекции  $R(x)$ . Значения функций  $g_1, g_2, \dots, g_{m-1}, g_m$  сравниваются со значениями с одноименных выходов блока  $F(x)$ . Для вычисления функций активизации коррекции использован блок  $R(x)$ , вычисляющий функции  $r_1, r_2, \dots, r_{m-1}, r_m$ , а также каскад сумматоров по модулю  $M = 2$   $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}, b_m$ . На выходах последних формируются значения функций ошибок:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= f_1 \oplus g_1 \oplus r_1 = 0; \\
 e_2 &= f_2 \oplus g_2 \oplus r_2 = 0; \\
 &\dots \\
 e_m &= f_m \oplus g_m \oplus r_m = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Если в результате неисправности в блоке  $F(x)$  искажается значение функции  $f_i$ , то, как следует из (4),  $e_i = 1$ , и активизируются вход и выход соответствующего элемента логического умножения в блоке коррекции сигналов (при этом на выходе СВК блока  $F(x)$  сигнал  $z = 1$ ). Осуществляется исправление неверного значения функции  $f_i$ .

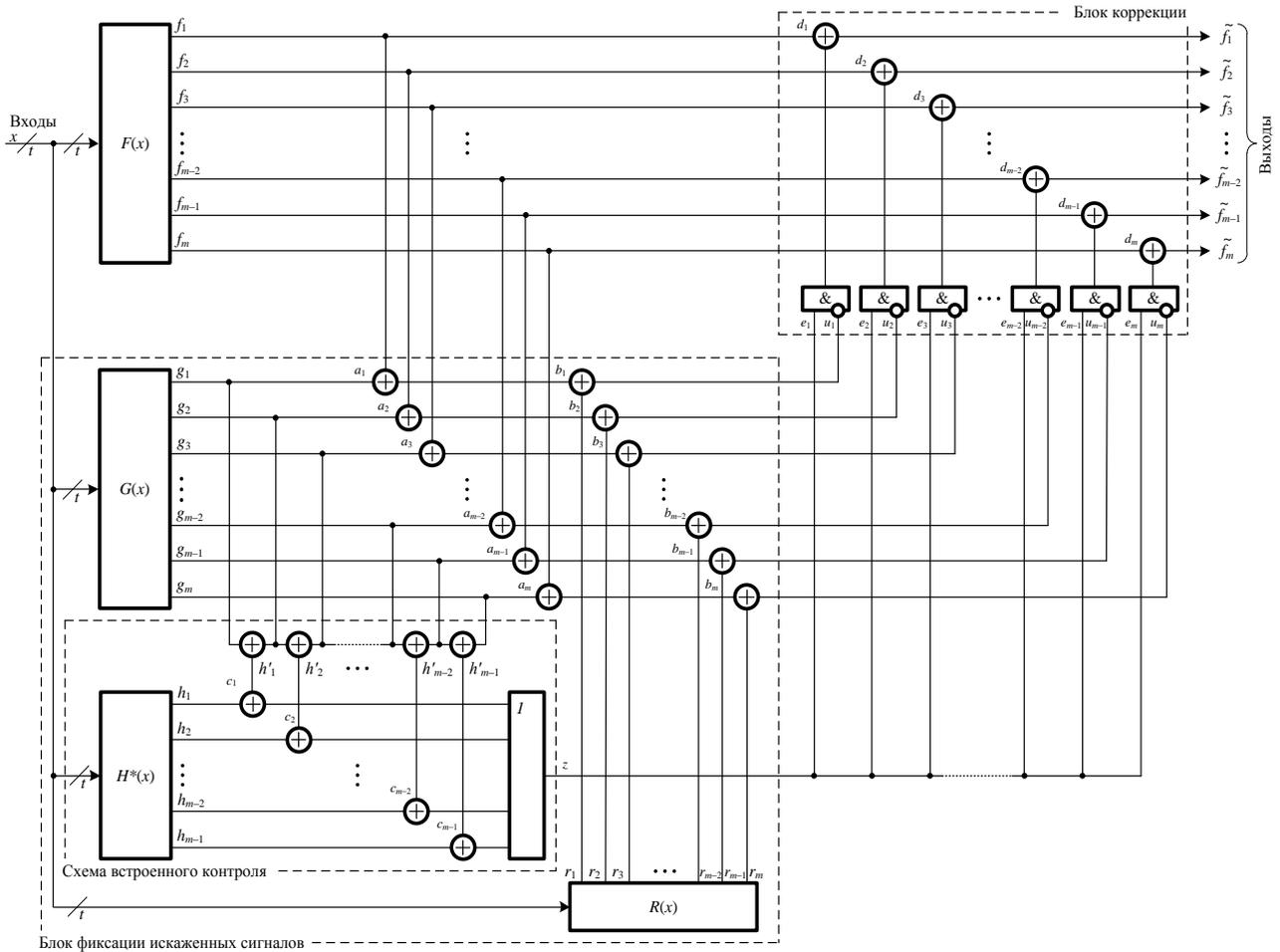


Рис. 4. Отказоустойчивая структура на основе логического дополнения с контролем вычислений блоком дополнения по  $T_m$ -коду

Fig. 4. Fault-tolerant structure based on Boolean complement with checking of computations by the complement block by  $T_m$ -code

В структуре рис. 4 вычисления основным устройством не контролируются, а блок ФИС, в отличие от структуры рис. 3, также содержит СВК для блока логического дополнения  $G(x)$ , реализуемую по  $T_m$ -коду (блок  $H^*(x)$  формирует значения разрядов  $T_m$ -кода по значениям входов системы). СВК позволяет зафиксировать факт корректной или некорректной работы блока контрольной логики и сформировать соответствующий сигнал  $z$ .

### 3. Синтез блока фиксации искаженных сигналов и схемы встроенного контроля

Для структур рис. 1, 2 требуется реализация только СВК, в которой все элементы являются стандартными, кроме блока  $H(x)$ . Он синтезируется достаточно просто. На каждом входном воздей-

ствии рассчитываются значения функций  $h_1, h_2, \dots, h_{m-1}$ . Осуществляется минимизация полученных функций любым из известных методов [30].

Для структур рис. 3, 4 требуется синтез блоков дополнительной логики  $G(x)$  и блока  $H(x)$ . Последний для структуры рис. 3 совпадает с блоком контрольной логики для структур рис. 1, 2. Для структуры рис. 4 он синтезируется аналогичным образом, за тем лишь исключением, что функции  $h_1, h_2, \dots, h_{m-1}$  рассчитываются по выходам блока  $G(x)$ .

При синтезе устройства  $G(x)$  в структурах рис. 3, 4 необходимо определить функции  $g_1, g_2, \dots, g_{m-1}, g_m$  через функции  $r_1, r_2, \dots, r_{m-1}, r_m$ :  $g_i = f_i \oplus r_i$ . Каждая функция  $r_i$  может быть выбрана произвольным образом независимо от того, какими являются функции  $f_i$  и  $g_i$ . От выбранного варианта функции  $r_i$  зависит сложность реализации функции  $g_i$ . При этом никакой зависимости между функциями  $g_i$  и  $r_i$  с различными индексами  $i$  не существует. Однако наиболее простым способом вычисления функций  $r_i$  является придание им значений входных переменных. Это позволяет фактически не синтезировать блок  $R(x)$ , а реализовывать его в виде коммутатора входных сигналов.

