

**В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2022

№ 76

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Рогаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, М.А. Шерemet, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaev (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бухтяк М.С., Есипов Д.Е. Псевдоминимальные поверхности вращения	5
Имомов А.А., Эшниязов А.И. Бесконечномерные бистохастические квадратичные операторы в пространстве l_1	20
Тимошенко Е.А., Третьяков И.В. Определяемость вполне разложимой группы ранга 3 её группой автоморфизмов	32

МЕХАНИКА

Азин А.В., Марицкий Н.Н., Пономарев С.В., Рикконен С.В. Прогнозирование долговечности паяных контактных соединений микросхем	43
Архипов В.А., Басалаев С.А., Перфильева К.Г., Поленчук С.Н., Усанина А.С. Методы определения коэффициента сопротивления при вдуве газа с поверхности сферической частицы	56
Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в декартовых координатах при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений	70
Галушина Т.Ю., Николаева Е.А., Красавин Д.С., Летнер О.Н. Применение методов машинного обучения для классификации резонансного движения астероидов	87
Дмитриев В.С., Миньков Л.Л., Костюченко Т.Г., Дердященко В.В., Панфилов Д.С., Ермаков Д.В. Минимизация виброактивности малошумных вентиляторов	101
Зиятдинов М.Х., Жуков А.С., Евсеев Н.С., Марков М.А., Бобырь В. В., Ткачев Д.А., Никитин П.Ю. Исследование структуры и свойств изделий из жаростойких сплавов на основе Ni–Cr–CrN с высоким содержанием азота, полученных с применением аддитивной технологии прямого лазерного сплавления порошковых материалов	118
Копылов Н.П., Копылов С.Н., Карпов А.В., Федоткин Д.В., Сушкина Е.Ю. Теоретическое и экспериментальное исследование пожаров в крупных топливных резервуарах и создание инновационной технологии их тушения	131
Нафиков М.З., Загиров И.И., Каримов Х.Т., Пермяков В.Н., Ахметьянов И.Р. Математическое моделирование движения зерноочистительной машины с приводом от линейного электродвигателя	150
Сахабутдинова Л.Р., Сметанников О.Ю., Ильиных Г.В. Численное моделирование процесса изготовления крупногабаритного композитного кокона с учетом термовязкоупругости	165

CONTENTS

MATHEMATICS

Bukhtyak M.S., Yesipov D.E. Pseudo-minimal surfaces of revolution	5
Imomov A.A., Eshniyazov A.I. Infinite distochastic square operators in l_1	20
Timoshenko E.A., Tretyakov I.V. Determinability of a completely decomposable rank 3 group by its automorphism group	32

MECHANICS

Azin A.V., Maritsky N.N., Ponomarev S.V., Rikkonen S.V. Prediction of durability of soldered contact joints of chips	43
Arkhipov V.A., Basalaev S.A., Perfilieva K.G., Polenchuk S.N., Usanina A.S. Methods for determining the drag coefficient at gas injection from the surface of spherical particle	56
Bakushev S.V. Differential equations of continuum equilibrium for plane deformation in cartesian axials at biquadratic approximation of closing equations	70
Galushina T.Yu., Nikolaeva E.A., Krasavin D.S., Lenter O.N. Application of machine learning methods for the classification of asteroid resonance motion	87
Dmitriev V.S., Minkov L.L., Kostyuchenko T.G., Derdiyashchenko V.V., Panfilov D.S., Ermakov D.V. Minimizing vibration of low-noise fans	101
Ziatdinov M.Kh., Zhukov A.S., Evseev N.S., Markov M.A., Bobyr' V.V., Tkachev D.A., Nikitin P.Yu. Study of the structure and properties of products made of heat-resistant alloys based on Ni–Cr–CrN with a high nitrogen content by direct metal laser sintering	118
Kopylov N.P., Kopylov S.N., Karpov A.V., Fedotkin D.V., Sushkina E.Yu. Theoretical and experimental investigation of fires in large fuel tanks and creation of an innovative technology of their extinguishment	131
Nafikov M.Z., Zagirov I.I., Karimov Kh.T., Permyakov V.N., Akhmet'yanov I.R. Determination of electromagnetic force of a linear electric motor in the drive of a grain cleaning machine by modeling	150
Sakhabutdinova L.R., Smetannikov O.Yu., Il'inykh G.V. Numerical simulation of the process manufacture of large-scale composite shell taking into account thermo viscoelastic	165

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 519.65

MSC 53Z30

doi: 10.17223/19988621/76/1

Псевдоминимальные поверхности вращения

Михаил Степанович Бухтяк¹, Дмитрий Евгеньевич Есипов²^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия¹ bukhtyak@mail.ru² desipov@gmail.com

Аннотация. Данная публикация продолжает серию работ М.С. Бухтяка о моделировании формы ортотропного упругого материала, принимающего равновесную форму внутри области, граница которой указана. М.С. Бухтяк в ряде публикаций 2016–2020 гг. предложил подход к построению модели, основанный на использовании поверхностей с постоянным отношением главных кривизн. Эти поверхности названы псевдоминимальными поверхностями. В указанный период доказана теорема существования, построена конечно-элементная модель. Условие, выделяющее класс псевдоминимальных поверхностей, примененное к линейчатым поверхностям, либо выполняется тождественно (тривиальные подклассы), либо выполняется вдоль семейства линий. Соответствующим классам линейчатых поверхностей дана исчерпывающая геометрическая характеристика. Дифференциальное уравнение в частных производных, задающее (в локальном смысле) класс псевдоминимальных поверхностей, весьма сложно для анализа, что делает актуальным вопрос о приближенных решениях. В предложенной работе рассматриваются псевдоминимальные поверхности вращения. Построение приближенных решений осложняется тем, что формальный полином Тейлора проявляет склонность расходиться. Тем не менее приближенные решения (разумеется, не идеальные) строятся.

Ключевые слова: поверхность вращения, меридиан, дифференциальное уравнение, расходящийся ряд, аппроксимация решения

Для цитирования: Бухтяк М.С., Есипов Д.Е. Псевдоминимальные поверхности вращения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 5–19. doi: 10.17223/19988621/76/1

Pseudo-minimal surfaces of revolution

Mikhail S. Bukhtyak¹, Dmitrii E. Yesipov²

^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ bukhtyakm@mail.ru

² desipov@gmail.com

Abstract. This paper is a follow-up to the first author's series of works about shape modeling of orthotropic elastic material that takes the equilibrium form inside the area with the specified boundaries. M.S. Bukhtyak, in a number of his publications of 2016–2020, proposed an approach to the model building based on the application of surfaces with a constant ratio of principal curvatures. These surfaces are named pseudo-minimal surfaces. The theorem of existence has been demonstrated and the finitely-element model has been built. The condition distinguishing the class of pseudo-minimal surfaces, as applied to ruled surfaces, is either satisfied identically (trivial subclasses) or is satisfied along a family of lines. The corresponding classes of ruled surfaces have been comprehensively characterized geometrically. A partial differential equation that defines (in the local sense) the class of pseudo-minimal surfaces is very complex for analysis, which makes it relevant to consider approximate solutions. The current paper considers the pseudo-minimal surfaces of revolution. Generation of the approximate solutions is complicated by the tendency of the formal Taylor polynomial to diverge. However, the approximate solutions (of course, not ideal) have been generated.

Keywords: surface of revolution, meridian, differential equation, diverging sequence, approximation of the solution

For citation: Bukhtyak, M.S., Yesipov, D.E. (2022) Pseudo-minimal surfaces of revolution. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 5–19. doi: 10.17223/19988621/76/1

Вступительные замечания

Отражающая поверхность орбитального рефлектора – трикотажное полотно из вольфрамовых либо молибденовых нитей, которому с помощью поддерживающих конструкций придают форму, по возможности близкую к вырезке из параболоида вращения. Описание реальной поверхности сетеполотна предполагает наличие модели поверхности тонкого упругого материала внутри некоторого ограничивающего контура. В случае изотропного материала подходящей моделью является минимальная поверхность (сумма главных кривизн равна нулю). Сетеполотно, однако, ортотропно (коэффициенты растяжения в двух ортогональных направлениях постоянны и неодинаковы). Для моделирования в случае ортотропности М.С. Бухтыком предложен класс поверхностей с постоянным отношением главных кривизн (они названы псевдоминимальными).

Ототропность сетеполотна как существенное его качество указано еще в 2011 г. А.П. Жуковым [1], хотя для зонтичного рефлектора он счел возможным ортотропностью пренебречь. Класс поверхностей с постоянным отношением главных кривизн отмечен С.Г. Гаспаряном [2] (со ссылкой на Пауля Штекера) как подкласс

изотермических поверхностей. Поверхность с постоянным отношением главных кривизн упомянута в монографии [3, с. 143] при описании формы деформированной пластины из (в основном) механических соображений. Следует отметить, что главные кривизны, входящие в классическое уравнение теплопроводности Лапласа (в трактовке А.И. Русанова [4]) подразумевают анизотропию поверхности по кривизне, и ее следует дополнить анизотропией по поверхностному натяжению.

Моделирование формы сетеполотна должно учитывать подверженность его так называемому «матрасному эффекту», который сопровождает раскрытие зонтика: прогиб ткани внутрь купола. Решение этой задачи для изотропного сетеполотна, прикрепленного к соседним ребрам осесимметричного рефлектора, предложено в [5]. В основу положены уравнения равновесия тонкой упругой оболочки. Работы М.С. Бухтяк 2016–2017 гг. призваны распространить моделирование на ортотропные материалы, а также на области, границы которых могут быть заранее не указаны. Это привело к понятию «псевдоминимальная поверхность» – попросту поверхность с постоянным отношением главных кривизн. Такое отношение выражается через экстремальные значения коэффициентов растяжения упругого материала в двух ортогональных направлениях (для ортотропного материала).

Первое применение указанной конструкции (в ограниченном смысле) – в работе [6], где, по примеру [5], давалась оценка формы сетеполотна лепестка осесимметричного рефлектора, но для ортотропного материала и путем построения поверхности, для которой условие псевдоминимальности выполнено вдоль линии симметрии (осевой линии) точно, а на лепестке в целом – приближенно.

Отметим, что алгоритм конечно-элементного моделирования псевдоминимальной поверхности разработан в [7]. Наконец, в [8] исследован вопрос о постоянстве отношения главных кривизн вдоль семейства линий линейчатой поверхности.

Пусть сетеполотно ортотропно, и коэффициент его растяжения в радиальном направлении равен $\text{коэфф}_{\text{рад}}$, а вдоль окружностей, ортогональных радиусам, – $\text{коэфф}_{\text{окр}}$. В статье [9] введен коэффициент ортотропности сетеполотна

$$a = \left(\frac{\text{коэфф}_{\text{рад}}}{\text{коэфф}_{\text{окр}}} \right)^2.$$

Таким образом, этот коэффициент вводился как существенно положительный.

В работе [10] определена псевдоминимальная поверхность веса a как гладкая поверхность, главные кривизны которой k_1 и k_2 связаны (в случае упорядоченности) соотношением

$$k_1 + ak_2 = 0 \text{ при } a = \text{const}.$$

Если отвлечься от первоначального смысла коэффициента a , то нет оснований связывать его условием положительности, приводящим к поверхности неположительной гауссовой кривизны. В данной работе мы считаем его произвольным вещественным числом.

Интерес к поверхностям вращения обусловлен (кроме прочего) тем вниманием, которое уделяется им в строительстве и архитектуре. Вполне адекватное суждение по этому вопросу можно получить благодаря монографии трех авторитетных специалистов [11]. Стоит отметить, что детальное описание частных классов поверхностей сопровождается основательными ссылками на источники сведений о применениях в строительстве и механике. В диссертации З.В. Беляевой [12]

детально прослеживаются особенности применения поверхностей вращения. О глубине проникновения геометрии поверхностей в архитектуру (хотя и косвенным образом) свидетельствуют [13–15]. Свойства линейчатых поверхностей, делающие эти поверхности привлекательными для строителя, обоснованы, например, в статье [16]. Локальную близость к поверхностям вращения можно обнаружить у поверхностей, рассмотренных в [17–19].

Авторы полагают, что характеристика ортотропных свойств упругого материала может иметь значение для конструкций, использующих поверхности вращения.

Все функции, рассматриваемые в данной работе, предполагаются имеющими класс гладкости, достаточный для корректности тех конструкций, где они применены.

1. Меридиан псевдоминимальной поверхности вращения.

Аналитические решения

Рассмотрим поверхность вращения. Индивидуализация главных кривизн совершается естественным путем: k_1 – кривизна меридиана, k_2 – кривизна (с обратным знаком) параллели.

Пусть координатная ось Ox – ось вращения, и уравнения начального меридиана имеют вид:

$$z = 0, \quad y = y(x), \quad y(x) \in C^2.$$

Тогда

$$k_1 = \frac{\frac{d^2}{dx^2} y(x)}{\left(1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2\right)^{3/2}}, \quad k_2 = \frac{-1}{y(x) \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2}}.$$

Псевдосредняя кривизна, согласно [9], равна

$$H(y(x), a) \equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) y(x) - a \left(1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2\right). \quad (1)$$

Для отыскания псевдоминимальных поверхностей следует решить дифференциальное уравнение

$$H(y(x), a) = 0. \quad (2)$$

Исключая очевидно тривиальное решение, полагаем $a \neq 0$.

Уравнение искомого начального меридиана, таким образом, имеет вид:

$$U(y(x), a) \equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) - \frac{a \left(1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2\right)}{y(x)} = 0. \quad (3)$$

Общее решение уравнения (3) определяется неявным образом уравнением

$$x - c_2 + y(x) \operatorname{hypergeom} \left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2a} \right], \left[\frac{2a+1}{2a} \right], -iy(x)^{2a} c_1 (-1)^\Phi \right) i = 0,$$

$$\Phi = -\frac{1}{2} c \operatorname{sgn}(c_1 i) + \frac{1}{2} c \operatorname{sgn}(y(x)^{2a} i) + \frac{1}{2} c \operatorname{sgn}(y(x)^{2a} i) c \operatorname{sgn}(c_1 i).$$

Ясно, что такое задание бесполезно для инженерных целей.

Вернувшись к (3), видим, что при $a=1$ (изотропное сетеполотно) линии $y = y(x)$ суть цепные линии (что видно и без (3), поскольку, как отмечено выше, в этом случае имеем минимальную поверхность вращения – катеноид). Тем самым исчерпан вопрос о форме меридиана для изотропного упругого материала. Еще один класс решений мы получим, полагая $a = \frac{1}{2}$. Общее решение дает семейство парабол

$$y(x) = \frac{(1+p_1^2)x^2}{4p_2} + p_1x + p_2, \quad p_2 \neq 0.$$

Очевидная подстановка $\frac{dy}{dx} = g(y)$ позволяет свести решение уравнения (3) к интегралу

$$x(y) = \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 y^{2a} - 1}}. \quad (4)$$

Имеются два семейства значений параметра a , позволяющих решить уравнение (4) в элементарных функциях.

Первое семейство

Первое семейство получаем, полагая

$$a = \frac{1}{2s}, \quad s \in \mathbb{Z}, \quad s \neq 0.$$

Замена переменной

$$y = Y_s(t) = \left(\frac{t^2 + 1}{c_1} \right)^{\frac{1}{2a}} = \left(\frac{t^2 + 1}{c_1} \right)^s$$

сводит задачу к вычислению интеграла

$$X_s(t) = 2c_1^{-s} s \int (t^2 + 1)^{s-1} dt + c_2.$$

Получаем для различных значений s параметрические задания линий

$$x = X_s(t), \quad y = Y_s(t).$$

В частности,

$$X_{-3} = -\frac{c_1^3 t}{(t^2 + 1)^3} - \frac{5c_1^3 t}{4(t^2 + 1)^2} - \frac{15}{8} \frac{c_1^3 t}{t^2 + 1} - \frac{15}{8} c_1^3 \arctan(t) + c_2, \quad Y_{-3} = \frac{c_1^3}{(t^2 + 1)^3},$$

$$X_{-2} = -\frac{c_1^2 t}{(t^2 + 1)^2} - \frac{3c_1^2 t}{2(t^2 + 1)} - \frac{3c_1^2}{2} \arctan(t) + c_2, \quad Y_{-2} = \frac{c_1^2}{(t^2 + 1)^2},$$

$$X_{-1} = -\frac{c_1 t}{t^2 + 1} - c_1 \arctan(t) + c_2, \quad Y_{-1} = \frac{c_1}{t^2 + 1}.$$

Полагая $c_1 = 1, c_2 = 0$, изобразим соответствующие линии (рис. 1).

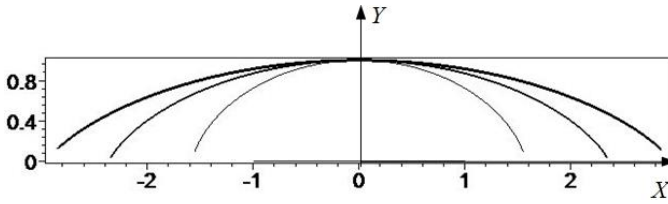


Рис. 1. Линии для значений s , равных $-1, -2, -3$ (снизу вверх)

Fig. 1. Lines for the values of s equal to $-1, -2$, and -3 (from bottom to top)

Аналогично, для положительных значений параметра a

$$X_1 = \frac{2t}{c_1} + c_2, \quad Y_1 = \frac{t^2 + 1}{c_1},$$

$$X_2 = \frac{4t(t^2 + 3)}{3c_1^2} + c_2, \quad Y_2 = \frac{(t^2 + 1)^2}{c_1^2},$$

$$X_3 = \frac{2t(15 + 3t^4 + 10t^2)}{5c_1^3} + c_2, \quad Y_3 = \frac{(t^2 + 1)^3}{c_1^3}.$$

При тех же значениях констант $c_1 = 1, c_2 = 0$ получаем линии, изображенные на рис. 2.