Рассмотрим два алгоритма синтеза блока  $G(x)$ .

**Алгоритм 1.** Правила синтеза блока  $G(x)$  при использовании в качестве функций  $\{r_1, r_2, \dots, r_{m-1}, r_m\}$  одной из входных переменных:

1. Последовательно рассматриваются функции выходов блока  $F(x) f_i (i \in \{1, 2, \dots, m\})$ .
2. Полагается  $i = 1$ .
3. Последовательно выбираются значения функции корректирующей переменной  $r_j = x_j (j \in \{1, 2, \dots, t\})$ .
4. Полагается  $j = 1$ .
5. Вычисляются функции дополнения для каждого из выходов блока  $F(x) f_i: g_{i,j} = f_i \oplus r_j (i \in \{1, 2, \dots, m\})$ .
6. Функции  $g_{i,j}$  оптимизируются (на данном этапе можно провести оптимизацию функций как системы [30]), что дает возможность синтеза блока  $G(x)$  в выбранном элементном базисе.

Алгоритм 1 позволяет достаточно просто синтезировать блок дополнительной логики. При этом для каждого выхода устройства  $G(x)$  может быть подобрана та переменная, которая дает наиболее эффективное с позиции сложности реализации техническое решение.

**Алгоритм 2.** Правила синтеза блока  $G(x)$  при использовании в качестве функций  $\{r_1, r_2, \dots, r_{m-1}, r_m\}$  входных переменных:

1. Последовательно рассматриваются функции выходов блока  $F(x) f_i (i \in \{1, 2, \dots, m\})$ .
2. Полагается  $i = 1$ .
3. Последовательно выбираются значения функции корректирующей переменной  $r_j = x_j (j \in \{1, 2, \dots, t\})$ .
4. Полагается  $j = 1$ .
5. Вычисляется функция дополнения  $g_{i,j} = f_i \oplus r_j$ .
6. Функция  $g_{i,j}$  оптимизируется любыми известными методами [30].
7. Полагается  $j := j + 1$ .
8. Проверяется условие достижения конечной входной переменной  $j > t$ ? Если нет, то возвращаемся к п. 5 данного алгоритма, в противном случае переходим к п. 9.
9. Полагается  $i := i + 1$ .
10. Проверяется условие достижения конечной функции выхода блока  $F(x) i > m$ ? Если нет, то возвращаемся к п. 3 данного алгоритма, в противном случае переходим к п. 11.
11. Для каждой функции  $g_{i,j}$  выбираем ту входную переменную, коррекция по которой дает наименьшую сложность реализации в выбранном элементном базисе.
12. Синтезируется блок реализации системы функций дополнений  $G(x)$ .

Следует отметить, что в качестве функций  $\{r_1, r_2, \dots, r_{m-1}, r_m\}$  могут быть выбраны произвольные функции, что увеличивает число вариантов синтеза отказоустойчивых цифровых устройств, при этом может быть выбран способ, дающий наименьшую сложность их реализации.

Приведем далее примеры синтеза отказоустойчивых устройств по всем четырем рассмотренным ранее структурам.

#### 4. Пример синтеза отказоустойчивых структур

Рассмотрим в качестве примера процедуры синтеза структур, представленных на рис. 1–4, для комбинационного логического устройства, описываемого формулами

$$\begin{cases} f_1 = \overline{x_1 x_3 x_4} \vee \overline{x_1 x_2 x_4} \vee \overline{x_1 x_2 x_4} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_3 x_4}; \\ f_2 = \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_3 x_4} \vee \overline{x_1 x_2 x_4} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2 x_3 x_4}; \\ f_3 = \overline{x_3 x_4} \vee \overline{x_1 x_2 x_4} \vee \overline{x_2 x_3 x_4} \vee \overline{x_1 x_2 x_4}; \\ f_4 = \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2 x_4} \vee \overline{x_2 x_3 x_4} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2 x_4}; \\ f_5 = \overline{x_1 x_2 x_4} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2 x_3 x_4}. \end{cases} \quad (5)$$

Для синтеза структур, основанных на использовании двойной модульной избыточности (см. рис. 1, 2), требуется синтезировать только блок контрольной логики  $H(x)$ , а остальные компоненты являются типовыми. В табл. 1 приводится описание исходного блока  $F(x)$  в виде таблицы истинности, а также контрольных функций, вычисляемых блоком  $H(x)$ . Непосредственно из табл. 1 путем оптимизации получаются логические выражения для функций  $h_1, h_2, h_3$  и  $h_4$ , по которым синтезируется блок  $H(x)$ .

Таблица 1

Описание комбинационного устройства и функций для контроля блока  $F(x)$  или его копии  $F^*(x)$  по  $T_m$ -коду

$x_4 x_3 x_2 x_1$	$f_5 f_4 f_3 f_2 f_1$	Активные переходы	Формула подсчета веса	$W$	$h_4 h_3 h_2 h_1$
0000	01101	$q_{1,2}, q_{2,3}, q_{4,5}$	$w_{1,2} + w_{2,3} + w_{4,5}$	11	1011
0001	01110	$q_{1,2}, q_{4,5}$	$w_{1,2} + w_{4,5}$	9	1001
0010	10111	$q_{3,4}, q_{4,5}$	$w_{3,4} + w_{4,5}$	12	1100
0011	00010	$q_{1,2}, q_{2,3}$	$w_{1,2} + w_{2,3}$	3	0011
0100	10110	$q_{1,2}, q_{3,4}, q_{4,5}$	$w_{1,2} + w_{3,4} + w_{4,5}$	13	1101
0101	00100	$q_{2,3}, q_{3,4}$	$w_{2,3} + w_{3,4}$	6	0110
0110	11001	$q_{1,2}, q_{3,4}$	$w_{1,2} + w_{3,4}$	5	0101
0111	11001	$q_{1,2}, q_{3,4}$	$w_{1,2} + w_{3,4}$	5	0101
1000	11000	$q_{3,4}$	$w_{3,4}$	4	0100
1001	10100	$q_{2,3}, q_{3,4}, q_{4,5}$	$w_{2,3} + w_{3,4} + w_{4,5}$	14	1110
1010	11010	$q_{1,2}, q_{2,3}, q_{3,4}$	$w_{1,2} + w_{2,3} + w_{3,4}$	7	0111
1011	01011	$q_{2,3}, q_{3,4}, q_{4,5}$	$w_{2,3} + w_{3,4} + w_{4,5}$	12	1100
1100	00111	$q_{3,4}$	$w_{3,4}$	4	0100
1101	11111	—	—	0	0000
1110	01000	$q_{3,4}, q_{4,5}$	$w_{3,4} + w_{4,5}$	12	1100
1111	00110	$q_{1,2}, q_{3,4}$	$w_{1,2} + w_{3,4}$	5	0101

Часто при синтезе цифровых устройств используются системы автоматизированного проектирования, в которые интегрированы средства оптимизации функций и оценки сложности их технической реализации [31, 32]. Воспользуемся известным интерпретатором SIS, синтезируем в нем исходные устройства  $F(x)$ , отказоустойчивую структуру на основе тройной модульной избыточности, а также предложенные в настоящей работе отказоустойчивые структуры с контролем вычислений по  $T_m$ -коду. При этом будем использовать библиотеку стандартных функциональных элементов `stdcell2_2.genlib`, а саму процедуру синтеза будем проводить по табличным формам задания устройств (в виде файлов \*.pla). SIS позволяет не только синтезировать сами цифровые устройства, но и оценивать сложность их технической реализации в условных единицах площади, занимаемой

устройством на кристалле. Это дает возможность сравнения различных отказоустойчивых структур между собой. Далее не будем приводить сами устройства ввиду их громоздкости, а приведем только численные данные о показателях сложности реализации устройств.