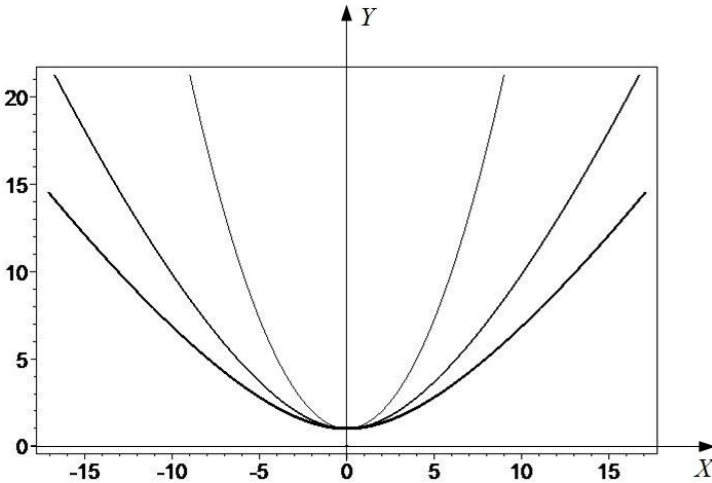


Рис. 2. Линии для значений s , равных $1, 2, 3$ (сверху вниз)

Fig. 2. Lines for the values of s equal to $1, 2$, and 3 (from top to bottom)

Второе семейство

Еще одно счетное семейство получаем при

$$a = \frac{1}{2k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Замена переменной в (4)

$$y = Y_k(z) = \left(\frac{1}{c_1 - z^2} \right)^{k + \frac{1}{2}}$$

позволяет находить, согласно (4),

$$X_k(z) = (2k+1) \int (c_1 - z^2)^{-k-1} dz + c_2.$$

В частности,

$$X_{-3}(z) = -z^5 + \frac{10}{3}c_1z^3 - 5c_1^2z + c_2,$$

$$X_{-2}(z) = z^3 - 3c_1z + c_2, \quad X_{-1}(z) = -z + c_2,$$

$$X_0(z) = \left(\operatorname{arctanh} \left(\frac{z}{\sqrt{c_1}} \right) + c_2\sqrt{c_1} \right) \frac{1}{\sqrt{c_1}},$$

$$X_1(z) = -\frac{1}{2} \left(3z\sqrt{c_1} - 3\operatorname{arctanh} \left(\frac{z}{\sqrt{c_1}} \right) z^2 + 3\operatorname{arctanh} \left(\frac{z}{\sqrt{c_1}} \right) c_1 - 2c_2c_1^{\frac{3}{2}}z^2 + 2c_2c_1^{\frac{5}{2}} \right) \times \\ \times c_1^{-\frac{3}{2}}(z^2 - c_1)^{-1},$$

$$Y_{-3}(z) = (c_1 - z^2)^{\frac{5}{2}}, \quad Y_{-2}(z) = (c_1 - z^2)^{\frac{3}{2}}, \quad Y_{-1}(z) = \sqrt{c_1 - z^2},$$

$$Y_0(z) = \frac{1}{\sqrt{-z^2 + c_1}}, \quad Y_1(z) = (c_1 - z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Полагая $c_1 = 1, c_2 = 0$, изобразим соответствующие линии (рис. 3).

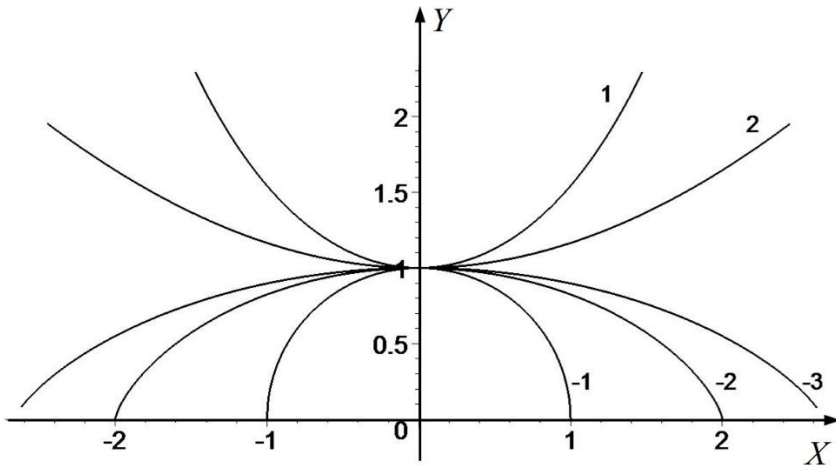


Рис. 3. Линии для значений с указанием значения параметра k

Fig. 3. Lines of the values indicating the parameter k

2. Полиномиальная аппроксимация

Уравнение (3) позволяет производную от искомой функции выразить через саму функцию и ее первую производную и, следовательно, построить для $y(x)$ формальный полином Тейлора. В частности, для начальных условий

$$y(0) = c, \quad y'(0) = 0$$

соответствующий полином восьмой степени имеет вид:

$$p_8(x) = c + \frac{ax^2}{2c} + \frac{a^2(2a-1)x^4}{24c^3} + \frac{a^3(2a-1)(8a-7)x^6}{720c^5} + \frac{a^4(2a-1)(-262a+127+136a^2)x^8}{40320c^7}. \quad (5)$$

Использовать полиномы (5) (и с иными степенями) можно лишь в очень ограниченных пределах. Если функция удовлетворяет уравнению (1), то она не имеет вещественных нулей. С полиномами вида (5) дело обстоит совсем не так. Указанные полиномы могут иметь пару вещественных нулей, симметричных относительно начала координат. Для положительных значений a и различных степеней n полинома укажем промежутки $[x_1, x_2]$, заключающий в себе положительный корень уравнения $p_n(x) = 0$

Для $p_4(x)$:

$$\left\| \begin{array}{ccccccccc} a & \frac{1}{100} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{3}{20} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{9}{20} & \frac{49}{100} \end{array} \right\|_{[x_1, x_2] \quad [37,38] \quad [17,18] \quad [12,13] \quad [11,12] \quad [10,11] \quad [12,13] \quad [37,38] \quad [16,17] \quad [35,36]}.$$

Для $p_8(x)$:

$$\left\| \begin{array}{ccccccccc} a & \frac{1}{100} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{3}{20} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{9}{20} & \frac{49}{100} \end{array} \right\|_{[x_1, x_2] \quad [25,26] \quad [11,12] \quad [8,9] \quad [7,8] \quad [6,7] \quad [5,6] \quad [6,7] \quad [16,17] \quad [8,9]}.$$

Для $p_{20}(x)$:

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} a & \frac{51}{100} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{17}{20} & \frac{43}{50} & \frac{9}{100} & \frac{99}{100} \end{array} \right\|_{[x_1, x_2] \quad [4,5] \quad [3,4] \quad [3,4] \quad [3,4] \quad [3,4] \quad [3,4] \quad [3,4]}.$$

Полиномы, очевидно, если и пригодны для аппроксимации решения дифференциального уравнения (1), то «не слишком далеко» от начала координат, и чем выше степень полинома, тем пригодность меньше. Имеется и ограничение на параметр a . Определим невязку приближенного решения $f(x)$ уравнения (1) на интервале $(-\beta, \beta)$:

$$\varepsilon(f(x), a, \beta) = \frac{1}{2\beta} \sqrt{\int_{-\beta}^{\beta} H(f(x), a)^2 dx}. \quad (6)$$

Для полинома четвертой степени при $\beta = 1.05$ графики зависимости невязки $\varepsilon(p_4(x), a, 1.05)$ от a представлены на рис. 4, 5.

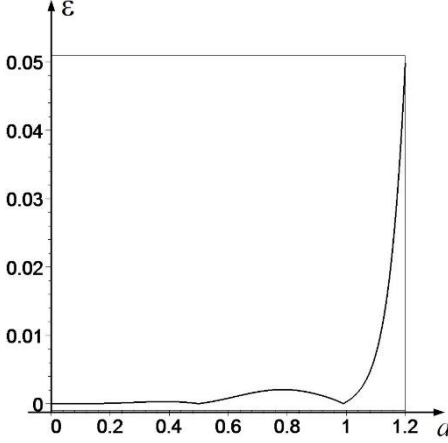


Рис. 4. График зависимости невязки $\varepsilon(p_4(x), a, 1.05)$ от a

Fig. 4. Dependency graph for residual $\varepsilon(p_4(x), a, 1.05)$ of a

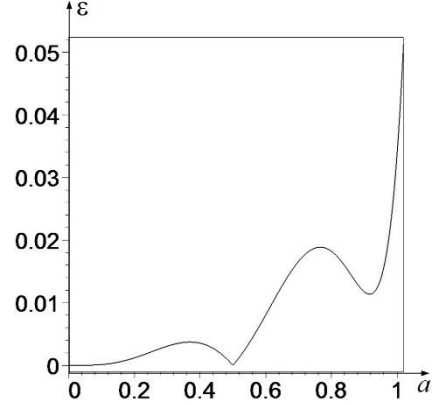


Рис. 5. График зависимости невязки $\varepsilon(p_6(x), a, 1.02)$ от a

Fig. 5. Dependency graph for residual $\varepsilon(p_8(x), a, 1.05)$ of a

Ясно, что аппроксимации вида (5) непригодны для значений x , больших единицы, и значений a – тоже заметно превосходящих единицу.

Рассмотрим полиномы вида (5). Список коэффициентов при четных степенях 0, 2, 4, 6, 8, 10 переменной x

$$P := [p_0(a, c), p_2(a, c), \dots, p_{10}(a, c)].$$

Здесь

$$p_0(a, c) = 1, \quad p_2(a, c) = \frac{a}{2c}, \quad p_4(a, c) = \frac{a^2(2a-1)}{24c^3}, \quad p_6(a, c) = \frac{a^3(2a-1)(8a-7)}{720c^5},$$

$$p_8(a, c) = \frac{a^4(2a-1)(136a^2 + 127 - 262a)}{40320c^7},$$

$$p_{10}(a, c) = \frac{a^5(2a-1)(12570a - 12168a^2 - 4369 + 3968a^3)}{3628800c^9},$$

$$p_{12}(a, c) = \frac{a^6(2a-1)(176896a^4 + 243649 - 884108a + 1216668a^2 - 753104a^3)}{479001600c^{11}} \dots$$

Представление о величинах вида (6) дают графики (рис. 6–9), где представлены линии, соединяющие точки

$$M(k, p_{2k}(A_j, C_i)).$$

Здесь

$$C = (0.75, 0.8, 0.8333, 1., 1.2, 1.4, 1.6, 2), \quad A = (0.8, 1, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.2, 2.3).$$

Диаграммы коэффициентов для $c = C[i]$: по горизонтальной оси – номер k коэффициента полинома; по вертикальной оси – числовое значение коэффициента полинома при степени x , равной номеру параметра $A[i]$. Ломанные линии нумерованы индексом i . Номера снизу вверх.

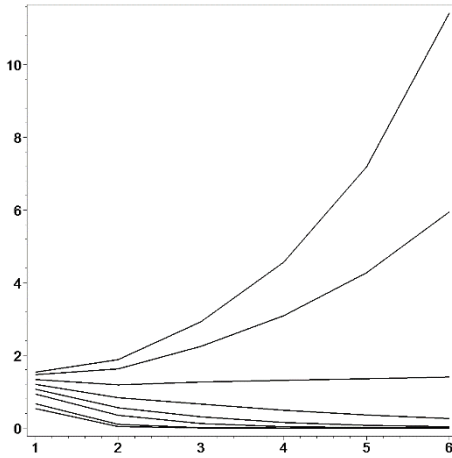


Рис. 6. Номер $i = 1$, $c = C_1$
Fig. 6. Number $i = 1$, $c = C_1$

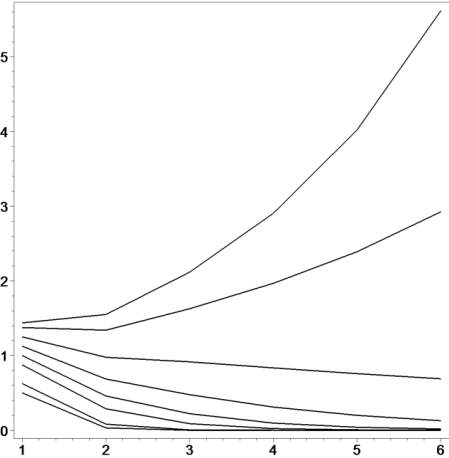


Рис. 7. Номер $i = 2$, $c = C_2$
Fig. 7. Number $i = 2$, $c = C_2$

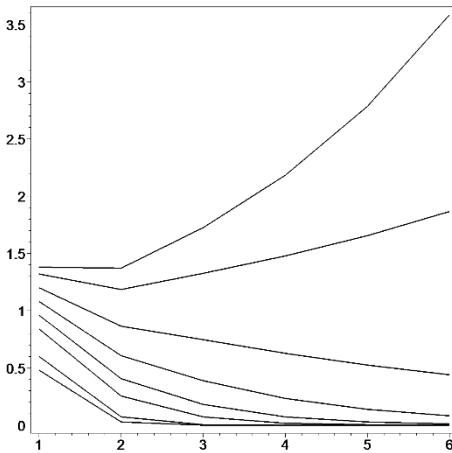


Рис. 8. Номер $i = 3$, $c = C_3$
Fig. 8. Number $i = 3$, $c = C_3$

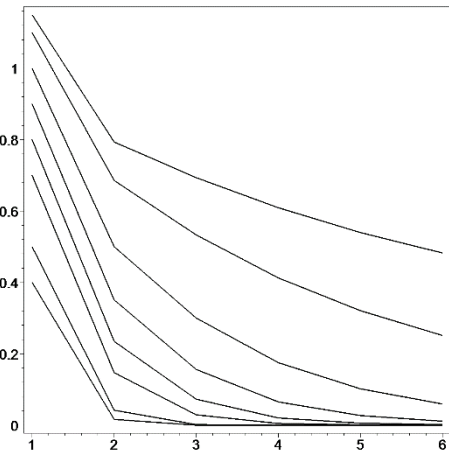


Рис. 9. Номер $i = 4$, $c = C_4$
Fig. 9. Number $i = 4$, $c = C_4$

Ясно, что при определенных сочетаниях параметров a и c коэффициенты полинома даже не убывают. Авторы не возьмется утверждать, что формальный ряд Тейлора для искомой функции расходится, поскольку не располагают формулой коэффициента общего члена $p_{2n}(a, c)$. Однако поведение этих величин для не слишком далеких номеров (авторы проверили до $n = 40$) вполне соответствует тенденции, проявленной на рис. 6–9.

3. Экспоненциальная аппроксимация

Видно, что при малых c (меньше единицы) и больших a (более единицы) полиномиальная аппроксимация непригодна. Авторы предприняли попытку построения приближения к решению уравнения (1) в виде функций вида:

$$f(x, a, b, p) = 1 + a \frac{x^2}{2} \exp(ax^b). \quad (7)$$

Параметры b и p подбирались из соображений согласованности с численным решением уравнения (7) при различных значениях параметра a (решение осложнено жесткостью уравнения [20]). На этом пути получены модели, описываемые табл. 1 и 2 и показанные на рис. 10, 11. Интегральная невязка вычислялась на промежутке $x \in [0, 2.3]$

Таблица 1

Параметры b и p , отвечающие значениям $a \leq 1$. Интегральная невязка

Номер i	a	b	p	Интегральная невязка
1	0.1	0	0	0.0044
2	0.2	0	0	0.0116
3	0.3	0	0	0.0152
4	0.4	0	0	0.0119
5	0.5	0	0	$0.39 \cdot 10^{-9}$
6	0.6	0.4	0.05	0.0128
7	0.7	0.8	0.0625	0.0259
8	0.8	1.0	0.0833	0.0384
9	0.9	1.45	0.0833	0.0318
10	1.0	1.64	0.10417	0.0234

Таблица 2

Параметры b и p , отвечающие значениям $a \leq 1$. Интегральная невязка вычислялась на промежутке $x \in [0, x_1]$.

Номер i	a	b	p	Правая граница x_1	Интегральная невязка
1	1.0	1.64	0.10417	2.0	0.037
2	1.1	1.81	0.11696	2.0	0.048
3	1.2	2.0	0.13158	2.0	0.069
4	1.3	2.3	0.13755	1.9	0.087
5	1.4	2.69	0.13812	1.7	0.081
6	1.5	2.70	0.17241	1.4	0.083
7	1.6	2.78	0.20833	1.2	0.089

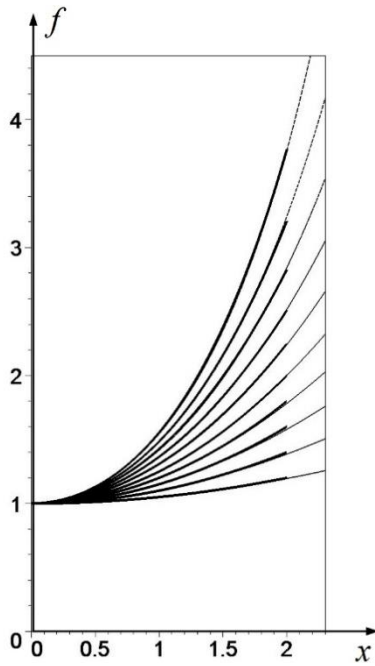


Рис. 10. Пунктирные линии – численные решения ОДУ для значений $a = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ (снизу вверх). Налгающиеся на них сплошные линии – имитационные модели

Fig. 10. The dotted lines are numerical solutions of the ODE for the values $a = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ (from bottom to top). The superimposing unbroken lines are the simulation models

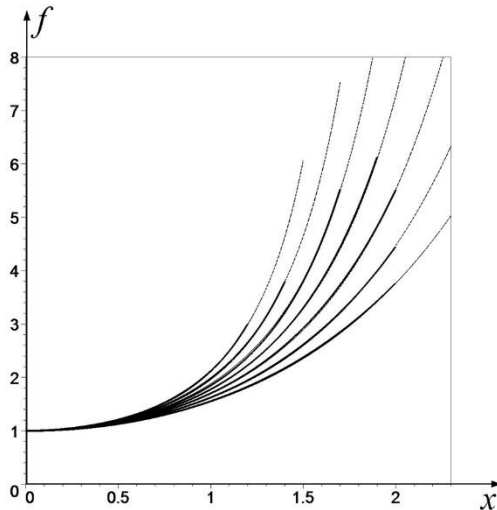


Рис. 11. Пунктирные линии – численные решения ОДУ для значений $a = 1.1, \dots, 1.6$ (снизу вверх). Налгающиеся на них сплошные линии – имитационные модели

Fig. 11. The dotted lines are numerical solutions of the ODE for the values $a = 1.1, \dots, 1.6$ (from bottom to top). The superimposing unbroken lines are the simulation models

Заключение

Меридиан псевдоминимальной поверхности вращения определяется дифференциальным уравнением, неудобным и для точного решения (допустимые для этого значения параметра заключены в узкий интервал), и для приближенного (в виде полинома). Тем не менее некоторые модели, по-видимому, пригодны для приложений. Во всяком случае экспоненциальная аппроксимация (7) в известных границах работоспособна. Мы полагаем, что эти границы не слишком стеснительны для возможных инженерных приложений модели.