Сложность исходного блока  $F(x)$  равна  $L_{F(x)} = 1080$ . Мажоритарный элемент сравнения имеет сложность  $L_{\geq 2} = 136$ . Отсюда следует, что сложность отказоустойчивого устройства, реализованного по мажоритарной структуре, равна

$$L_{TMR} = 3L_{F(x)} + 5L_{\geq 2} = 3 \cdot 1080 + 5 \cdot 136 = 3920.$$

Оценим сложности отказоустойчивых устройств, реализованных по структурам рис. 1 и рис. 2. При этом учтем, что сложности стандартных функциональных элементов равны: элементов сложения по модулю два –  $L_{XOR} = 40$ , четырехходового элемента ИЛИ –  $L_{4OR} = 48$ , сложность элемента логического умножения (как с инверсией на одном входе, так и без нее) –  $L_{AND} = 32$ . Оптимизация функций блока  $H(x)$  с применением стандартной процедуры simplify дает следующий результат:  $L_{H(x)} = 560$ . С учетом полученного рассчитаем сложность структур, синтезируемых на основе двойной модульной избыточности с контролем вычислений одним из блоков по  $T_m$ -коду [25]:

$$L_{DMR} = 2L_{F(x)} + L_{H(x)} + 18L_{XOR} + 5L_{AND} + L_{4OR} = 2 \cdot 1080 + 560 + 18 \cdot 40 + 5 \cdot 32 + 48 = 3648.$$

Площади структур устройств, полученные на основе дублирования с контролем вычислений одним из блоков, равны и составляют 96,061% от площади устройства, реализованного в соответствии с мажоритарной структурой.

Синтезируем отказоустойчивое устройство по структуре, представленной на рис. 3. В ней схема блока  $H(x)$  остается той же. Требуется синтезировать блоки  $G(x)$  и  $R(x)$  в структуре блока ФИС. Как отмечалось выше, фактически блок  $R(x)$  может быть реализован путем коммутации входов и не требует логических элементов. Синтезируем блок  $G(x)$ .

Воспользуемся алгоритмом синтеза 1, подразумевающим использование только одной входной переменной для вычисления функций дополнения. Данный алгоритм дает результат, представленный в табл. 2. Наиболее простой блок  $G(x)$  получается при использовании для коррекции переменной  $x_2$ . Сложность его реализации оценивается величиной  $L_{G(x)} = 640$ .

Устройство, реализуемое в соответствии со структурой рис. 3, имеет сложность

$$L_{SCB_1} = L_{F(x)} + L_{H(x)} + L_{G(x)} + 23L_{XOR} + 5L_{AND} + L_{4OR} = 1080 + 560 + 640 + 23 \cdot 40 + 5 \cdot 32 + 48 = 3408.$$

Таблица 2

Описание блока контрольной логики  $G(x)$  и блока  $H^*(x)$  для его контроля при использовании одной переменной для коррекции

$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$f_5$	$f_4$	$f_3$	$f_2$	$f_1$	$x_4$					$x_3$				
									$g_5$	$g_4$	$g_3$	$g_2$	$g_1$	$g_5$	$g_4$	$g_3$	$g_2$	$g_1$
0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1

$x_2$					$x_1$					$h_4$	$h_3$	$h_2$	$h_1$
$g_5$	$g_4$	$g_3$	$g_2$	$g_1$	$g_5$	$g_4$	$g_3$	$g_2$	$g_1$				
0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1

Сложность реализации устройства по данной структуре составляет 86,939% от сложности реализации по мажоритарной структуре. Таким образом, получено улучшение показателя сложности реализации.

Синтезируем отказоустойчивое устройство в соответствии со структурой рис. 4. Блок  $G(x)$  уже получен. Требуется синтез блока  $H^*(x)$ . В табл. 1 представлены функции данного блока. Следует отметить, что он будет одинаков для блоков  $G(x)$ , получаемых при коррекции сигналов по какой-либо одной из переменных, что следует из принципов построения  $T_m$ -кода. Это справедливо в силу того, что выбор той или иной переменной для коррекции приводит к инверсии всех значений функции относительно одного из вариантов дополнения либо же к сохранению значений, а для  $T_m$ -кода это не влияет на суммарный вес информационного вектора. Сложность блока  $H^*(x)$  получена равной  $L_{H^*(x)} = 568$ . Таким образом, устройство, синтезированное по структуре рис. 4, имеет сложность реализации

$$L_{SBC_1} = L_{F(x)} + L_{G(x)} + L_{H^*(x)} + 23L_{XOR} + 5L_{AND} + L_{4OR} = 1080 + 640 + 568 + 23 \cdot 40 + 5 \cdot 32 + 48 = 34166.$$

Полученная величина несколько превышает величину сложности реализации, полученной для структуры рис. 3, – она дает устройство с 87,143% от сложности устройства, реализуемого при использовании мажоритарной структуры.

Алгоритм синтеза 2 позволяет для каждой функции дополнения выбрать наилучший вариант переменной и несколько уменьшить сложность конечного отказоустойчивого устройства. Расчеты показали, что наилучшие варианты коррекции получаются при использовании функций дополнения, вычисляемых по формулам  $g_1 = f_1 \oplus x_4$ ,  $g_2 = f_2 \oplus x_3$ ,  $g_3 = f_3 \oplus x_4$ ,  $g_4 = f_4 \oplus x_2$ ,  $g_5 = f_5 \oplus x_4$ . В этом случае получается блок контрольной логики со сложностью технической реализации  $L_{G(x)} = 464$ .

Таким образом, синтез в соответствии со структурой рис. 3, дает отказоустойчивое устройство со сложностью реализации:

$$L_{SCB_2} = L_{F(x)} + L_{H(x)} + L_{G(x)} + 23L_{XOR} + 5L_{AND} + L_{4OR} = 1080 + 560 + 464 + 23 \cdot 40 + 5 \cdot 32 + 48 = 3232.$$

Это составляет 82,449% от сложности устройства, реализованного по мажоритарной структуре.

При использовании для контроля вычислений не блока  $F(x)$ , а блока  $G(x)$ , получаем блок контрольной логики  $H^*(x)$  (табл. 3) со сложностью реализации  $L_{H(x)} = 560$ . Отсюда следует, что устройство, синтезированное по структуре рис. 4, имеет сложность реализации

$$L_{SBC_1} = L_{F(x)} + L_{G(x)} + L_{H^*(x)} + 23L_{XOR} + 5L_{AND} + L_{4OR} = 1080 + 464 + 560 + 23 \cdot 40 + 5 \cdot 32 + 48 = 3232.$$

Это также составляет 82,449% от сложности устройства, реализованного по мажоритарной структуре.