Авторы считают, что предложенная работа (наряду с предшествующими) служит прояснению понятия псевдоминимальности применительно к поверхностям вращения, и надеются на внимание к этому вопросу со стороны заинтересованных лиц.

Список источников

1. Жуков А.П. Реакция отражающей поверхности крупногабаритного рефлектора на действие возмущающего импульса // Вестник Томского университета. Математика и механика. 2011. № 4 (16). С. 101–109.
2. Гаспарян С.Г. О характеристической сети и ее свойствах // Доклады АН Армянской ССР. 1961. Т. XXXII, № 3. С. 101–109.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. М.–Л. : ОНТИ НКТП, 1935. 672 с.
4. Бухтяк М.С. Дефект отображения для деформированного лепестка сетеполотна // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 2 (40). С. 5–17.
5. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. М. : Радио и связь, 1987. 72 с.
6. Бухтяк М.С. Геометрическое моделирование деформации сетеполотна параболического рефлектора // Математическое моделирование. 2016. Т. 39, № 1. С. 97–106.
7. Бухтяк М.С. Конечно-элементная модель псевдоминимальной поверхности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 48. С. 5–16.
8. Бухтяк М.С. Псевдоминимальность и линейчатые поверхности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 67. С. 18–27.
9. Бухтяк М.С. Обобщение минимальных поверхностей и моделирование формы конструкции из ортотропного материала // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 45. С. 5–24.
10. Бухтяк М.С. Составная поверхность, близкая к псевдоминимальной // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 46. С. 5–24.
11. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности: материалы по геометрии 500 поверхностей и информация к расчету на прочность тонких оболочек. М. : Наука, 2006. 544 с.
12. Беляева З.В. Геометрическое моделирование пространственных конструкций : дис. ... канд. техн. наук. Екатеринбург, 2015. 175 с.
13. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Катеноидные оболочки // Промышленное и гражданское строительство. 2018. № 12. С. 7–13.
14. Кривошапко С.Н. Упрощенный критерий оптимальности для оболочек вращения // Приволжский научный журнал. 2019. № 4. С. 108–116.
15. Кривошапко С.Н. Псевдосферические оболочки // Строительство и реконструкция. 2018. № 2 (76). С. 32–40.
16. Мамиева И.А. Аналитические поверхности для параметрической архитектуры // Academia Architecture and Constuction. 2020. September. С. 149–160. doi: 10.22337/2077-9038

17. Кривошапко С.Н. Вантовые структуры // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 1. С. 9–22.
18. Кривошапко С.Н. Висячие тросовые конструкции и покрытия сооружений // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 7 (34). С. 51–70.
19. Кривошапко С.Н. Тентовая архитектура // Строительство и реконструкция. 2015. № 3 (59). С. 100–109.
20. Хайпер Э., Вайнер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М. : Мир, 1999. 685 с.

References

1. Zhukov A.P. (2011) Reaktsiya otrazhayushchey poverkhnosti krupnogabarinogo reflektora na deystviye vozmushchayushchego impul'sa [Response of the reflecting surface of a large reflector to the action of a disturbing pulse]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(16). pp. 101–109.
2. Gasparyan S.G. (1961) O kharakteristicheskoy seti i eyë svoystvakh [On the characteristic net and its properties]. *Proceedings of Academy of Sciences of the Armenian SSR*. 32(3). pp. 101–109.
3. Love A. (1927) *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge: Cambridge University Press.
4. Bukhtyak M.S. (2016) Defekt otobrazheniya dlya deformirovannogo lepesta setepolotna [Defect of mapping for a deformed segment of metallic mesh]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(40). pp. 5–17.
5. Gryanik M.V., Loman V.I. (1987) *Razvertyvayemyye zerkal'nyye anteny zontichnogo tipa* [Deployable reflector umbrella-type antennas]. Moscow: Radio i svyaz'.
6. Bukhtyak M.S. (2016) Geometrical modeling of a metallic mesh deformation of the parabolic reflector. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 8(4). pp. 453–461.
7. Bukhtyak M.S. (2017) Finite-element model of the pseudominimal surface. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 48. pp. 5–16.
8. Bukhtyak M.S. (2020) Pseudo-minimality and ruled surfaces. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 67. pp. 18–27.
9. Bukhtyak M.S. (2017) Generalization of minimal surfaces and simulation of the shape of an orthotopic material construction. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 45. pp. 5–24.
10. Bukhtyak M.S. (2017) A composite surface close to pseudo-minimal. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 5–13.
11. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N., Khalabi S.M. (2006) *Analiticheskiye poverkhnosti: materialy po geometrii 500 poverkhnostey i informatsiya k raschetu na prochnost' tonkikh obolochek* [Analytical surfaces: materials on geometry of 500 surfaces and information for strength calculation of thin shells]. Moscow: Nauka.
12. Belyayeva Z.V. (2015) *Geometricheskoye modelirovaniye prostranstvennykh konstruktсий* [Geometric modelling of spatial constructions]. Dissertation. Ural Federal University.
13. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. (2018) Katenoidnyye obolochki [Catenoidal envelopes]. *Promyshlennoye i grazhdanskoye stroitel'stvo*. (12). pp. 7–13.
14. Krivoshapko S.N. (2019) Uproshchënnnyy kriteriy optimal'nosti dlya obolochek vrashcheniya [A simplified criterion of optimality for envelopes of rotation]. *Privolzhskiy nauchnyy zhurnal*. (4). pp. 108–116.

15. Krivoshapko S.N. (2018) Pseudosfericheskiye obolochki [Pseudospherical envelopes]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya* 76(2). pp. 32–40.
16. Mamiyeva I.A. (2020) Analiticheskiye poverkhnosti dlya parametricheskoy arkhitektury v sovremennykh zdaniyakh i sooruzheniyakh [Analytical surfaces for parametric architecture in modern buildings and erections]. *Academia. Arkhitektura i stroitel'stvo*. (1). pp. 150–165.
17. Krivoshapko S.N. (2016) Vantovyie struktury [Cable-stayed structures]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*. (1). pp. 9–22.
18. Krivoshapko S.N. (2015) Visyachiye trosovyie konstruksii i pokrytiya sooruzheniy [Hanging cable structures and structure coverings]. *Stroitel'stvo unikal'nykh zdaniy i sooruzheniy*. 7(34). pp. 51–70.
19. Krivoshapko S.N. (2015) Tentovaya arkhitektura [Tent architecture]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*. 59(3). pp. 100–109.
20. Hairer E., Wanner G. (1996) *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer-Verlag.

Сведения об авторах:

Бухтяк Михаил Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: bukhtyakm@mail.ru

Есипов Дмитрий Евгеньевич – магистрант механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: desipov@gmail.com

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Bukhtyak Mikhail S. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bukhtyakm@mail.ru

Yesipov Dmitrii E. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: desipov@gmail.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.
The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 20.07.2021; принята к публикации 22.03.2022

The article was submitted 20.07.2021; accepted for publication 22.03.2022

Научная статья

УДК 517.983.33

doi: 10.17223/19988621/76/2

MSC: 15B51, 37L55

Бесконечномерные бистохастические квадратичные операторы в пространстве l_1

Аъзам Абдурахимович Имомов¹, Абдумалик Искандарович Эшниязов²

¹ *Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан, imomov_azam@mail.ru*

² *Гулистанский государственный университет, Гулистан, Узбекистан, eshniyozovabdumalik@yandex.com*

Аннотация. Работа посвящена бистохастическим квадратичным операторам; введено понятие бистохастического оператора произвольного порядка. Найдено необходимое и достаточное условие бистохастичности бесконечномерного квадратичного стохастического оператора. Изучен аналог теоремы Биркгофа о крайних точках множества бистохастических матриц.

Ключевые слова: бистохастический квадратичный оператор, бесконечномерный бистохастический квадратичный оператор, крайние точки множества бистохастических матриц

Для цитирования: Имомов А.А., Эшниязов А.И. Бесконечномерные бистохастические квадратичные операторы в пространстве l_1 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 20–31. doi: 10.17223/19988621/76/2

Original article

Infinite distochastic square operators in l_1

Azam A. Imomov¹, Abdumalik I. Eshniyazov²

¹ *Karshi State University, Karshi, Uzbekistan, imomov_azam@mail.ru*

² *Gulistan State University, Gulistan, Uzbekistan, eshniyozovabdumalik@yandex.com*

Abstract. The article is devoted to bistochastic quadratic operators. The concept of a bistochastic quadratic operator is introduced and the property of such operators is studied. A necessary and sufficient condition for bistochasticity is given. An analogue of Birkhoff's theorem is studied for the class of bistochastic quadratic operators. A sufficient condition for the extremity of bistochastic quadratic operators is obtained, and a necessary condition is also obtained for small dimensions. The concept of bistochastic quadratic operators is generalized, and the concept of a bistochastic operator of arbitrary order is introduced.

Keywords: bistochastic quadratic operator, infinite-dimensional bistochastic quadratic operator, extreme points of the set of bistochastic matrices

For citation: Imomov, A.A., Eshniyazov, A.I. (2022) Infinite distochastic square operators in 1. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 20–31. doi: 10.17223/19988621/76/2

Введение

Динамическая система – это объект или процесс, который характеризуется своим состоянием как совокупностью характеристик в некоторые моменты времени, и определен закон эволюции состояния динамической системы во времени. Математическое моделирование нелинейных динамических систем является междисциплинарным инструментом исследования разнообразных процессов в природе и обществе. Первые результаты исследований динамических систем были получены при анализе моделей естественно-научных дисциплин – механики, биологии, метеорологии, синергетики, популяционной генетики, биофизики и т.д. К примеру, можно указать задачи отбора в локусах в генетике (см.: [1]), в биофизике – модели молекулярной эволюции, одна из которых называется гиперциклами П. Шустера (см.: [2]). Все эти модели в значительной мере основываются на качественно-топологических методах теории динамических систем в целом. В свою очередь, прикладные задачи, возникающие в различных отраслях естествознания, все чаще становятся источником развития математических теорий. Особенности изменения генетической структуры в органических популяциях снабжают нас задачами, где также приходится изучать нелинейные (в основном квадратичные) преобразования и их траектории.

Одной из основных задач теории квадратичных стохастических операторов (КСО) считают проблему С. Улама [3] о полной топологической классификации КСО базисного симплекса. Сравнительно хорошо изученными среди КСО являются так называемые вольтерровы отображения, введенные и разработанные в работах Р.Н. Ганиходжаева на основе сформулированной задачи С. Улама.

Интерес к изучению предельного поведения траекторий квадратичных отображений двумерного симплекса и их обобщениям возрос с появлением сообщений о результатах численных экспериментов, начатых Э. Ферми, С. Уламом, Дж. Пастой. В этом направлении, в теоретическом плане, наиболее содержательные и полезные результаты получены в работах Г. Кестена, Ю.И. Любича, С.С. Валландера, М.И. Захаревича, Н.П. Зимакова, Н.Н. Ганиходжаева, Р.Н. Ганиходжаева, Ф.А. Шахиди и др.

Другой класс квадратичных стохастических операторов – совокупность всех бистochasticических квадратичных операторов (БКО) – введен в работе [4] по аналогии с определением линейного двояко-стохастического оператора посредством мажоризации Харди–Литтлвуда–Пойа. Проникновение мажорирования во многие теории, в частности в теорию КСО, придает особый акцент актуальности его применения. Следовательно, изучение класса БКО также становится актуальной задачей как в плане траекторной теории и теории многомерных матриц, так и с точки зрения теории мажоризации.

1. Определение бистокхастических операторов в бесконечномерном симплексе

Определение 1. *Множество*

$$S = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \in l_1 : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1 \right\}$$

называется *бесконечномерным симплексом*.

Известно [5], что $S = \overline{\text{extr}(S)}$, где $\text{extr}(S)$ – множество крайних точек в S , а $\text{co}(A)$ – выпуклая оболочка множества A . Более того, каждая точка

$$e_k = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots),$$

где 1 стоит в k -й позиции, является крайней в S .

Определение 2. *Оператор $V: S \rightarrow S$ называется квадратично стохастическим, если он имеет вид:*

$$(Vx)_k = \sum_{i,j=1}^{\infty} P_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

где коэффициенты $P_{ij,k}$ удовлетворяют следующим условиям

$$P_{ij,k} = P_{ji,k} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} P_{ij,k} = 1. \quad (1.2)$$

Очевидно, что условия (1.2) обеспечивают сохранение симплекса, т.е КСО отображает симплекс в себя.

Пусть $x_{\downarrow} = (x_{[1]}, x_{[2]}, \dots)$ – невозрастающая перестановка точки x , т.е.

$$x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \dots$$

для точки $x = (x_1, x_2, \dots)$ из S .

Определение 3. *Говорят, что для точек x, y из симплекса S x мажорируется y (или y мажорирует x), и пишут $x \prec y$ (или $y \succ x$), если выполняется следующее условие:*

$$\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Напомним, что бесконечная матрица называется *бистокхастической*, если все ее элементы неотрицательны и сумма элементов каждой ее строки и каждого столбца равна 1. Известно [6], что $x \prec y$ эквивалентно существованию бесконечной бистокхастической матрицы P такой, что $x_{\downarrow} = Py_{\downarrow}$. Таким образом, для бесконечной бистокхастической матрицы P имеем $Py_{\downarrow} = y_{\downarrow}$ для каждого $y \in S$.

Теперь введем понятие бесконечномерного бистокхастического квадратичного оператора.

Определение 4. *КСО (1.1) называется бистокхастическим, если*

$$\forall x \prec x. \quad (1.3)$$

Например, линейные операторы, определенные в l_1 с бистокхастической матрицей, удовлетворяют (1.3).

2. Необходимое и достаточное условие бистохастичности оператора

Сформулируем необходимое и достаточное условие бистохастичности квадратичного стохастического оператора.

Теорема 2.1. Пусть V – БКО. Тогда коэффициенты $P_{ij,k}$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $\sum_{i,j \in \alpha} P_{ij,k} \leq |\alpha|, \quad \forall \alpha \subset \mathbb{N}, \quad |\alpha| \leq +\infty, \quad k \in \mathbb{N};$
- 2) $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} = +\infty \vee 0, \quad k \in \mathbb{N}.$

Доказательство. 1) Пусть $Vx \prec x$. Тогда, согласно [6], существует бистохастическая матрица $P(x) = (P_{ij}(x))$ (которая зависит от x) такая, что $(Vx)_\downarrow = P(x)x_\downarrow$. Рассмотрим множество $\alpha_0 \subset \mathbb{N}, \quad |\alpha_0| < \infty$, и положим $x^0(\alpha_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$, где

$$\begin{cases} x_i^0 = \frac{1}{|\alpha_0|}, & i \in \alpha_0, \\ x_i^0 = 0 & , i \notin \alpha_0. \end{cases}$$

Очевидно, что $x^0 \in S$. Имеем

$$(Vx^0)_{[k]} = \sum_{i,j \in \alpha_0} P_{ij,[k]} \frac{1}{|\alpha_0|^2} = \sum_{i=1}^{|\alpha_0|} P_{ij}(x^0) \frac{1}{|\alpha_0|} \leq \sum_{i=1}^{|\alpha_0|} P_{ij}(x^0) \frac{1}{|\alpha_0|} = \frac{1}{|\alpha_0|}.$$

Так как α_0 – произвольное множество, то получаем

$$\sum_{i,j \in \alpha} P_{ij,[k]} \leq |\alpha|, \quad \forall \alpha \subset \mathbb{N}, \quad |\alpha| \leq +\infty, \quad \forall k = \overline{1, m},$$

то есть

$$\sum_{i,j \in \alpha} P_{ij,k} \leq |\alpha|, \quad \forall \alpha \subset \mathbb{N}, \quad |\alpha| \leq +\infty, \quad \forall k = \overline{1, m}.$$

2) Пусть

$$x^1 = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}, 0, 0, \dots \right).$$

Очевидно, что $x^1 \in S$. Тогда из (1.1) имеем

$$V(x^1)_k = \sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} \frac{1}{m^2}.$$

С другой стороны, так как $(Vx)_\downarrow = P(x)x_\downarrow$, тогда если $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} \neq 0$, то мы заключаем

$$V(x^1)_k = \sum_{i=1}^m P_{ii}(x^1) \frac{1}{m}.$$

Приравнявая последние два уравнения, получаем

$$\sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} = m \sum_{i=1}^m P_{1i}(x^1).$$

Далее, так как

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m P_{1i}(x) = 1,$$

то получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} = +\infty, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана.

Обозначим $A_k = \{P_{ij,k}\}$, $k \in \mathbb{N}$, и

$$(A_k x, x) = \sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} x_i x_j.$$

Тогда V переписывается следующим образом:

$$Vx = [(A_1 x, x), (A_2 x, x), \dots, (A_m x, x), \dots].$$

С целью краткости перепишем оператор, в итоге

$$V = (A_1 | A_2 | \dots | A_m \dots). \quad (2.1)$$

Введем обозначение:

$$U = \left\{ A = (a_{ij}) : a_{ij} = a_{ji} \geq 0, \sum_{i,j \in \alpha} a_{ij} \leq |\alpha|, |\alpha| < \infty, \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^m a_{ij} = \infty \vee 0 \right\}. \quad (2.2)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. Если $V = (A_1 | A_2 | \dots | A_m \dots)$ – БКО, то $A_k \in U$.