Описание блока контрольной логики  $G(x)$  и блока  $H^*(x)$  для его контроля при использовании различных переменных для коррекции

$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$f_5$	$f_4$	$f_3$	$f_2$	$f_1$	$x_4$	$x_2$	$x_4$	$x_3$	$x_4$	$h_4$	$h_3$	$h_2$	$h_1$
									$g_5$	$g_4$	$g_3$	$g_2$	$g_1$				
0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1

Следует отметить, что структура, приведенная на рис. 4, в ряде случаев может давать даже большие значения показателей сложности технической реализации, чем структура, приведенная на рис. 3. На это влияют особенности СВК для блока логического дополнения  $G(x)$ : блок  $H^*(x)$  может оказаться более сложным, чем аналогичный блок  $H(x)$  для исходного устройства  $F(x)$ .

Анализ полученных результатов говорит о том, что представленные структуры дают лучшие по сложности реализации отказоустойчивые устройства, чем мажоритарная структура. Для еще большего снижения структурной избыточности следует применять для контроля вычислений менее избыточные коды, например коды с суммированием и их модификации [23, 27].

## 5. Экспериментальные результаты

В целях анализа эффективности применения описанных выше структур при синтезе отказоустойчивых цифровых устройств и систем были проведены эксперименты с рядом контрольных комбинационных схем из наборов LG'93 и MCNC Benchmarks [33]. Основной задачей экспериментов была оценка уменьшения показателя структурной избыточности отказоустойчивого устройства для выбранной комбинационной схемы, синтезированного по каждой из предложенных выше структур (рис. 1–4), по сравнению со структурной избыточностью мажоритарной системы (TMR, triple-modular redundancy).

В табл. 4, 5 приведены результаты экспериментов для пяти контрольных комбинационных схем  $dc1$ ,  $rd53$ ,  $p82$ ,  $m1$  и  $max512$ . В табл. 4 подробно представлены данные по показателям сложности технической реализации отказоустойчивых устройств по мажоритарной структуре и по четырем приведенным выше структурам. В качестве показателя сложности технической реализации использована площадь, занимаемая устройством на кристалле, в условных единицах библиотеки функциональных элементов  $stdcell2\_2.genlib$ , а также относительный показатель  $\mu$  – доля площади, занимаемой отказоустойчивым устройством на кристалле, от площади системы с тройной модульной избыточностью (в процентах). Площадь определялась с применением интерпретатора SIS.

При проведении экспериментов структура исходной схемы  $F(x)$  не оптимизировалась (выбиралось законченное устройство). Структуры блоков  $H(x)$ ,  $G(x)$  и  $H^*(x)$  оптимизировались с использованием команды *simplify* в интерпретаторе SIS. В ходе экспериментов синтезировались отказоустойчивые устройства по структуре с тройной модульной избыточностью (TMR), по обоим структурам с двой-

ной модульной избыточностью и дополнительным контролем вычислений одним из блоков (DMR, double-modular redundancy), а также по обеим структурам, использующим принцип логического дополнения (BC, Boolean complement). При этом в процессе синтеза устройств на основе структур рис. 3 и рис. 4 использовался подход, при котором корректирующие функции представляли собой одну выбранный входную переменную (см. алгоритм 1). В табл. 4 приведены данные о показателях сложности технической реализации составляющих структур, а также устройств, использующих тройную и двойную модульную избыточность, а в табл. 5 – о показателях сложности реализации структур на основе принципа логического дополнения.

Таблица 4

Показатели сложности технической реализации составляющих отказоустойчивых структур

Схема	In / Out	Площадь устройств на кристалле, усл. ед. библиотеки <i>stdcell2_2.genlib</i>										
		$F(x)$	$H(x)$	$G(x)$								
				$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
<i>dc1</i>	4/7	976	488	608	576	712	672	–	–	–	–	–
<i>rd53</i>	5/3	880	680	592	592	592	592	592	–	–	–	–
<i>p82</i>	5/14	2 368	1 784	1 976	1 792	1 920	1 864	1 848	–	–	–	–
<i>m1</i>	6/12	3 064	1 296	1 392	1 560	1 456	1 856	1 536	1 832	–	–	–
<i>max512</i>	9/6	9 632	5 480	7 832	6 984	6 456	6 872	6 696	7 104	8 352	9 376	10 192

Площадь устройств на кристалле, усл. ед. библиотеки <i>stdcell2_2.genlib</i>							μ, %
$H^*(x)$	Дополнительные элементы			Структура TMR	Структуры DMR		
	TMR	DMR	BC				
584	952	1 336	1616	3 880	3 776	97,32	
680	408	536	656	3 048	2 976	97,638	
1 784	408	536	656	7 512	7 056	93,93	
1 408	1 632	2 336	2 816	10 824	9 760	90,17	
5 232	816	1 136	1 376	29 712	25 880	87,103	

Анализируя данные таблиц, можно сделать следующие выводы. Отказоустойчивые устройства, реализуемые по предложенным в настоящей работе структурам, получаются, как правило, менее избыточными, чем отказоустойчивые устройства, реализованные по структуре с тройной модульной избыточностью и мажоритарной коррекцией сигналов. Устройства, реализуемые на основе двойной модульной избыточности с контролем вычислений одним из блоков  $F(x)$  или  $F^*(x)$  по  $T_m$ -коду, для большинства схем имеют выигрыш в показателе избыточности по сравнению с TMR-структурой до 10%. Для некоторых схем (например, для схемы *max512*) достигается даже большее улучшение. Реализация устройства по одной из структур, подразумевающих применение принципа логического дополнения, может еще больше сократить сложность технической реализации и уменьшить избыточность. При этом существует достаточно большая вариативность в построении структур. Например, применение алгоритма 1 при выборе функций коррекции значений позволяет строить  $t$  блоков контрольной логики ( $t$  – число входных переменных). Как видно из данных табл. 4, такая вариативность позволяет выбирать наименее избыточную реализацию блока  $G(x)$  для каждого устройства  $F(x)$ . Это, в свою очередь, позволяет синтезировать  $t$  различных по сложности структур рис. 3 и выбирать среди них наиболее эффективный вариант. Для большинства реализаций блоков контрольной логики в рассмотренных примерах блоки  $G(x)$  получались более простыми, чем блок  $F(x)$ , – среди 29 вариантов блоков контрольной логики только один дал блок  $G(x)$  с площадью, большей чем площадь блока  $F(x)$ . Таким образом, практически для всех устройств применение структуры рис. 3 и принципа логического дополнения позволило уменьшить сложность технической реализации по сравнению с реализацией по структурам DMR (рис. 1, 2). Применение структуры рис. 4 в ряде случаев давало эффект в уменьшении сложности технической реализации и по сравнению со структурой рис. 3. Эффект достигался в том случае, если блок  $H^*(x)$  оказывался проще блока  $H(x)$ . Реальный эффект от применения структуры рис. 4 заметен лишь для схемы *max512* из приведенных здесь. Для двух схем, *rd53* и

$p82$ , сложности реализации структур рис. 3 и рис. 4 совпали. Для двух схем,  $dc1$  и  $m1$ , структуры рис. 4 получались несколько более сложными, чем структуры рис. 3, однако превышение находилось на уровне 1–3%. На рис. 5 приведены диаграммы для сравнения показателей  $\mu$  для отказоустойчивых устройств, полученных по структурам, подразумевающим использование принципа логического дополнения. Применение логического дополнения для ряда схем позволило синтезировать отказоустойчивые устройства со сложностью реализации, меньшей сложности TMR-структуры на 20–25%.