Ниже будем исследовать структуру этого множества. Очевидно, что U является выпуклым множеством. Рассмотрим множество U как подмножество пространства

$$l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \left\{ x = (x_{n,m}) : x_{n,m} \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N}, \|x\|_\infty = \sup_{n,m \in \mathbb{N}} |x_{n,m}| \right\}.$$

Известно [7], что пространство

$$l^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \left\{ x = (x_{n,m}) : x_{n,m} \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N}, \|x\|_1 = \sum_{n,m=1}^\infty |x_{n,m}| < \infty \right\}$$

является сопряженным к $l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, т.е. $l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = l^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Поэтому в $l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ можно рассмотреть $\sigma(l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), l^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ топологию; далее эту топологию обозначим как τ . Согласно теореме Банаха–Алаоглу, единичный шар является $\sigma(l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), l^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ слабо компактным в $l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Так как все элементы матрицы U не больше единицы, U является подмножеством единичного шара $l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Так как U является замкнутым, то U является $\sigma(l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), l^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ слабо компактным в $l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

Введем некоторые понятия. Пусть $\forall \alpha \subset \mathbb{N}$, $|\alpha| \leq +\infty$. Множество α будем называть насыщенным относительно матрицы $A = (a_{ij})$, если $\sum_{i,j \in \alpha} a_{ij} \leq |\alpha|$. Соответствующую подматрицу $(a_{ij})_{i,j \in \alpha}$ будем называть *насыщенной* подматрицей.

Обозначим

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подматрицу N матрицы A назовем свободной если она не содержится ни в какой насыщенной подматрице матрицы A .

Введем обозначения:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть Q является подмножеством U , элементы которого содержат M_i для некоторого $i = 1, 2, 3$. Следующая теорема описывает все крайние точки множества U , т.е. $\text{ext}U$.

Теорема 2.3.

$$A = (a_{ij}) \in \text{ext}U$$

тогда и только тогда, когда A не имеет свободных подматриц и

$$a_{ii} = 1 \vee 0, \quad a_{ij} = 1 \vee \frac{1}{2} \vee 0, \quad A \notin Q.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A = (a_{ij}) \in \text{ext}U$. Сначала докажем,

что $a_{ii} = 1 \vee 0$, $a_{ij} = 1 \vee \frac{1}{2} \vee 0$. Докажем это утверждение относительно порядка матрицы A . Для конечных матриц доказано (см. теорему 1.2). Докажем для бесконечных матриц.

Сначала докажем, что если $A = (a_{ij}) \in \text{ext}U$, то $a_{ii} = 1 \vee 0$. Пусть $0 < a_{ii} < 1$. Если 1 содержится в некотором насыщенном множестве, то по предположению индукции заключаем, что $a_{11} = 0 \vee 1$, иначе матрицы

$$A' = \{a_{11} = a_{11} + \varepsilon, \quad a_{ij} = a_{ji}\}$$

и

$$A'' = \{a_{11} = a_{11} - \varepsilon, \quad a_{ij} = a_{ji}\},$$

где ε – достаточно малое число, принадлежат U , и более того, $2A = A' + A''$, что противоречит крайности матрицы A .

Теперь докажем, что $a_{ij} = 1 \vee \frac{1}{2} \vee 0$. Пусть существует $a_{i_0 j_0} \neq 1 \vee \frac{1}{2} \vee 0$ ($i_0 \neq j_0$). Если $\{i_0, j_0\} \subset \alpha$ для некоторого насыщенного множества α , то по

предположению индукции следует, что $a_{i_0 j_0} = 1 \vee \frac{1}{2} \vee 0$. Если не существует такого насыщенного множества, то матрицы

$$A' = \{a'_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_0} + \varepsilon, a_{ij} = a_{ji}\}$$

и

$$A'' = \{a''_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_0} - \varepsilon, a_{ij} = a_{ji}\}$$

принадлежат U , более того, $2A = A' + A''$, что противоречит тому, что $A = \text{extr}U$.

Докажем, что $A \notin Q$. Пусть A имеет подматрицу M_1 . Без ограничения общности обозначим ее через $(a_{ij})_{i,j=1,2,3}$. Рассмотрим матрицы

$$A' = \{a'_{12} = a_{12} + \varepsilon, a'_{13} = a_{13} - \varepsilon, a_{ij} = a_{ji}\}$$

и

$$A'' = \{a''_{12} = a_{12} - \varepsilon, a''_{13} = a_{13} + \varepsilon, a_{ij} = a_{ji}\}.$$

Для этих матриц выполняются $2A = A' + A''$ и $A', A'' \in U$, что противоречит крайности A . Случаи, когда A имеет подматрицы, равные M_2 и M_3 , рассматриваются аналогично.

Теперь допустим, что A имеет свободную подматрицу $(a_{ij})_{i,j=1,2}$. Положим

$$A' = \{a'_{12} = a_{12} + \varepsilon, a_{ij} = a_{ji}\}$$

и

$$A'' = \{a''_{12} = a_{12} - \varepsilon, a_{ij} = a_{ji}\}.$$

Так как $(a_{ij})_{i,j=1,2}$ – свободная, то она не содержится ни в какой насыщенной подматрице матрицы A , следовательно, $A', A'' \in U$, т.е. A не является крайней.

Достаточность. Докажем от противного. Допустим, что существуют матрицы $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij}) \in U$ такие, что $2A = B + C$ и $B \neq C$. Из $a_{ii} = 1 \vee 0$ следует, что $b_{ii} = c_{ii} = 1 \vee 0$. Пусть существуют числа i_0 и j_0 , для которых $b_{i_0 j_0} \neq c_{i_0 j_0}$. Без ограничения общности можно предположить, что $(i_0, j_0) = (1, 2)$. Из

$$2 \begin{pmatrix} a_{11} & 1/2 \\ 1/2 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

и $b_{12} \neq c_{12}$ получаем $a_{11} = a_{22} = 0$. Так как A не имеет свободных подматриц, то существует множество α , такое что $\{1, 2\} \subset \alpha$.

Далее из

$$\sum_{i,j \in \alpha} b_{ij} \leq |\alpha|, \quad \sum_{i,j \in \alpha} c_{ij} \leq |\alpha|$$

и

$$\sum_{i,j \in \alpha} b_{ij} + \sum_{i,j \in \alpha} c_{ij} = 2 \sum_{i,j \in \alpha} a_{ij} = 2|\alpha|$$

получаем

$$\sum_{i,j \in \alpha} b_{ij} = \sum_{i,j \in \alpha} c_{ij} = |\alpha|. \quad (2.3)$$

Так как $b_{12} \neq c_{12}$, из (2.3.) получаем, что существуют числа (i_1, j_1) такие, что $b_{i_1 j_1} \neq c_{i_1 j_1}$. Предположим, что $(i_1, j_1) = (3, 1) \vee (3, 4)$.

Случай 1. Пусть, $(i_1, j_1) = (3, 1)$. Имеем

$$2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & a_{13} \\ \frac{1}{2} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & 0 & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & 0 & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Так как $b_{13} \neq c_{13}$, то получаем $b_{33} = c_{33} = 0$ и $a_{13} = \frac{1}{2}$. Стало быть, A содержит либо M_1 , либо M_2 , что является противоречием.

Случай 2. Пусть, $(i_1, j_1) = (3, 4)$. В этом случае, по аналогии случаю 1, получаем, что A содержит одну из следующих матриц: M_1 , M_2 , M_3 .

Теорема доказана.

Напомним, что бесконечная матрица называется перестановочной, если в каждой ее строке и столбце находится ровно один единичный элемент, а все остальные равны нулю.

Следствие 2.1. Пусть P – бесконечная перестановочная матрица. Тогда $P \in \text{extr}U$.

Следствие 2.2. Пусть, матрица A определяется следующим образом:

$$A = \left\{ a_{ij} : a_{kk} = 1, a_{ik} = \frac{1}{2}, a_{ij} = 0, i, j \neq k, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Тогда $A \in \text{extr}U$.

Рассмотрим множество

$$T = \left\{ (t_{ij}) : t_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^{\infty} t_{ij} \leq 1, \forall i \in \mathbb{N}, \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^m t_{ij} = \infty \vee 0 \right\}.$$

По аналогии для множества U можно доказать, что множество T является $\sigma(l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), l^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ – слабо компактным в $l^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

Рассмотрим уравнение относительно T :

$$A = \frac{1}{2}(T + T'). \quad (2.4.)$$

Здесь T' – транспонированная матрица.

Ниже исследуем условия для разрешимости уравнения (2.4).

Теорема 2.4. Пусть, $A = (a_{ij})$ – симметрическая неотрицательная матрица.

Для существования матрицы $T = (t_{ij}) \in T$ удовлетворяющей уравнению (2.4), необходимым и достаточным условием является $A \in U$.

Доказательство. Необходимость. Если $T = (t_{ij})$ стохастическая матрица и выполняется (2.4), тогда

$$\sum_{i,j \in \alpha} a_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j \in \alpha} t_{ij} + \sum_{i,j \in \alpha} t_{ji} \right) = \sum_{i,j \in \alpha} t_{ij} = \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \alpha} t_{ij} \leq \sum_{i,j \in \alpha} 1 = |\alpha|.$$

Достаточность. Сначала докажем для крайних точек множества U . Пусть $A \in \text{extr}U$, тогда $a_{ii} = 0 \vee 1$, $a_{ij} = 0 \vee \frac{1}{2} \vee 1$

Пусть $a_{i_0 j_0} = \frac{1}{2}$ (i_0, j_0 – фиксированы). Рассмотрим следующие случаи:

(I) Существует j_0 , такой что $a_{ij_0} = 1$.

(II) Существует i_0 , такой что $a_{i_0 j} = 1$.

В обоих случаях легко доказать, что соответствующее $A \in \text{extr}U$.

Следствие 2.3. Если V – БКО, то существуют матрицы $T_i \in T$ такие, что

$$\forall x = ((T_1 x, x), (T_2 x, x), \dots, (T_m x, x) \dots).$$

Следствие 2.4. Пусть $A \in U$. Тогда выполняется следующее уравнение:

$$(Ax, x) \leq x_{[1]}, \quad \forall x \in S. \quad (2.5)$$

Доказательство. Сначала докажем, что

$$(Tx, x) \leq x_{[1]}, \quad \forall x \in S, \quad (2.6)$$

где $T \in T$. Действительно, так как $t_{ij} \geq 0$ и $\sum_{j=1}^{\infty} t_{ij} \leq 1$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} t_{ij} x_j \leq x_{[1]}$$

для всех $x \in l_1$. В частности, так как $x \in S$, то

$$(Tx, x) = \sum_{i,j=1}^{\infty} t_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=1}^{\infty} t_{ij} x_j.$$

Учитывая $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1$ и последнее неравенство, получаем (2.6).

Из теоремы (2.3) и неравенства (2.6) получаем (2.5).

Из доказанного следствия возникает вопрос: для каких матриц A выполняется неравенство

$$(Ax, x) \leq x_{[1]} + \dots + x_{[k]} \quad (2.7)$$

для всех $x \in S$, где $k \in \mathbb{N}$? При $k=1$ ответ на вопрос дается следствием 2.4.

Введем следующие множества:

$$T_k = \left\{ T = (t_{ij}), i, j \in \mathbb{N}: 0 \leq t_{ij} \leq 1, \sum_{j=1}^m t_{ij} \leq k \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^m t_{ij} = \infty \vee 0 \right\}, \quad 1 \leq k \leq m,$$

$$U_k = \left\{ A = (a_{ij}): a_{ij} = a_{ji}, \quad A = \frac{1}{2}(T + T'), \quad T \in T_k \right\}, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Теорема 2.5. Для матрицы $A \in U_k$ выполняется неравенство (2.7).

Доказательство. Пусть $x_{\downarrow} = (x_{[1]}, \dots, x_{[m]}, \dots)$ – невозрастающая перестановка

вектора x и $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \dots$ – произвольные числа, такие что $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \leq k$.

Рассмотрим сумму

$$\lambda_1 x_{[1]} + \lambda_2 x_{[2]} + \dots + \lambda_m x_{[m]} + \dots \quad (2.8)$$

Пусть $i < j$. Замену коэффициентов $\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_m \dots$ на $\lambda_1, \dots, \lambda_i - \varepsilon, \dots, \lambda_j + \varepsilon, \dots, \lambda_m \dots$ назовем сдвигом право, если $\varepsilon > 0$. Сдвиг называется допустимым, если сохраняется условие $0 \leq \lambda'_i$, где λ'_i – новые коэффициенты, полученные в результате сдвига.

Так как $x_{[i]} \geq x_{[j]}$, то при допустимых сдвигах вправо сумма (2.8) не возрастает. Также очевидно, что допустимый сдвиг возможен до получения набора $0, 0, \dots, 0, \dots, 1, \dots, 1, r$ где количество единиц равняется

$$l = \left\lceil \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \right\rceil \quad \text{и} \quad r = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \right\}.$$

Здесь $[a]$ и $\{a\}$ соответственно означают целую и дробную часть числа a . Заметим, что если $l = k$, то $r = 0$. Поэтому

$$\lambda_1 x_{[1]} + \lambda_2 x_{[2]} + \dots + \lambda_m x_{[m]} + \dots \leq x_{[1]} + \dots + x_{[l]} + r x_{[l+1]} \leq x_{[1]} + \dots + x_{[k]} \quad (2.9)$$

для всех $x \in S$ и $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i \leq k$.

Пусть $x \in S$ и $A \in U_k$. Выберем $T \in T_k$, так что

$$A = \frac{1}{2}(T + T')$$

Тогда

$$(Tx, x) = \sum_{i,j=1}^{\infty} t_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} t_{ij} x_j \right).$$

Так как $0 \leq t_{ij} \leq 1$ и $\sum_{j=1}^m t_{ij} \leq k$, то согласно (2.9) получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} t_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^k x_{[i]}.$$

В силу $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1$ получаем

$$(Tx, x) \leq \sum_{i=1}^k x_{[i]}$$

и

$$(Ax, x) \leq \sum_{i=1}^k x_{[i]}.$$

Пусть B – множество всех БКО. Тогда теорема 2.2 означает, что для $V \in B$ условия

$$A_k \in U_1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.10)$$

являются необходимыми.

Пусть $V = (A_1 | A_2 | \dots | A_m | \dots)$ – БКО. Если

$$\forall |\alpha| < \infty, \alpha \subset \mathbb{N}, \sum_{k \in \alpha} A_k \in U_{|\alpha|}, \quad (2.11)$$

то согласно теореме 2.4 выполняется неравенство (2.7). Поэтому выполняется $Vx \prec x$. Таким образом, условия (2.11) достаточны для бистохастичности оператора. Теорема доказана.

3. Крайние точки множества бесконечномерных бистохастических операторов

Данный раздел посвящен изучению крайних точек множества бесконечномерных бистохастических операторов.

Приведем простую лемму.

Лемма 3.1. Если для симметрической матрицы A имеем

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij,k} x_i x_j = 0, \quad \forall x \in S,$$

то $A = 0$.

Доказательство. Положим $x = \lambda e_i + (1-\lambda)e_j$. Здесь, как прежде, e_i, e_j – вершины симплекса, и $0 < \lambda < 1$.

$$(a_{ij} + a_{ji})\lambda(1-\lambda) = 0.$$

Согласно симметричности матрицы A получаем $A = 0$.

Обозначим $V = (A_1 | A_2 | \dots | A_m | \dots)$. Из определения бистохастичности следует, что если $V \in \mathbf{B}$, то $V_\pi = (A_{\pi(1)} | A_{\pi(2)} | \dots | A_{\pi(m)} | \dots) \in \mathbf{B}$ для любой перестановки π множества индексов $\mathbb{N}$.

Лемма доказана.

Теорема 3.1. Пусть $V = (A_1 | A_2 | \dots | A_m | \dots) \in \text{extr}\mathbf{B}$. Тогда

$$V_\pi = (A_{\pi(1)} | A_{\pi(2)} | \dots | A_{\pi(m)} | \dots) \in \text{extr}\mathbf{B}$$

для любой перестановки π множества индексов $\mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1.

Теорема 3.2. Пусть, $V = (A_1 | A_2 | \dots | A_m | \dots) \in \mathbf{B}$. Если $A_i \in \text{extr}\mathbf{U}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, тогда

$$V = (A_1 | A_2 | \dots | A_m | \dots) \in \text{extr}\mathbf{B}.$$

Доказательство. Предположим, что $V \notin \text{extr}\mathbf{B}$. Тогда $\exists V', V'' \in \mathbf{B}$, $V' \neq V''$ такие, что $2V = V' + V''$. Пусть $V' = (A'_1 | \dots | A'_m | \dots)$, $V'' = (A''_1 | \dots | A''_m | \dots)$. Тогда

$$(2A_1 - A'_1 - A''_1 | \dots | 2A_m - A'_m - A''_m | \dots) = 0.$$

Поэтому $2A_i - A'_i - A''_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$. Так как $A_i \in \text{extr}\mathbf{U}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, то $A_i = A'_i = A''_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Итак, $V' = V''$, что противоречит тому, что $V \notin \text{extr}\mathbf{B}$.

Авторы выражают особую благодарность профессору Р.Н. Ганиходжаеву и рецензенту за значимые замечания и важнейшие советы при оформлении данной статьи.

Список источников

1. Любич Ю.И. Математические структуры в популяционной генетике. Киев : Наукова думка, 1983. 296 с

2. Файстель Р., Романовский Ю.М., Васильев В.А. Эволюция гиперциклов Эйгена, протекающих в коацерватах // Биофизика. 1980. Т. 25, № 5. С. 882–887.
3. Flach S., Ivanchenko M.V., Kanakov O.I. q-Breathers and the Fermi–Pasta–Ulam problem // Phys. Rev. Lett. 2005 V. 95. Art. 064102.
4. Ганиходжаев Р.Н. К определению бистохастических квадратичных операторов // УМН. 1993. Т. 4. С. 231–232.
5. Roy N. Extreme points and $\ell^1(\Gamma)$ spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. № 86. P. 216–218.
6. Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М. : Мир, 1983. 575 с.
7. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М. : Наука, 1972. 232 с.

References

1. Lyubich Yu.I. (1983) *Matematicheskiye struktury v populyatsionnoy genetike* [Mathematical structures in population genetics]. Kiev: Naukova dumka.
2. Feistel R., Romanovskii Yu.M., Vasil'ev V.A. (1980) Evolyutsiya gipertsiklov Eygena, protekayushchikh v koatservatakh [Evolution of Eigen's Hypercycles Existing in Coacervates]. *Biofizika*. 25(5). pp. 882–887.
3. Flach S., Ivanchenko M.V. and Kanakov O.I. (2005) q-breathers and the Fermi–Pasta–Ulam problem. *Physical Review Letters*. 95(064102).
4. Ganikhodzhaev R.N. (1993) On the definition of bistochastic quadratic operators. *Russian Mathematical Surveys*. 48(4). pp. 244–246.
5. Roy N. (1982) Extreme points and $\ell^1(\Gamma)$ spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 86(2). pp. 216–218.
6. Marshall A.W., Olkin I. (1980) *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*. Academic Press.
7. Marcus M., Mink H. (1964) *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*. Boston: Allyn and Bacon.

Сведения об авторах:

Имомов Аъзам Абдурахимович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и геометрии физико-математического факультета Каршинского государственного университета (Карши, Узбекистан). E-mail: imomov_azam@mail.ru

Эшниязов Абдумалик Искандарович – старший преподаватель кафедры математики Гулистанского государственного университета (Гулистан, Узбекистан). E-mail: eshniyozovabdumalik@yandex.com

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Imomov Azam A. (Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Karshi State University, Karshi, Uzbekistan). E-mail: imomov_azam@mail.ru

Eshniyazov Abdumalik I. (Researcher-teacher, Gulistan State University, Gulistan, Uzbekistan). E-mail: eshniyozovabdumalik@yandex.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 30.03.2021; принята к публикации 22.03.2022

The article was submitted 30.03.2021; accepted for publication 22.03.2022

Научная статья

УДК 512.54

15B33, 20H25, 20K15

doi: 10.17223/19988621/76/3

Определяемость вполне разложимой группы ранга 3 ее группой автоморфизмов

Егор Александрович Тимошенко¹, Иван Владиславович Третьяков²^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия¹ tea471@mail.tsu.ru² ivantretiyakov00@gmail.com

Аннотация. В работе Вильданова, Гайдак и Тимошенко ранее были найдены все вполне разложимые группы ранга 2, определяющиеся своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых групп. В настоящей статье аналогичная задача решена для групп ранга 3. Показано, что вполне разложимая группа ранга 3 определяется своей группой автоморфизмов тогда и только тогда, когда она является прямой суммой трех почти делимых слагаемых ранга 1, два из которых изоморфны друг другу и вкладываются в третье.

Ключевые слова: матрица, инволюция, вполне разложимая группа, группа автоморфизмов

Благодарности: Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых – докторов наук МД-108.2020.1.

Для цитирования: Тимошенко Е.А., Третьяков И.В. Определяемость вполне разложимой группы ранга 3 ее группой автоморфизмов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 32–42. doi: 10.17223/19988621/76/3

Original article

Determinability of a completely decomposable rank 3 group by its automorphism group

Egor A. Timoshenko¹, Ivan V. Tretyakov²^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation¹ tea471@mail.tsu.ru² ivantretiyakov00@gmail.com

Abstract. Let $B \in \mathbf{X}$, where $\mathbf{X}$ is a class of Abelian groups. We say that B is *determined by its automorphism group in the class $\mathbf{X}$* if $\text{Aut } B \cong \text{Aut } B'$ implies $B \cong B'$ for every $B' \in \mathbf{X}$.

Recall that a group is said to be a *completely decomposable group of rank κ* if it is a direct sum of κ torsion-free rank 1 groups. A group Y is called *almost divisible* if $pY = Y$ for almost all primes p . Our main theorem gives a criterion for determinability of a com-

pletely decomposable rank 3 group by its automorphism group in the class of all completely decomposable groups:

Theorem 11. For a completely decomposable group B of rank 3, the following are equivalent:

(1) B is determined by its automorphism group in the class of all completely decomposable groups.

(2) $B \cong Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_2$ with Y_2 being an almost divisible rank 1 group that can be embedded in Y_1 .

Keywords: matrix, involution, completely decomposable group, automorphism group

Acknowledgments: The research was supported by the Russian Federation President's Grant for young Russian scientists MD-108.2020.1.

For citation: Timoshenko, E.A., Tretyakov, I.V. (2022) Determinability of a completely decomposable rank 3 group by its automorphism group. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 32–42. doi: 10.17223/19988621/76/3

Пусть $B \in \mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ – некоторый класс абелевых групп. Мы будем говорить, что B определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{X}$, если из изоморфизма групп автоморфизмов $\text{Aut } B$ и $\text{Aut } B'$, где $B' \in \mathbf{X}$, всегда следует $B \cong B'$.

Всюду ниже под $\mathbf{X}$ понимается класс всех вполне разложимых групп (без кручения). Данная статья служит продолжением работ [1, 2] и развивает некоторые идеи цикла работ Вильданова [3–6], посвященного вопросам определяемости абелевых групп их группами автоморфизмов в классе $\mathbf{X}$ и некоторых его подклассах. Напомним, что *вполне разложимой группой ранга* k называется всякая группа B , представляющая собой прямую сумму k групп ранга 1; известно (см.: [7, предложение 86.1]), что любые два таких разложения группы B изоморфны. Так как всякая группа ранга 1 изоморфна подходящей *рациональной группе* (т.е. ненулевой подгруппе аддитивной группы поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$), то для удобства сразу рассматриваем группы из класса $\mathbf{X}$ как прямые суммы рациональных групп.

Результаты работы [6] позволяют указать необходимые и достаточные условия для того, чтобы 2-делимая группа $B \in \mathbf{X}$ ранга 3 определялась группой $\text{Aut } B$ в классе всех 2-делимых групп, принадлежащих $\mathbf{X}$. В настоящей статье аналогичная задача решена уже для произвольных групп ранга 3 из класса $\mathbf{X}$ (не обязательно являющихся 2-делимыми).

Через $M(n, R)$, где R – некоторое кольцо с единицей, мы обозначаем кольцо матриц порядка n над R , а через $GL_n(R)$ – группу всех обратимых матриц этого матричного кольца. Символом $\blacksquare$ будет обозначаться конец доказательства (либо отсутствие доказательства).

Пусть $\mathbf{P}$ – множество всех простых чисел. Для всякого множества $L \subset \mathbf{P}$ будем обозначать символом $\mathbf{Q}^{(L)}$ то подкольцо поля $\mathbf{Q}$, которое порождается элементом 1 и числами p^{-1} , где $p \in L$. Хорошо известно, что все подкольца (с единицей) поля $\mathbf{Q}$ исчерпываются кольцами вида $\mathbf{Q}^{(L)}$.

Для группы Y ранга 1 через $t(Y)$ обозначается тип этой группы (подробнее о типах см.: [7]). Пусть B – прямая сумма рациональных групп Y_i , где $i \in I$. Для $i, j \in I$ положим $\Gamma_{ij} = \{\alpha \in \mathbf{Q} \mid \alpha Y_i \subset Y_j\}$. Несложно установить следующие свойства:

1. Всякий гомоморфизм $Y_i \rightarrow Y_j$ представляет собой умножение на некоторое число $\alpha \in \Gamma_{ij}$. Таким образом, $(\Gamma_{ij}, +)$ – абелева группа, изоморфная группе гомоморфизмов $\text{Hom}(Y_i, Y_j)$.

2. $\Gamma_{ii} = \mathbf{Q}^{(L)}$, где L – множество всех простых чисел p , таких, что $pY_i = Y_i$. При этом кольцо Γ_{ii} изоморфно кольцу эндоморфизмов $E(Y_i)$ группы Y_i , а группа обратимых элементов $U(\Gamma_{ii})$ кольца Γ_{ii} изоморфна группе $\text{Aut } Y_i$.

3. $\Gamma_{ij}\Gamma_{jk} \subset \Gamma_{ik}$ для любых $i, j, k \in I$.

4. Если неравенство $\mathbf{t}(Y_i) \leq \mathbf{t}(Y_j)$ не выполнено, то $\Gamma_{ij} = 0$.

5. Если $\mathbf{t}(Y_i) \leq \mathbf{t}(Y_j)$, то $\Gamma_{ij} \neq 0$ и $\mathbf{t}(\Gamma_{ij}) = \mathbf{t}(Y_j) : \mathbf{t}(Y_i)$.

Нетрудно убедиться, что кольцо $E(B)$ изоморфно кольцу конечно-столбцовых $(I \times I)$ -матриц $(a_{ij})_{i,j \in I}$, таких что $a_{ij} \in \Gamma_{ji}$ при всех $i, j \in I$ (напомним, что матрицу называют *конечно-столбцовой*, если каждый ее столбец содержит лишь конечное число элементов, отличных от 0). Поэтому в дальнейшем будем отождествлять кольцо $E(B)$ с указанным матричным кольцом.

Ясно, что всякая рациональная группа изоморфна некоторой рациональной группе, содержащей 1. Договоримся сразу считать, что $1 \in Y_i$ при всех $i \in I$; для всякого простого p будем обозначать p -высоту элемента 1 в группе Y_i через $h(p, i)$. В формулировке следующей технической леммы считаем, что $\infty - \infty = \infty$:

Лемма 1. Пусть $\mathbf{t}(Y_i) \leq \mathbf{t}(Y_j)$. Тогда:

а) множество $M = \{p \in \mathbf{P} \mid h(p, j) < h(p, i) < \infty\}$ конечно;

б) группа Γ_{ij} содержит натуральное число m , равное произведению выражений $p^{h(p, i) - h(p, j)}$ по всем $p \in M$. При этом p -высота элемента m в группе Γ_{ij} равна 0, если $p \in M$, и равна $h(p, j) - h(p, i)$, если $p \notin M$. ■

Абелеву группу Y называем *почти делимой*, если $pY = Y$ почти для всех $p \in \mathbf{P}$. Следующий результат для полноты изложения приведем с доказательством.

Теорема 2 [8]. Если хотя бы одно из слагаемых Y_i в прямом разложении группы B не является почти делимым, то существует группа $B' \in \mathbf{X}$, не изоморфная B и такая, что $E(B') \cong E(B)$.

Доказательство. Пусть для некоторого $k \in I$ слагаемое Y_k не является почти делимым, т.е. множество $L = \{p \in \mathbf{P} \mid h(p, k) < \infty\}$ бесконечно. Для всех $i \in I$ определим группу $Z_i \subset \mathbf{Q}$, такую что $1 \in Z_i$ и p -высота элемента 1 в Z_i равна числу

$$h'(p, i) = \begin{cases} h(p, i), & \text{если } p \notin L, \\ h(p, i) + h(p, k) + 1, & \text{если } p \in L. \end{cases}$$

Для $i, j \in I$ положим $\Omega_{ij} = \{\alpha \in \mathbf{Q} \mid \alpha Z_i \subset Z_j\}$.

Ясно, что условия $h(p, j) + h(p, k) + 1 < h(p, i) + h(p, k) + 1 < \infty$ и $h(p, j) < h(p, i) < \infty$ равносильны при любых $i, j \in I$ и $p \in L$. Следовательно, условия $h'(p, j) < h'(p, i) < \infty$ и $h(p, j) < h(p, i) < \infty$ равносильны для всякого $p \in \mathbf{P}$. Так как при всех $p \in \mathbf{P}$ равносильны также условия $h'(p, j) < h'(p, i) = \infty$ и $h(p, j) < h(p, i) = \infty$, для любых $i, j \in I$ можно записать следующие эквивалентности:

$$\Gamma_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{t}(Y_i) \leq \mathbf{t}(Y_j) \Leftrightarrow \mathbf{t}(Z_i) \leq \mathbf{t}(Z_j) \Leftrightarrow \Omega_{ij} \neq 0.$$

Зафиксируем произвольную пару $i, j \in I$, для которой $\mathbf{t}(Y_i) \leq \mathbf{t}(Y_j)$ и $\mathbf{t}(Z_i) \leq \mathbf{t}(Z_j)$. Легко видеть, что конечное множество $M = \{p \in \mathbf{P} \mid h(p, j) < h(p, i) < \infty\}$ совпадает с множеством $\{p \in \mathbf{P} \mid h'(p, j) < h'(p, i) < \infty\}$ и при всех $p \in M$ выполнено равенство $h'(p, i) - h'(p, j) = h(p, i) - h(p, j)$. Кроме того, $h'(p, j) - h'(p, i) = h(p, j) - h(p, i)$ для каждого $p \notin M$. Применяя теперь пункт б) леммы 1, мы найдем натуральное число m , принадлежащее группам Γ_{ij} и Ω_{ij} и имеющее в этих группах одинаковые p -высоты для всех $p \in \mathbf{P}$. Таким образом, $\Omega_{ij} = \Gamma_{ij}$.

Мы показали, что при всех $i, j \in I$ выполнено $\Omega_{ij} = \Gamma_{ij}$. Поэтому для группы B' , равной прямой сумме групп Z_i по всем $i \in I$, будем иметь $E(B') = E(B)$. С другой стороны, для всякого $i \in I$ множество $\{p \in \mathbf{P} \mid h'(p, i) > h(p, k)\} = L$ является бесконечным, и значит $\mathbf{t}(Z_i) \neq \mathbf{t}(Y_k)$. Поэтому B' и B не могут быть изоморфны, так как в противном случае прямое разложение группы B' в прямую сумму групп ранга 1 содержало бы слагаемое, изоморфное Y_k . ■

Поскольку из $E(B') \cong E(B)$ вытекает изоморфизм $\text{Aut } B' \cong \text{Aut } B$, мы приходим к такому результату:

Следствие 3. Если хотя бы одно слагаемое Y_i в прямом разложении группы B не является почти делимым, то B не определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{X}$. ■

Если группа $B \in \mathbf{X}$ имеет конечный ранг n , то можно взять $I = \{1, 2, \dots, n\}$; при этом кольцо конечно-столбцовых матриц превратится в кольцо обычных квадратных матриц порядка n , элементы которых должны удовлетворять условию $a_{ij} \in \Gamma_{ji}$. В этом случае $E(B)$ оказывается подкольцом кольца $M(n, \mathbf{Q})$, а матричная группа $\text{Aut } B = U(E(B))$ – подгруппой группы $GL_n(\mathbf{Q})$. Мы будем использовать следующий результат:

Теорема 4 [6]. Если $B = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_n$ и ни для какого $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ не выполнено $\mathbf{t}(Y_i) \leq \mathbf{t}(Y_1)$, то B не определяется группой $\text{Aut } B$ в классе $\mathbf{X}$. ■

Ранее была установлена

Теорема 5 [2]. Группа $B \in \mathbf{X}$ ранга 2 определяется своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых групп ранга 2 тогда и только тогда, когда $B \cong Y \oplus Y$, где Y – почти делимая группа ранга 1. ■

Будем называть *инволюцией* всякую матрицу, у которой квадрат совпадает с единичной матрицей. Если группа $B \in \mathbf{X}$ имеет конечный ранг n , то наибольшая мощность множества попарно коммутирующих инволюций, которое содержится в $\text{Aut } B$, равна 2^n (см.: [3, 6, 9]). Если же ранг группы $B \in \mathbf{X}$ бесконечен, то $\text{Aut } B$ содержит бесконечное множество попарно коммутирующих инволюций (в качестве таких инволюций можно взять диагональные матрицы из $E(B)$, на главной диагонали которых стоят только 1 и -1). Отсюда следует, что если $B, B' \in \mathbf{X}$ и B имеет конечный ранг n , то изоморфизм $\text{Aut } B' \cong \text{Aut } B$ возможен лишь тогда, когда и B' имеет ранг n . Таким образом, группа B определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{X}$ тогда и только тогда, когда она определяется группой $\text{Aut } B$ в классе всех вполне разложимых групп ранга n . В частности, теорема 5 описывает те группы B ранга 2, которые определяются группой $\text{Aut } B$ во всем классе $\mathbf{X}$.

Перейдём к рассмотрению вопроса об определяемости вполне разложимых групп ранга 3 их группами автоморфизмов в классе $\mathbf{X}$ (или, что то же самое, в классе всех вполне разложимых групп ранга 3). Будем нумеровать слагаемые Y_i таким образом, чтобы матрицы кольца $E(B)$ были блочно-верхнетреугольными либо блочно-нижнетреугольными; критерии принадлежности таких матриц группе $\text{Aut } B = U(E(B))$ приведены в [6, 9]. Мы выделим пять случаев.

I. Пусть $B = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3$, где Y_1, Y_2, Y_3 – попарно неизоморфные рациональные группы. Так как в трехэлементном множестве $\{\mathbf{t}(Y_1), \mathbf{t}(Y_2), \mathbf{t}(Y_3)\}$ есть минимальный элемент, то в силу теоремы 4 группа B не определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{X}$.

II. Пусть $B = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_2$, причем типы $\mathbf{t}(Y_1)$ и $\mathbf{t}(Y_2)$ несравнимы. Вновь применяя теорему 4, получаем, что B не определяется группой $\text{Aut } B$ в классе $\mathbf{X}$.

III. Если $B = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_2$ и $\mathbf{t}(Y_1) < \mathbf{t}(Y_2)$, то, полагая $\Delta_{12} = \begin{pmatrix} \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} \end{pmatrix}$, имеем

$$E(B) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 \\ \Delta_{12} & M(2, \Gamma_{22}) \end{pmatrix}, \quad \text{Aut } B = \begin{pmatrix} U(\Gamma_{11}) & 0 \\ \Delta_{12} & GL_2(\Gamma_{22}) \end{pmatrix}.$$

По теореме 4 группа B не определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{X}$.

IV. Пусть $B = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_2$, причем $\mathbf{t}(Y_1) > \mathbf{t}(Y_2)$. Полагая $\Delta_{21} = (\Gamma_{21}, \Gamma_{21})$, имеем

$$E(B) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Delta_{21} \\ 0 & M(2, \Gamma_{22}) \end{pmatrix}, \quad \text{Aut } B = \begin{pmatrix} U(\Gamma_{11}) & \Delta_{21} \\ 0 & GL_2(\Gamma_{22}) \end{pmatrix}.$$

V. Если $B = Y_1 \oplus Y_1 \oplus Y_1$, то, очевидно, $E(B) = M(3, \Gamma_{11})$ и $\text{Aut } B = GL_3(\Gamma_{11})$.

Пользуясь результатами работ [6, 9], соберем в следующей таблице некоторые свойства группы $\text{Aut } B$ для каждого из рассматриваемых пяти случаев.