Таблица 5

**Показатели сложности технической реализации отказоустойчивых структур на основе логического дополнения**

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
<i>dc1, 4/7</i>								
Структура с контролем блока $F(x)$								
3 688	3 656	3 792	3 752	–	–	–	–	–
95,052	94,227	97,732	96,701	–	–	–	–	–
Структура с контролем блока $G(x)$								
3 784	3 752	3 888	3 848	–	–	–	–	–
97,526	96,701	100,206	99,175	–	–	–	–	–
<i>rd53, 5/3</i>								
Структура с контролем блока $F(x)$								
2 808	2 808	2 808	2 808	2 808	–	–	–	–
92,126	92,126	92,126	92,126	92,126	–	–	–	–
Структура с контролем блока $G(x)$								
2 808	2 808	2 808	2 808	2 808	–	–	–	–
92,126	92,126	92,126	92,126	92,126	–	–	–	–
<i>p82, 5/14</i>								
Структура с контролем блока $F(x)$								
6 784	6 600	6 728	6 672	6 656	–	–	–	–
90,309	87,859	89,563	88,818	88,605	–	–	–	–
Структура с контролем блока $G(x)$								
6 784	6 600	6 728	6 672	6 656	–	–	–	–
90,309	87,859	89,563	88,818	88,605	–	–	–	–
<i>m1, 6/12</i>								
Структура с контролем блока $F(x)$								
8 568	8 736	8 632	9 032	8 712	9 008	–	–	–
79,157	80,71	79,749	83,444	80,488	83,222	–	–	–
Структура с контролем блока $G(x)$								
8 680	8 848	8 744	9 144	8 824	9 120	–	–	–
80,192	81,744	80,783	84,479	81,523	84,257	–	–	–
<i>max512, 9/6</i>								
Структура с контролем блока $F(x)$								
24 320	23 472	22 944	23 360	23 184	23 592	24 840	25 864	26 680
81,852	78,998	77,221	78,621	78,029	79,402	83,603	87,049	89,795
Структура с контролем блока $G(x)$								
24 072	23 224	22 696	23 112	22 936	23 344	24 592	25 616	26 432
81,018	78,164	76,387	77,787	77,194	78,568	82,768	86,214	88,961

Следует отметить, что применение алгоритма 2 при выборе переменных для коррекции функций  $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m$ , позволяет увеличить число вариантов построения блоков  $G(x)$ . В этом случае каждая из  $m$  функций блока контрольной логики может быть получена  $t$  способами (всего  $mt$  способов реализации). Применение алгоритма 2 может позволить еще больше улучшить показатели структурной избыточности за счет «индивидуального» подхода к каждому из рабочих выходов устройства  $F(x)$ .

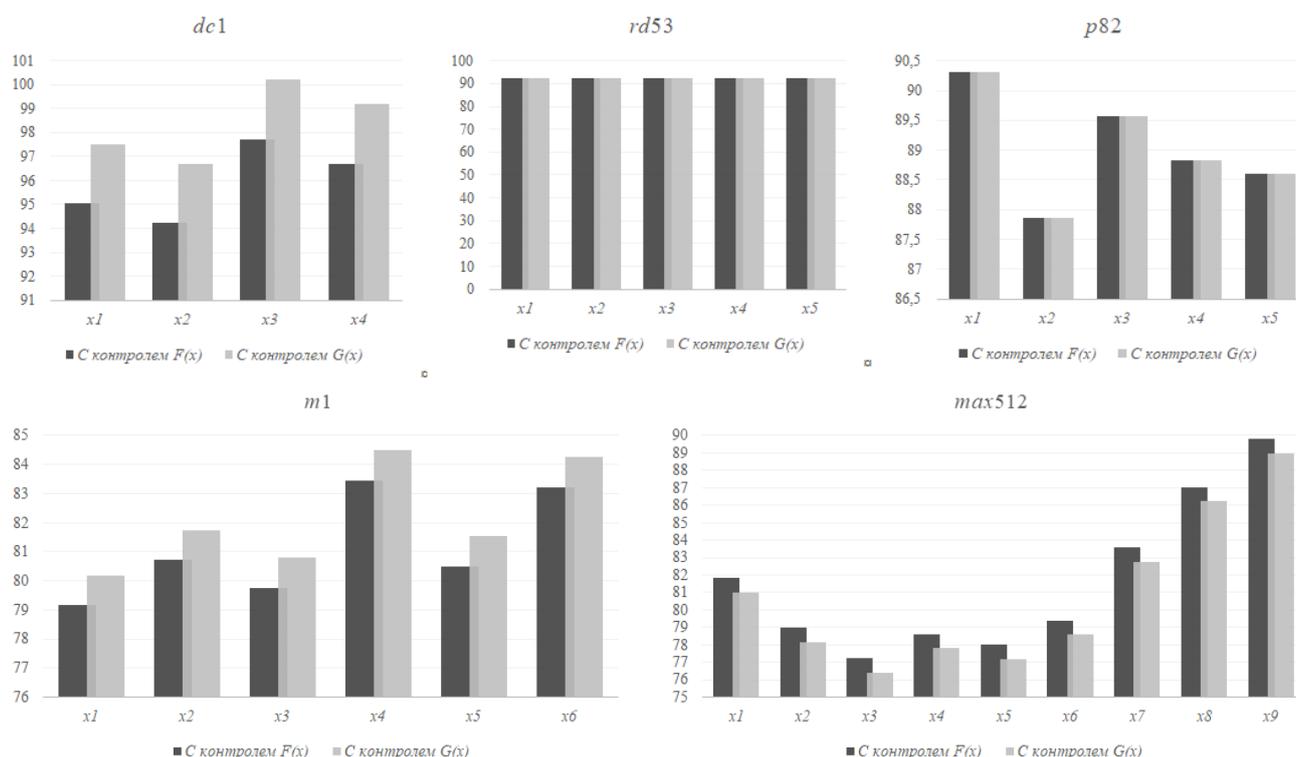


Рис. 5. Сравнение показателей структурной избыточности для различных контрольных комбинационных схем  
 Fig. 5. Comparison of indicators of structural redundancy for various combinational benchmarks

## Заключение

При построении отказоустойчивых цифровых вычислительных устройств и систем могут быть использованы не только традиционные подходы, основанные на тройной модульной избыточности с мажоритарной коррекцией сигналов и двойной модульной избыточности с применением схем сравнения и переключения, но и подходы, основанные на использовании СВК отдельных блоков и логического дополнения для фиксации искаженных сигналов. Подобные структуры синтезируются с учетом следующего ограничения: одновременно возможно возникновение неисправностей только в одном из блоков системы.

Структуры отказоустойчивых устройств и систем, основанные на использовании двойной модульной избыточности с контролем вычислений одним из блоков (основным или резервным) по  $T_m$ -коду, для многих реальных устройств  $F(x)$  позволяют получать менее избыточные отказоустойчивые реализации, чем применение мажоритарной структуры. При этом данные структуры обладают высокой корректирующей способностью за счет возможности фиксации любых сочетаний искажений на выходах объекта диагностирования, за исключением искажений с кратностями  $d = m$ . Применение принципа логического дополнения при синтезе блока ФИС позволяет еще больше сократить структурную избыточность конечного отказоустойчивого устройства, что объясняется возможностями существенного упрощения блока логического дополнения  $G(x)$ .