Инварианты группы $\text{Aut } B$

Тип группы $B \in \mathbf{X}$ ранга 3	I	II	III	IV	V
Наибольшая мощность содержащегося в $\text{Aut } B$ множества попарно коммутирующих инволюций, являющихся квадратами элементов группы $\text{Aut } B$	1	2	2	2	4
Число центральных инволюций группы $\text{Aut } B$	2, 4 или 8	4	2	2	2

Из этой таблицы можно сделать два вывода:

- если группа $B \in \mathbf{X}$ относится к типу IV и для группы $B' \in \mathbf{X}$ имеет место изоморфизм $\text{Aut } B' \cong \text{Aut } B$, то группа B' относится к типу IV либо к типу III;
- если группа $B \in \mathbf{X}$ относится к типу V и для группы $B' \in \mathbf{X}$ имеет место изоморфизм $\text{Aut } B' \cong \text{Aut } B$, то группа B' может относиться только к типу V.

Теорема 6. Пусть $B = Y_1 \oplus Y_1 \oplus Y_1$, где Y_1 – рациональная группа. Для группы $B' \in \mathbf{X}$ эквивалентны следующие условия:

- 1) $\text{Aut } B' \cong \text{Aut } B$.
- 2) $B' \cong Y_2 \oplus Y_2 \oplus Y_2$, где Y_2 – рациональная группа, такая, что $E(Y_2) \cong E(Y_1)$.
- 3) $B' \cong Y_2 \oplus Y_2 \oplus Y_2$, где Y_2 – рациональная группа, обладающая тем свойством, что кольцо $\Gamma_{22} = \{\alpha \in \mathbf{Q} \mid \alpha Y_2 \subset Y_2\}$ совпадает с Γ_{11} .

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 3). Если 2) выполнено, то $\Gamma_{11} \cong E(Y_1) \cong E(Y_2) \cong \Gamma_{22}$. Так как подкольца поля $\mathbf{Q}$ изоморфны лишь тогда, когда они равны, то $\Gamma_{22} = \Gamma_{11}$.

3) $\Rightarrow$ 1). Если выполняется 3), то $E(B') \cong M(3, \Gamma_{22}) = M(3, \Gamma_{11}) = E(B)$, а значит, $\text{Aut } B' = U(E(B')) \cong U(E(B)) = \text{Aut } B$.

1) $\Rightarrow$ 2). Ввиду сказанного перед теоремой из условия 1) следует, что B' – группа типа V, т.е. $B' \cong Y_2 \oplus Y_2 \oplus Y_2$, где Y_2 – рациональная группа. Так как выполнено $GL_3(E(Y_2)) \cong \text{Aut } B' \cong \text{Aut } B \cong GL_3(E(Y_1))$ и при этом кольца $E(Y_1)$ и $E(Y_2)$ являются коммутативными областями целостности, то в силу [10, теорема 5.7.7] имеет место изоморфизм $E(Y_2) \cong E(Y_1)$, что и требовалось. ■

Следствие 7. Пусть $B = Y_1 \oplus Y_1 \oplus Y_1$, где Y_1 – рациональная группа. Следующие условия эквивалентны:

- 1) Группа B определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{X}$.
- 2) Слагаемое Y_1 является почти делимым.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Предположим, что группа Y_1 не является почти делимой. В этом случае существует рациональная группа Y_2 , такая что $\mathbf{t}(Y_2) > \mathbf{t}(Y_1)$ и $E(Y_2) \cong E(Y_1)$. Ввиду теоремы 6 имеем $\text{Aut}(Y_2 \oplus Y_2 \oplus Y_2) \cong \text{Aut } B$. Сами группы B и $Y_2 \oplus Y_2 \oplus Y_2$ при этом не изоморфны, поскольку не изоморфны друг другу группы Y_1 и Y_2 , – получаем противоречие с условием 1).

2) $\Rightarrow$ 1). Предположим, что $B' \in \mathbf{X}$ и $\text{Aut } B' \cong \text{Aut } B$. Применяя теорему 6, получаем, что $B' \cong Y_2 \oplus Y_2 \oplus Y_2$, где Y_2 – рациональная группа, такая что $E(Y_2) \cong E(Y_1)$. Так как группа Y_1 почти делима, то аддитивная группа кольца $E(Y_1)$ изоморфна Y_1 . Тогда аддитивная группа кольца $E(Y_2)$ также изоморфна Y_1 , что возможно лишь в случае $Y_2 \cong Y_1$. Таким образом, $B' \cong B$, т.е. B определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{X}$. ■

Пусть теперь группа B относится к типу III или IV, т.е. $B = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_2$, где $\mathbf{t}(Y_1)$ и $\mathbf{t}(Y_2)$ – различные (но сравнимые) типы. Тогда имеем

$$E(B) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & M(2, \Gamma_{22}) \end{pmatrix}, \quad \text{Aut } B = \begin{pmatrix} U(\Gamma_{11}) & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & GL_2(\Gamma_{22}) \end{pmatrix};$$

при этом в точности одна из групп Δ_{12} и Δ_{21} равна 0, так как выполняется ровно одно из условий $\Gamma_{12} = 0$ и $\Gamma_{21} = 0$. Через E_n далее обозначаем единичную матрицу порядка n , через G – группу $\text{Aut } B$.

Лемма 8. Пусть $A = (a_{ij})$ – инволюция группы G , такая что $a_{11} = 1$, $a_{22} = a_{33} = -1$ и $a_{23} = a_{32} = 0$, и пусть $\Lambda_A = \{T^{-1}ATA \mid T \in G\}$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) Множество Λ_A совпадает с множеством $H = \begin{pmatrix} 1 & 2\Delta_{21} \\ 2\Delta_{12} & E_2 \end{pmatrix}$.
- 2) Множество Λ_A является подгруппой группы G .
- 3) Множество Λ_A замкнуто относительно операции умножения.
- 4) $a_{12}, a_{13} \in 2\Gamma_{21}$ и $a_{21}, a_{31} \in 2\Gamma_{12}$.
- 5) Инволюция A сопряжена в группе G с инволюцией $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) очевидны.

Запишем $A = \begin{pmatrix} 1 & A_{12} \\ A_{21} & -E_2 \end{pmatrix}$, где $A_{12} = (a_{12}, a_{13})$ и $A_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$.

3) $\Rightarrow$ 4). Для произвольных $u \in U(\Gamma_{11})$, $U_{22} \in GL_2(\Gamma_{22})$ и двух матриц $U_{12} \in \Delta_{21}$ и $U_{21} \in \Delta_{12}$, таких что $U_{12} = 0$ или $U_{21} = 0$, рассмотрим матрицы

$$U = \begin{pmatrix} u & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad W = \begin{pmatrix} u^{-1} & -u^{-1}U_{12}U_{22}^{-1} \\ -u^{-1}U_{22}^{-1}U_{21} & U_{22}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Легко видеть, что $UW = WU = E_3$ и, следовательно, $W = U^{-1}$. Тогда

$$U^{-1}AU = W \cdot AU = W \begin{pmatrix} u & U_{12} + A_{12}U_{22} \\ uA_{21} - U_{21} & -U_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & u^{-1}(A_{12}U_{22} + 2U_{12}) \\ U_{22}^{-1}(uA_{21} - 2U_{21}) & -E_2 \end{pmatrix}$$

(мы воспользовались тем, что $A_{12} = U_{12} = 0$ или $A_{21} = U_{21} = 0$).

Если $JA \in \Lambda_A$, то найдется матрица $U \in G$ со свойством $U^{-1}AU = J$. Считая, что U имеет вид (1), можем записать $A_{12}U_{22} + 2U_{12} = 0$ и $uA_{21} - 2U_{21} = 0$. Следовательно, $A_{12} = -2U_{12}U_{22}^{-1} \in 2\Delta_{21}$ и $A_{21} = 2u^{-1}U_{21} \in 2\Delta_{12}$, т.е. условие 4) выполнено.

Предположим теперь, что $JA \notin \Lambda_A$. Рассмотрим матрицы

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } T_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

заметим, что $T_{22} + U_{22} = T_{22}U_{22} = U_{22}T_{22} = E_2$. С учетом проделанных ранее вычислений имеем

$$\begin{aligned} T^{-1}AT \cdot A \cdot U^{-1}AU &= T^{-1}AT \cdot A \begin{pmatrix} 1 & A_{12}U_{22} \\ U_{22}^{-1}A_{21} & -E_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & A_{12}T_{22} \\ T_{22}^{-1}A_{21} & -E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A_{12}(U_{22} - E_2) \\ (E_2 - U_{22}^{-1})A_{21} & E_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & A_{12}(T_{22} + U_{22} - E_2) \\ (T_{22}^{-1} + U_{22}^{-1} - E_2)A_{21} & -E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix} = J. \end{aligned}$$

Следовательно, JA есть произведение матриц $T^{-1}ATA$ и $U^{-1}AUA$, принадлежащих множеству Λ_A . Ввиду условия 3) отсюда сразу вытекает $JA \in \Lambda_A$, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство импликации.

4) $\Rightarrow$ 5). Матрица U вида (1) удовлетворяет соотношению $U^{-1}AU = J$, если выполнено $A_{12}U_{22} + 2U_{12} = 0$ и $uA_{21} - 2U_{21} = 0$. Этого можно добиться, положив $u = 1$, $U_{22} = -E_2$ и выбрав матрицы U_{12} и U_{21} таким образом, чтобы $A_{12} = 2U_{12}$ и $A_{21} = 2U_{21}$ (ясно, что тогда $U_{12} = 0$ или $U_{21} = 0$).

5) $\Rightarrow$ 1). Найдем сначала множество $\Lambda_J = \{U^{-1}JUU \mid U \in G\}$. Пусть U – произвольная матрица из G , заданная условием (1). С учетом выкладок в доказательстве импликации 3) $\Rightarrow$ 4) имеем соотношения

$$U^{-1}JUU = \begin{pmatrix} 1 & 2u^{-1}U_{12} \\ -2U_{22}^{-1}U_{21} & -E_2 \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} 1 & -2u^{-1}U_{12} \\ -2U_{22}^{-1}U_{21} & E_2 \end{pmatrix} \in H;$$

таким образом, $\Lambda_J \subset H$. Обратно, полагая $u = -1$ и $U_{22} = -E_2$, мы видим, что всякая матрица из H принадлежит множеству Λ_J . Тем самым доказано, что Λ_J совпадает с группой H .

Ввиду условия 5) можно записать $A = F^{-1}JF$, где $F \in G$. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda_A &= \{T^{-1}F^{-1}JFTF^{-1}JF \mid T \in G\} = \{(FT)^{-1}J(FT)J \cdot JF^{-1}JF \mid T \in G\} = \\ &= \{U^{-1}JUU \mid U \in G\} \cdot JF^{-1}JF = \Lambda_J \cdot JF^{-1}JF. \end{aligned}$$

Поскольку матрица $JF^{-1}JF = J^{-1}F^{-1}JFJJ = (FJ)^{-1}J(FJ)J$ принадлежит группе Λ_J , то $\Lambda_A = \Lambda_J$, что завершает доказательство. ■

Замечание. Если инволюция $A \in G$ удовлетворяет эквивалентным условиям леммы 8, то легко видеть, что $(\Lambda_A, \cdot)$ – абелева группа, изоморфная той из аддитивных групп Δ_{12} и Δ_{21} , которая отлична от 0. Итак, мультипликативная группа

Λ_A изоморфна $\Gamma_{12} \oplus \Gamma_{12}$ (соответственно $\Gamma_{21} \oplus \Gamma_{21}$), если группа B относится к типу III (соответственно к типу IV).

Нетрудно найти *централизатор* инволюции $J \in G$, т.е. множество всех матриц из G , перестановочных с J :

Лемма 9. Централизатор матрицы J в группе G равен $\begin{pmatrix} U(\Gamma_{11}) & 0 \\ 0 & GL_2(\Gamma_{22}) \end{pmatrix}$. ■

Для подкольца R поля $\mathbf{Q}$ обозначим через $ML_2(R)$ подгруппу группы $GL_2(R)$, состоящую из всех матриц с определителем ± 1 . Из евклидовости кольца R можно вывести (см., напр.: [11]), что $ML_2(R)$ является *вторым слоем* группы $GL_2(R)$, т.е. порождается множеством всех инволюций из $GL_2(R)$. Справедлив такой факт:

Теорема 10 [2]. Для подколец R и S поля $\mathbf{Q}$ эквивалентны условия:

- 1) $GL_2(R) \cong GL_2(S)$.
- 2) $ML_2(R) \cong ML_2(S)$.
- 3) $R = S$. ■

Предположим теперь, что в дополнение к группе $B \in \mathbf{X}$ имеется группа $B' \in \mathbf{X}$ типа IV, такая что существует изоморфизм $\varphi: \text{Aut } B \rightarrow \text{Aut } B'$. Можно считать, что $B' = Y_3 \oplus Y_4 \oplus Y_4$, где $\mathbf{t}(Y_3) > \mathbf{t}(Y_4)$. Обозначим через A ту инволюцию группы $\text{Aut } B'$, в которую J переходит при отображении φ . Запишем

$$\text{Aut } B' = \begin{pmatrix} U(\Gamma_{33}) & \Delta_{43} \\ 0 & GL_2(\Gamma_{44}) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix};$$

здесь $\Delta_{43} = (\Gamma_{43}, \Gamma_{43})$, $A_{12} \in \Delta_{43}$ и $A_{22} \in GL_2(\Gamma_{44})$. Ясно, что A_{22} — инволюция и $a = \pm 1$.

Так как J есть квадрат элемента группы $G = \text{Aut } B$, то инволюция A должна быть квадратом некоторого элемента из $\text{Aut } B'$. Отсюда вытекает, что $a = 1$ и что A_{22} является квадратом некоторой матрицы (в частности, $|A_{22}|$ не может быть отрицательным числом). Из приведенного в [1] описания инволюций группы $GL_2(R)$ для колец $R \subset \mathbf{Q}$ можно сделать вывод, что из всех инволюций группы $GL_2(\Gamma_{44})$ только E_2 и $-E_2$ имеют определитель, отличный от -1 .

Если $A_{22} = E_2$, то A может быть инволюцией лишь при условии $A_{12} = 0$. Но тогда $\varphi(J) = A = E_3 = \varphi(E_3)$, что невозможно, так как φ — биекция. Значит, $A_{22} = -E_2$.

В силу леммы 8 множество $\Lambda_J = \{U^{-1}J U \mid U \in G\}$ является группой. Отсюда следует, что множество $\varphi(\Lambda_J) = \{T^{-1}ATA \mid T \in \text{Aut } B'\}$ есть группа, изоморфная Λ_J . С учетом замечания после леммы 8 получаем, что группа $\Gamma_{43} \oplus \Gamma_{43}$ изоморфна той из групп $\Gamma_{12} \oplus \Gamma_{12}$ и $\Gamma_{21} \oplus \Gamma_{21}$, которая не равна 0. Из этого можно заключить, что $\Gamma_{43} \cong \Gamma_{12}$ ($\Gamma_{43} \cong \Gamma_{21}$), если группа B относится к типу III (соответственно к типу IV).

Далее, применяя лемму 8 к инволюции $A \in \text{Aut } B'$, получаем, что A и J сопряжены в $\text{Aut } B'$, т.е. найдется внутренний автоморфизм группы $\text{Aut } B'$, переводящий матрицу A в J . Следовательно, существует изоморфизм $G \rightarrow \text{Aut } B'$, при котором J переходит в J . В связи с этим будем с самого начала считать, что $\varphi(J) = J$.

Заметим, что $-E_3$ — это единственная отличная от E_3 центральная инволюция как в G , так и в $\text{Aut } B'$, а следовательно, $\varphi(-E_3) = -E_3$. Отсюда вытекают равенства $\varphi(-J) = \varphi(-E_3)\varphi(J) = -E_3J = -J$. Далее, φ отображает централизатор матрицы J в группе G на ее же централизатор в группе $\text{Aut } B'$. Ввиду леммы 9 это означает, что φ индуцирует изоморфизм $U(\Gamma_{11}) \times GL_2(\Gamma_{22}) \rightarrow U(\Gamma_{33}) \times GL_2(\Gamma_{44})$.

Ясно, что вторые слои групп $U(\Gamma_{11}) \times GL_2(\Gamma_{22})$ и $U(\Gamma_{33}) \times GL_2(\Gamma_{44})$ равны соответственно $\{-1, 1\} \times ML_2(\Gamma_{22})$ и $\{-1, 1\} \times ML_2(\Gamma_{44})$. Таким образом, φ индуцирует изоморфизм $\psi: \{-1, 1\} \times ML_2(\Gamma_{22}) \rightarrow \{-1, 1\} \times ML_2(\Gamma_{44})$. Так как $\varphi(-J) = -J$, то ψ отображает двухэлементную циклическую группу, порожденную парой $(-1, E_2)$, на себя. Факторизуя по этой циклической группе, получаем, что ψ индуцирует изоморфизм $ML_2(\Gamma_{22}) \rightarrow ML_2(\Gamma_{44})$. В силу теоремы 10 отсюда следует $\Gamma_{22} = \Gamma_{44}$.

Если слагаемое Y_4 не является почти делимым, то в силу следствия 3 группа B' не определяется своей группой автоморфизмов в классе X . Поэтому далее рассматриваем случай, когда группа Y_4 почти делима. Ввиду неравенства $t(Y_3) > t(Y_4)$ группа Y_3 тоже почти делима, а значит, $t(\Gamma_{43}) = t(Y_3) : t(Y_4) = t(Y_3)$. Далее, так как $\Gamma_{44} \cong E(Y_4)$, то аддитивная группа кольца Γ_{44} изоморфна Y_4 ; следовательно, аддитивная группа кольца Γ_{22} также изоморфна Y_4 . Последнее возможно только при условии, что $Y_2 \cong Y_4$ (в частности, Y_2 – почти делимая группа).

Предположим, что группа B относится к типу III. Тогда имеем $t(Y_1) < t(Y_2)$ и $t(\Gamma_{12}) = t(Y_2) : t(Y_1) = t(Y_2)$. С другой стороны, из соотношений $\Gamma_{43} \cong \Gamma_{12}$ и $Y_4 \cong Y_2$ следует $t(\Gamma_{12}) = t(\Gamma_{43}) = t(Y_3) > t(Y_4) = t(Y_2)$ – получаем противоречие.

Предположим теперь, что группа B относится к типу IV. Тогда $t(Y_1) > t(Y_2)$ и $t(\Gamma_{21}) = t(Y_1) : t(Y_2) = t(Y_1)$. Так как $t(\Gamma_{43}) = t(Y_3)$, то $Y_1 \cong \Gamma_{21} \cong \Gamma_{43} \cong Y_3$. Отсюда уже следует $B \cong B'$.