Необходимо отметить две особенности описанных в настоящей статье структур. Во-первых, за счет использования нескольких последовательных каскадов сумматоров по модулю  $M = 2$  во всех предложенных структурах примерно вдвое уменьшено быстродействие по сравнению с традиционными структурами (пути прохождения сигналов к выходному каскаду увеличены). Однако при современных технологиях реализации цифровых устройств и систем такое снижение быстродействия не представляется столь существенным. Во-вторых, если использование принципов модульной избыточности с устройствами сравнения и коррекции позволяет не анализировать структуры исходных объектов  $F(x)$  и строить их из типовых блоков, то в случае применения описанных подходов такой

анализ требуется при построении СВК и блока ФИС. Для устройств с большим числом входов (более 30) данная задача может быть достаточно трудоемкой, что потребует применения методов декомпозиции при синтезе соответствующих устройств и более сложных процедур проектирования отказоустойчивых устройств и систем. Тем не менее при автоматизации процедур получения функций логического дополнения можно добиться существенного упрощения конечных отказоустойчивых устройств и систем, реализуемых на современной элементной базе, по сравнению с традиционными подходами для решения этой задачи.

Применение логического дополнения и кодовых методов для синтеза самопроверяемых и отказоустойчивых цифровых устройств и систем позволяет расширить число способов их реализации и минимизировать показатели структурной избыточности. Полученные в статье результаты целесообразно учитывать на практике при выборе подхода к синтезу отказоустойчивых цифровых устройств и систем.

В заключение также обратим внимание на возможные перспективы в продолжении исследований в области синтеза отказоустойчивых устройств и систем. Прежде всего отметим еще раз, что предложенные в настоящей статье структуры ориентированы на работу с одиночными неисправностями. Тем не менее при использовании подобных структур в ряде приложений, например в составе устройств и систем критического применения, где входные воздействия могут изменяться достаточно редко [34], будут создаваться условия накопления скрытых неисправностей. В аварийном режиме скрытые неисправности могут начать проявляться в виде кратных отказов, а их последствия – в виде искажения вычисляемых функций, в конечном итоге не корректироваться в предложенных структурах. В дальнейших исследованиях необходимо обращать внимание на проблему контролепригодности подобных структур при их функционировании в штатном режиме и на возможности обнаружения искажаемых функций в рабочем режиме и локализации скрытых дефектов [35–37]. Ее решение может быть связано с повышением обнаруживающей способности схемы контроля, а также с организацией систем тестово-функционального диагностирования [38].

#### Список источников

1. Щербаков Н.С. Самокорректирующиеся дискретные устройства. М. : Машиностроение, 1975. 216 с.
2. Согомонян Е.С., Слабаков Е.В. Самопроверяемые устройства и отказоустойчивые системы. М. : Радио и связь, 1989. 208 с.
3. Lala P.K. Self-Checking and Fault-Tolerant Digital Design. San Francisco : Morgan Kaufmann Publishers, 2001. 216 p.
4. Sogomonyan E.S. Self-Correction Fault-Tolerant Systems : Preprint. 2018, 30 p. URL: [https://www.researchgate.net/publication/328355722\\_Self-Correction\\_Fault-Tolerant\\_Systems](https://www.researchgate.net/publication/328355722_Self-Correction_Fault-Tolerant_Systems)
5. Sellers F.F., Hsiao M.-Y., Beamson L.W. Error Detecting Logic for Digital Computers. New York : McGraw-Hill, 1968, XXI + 295 p.
6. Гаврилов М.А., Остиану В.М., Потехин А.И. Надежность дискретных систем. М. : 1970. 104 с. (Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика).
7. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Христов Х.А., Гавзов Д.В. Методы построения безопасных микроэлектронных систем железнодорожной автоматики / под ред. Вл.В. Сапожникова. М. : Транспорт, 1995. 272 с.
8. Matrosova A.Yu., Levin I., Ostanin S.A. Self-Checking Synchronous FSM Network Design with Low Overhead // VLSI Design. 2000. V. 11, is. 1. P. 47–58.
9. Скляр В.В., Харченко В.С. Отказоустойчивые компьютерные системы управления с версионно-пороговой адаптацией: способы адаптации, оценка надежности, выбор архитектур // Автоматика и телемеханика. 2002. № 6. С. 131–145.
10. Останин С.А. Синтез отказоустойчивых комбинационных схем // Прикладная дискретная математика (приложение № 1). 2009. № 1. С. 71–72.
11. Hamamatsu M., Tsuchiya T., Kikuno T. Finding the Optimal Configuration of a Cascading TMR System // 14th IEEE Pacific Rim International Symposium on Dependable Computing, 15–17 December 2008, Taipei, Taiwan. P. 329–350.
12. Matsumoto K., Uehara M., Mori H. Evaluating the Fault Tolerance of Stateful TMR // 13th International Conference on Network-Based Information Systems, 14–16 September 2010, Takayama, Japan. P. 332–336.
13. Бочков К.А., Харлап С.Н., Сивко Б.В. Разработка отказоустойчивых систем на основе диверситетных базисов // Автоматика на транспорте. 2016. Т. 2, № 1. С. 47–64.
14. Стемповский А.Л., Тельпухов Д.В., Жукова Т.Д., Гуров С.И., Соловьев Р.А. Методы синтеза сбоеустойчивых комбинационных КМОП схем, обеспечивающих автоматическое исправление ошибок // Известия ЮФУ. Технические науки. 2017. № 7 (192). С. 197–210.
15. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Схема коррекции сигналов для комбинационных устройств автоматики на основе логического дополнения с контролем вычислений по паритету // Информатика. 2020. Т. 17, № 2. С. 71–85.

16. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Отказоустойчивая структура на основе логического дополнения с контролем вычислений по паритету // Автоматика на транспорте. 2020. Т. 6, № 3. С. 377–403.
17. Гессель М., Морозов А.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Логическое дополнение – новый метод контроля комбинационных схем // Автоматика и телемеханика. 2003. № 1. С. 167–176.
18. Gössel M., Ocheretny V., Sogomonyan E., Marienfeld D. *New Methods of Concurrent Checking*. Ed. 1. Dordrecht : Springer Science + Business Media B.V., 2008. 184 p.
19. Das D.K., Roy S.S., Dmitriev A., Morozov A., Gössel M. Constraint Don't Cares for Optimizing Designs for Concurrent Checking by 1-out-of-3 Codes // Proc. of the 10th International Workshops on Boolean Problems, Freiberg, Germany, September, 2012. P. 33–40.
20. Saposhnikov V.I., Dmitriev A., Goessel M., Saposhnikov V.V. Self-Dual Parity Checking – a New Method for on Line Testing // Proc. of 14th IEEE VLSI Test Symposium. USA, Princeton, 1996. P. 162–168.
21. Efanov D., Sapozhnikov V., Sapozhnikov V.I., Osadchy G., Pivovarov D. Self-Dual Complement Method up to Constant-Weight Codes for Arrangement of Combinational Logical Circuits Concurrent Error-Detection Systems // Proc. of 17th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2019), Batumi, Georgia, September 13–16, 2019. P. 136–143.
22. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В., Дмитриев В.В. Новые структуры систем функционального контроля логических схем // Автоматика и телемеханика. 2017. № 2. С. 127–143.
23. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Коды с суммированием для систем технического диагностирования. М. : Наука, 2021. Т. 2: Взвешенные коды с суммированием. 455 с.
24. Sapozhnikov V., Sapozhnikov V.I., Efanov D. Typical Signal Correction Structures Based on Duplication with the Integrated Control Circuit // Proc. of 18th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2020), Varna, Bulgaria, September 4–7, 2020. P. 78–87.
25. Efanov D.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I.V. Typical Structure of a Duplicate Error Correction Scheme with Code Control with Summation of Weighted Transitions // Electronic Modeling. 2020. V. 42, is. 5. P. 38–50.
26. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Коды Хэмминга в системах функционального контроля логических устройств. СПб. : Наука, 2018. 151 с.
27. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Коды с суммированием для систем технического диагностирования. М. : Наука, 2020. Т. 1: Классические коды Бергера и их модификации. 383 с.
28. Nikolos D. Self-Testing Embedded Two-Rail Checkers // Journal of Electronic Testing. 1998. V. 12. P. 69–79.
29. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Основы теории надежности и технической диагностики. СПб. : Лань, 2019. 588 с.
30. Zakrevskij A., Pottosin Yu., Cheremisinova L. *Optimization in Boolean Space*. Tallinn : TUT Press, 2009. 241 p.
31. Sentovich E.M., Singh K.J., Moon C., Savoj H., Brayton R.K., Sangiovanni-Vincentelli A. Sequential Circuit Design Using Synthesis and Optimization // Proc. IEEE International Conference on Computer Design: VLSI in Computers & Processors, 11–14 October 1992, Cambridge, MA, USA. P. 328–333.
32. SIS: A System for Sequential Circuit Synthesis / E.M. Sentovich, K.J. Singh, L. Lavagno, C. Moon, R. Murgai, A. Saldanha, H. Savoj, P.R. Stephan, R.K. Brayton, A. Sangiovanni-Vincentelli / Electronics Research Laboratory, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California. Berkeley, 1992. 45 p.
33. Collection of Digital Design Benchmarks. URL: <http://ddd.fit.cvut.cz/www/prj/Benchmarks/>
34. Сапожников Вл.В. Синтез систем управления движением поездов на железнодорожных станциях с исключением опасных отказов. М. : Наука, 2021. 230 с.
35. Drozd A., Kharchenko V., Antoshchuk S., Sulima J., Drozd M. Checkability of the Digital Components in Safety-Critical Systems: Problems and Solutions // Proc. of 9th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2011). Sevastopol, 2011. P. 411–416.
36. Drozd A., Drozd M., Martynyuk O., Kuznietsov M. Improving of a Circuit Checkability and Trustworthiness of Data Processing Results in LUT-based FPGA Components of Safety-Related Systems // CEUR Workshop Proc. 2017. Vol. 1844. P. 654–661. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1844/10000654.pdf>
37. Drozd O., Perebeinos I., Martynyuk O., Zashcholkin K., Ivanova O., Drozd M. Hidden Fault Analysis of FPGA Projects for Critical Applications // Proc. of the IEEE International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET), 2020, 25–29 February, Lviv–Slavsko, Ukraine. Paper 142.
38. Литиков И.П., Согомонян Е.С. Тестово-функциональное диагностирование цифровых устройств и систем // Автоматика и телемеханика. 1985. № 3. С. 111–121.

## References

1. Shcherbakov, N.S. (1975) *Samokorrektiruyushchiesya diskretnye ustroystva* [Self-correcting discrete devices]. Moscow: Mashinostroenie.
2. Sogomonyan, E.S. & Slabakov, E.V. (1989) *Samoproveryaemye ustroystva i otkazoustoychivye sistemy* [Self-checking devices and fault-tolerant systems]. Moscow: Radio i svyaz'.
3. Lala, P.K. (2001) *Self-checking and fault-tolerant digital design*. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers.
4. Sogomonyan, E.S. (2018) *Self-correction fault-tolerant systems*. [preprint].
5. Sellers, F.F., Hsiao, M.-Y. & Beamson, L.W. (1968) *Error Detecting Logic For Digital Computers*. New York: McGraw-Hill.