Мы показали, что группа B' определяется своей группой автоморфизмов в X , если слагаемое Y_4 почти делимо. Объединяя этот факт со следствием 7, приходим к основному результату:

Теорема 11. Группа $B \in X$ ранга 3 определяется своей группой автоморфизмов в классе X тогда и только тогда, когда выполняется $B \cong Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_2$, где Y_2 – почти делимая группа ранга 1 и $t(Y_1) \geq t(Y_2)$. ■

Список источников

1. Гайдак В.А., Тимошенко Е.А. Инволюции полной линейной группы GL_2 над подкольцом поля $\mathbf{Q}$ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 62. С. 19–26. doi: 10.17223/19988621/62/2
2. Вильданов В.К., Гайдак В.А., Тимошенко Е.А. Об определяемости вполне разложимой группы ранга 2 ее группой автоморфизмов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 23–32. doi: 10.17223/19988621/68/2
3. Вильданов В.К. Определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 3 (1). С. 174–177.
4. Vildanov V.K. Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group // J. Math. Sci. (New York). 2014. V. 197, No. 5. P. 590–594. doi: 10.1007/s10958-014-1739-9
5. Vildanov V.K. On determinability of a completely decomposable torsion-free Abelian group by its automorphism group // J. Math. Sci. (New York). 2018. V. 230, No. 3. P. 372–376. doi: 10.1007/s10958-018-3742-z
6. Вильданов В.К. Определяемость абелевой группы ее группой автоморфизмов и центром кольца эндоморфизмов : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород, 2014.
7. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М. : Мир, 1977. Т. 2.
8. Себельдин А.М. Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов // Математические заметки. 1972. Т. 11, № 4. С. 403–408.

9. Третьяков И.В., Тимошенко Е.А. Инволюции в группе автоморфизмов вполне разложимой группы // Всероссийская молодёжная научная конференция студентов «Все грани математики и механики»: сб. ст. Томск: НТЛ, 2021. С. 139–154.
10. О'Мира О. Лекции о линейных группах // Автоморфизмы классических групп. М.: Мир, 1976. С. 57–167.
11. Елфимова А.М., Тимошенко Е.А. О линейных группах над кольцами // Всероссийская молодёжная научная конференция «Все грани математики и механики»: сб. ст. Томск: НТЛ, 2020. С. 13–20.

References

1. Gaidak V.A., Timoshenko E.A. (2019) Involyutsii polnoy lineynoy gruppy GL_2 nad podkol'tsom polya $\mathbf{Q}$ [Involutions of the general linear group GL_2 over a subring of the field $\mathbf{Q}$]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 62. pp. 19–26. doi: 10.17223/19988621/62/2
2. Vildanov V.K., Gaidak V.A., Timoshenko E.A. (2020) Ob opredelyaemosti vpolne razlozhimoy gruppy rang 2 ee gruppoy avtomorfizmov [On determinability of a completely decomposable rank 2 group by its automorphism group]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 23–32. doi: 10.17223/19988621/68/2
3. Vildanov V.K. (2011) Opredelyaemost' vpolne razlozhimoy abelevoy gruppy bez krucheniya rang 2 svoey gruppoy avtomorfizmov [Determinability of completely decomposable torsion-free Abelian group of rank 2 by its automorphism group]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod*. 3(1). pp. 174–177.
4. Vildanov V.K. (2014) Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 197(5). pp. 590–594. doi: 10.1007/s10958-014-1739-9
5. Vildanov V.K. (2018) On determinability of a completely decomposable torsion-free Abelian group by its automorphism group. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 230(3). pp. 372–376. doi: 10.1007/s10958-018-3742-z
6. Vildanov V.K. (2014) Opredelyaemost' abelevoy gruppy ee gruppoy avtomorfizmov i tsentrom kol'tsa endomorfizmov [Determinability of an Abelian group by its automorphism group and the center of its endomorphism ring]. Dissertation. Tomsk State University.
7. Fuchs L. (1973) *Infinite Abelian groups*. Vol. 2. New York; London: Academic Press.
8. Sebeldin A.M. (1972) Isomorphism conditions for completely decomposable torsion-free Abelian groups with isomorphic rings of endomorphisms. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*. 11(4). pp. 248–250. doi: 10.1007/BF01367498
9. Tretyakov I.V., Timoshenko E.A. (2021) Involyutsii v gruppe avtomorfizmov vpolne razlozhimoy gruppy [Involutions in the automorphism group of a completely decomposable group]. *All-Russia Youth Scientific Student Conference "Vse grani matematiki i mekhaniki" (sbornik statey)*. Tomsk: NTL. pp. 139–154.
10. O'Meara O.T. (1974) *Lectures on linear groups*. Providence: American Mathematical Society.
11. Elfimova A.M., Timoshenko E.A. (2020) O lineynykh gruppakh nad kol'tsami [On linear groups over rings]. *All-Russia Youth Scientific Conference "Vse grani matematiki i mekhaniki" (sbornik statey)*. Tomsk: NTL. pp. 13–20.

Сведения об авторах:

Тимошенко Егор Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

Третьяков Иван Владиславович – магистрант механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ivantretyakov00@gmail.com

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Timoshenko Egor A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

Tretyakov Ivan V. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ivantretyakov00@gmail.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 20.12.2021; принята к публикации 22.03.2022

The article was submitted 20.12.2021; accepted for publication 22.03.2022

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 531.7

doi: 10.17223/19988621/76/4

Прогнозирование долговечности паяных контактных соединений микросхем

Антон Владимирович Азин¹, Николай Николаевич Марицкий²,
Сергей Васильевич Пономарев³, Сергей Владимирович Рикконен⁴

^{1, 2, 3, 4} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ antonazin@mail.ru

² nnmar.niipmm@mail.ru

³ psv@niipmm.tsu.ru

⁴ rikk2@yandex.ru

Аннотация. Работа направлена на разработку метода неразрушающего контроля радиоэлектронного оборудования и его комплектующих. Метод позволяет выявить скрытые дефекты в конструкции электронной платы и спрогнозировать ресурс работы этой платы с учетом характера вероятных нагрузок при ее эксплуатации. Результаты аналитической оценки ресурса электронной платы верифицированы на основе данных экспериментальных исследований, проведенных в соответствии с IPC-9701. Погрешность прогнозирования не превышает 5%.

Ключевые слова: электронная плата, паяное соединение, микросхема, скрытый дефект, метод неразрушающего контроля, надежность, долговечность

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 0721-2020-0036).

Для цитирования: Азин А.В., Марицкий Н.Н., Пономарев С.В., Рикконен С.В. Прогнозирование долговечности паяных контактных соединений микросхем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 43–55. doi: 10.17223/19988621/76/4

Prediction of durability of soldered contact joints of chips

Anton V. Azin¹, Nikolay N. Maritsky²,
Sergey V. Ponomarev³, Sergey V. Rikkonen⁴

^{1, 2, 3, 4} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ antonazin@mail.ru

² nnmar.niipmm@mail.ru

³ psv@niipmm.tsu.ru

⁴ rikk2@yandex.ru

Abstract. The study is aimed at developing a nondestructive testing method for electronic equipment and its components. This method allows one to identify critical design defects of printed circuit boards (PCB) and to predict their service life taking into account the nature of probable operating loads. The study uses an acoustic emission method to identify and localize critical design defects of printed circuit boards. Geometric dimensions of detected critical defects can be determined by X-ray tomography. Based on the results of the study, a method combining acoustic emission and X-ray tomography has been developed for nondestructive testing of printed circuit boards. The stress-strain state of solder joints containing detected defects is analyzed. Durability is predicted using the damage function of the material, experimental fatigue curve with allowance for rheological properties of materials, the temperature effects, and complex stress-strain state. The results of using the developed method for estimating the degree of damage of the electronic board have been verified based on the experimental results of studies carried out in accordance with IPC-9701. The prediction error does not exceed 5%.

Keywords: printed circuit boards, solder joint, chip, latent defect, nondestructive testing method, reliability, durability

Acknowledgments: The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. 0721-2020-0036).

For citation: Azin, A.V., Maritsky, N.N., Ponomarev, S.V., Rikkonen, S.V. (2022) Prediction of durability of soldered contact joints of chips. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 43–55. doi: 10.17223/19988621/76/4

Введение

Надежность паяных соединений часто становится очень неприятной проблемой при разработке электронных систем. На нее влияет множество различных факторов, и каждый из них может значительно сократить срок службы соединений.

Точное выявление и устранение потенциальных причин отказа паяных соединений в процессе проектирования и изготовления может предотвратить ряд сложных проблем и связанные с ними убытки на более поздних этапах жизненного цикла продукта. Распространенными причинами отказа паяных соединений являются [1]:

1. Нежелательные напряжения, вызванные применением защитных покрытий.

Защитные покрытия (potting, underfill, conformal coating) обладают разными термическими и физико-механическими свойствами. Важными свойствами, кото-

рые нужно учитывать при выборе материала покрытия, являются температура стеклования, модуль упругости и коэффициент линейного теплового расширения.

2. Недооценка температурного цикла работы электронной платы (ЭП).

Для получения точных показателей надежности электронной системы необходим выбор модели долговечности для прогнозирования ресурса ЭП с учетом зависимости долговечности от диапазона температур, времени выдержки и скорости изменения температуры.

3. Механическое перенапряжение.

Для микросхем с мелким шагом выводов характерен отказ, вызванный перенапряжением в паяном соединении, который обычно проявляется в виде отслоения контактных площадок или трещины вдоль интерметаллического соединения припоя с контактной площадкой.

4. Крепление платы и место монтажа компонентов.

Расположение точек крепления и другие ограничения на перемещения платы оказывают значительное влияние на место возникновения и величину относительных деформаций платы в условиях теплового расширения, ударных и вибрационных нагрузок. Зеркальное расположение компонентов ограничивает деформации платы, делая ее более жесткой, что приводит к дополнительным напряжениям в паяных соединениях.

5. Дефекты пайки

Для того чтобы обеспечить высокое качество производства, необходимо проводить анализ микрошлифов и визуальный осмотр паяных соединений, прежде чем выпускать электронное устройство в эксплуатацию.

Одним из самых распространенных видов дефектов пайки многовыводных микросхем являются пустоты. Факторами, вызывающими пустоты в пайке, являются:

- дизайн трафарета и профиль оплавления;
- паяльная паста и дизайн печатных плат;
- обработка поверхности печатной платы и рабочая среда.

Различают следующие типы пустот паяных соединений многовыводных микросхем (рис. 1) [2]:

- 1) микропустоты (от 25 до 50 мкм в диаметре);
- 2) макропустоты (от 100 до 300 мкм в диаметре, в зависимости от размеров паяного соединения) – образуются при захвате газов во флюсе и паяльной пасте;
- 3) усадочные пустоты – удлиненные и шероховатые пустоты, начинающиеся с поверхности паяных соединений;
- 4) пустоты переходных отверстий;
- 5) интерметаллические пустоты – пустоты субмикронного размера в месте соединения припоя и контактной площадки, образующиеся при воздействии на плату повышенных температур;
- 6) точечные пустоты диаметром от 1 до 3 мкм, расположенные между слоем интерметаллидов и медной площадкой.

Согласно IPC (IPC-A-610) пустоты в припое считаются дефектом, если общая расчетная площадь всех пустот в любом заданном шарике / соединении припоя превышает 25% от общей площади шарика припоя при рентгеновском контроле качества паяных соединений ЭП [2].

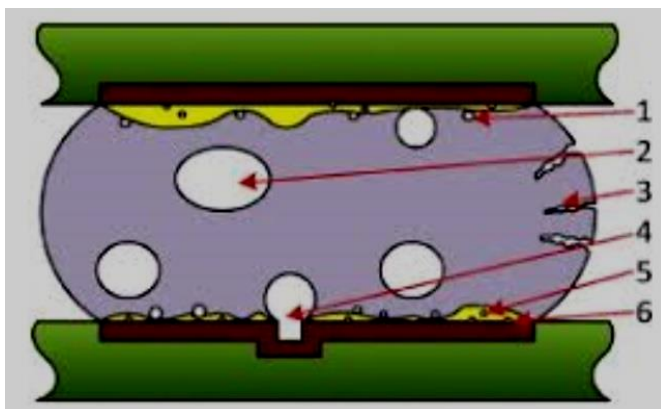


Рис. 1. Типы пустот паяного соединения [2]: 1 – микропустоты; 2 – макропустоты; 3 – усадочные пустоты; 4 – пустоты переходных отверстий; 5 – интерметаллические пустоты; 6 – точечные пустоты

Fig. 1. Type of voids in a solder joint [2]: (1) microvoids; (2) macrovoids; (3) shrinkage voids; (4) micro-via voids; (5) Kirkendall voids; and (6) pinhole voids

Пустоты в паяных соединениях – это потенциальные латентные дефекты, которые могут ускорить рост трещины в паяном соединении при эксплуатационных нагрузках ЭП [3]. Поэтому, независимо от размеров пустот, имеют огромное значение метод выявления пустот в паяном соединении и прогнозирование ресурса ЭП на базе выявленных дефектов.

1. Метод прогнозирования ресурса ЭП

Неразрушающие методы контроля позволяют выявлять дефекты паяных соединений многовыводных микросхем, при этом для прогнозирования ресурса ЭП требуются дополнительные исследования влияния найденных дефектов на целостность паяных соединений с учетом характера вероятных эксплуатационных нагрузок.

Проведенные авторами экспериментальные исследования на образцах ЭП с BGA микросхемами позволили адаптировать комбинацию методов неразрушающего контроля – метода акустической эмиссии (АЭ) и метода рентгеновской томографии (РТ) – для выявления скрытых дефектов в конструкции ЭП [4].

Метод АЭ позволяет при нагрузках, соответствующих эксплуатационным нагрузкам ЭП, выявлять дефекты паяных соединений, которые активируются и развиваются при нагружении. Для определения местоположения скрытых дефектов в конструкции ЭП использовали программное обеспечение AEWIn и аппаратуру Micro2 digital AE system (США) [5].

Метод РТ позволяет определить геометрические размеры выявленных активных дефектов и их расположение в паяных соединениях для проведения численного анализа надежности паяных соединений и ЭП в целом. Данные о скрытых дефектах получены с помощью микрофокусной системы рентгеновской томографии Y. Cheetah 160kV [4].

Методика совместного применения методов АЭ и РТ для получения данных о местоположении и геометрических размерах скрытых дефектов подробно раскрыта в [4].

Новизна данного исследования заключается в совершенствовании модели усталостной долговечности паяных соединений:

- для прогнозирования долговечности используются значения эквивалентных деформаций, что позволяет учитывать не только сдвиговые деформации в плоскости из-за разного термического расширения платы и чипа, но и нормальные, вызванные искривлением платы;

- применена уточненная математическая модель механического поведения материала припоя, учитывающая ползучесть при сравнительно длительном времени деформирования.

Определение механических характеристик материала припоя ПОС-61, используемого для присоединения микросхемы к ЭП, проводили с помощью усталостной испытательной системы INSTRON 8801 (США) в соответствии с ГОСТ 1497–84. Циклические испытания материала припоя ПОС-61 проводили с помощью усталостной испытательной системы INSTRON 8801 (США) в соответствии с ГОСТ 25502–79 [4].

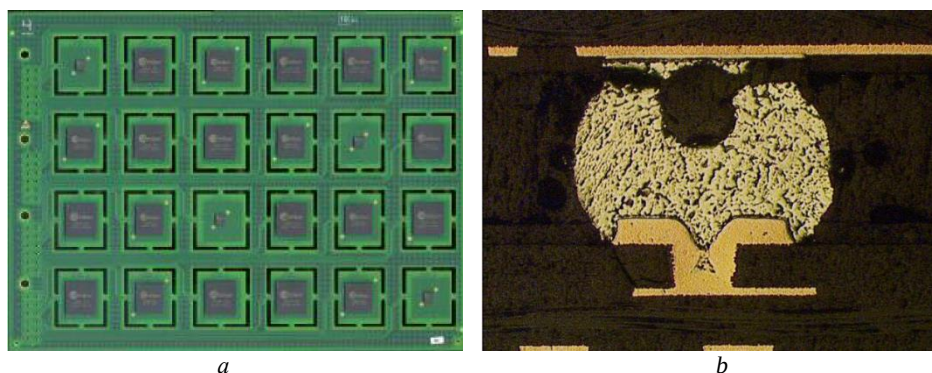


Рис. 2. Экспериментальные исследования из [3]: *a* – экспериментальный образец; *b* – разрушение дефектного паяного соединения в угловом внешнем ряду, 264 цикла, пустота составляет 18% от объема паяного соединения

Fig. 2. Experimental studies [3]: (*a*) test vehicle, (*b*) BGA void assessment: 18% void, outer row, 264 cycles

Для определения максимума интенсивности напряжений в материале припоя при заданных нагрузках проводили численное моделирование паяных соединений BGA контактов с помощью программного пакета ANSYS Mechanical.

Для верификации данных численного анализа предложенного метода использовали результаты эксперимента стороннего исследования из [3]. Исследования по определению влияния пустот в компонентах BGA и CSP с использованием испытаний на термический цикл (от -55 до $+125^{\circ}\text{C}$) в [3] были проведены в соответствии со спецификацией IPC-9701 для оловянно-свинцовых припоев (рис. 2).

2. Численный анализ

2.1. Определение механических характеристик материала припоя ПОС-61

Для определения механических характеристик припоя проведены испытания на одноосное растяжение и циклические испытания [4]. По результатам испытаний на одноосное растяжение установлена билинейная зависимость напряжений от деформации для материала припоя. Для определения параметров модели длительной прочности использовалось соотношение Коффина–Менсона:

$$N^m \Delta \varepsilon = C_N, \quad (1)$$

где N – количество циклов при данной деформации; C_N, m – параметры модели (для данного материала при температуре 20°C $C_N = 0.1892$, $m = 0.53$); $\Delta \varepsilon$ – размах деформации.

Большинство экспериментальных данных по длительной прочности металлов получено по результатам одноосных испытаний, но при оценке реальной работоспособности элементов конструкций необходимо учитывать неоднородность напряженно-деформированного состояния (НДС) [6–10]. В настоящее время существует несколько способов определения эквивалентных величин напряжений и деформаций, некоторые из которых требуют проведения либо большого количества экспериментов для определения параметров, либо сложных вычислений, не приводящих к существенному увеличению точности прогнозирования.