6. Gavrilo, M.A., Ostianu, V.M. & Potekhin, A.I. (1969, 1970) *Nadezhnost' diskretnykh sistem* [Reliability of Discrete Systems]. Moscow: [s.n.]. pp. 7–104.
7. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.I., Khristov, H.A. & Gavzov, D.V. (1995) *Metody postroeniya bezopasnykh mikroelektronnykh sistem zheleznodorozhnoy avtomatiki* [Methods for constructing safety microelectronic systems of railway automation]. Moscow: Transport.
8. Matrosova, A.Yu., Levin I. & Ostanin, S.A. (2000) Self-Checking Synchronous FSM Network Design with Low Overhead. *VLSI Design*. 11(1). pp. 47–58. DOI: 10.1155/2000/46578.
9. Sklyar, V.V. & Kharchenko, V.S. (2002) Fault-Tolerant Computer-Aided Control Systems with Multiversion-Threshold Adaptation: Adaptation Methods, Reliability Estimation, and Choice of an Architecture. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 6. pp. 131–145.
10. Ostanin, S.A. (2009) Sintez otказoustoychivyykh kombinatsionnykh skhem [Synthesis of Fault-Tolerant Combinational Circuits]. *Prikladnaya diskretnaya matematika (prilozhenie № 1)*. 1. pp. 71–72.
11. Hamamatsu, M., Tsuchiya, T. & Kikuno, T. (2008) Finding the Optimal Configuration of a Cascading TMR System. *14th IEEE Pacific Rim International Symposium on Dependable Computing*. Taipei, Taiwan. December 15-17, 2008. pp. 329–350. DOI: 10.1109/PRDC.2008.12.
12. Matsumoto, K., Uehara, M. & Mori, H. (2010) Evaluating the Fault Tolerance of Stateful TMR. *13th International Conference on Network-Based Information Systems*. Takayama, Japan. September 14–16, 2010. pp. 332–336. DOI: 10.1109/NBiS.2010.86
13. Bochkov, K.A., Harlap, S.N. & Sivko, B.V. (2016) Design of Axiomatic Based Fault-Tolerant Systems. *Avtomatika na transporte – Automation on Transport*. vol. 2, Issue 1, pp. 47–64.
14. Stempkovskiy, A.L., Telpuhov, D.V., Zhukova, T.D., Gurov, S.I. & Soloviev, R.A. (2017) Synthesis Methods of Fault-Tolerant Combination CMOS Circuits, Providing Automatic Correction of Errors. *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki – Izvestiya SFedU. Engineering sciences*. 7(192). pp. 197–210. DOI: 10.23683/2311-3103-2017-7-197-210.
15. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.I. & Efanov, D.V. (2020) Signal Correction for Combinational Automation Devices on the Basis of Boolean Complement with Control of Calculations by Parity. *Informatika – Informatics*. 17(2). pp. 71–85. DOI: 10.37661/1816-0301-2020-17-2-71-85.
16. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.I. & Efanov, D.V. (2020) Fault-Tolerant Structure Based on Boolean Complement with Parity Calculations Control. *Avtomatika na transporte – Automation on Transport*. 6(3). pp. 377–403. DOI: 10.20295/2412-9186-2020-6-3-377-403.
17. Gessel, M., Morozov, A.V., Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, V.I. (2003) Logic Complement, a New Method of Checking the Combinational Circuits. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 1. pp. 167–176.
18. Gössel, M., Ocheretny, V., Sogomonyan, E. & Marienfeld, D. (2008) *New Methods of Concurrent Checking*. 1st ed. Dordrecht: Springer Science+Business Media B.V.
19. Das, D.K., Roy, S.S., Dmitriev, A., Morozov, A. & Gössel, M. (2012) Constraint Don't Cares for Optimizing Designs for Concurrent Checking by 1-out-of-3 Codes. *Proc. of the 10th International Workshops on Boolean Problems*. Freiberg, Germany, September. pp. 33–40.
20. Sapozhnikov, V.I., Dmitriev, A., Gössel, M. & Sapozhnikov, V.V. (1996) Self-Dual Parity Checking – a New Method for on Line Testing. *Proceedings of 14th IEEE VLSI Test Symposium*. USA, Princeton. pp. 162–168.
21. Efanov, D., Sapozhnikov, V., Sapozhnikov, V.I., Osadchy, G. & Pivovarov, D. (2019) Self-Dual Complement Method up to Constant-Weight Codes for Arrangement of Combinational Logical Circuits Concurrent Error-Detection Systems, *Proc. of 17th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2019)*. Batumi, Georgia. September 13–16. pp. 136–143. DOI: 10.1109/EWDTS.2019.8884398
22. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.I., Efanov, D.V. & Dmitriev, V.V. (2017) New Structures of the Concurrent Error Detection Systems for Logic Circuits. *Automation and Remote Control*. 2. pp. 127–143.
23. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.I. & Efanov, D.V. (2021) *Kody s summirovaniem dlya sistem tekhnicheskogo diagnostirovaniya* [Sum codes for technical diagnostics systems]. Vol. 2. Moscow: Nauka.
24. Sapozhnikov, V., Sapozhnikov, V.I. & Efanov, D. (2020) Typical Signal Correction Structures Based on Duplication with the Integrated Control Circuit. *Proc. of 18th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2020)*. Varna, Bulgaria. September 4–7, 2020. pp. 78–87. DOI: 10.1109/EWDTS50664.2020.9224649
25. Efanov, D.V., Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, V.I. (2020) Typical Structure of a Duplicate Error Correction Scheme with Code Control with Summation of Weighted Transitions. *Electronic Modeling*. 42(5). pp. 38–50. DOI: 10.15407/emodel.42.05.038
26. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.I. & Efanov, D.V. (2018) *Kody Khemminga v sistemakh funktsional'nogo kontrolya logicheskikh ustroystv* [Hamming codes in concurrent error detection systems of logic devices]. St. Petersburg: Nauka.
27. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.I. & Efanov, D.V. (2020) *Kody s summirovaniem dlya sistem tekhnicheskogo diagnostirovaniya* [Sum Codes for Technical Diagnostics Systems]. Vol. 1. Moscow: Nauka.
28. Nikolos, D. (1998) Self-Testing Embedded Two-Rail Checkers. *Journal of Electronic Testing*. 12. pp. 69–79. DOI: 10.1007/978-1-4757-60-69-9\_7.
29. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.I. & Efanov, D.V. (2019) *Osnovy teorii nadezhnosti i tekhnicheskoy diagnostiki* [Fundamentals of the theory of reliability and technical diagnostics]. St. Petersburg: Lan'.
30. Zakrevskiy, A., Pottosin, Yu. & Cheremisinova, L. (2009) *Optimization in Boolean Space*. Tallinn: TUT Press.

31. Sentovich, E.M., Singh, K.J., Moon, C., Savoj, H., Brayton, R.K. & Sangiovanni-Vincentelli, A. (1992) Sequential Circuit Design Using Synthesis and Optimization. *Proc. IEEE International Conference on Computer Design: VLSI in Computers & Processors*. Cambridge, MA, USA. October 11–14. pp. 328–333. DOI: 10.1109/ICCD.1992.276282
32. Sentovich, E.M., Singh, K.J., Lavagno, L., Moon, C., Murgai, R., Saldanha, A., Savoj, H., Stephan, P.R., Brayton, R.K. & Sangiovanni-Vincentelli, A. (1992) *SIS: A system for sequential circuit synthesis. electronics research laboratory*. Department of Electrical Engineering and Computer Science. University of California, Berkeley. 4th May.
33. Czechia. (n.d.) Collection of Digital Design Benchmarks. [Online] Available from: <http://ddd.fit.cvut.cz/www/prj/Benchmarks/>
34. Sapozhnikov, V.I.V. (2021) *Sintez sistem upravleniya dvizheniem poezdov na zheleznodorozhnykh stantsiyakh s isklyucheniem opasnykh otkazov* [Synthesis of train traffic control systems at railway stations with the exception of dangerous failures]. Moscow: Nauka.
35. Drozd, A., Kharchenko, V., Antoshchuk, S., Sulima, J. & Drozd, M. (2011) Checkability of the Digital Components in Safety-Critical Systems: Problems and Solutions. *Proc. of 9th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2011)*. Sevastopol, Ukraine. pp. 411–416. DOI: 10.1109/EWDTS.2011.6116606
36. Drozd, A., Drozd, M., Martynyuk, O. & Kuznetsov, M. (2017) Improving of a Circuit Checkability and Trustworthiness of Data Processing Results in LUT-based FPGA Components of Safety-Related Systems. *CEUR Workshop Proceedings*. 1844. pp. 654–661. [Online] Available from: <http://ceur-ws.org/Vol-1844/10000654.pdf>
37. Drozd, O., Perebeinos, I., Martynyuk, O., Zashcholkin, K., Ivanova, O. & Drozd, M. (2020) Hidden Fault Analysis of FPGA Projects for Critical Applications. *Proc. of the IEEE International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET)*. Lviv-Slavsko, Ukraine. February 25–29. Paper 142. DOI: 10.1109/TCSET49122.2020.235591
38. Litikov, I.P. & Sogomonyan, E.S. (1985) Test and Functional Diagnosis of Digital Devices and Systems. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 3. pp. 111–121.

**Информация об авторе:**

**Ефанов Дмитрий Викторович** – доктор технических наук, профессор кафедры автоматки, телемеханики и связи на железнодорожном транспорте Российского университета транспорта (Москва, Россия); профессор Высшей школы транспорта Института машиностроения, материалов и транспорта Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: TrES-4b@yandex.ru

**Information about the author:**

**Efanov Dmitry Viktorovich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Russian University of Transport (Moscow, Russian Federation); Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg, Russian Federation). E-mail: TrES-4b@yandex.ru

*Поступила в редакцию 11.06.2021; принята к публикации 28.02.2022*

*Received 11.06.2021; accepted for publication 28.02.2022*

**Научный журнал**

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

**2022. № 58**

Редактор Е.Г. Шумская  
Оригинал-макет Е.Г. Шумской  
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева  
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 31.03.2022 г. Формат 60x84<sup>1/8</sup>.  
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 14,6.  
Тираж 250 экз. Заказ № 4940. Цена свободная.

Дата выхода в свет 05.04.2022 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании  
Издательства Томского государственного университета  
634050, г. Томск, Ленина, 36  
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75  
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)