В работе [11] проведен детальный обзор видов эквивалентных величин и для описания длительной прочности в условиях плоского деформированного состояния предложено следующее выражение:

$$\varepsilon_e = \frac{1}{2} (\varepsilon_z + \sqrt{2 \cdot \varepsilon_{xy}^2}), \quad (2)$$

где ε_e – эквивалентная деформация, ε_z – растягивающая деформация, ε_{xy} – сдвиговые деформации.

Таким образом, для прогнозирования долговечности следует использовать значения эквивалентных деформаций, что позволяет учитывать не только сдвиговые деформации из-за разного термического расширения платы и чипа, но и нормальные, вызванные искривлением платы.

Деформации припоя состоят из двух компонент: мгновенной линейной и деформации ползучести. При определении деформаций ползучести использовались неявный метод описания ползучести в зависимости от температуры и уравнение Аррениуса. Стационарная ползучесть припоя может быть описана уравнением Гарофало–Аррениуса из [12]:

$$\frac{d\varepsilon_{cr}}{dt} = C_1 [\sinh(C_2 \sigma)]^{C_3} \exp(-C_4 / T). \quad (3)$$

Параметры материала C_1, C_2, C_3 и C_4 , необходимые для использования этой модели, были получены путем аппроксимации кривой экспериментальных данных в соответствующих уравнениях ползучести.

Итоговый вид соотношения деформации (4) был определен по данным экспериментальных исследований образцов из материала припоя:

$$\varepsilon(\sigma, t) = \left(\frac{\sigma}{E(T)} \right) + t^{C_5 - C_6 \cdot \sigma} \cdot C_1 [\sinh(C_2 \sigma)]^{C_3} \exp(-C_4 / T), \quad (4)$$

где $E = 16.082 \cdot 10^9$ Па при 25°C , $C_1 = 2\,317$, $C_2 = 0.051 \cdot 10^{-6}$, $C_3 = 5.04$, $C_4 = 5\,003.6$, $C_5 = 1.498$, $C_6 = 0.0282 \cdot 10^{-6}$. Все параметры можно определить из трех независимых простых экспериментов. В случае термдеформации паяного соединения величина эквивалентного напряжения может быть определена из разности коэффициентов линейного температурного расширения спаянных элементов. $E(T)$ в ГПа в общем случае зависит от температуры и имеет вид, который определяется из экспериментальных данных:

$$E(T) = a - bT, \quad (5)$$

где a и b – параметры модели, отображающие зависимость модуля упругости материала от температуры ($a = 6.4411$, $b = 0.0284$).

Согласование с экспериментальными данными представлено на рис. 3.

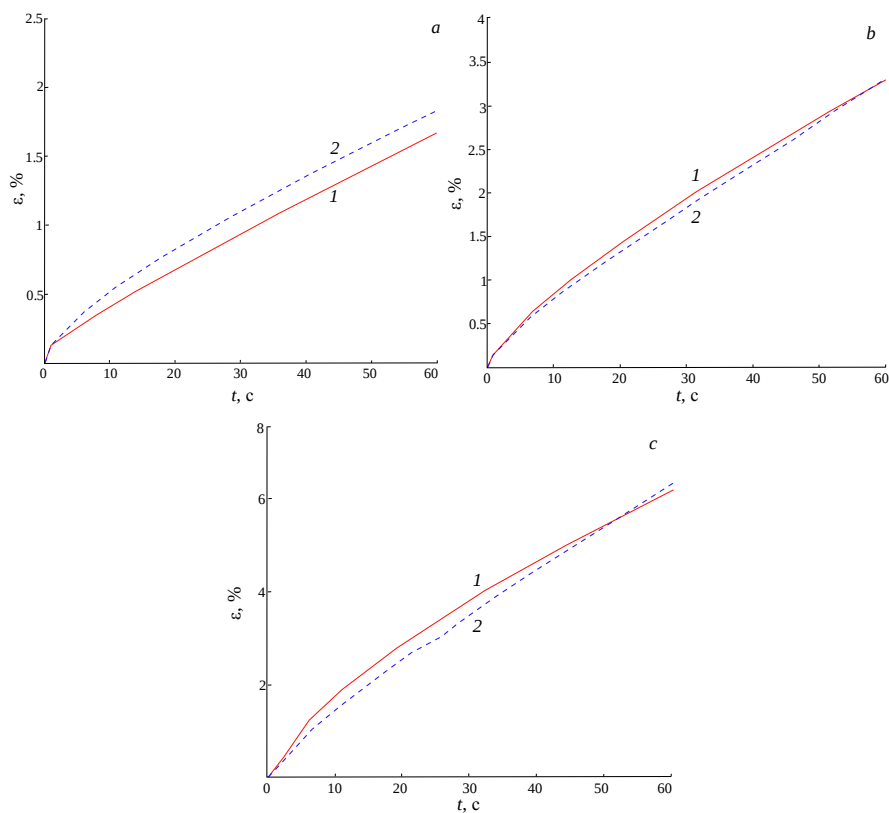


Рис. 3. Результаты испытаний: a , b , c – деформация ползучести при разных уровнях нагружения – 150, 175 и 200 Н соответственно

Fig. 3. Test results: (a), (b), (c) are creep deformations at different loading levels of 150, 175, and 200 N, respectively

2.2. Функция поврежденности материала

Для определения состояния материала в текущий момент и прогнозирования оставшегося срока эксплуатации введем функцию поврежденности материала В.В. Москвитина [13], которая должна удовлетворять следующим условиям:

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(t^*) = 1, \quad (6)$$

где t^* – время до наступления предельного состояния (разрушения).

Для оценки поврежденности материала вводится выражение следующего вида, удовлетворяющее условиям (6):

$$\omega(t, T) = \int_0^t \frac{(1 + m_1)(t - \tau)^{m_1}}{t_0(\varepsilon, T)^{1+m_1}} d\tau, \quad (7)$$

где параметр $m_1 = -1 + 1/m$ (для материала припоя $m = 0.53$ при температуре 25°C); ε – эквивалентные деформации; t_0 – долговечность для данного материала, определяемая из экспериментов при температуре T .

При термической циклической нагрузке образцы паяных соединений практически подвергаются малоцикловой усталости, поэтому время до разрушения можно связать с количеством циклов соотношением: $t = N/\nu$, где t – время до разрушения; N – количество циклов до разрушения, определенное из усталостной прочности Коффина–Менсона (1); ν – частота нагружения.

В результате функция поврежденности (7) примет вид:

$$\omega(t, T) = \nu \int_0^t \frac{(1 + m_1)(t - \tau)^{m_1}}{[C_1(a - bT)\Delta\varepsilon(\tau)^{-1}]^{1+m_1}} d\tau, \quad (8)$$

где $\Delta\varepsilon$ – размах эквивалентных деформаций, величина которых определяется из соотношений (2)–(5); C_1 и m – параметры модели, определенные для данного материала, $C_N(T) = C_1 \cdot E(T)$.

После интегрирования соотношения (8) получим аналитическую зависимость поврежденности материала от времени при заданном уровне деформаций и температуре T , отличной от начальной:

$$\omega(t, T) = \left[\frac{\nu}{C_1(a - bT)} \right]^{\frac{1}{m}} \Delta\varepsilon t^{\frac{1}{m}}. \quad (9)$$

2.3. Оценка несущей способности паяных соединений

Для прогнозирования ресурса работы электронной платы с обнаруженными дефектами необходимо провести оценку НДС дефектных паяных соединений посредством численного анализа. В задаче НДС электронной платы определялось при температурном цикле от -55 до $+125^\circ\text{C}$ с 15-минутной выдержкой при максимальной и минимальной температурах, скорость охлаждения и нагрева составляла $10^\circ\text{C}/\text{мин}$ [14].

Для того чтобы учесть все граничные условия и нагрузки, которые испытывает паяное соединение при термоциклировании, необходимо рассмотреть два типа численных моделей: общую и локальную [15].

Образец в экспериментальных исследованиях из [3] – это плата с набором микросхем, которая механически разделена на сегменты для исключения влияния одного компонента на другой. Сегменты имеют равные габариты, и по центру сегмента располагается микросхема. Общая модель отображает сегмент электронной платы с микросхемой (рис. 4). Модель содержит печатную плату, контактные площадки на печатной плате и на подложке микросхемы, подложку,

микросхему, массив паяных соединений. Так как задача осесимметричная, рассматривается 1/4 часть конструкции электронной платы. Результатом решения является поле перемещений для всех узлов модели. Далее это поле перемещений прикладывается к паяным соединениям с дефектами в локальной модели для определения максимума интенсивности напряжений.

Локальная модель отображает паяное соединение, содержащее дефект. Рассмотрен случай углового паяного соединения с дефектом в виде пустоты, занимающей 18% от общего объема паяного соединения (рис. 3, б, 5). Модель содержит: печатную плату, контактные площадки на печатной плате и на подложке микросхемы, подложку, паяное соединение. В качестве нагрузки в локальной модели используются данные, полученные в общей модели: перемещение верхней контактной площадки относительно нижней контактной площадки по всем осям.

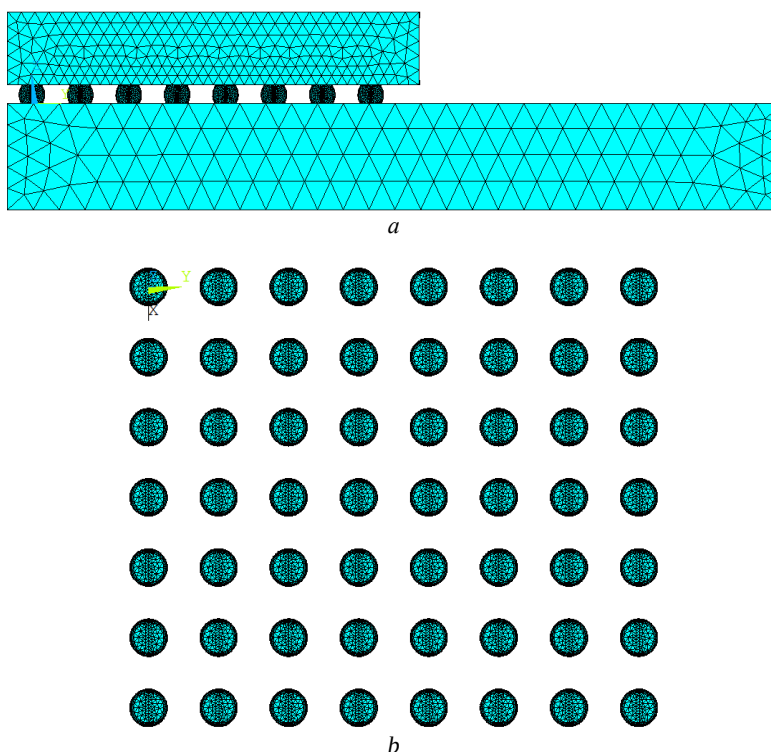


Рис. 4. Глобальная модель: а – общий вид; б – массив паяных соединений
Fig. 4. Global model: (a) the general view and (b) BGA

В результате численного моделирования определен размах по эквивалентным деформациям при изменении температур от -55 до 125°C : по оси $Z - \Delta\epsilon_z = 0.0053$, в плоскости $XY - \Delta\epsilon_{xy} = 0.00377$. Интенсивность напряжений в паяном соединении не превышает предел пропорциональности.

На рис. 6 приведены графики функции поврежденности дефектного паяного соединения для двух случаев: 1 – учет эквивалентной деформации (сплошная линия), 2 – учет только сдвиговой деформации (пунктирная линия). В случае

учета только сдвиговой деформации получаем завышенный срок эксплуатации более чем на 20%.

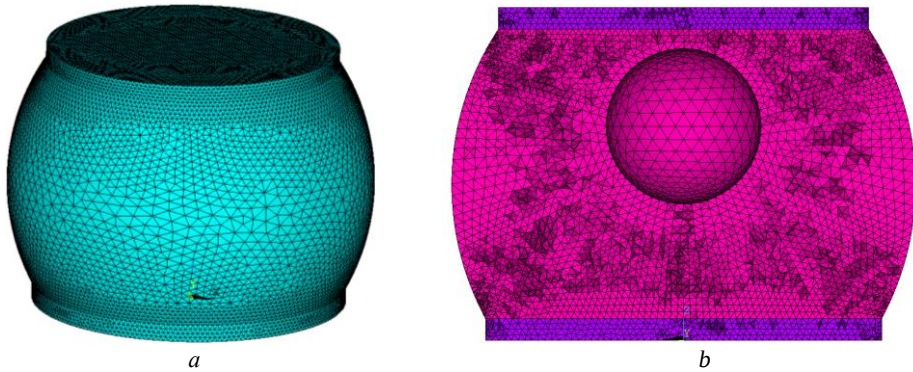


Рис. 5. Локальная модель паяного соединения с дефектом: *a* – конечно-элементная модель паяного соединения; *b* – сечение паяного соединения

Fig. 5. Local model of a soldered joint with a defect: (*a*) general view and (*b*) sub model containing a void

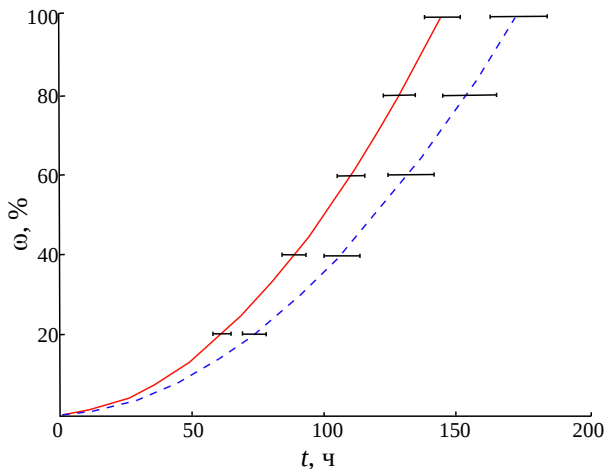


Рис. 6. Функция накопления повреждений дефектного паяного соединения

Fig. 6. Damage accumulation function of a damaged soldered joint

Как видно из рис. 6, при частоте теплового цикла, равной 1 цикл за 30 минут, время работы составляет 144 часа, или 288 циклов, что на 4.3% расходится с экспериментальными результатами из [3]. Погрешность определения параметров функции поврежденности не превышает 7%.

Заключение

По результатам проведенных исследований разработан метод неразрушающего контроля электронной аппаратуры. Метод позволяет выявить скрытые дефек-

ты в конструкции ЭП, проанализировать их опасность и определить остаточный ресурс работы ЭП. Данные численного анализа верифицированы на основе результатов экспериментальных исследований, проведенных в соответствии с IPC-9701. Погрешность разработанного метода не превышает 5%.

Учет эквивалентного деформированного состояния позволяет точнее оценивать срок жизни и прогнозировать запас прочности ЭП.

Данный метод может применяться на производстве при изготовлении ЭП, отработке новых решений перед серийным производством. Также метод применим для оценки ресурса оборудования в процессе эксплуатации.

Список источников

1. 5 главных причин отказа паяных соединений // Soft engineering group. 2020. URL: <https://www.ansys.soften.com.ua/about-ansys/blog/544-top-5-reasons-solder-joint-failure.html>
2. What is a Solder Void? // PCB Directory. 2020. URL: <https://www.pcbdirectory.com/community/what-is-solder-voiding>
3. Hillman D., Adams D., Pearson T., Williams B., Petrick B., Wilcoxon R. The last will and testament of the BGA void. 2011. 15 p. URL: https://www.circuitinsight.com/pdf/last_testament_bga_void_smta.pdf
4. Azin A., Zhukov A., Narikovich A., Ponomarev S., Rikkonen S., Leitsin V. Nondestructive testing method for a new generation of electronics // MATEC Web of Conferences. 2018. V. 143. Art. 04007. doi: 10.1051/mateconf/201814304007
5. Ponomarev S.V., Rikkonen S., Azin A., Karavatskiy A., Maritskiy N., Ponomarev S.A. The applicability of acoustic emission method to modeling the endurance of metallic construction elements // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2015. V. 71, No. 1. Art. 012056. doi: 10.1088/1757-899X/71/1/012056
6. Симонов Ю.Н., Симонов М.Ю. Физика прочности и механические испытания металлов : курс лекций. Пермь : Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2020.
7. Музыка Н.Р., Щвец В.П. Влияние вида нагружения на процесс накопления повреждений в материале // Проблемы прочности. 2014. № 1. С. 130–136.
8. Лучкин Р.С. Прочность и надежность паяных конструкций. Тольятти : Изд-во Тольяттинского гос. ун-та, 2014.
9. Иванов А.В., Пизанов М.Н. Оценка качества паяных соединений электронных узлов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2016. Т. 18, № 4-7. С. 1381–1386.
10. Парфенов А.Н. Введение в теорию прочности паяных соединений // Технологии в электронной промышленности. 2008. № 2. С. 46–52.
11. Локощенко А.М. Эквивалентные напряжения в расчетах длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии (обзор) // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, № 4. С. 128–135. doi: 10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-128-135
12. Bansal A., Ramakrishna G., Liu K. Investigation of Pad Cratering in Large Flip-Chip BGA using Acoustic Emission // IPC APEX EXPO Proceedings. 2011. 12 p.
13. Москвитин В.В. Соппротивление вязкоупругих материалов. М. : Наука, 1972.
14. Otiaba K.C., Bhatti R.S., Ekere N.N., Mallik S., Ekpu M. Finite element analysis of the effect of silver content for Sn–Ag–Cu alloy compositions on thermal cycling reliability of solder die attach // Engineering Failure Analysis. 2013. V. 28. P. 192–207. doi: 10.1016/j.engfailanal.2012.10.008
15. Ladani L.J., Dasgupta A. A meso-scale damage evolution model for cyclic fatigue of viscoplastic materials // International J. of Fatigue. 2009. V. 31. P. 703–711. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2008.03.013

References

1. (2020) 5 *glavnykh prichin otkaza payanykh soedineniy* [Top 5 reasons for solder joint failure]. *Soft engineering group*. Access mode: <https://www.ansys.soften.com.ua/about-ansys/blog/544-top-5-reasons-solder-joint-failure.html>
2. (2020) What is a Solder Void? *PCB Directory*. Access mode: <https://www.pcbdirectory.com/community/what-is-solder-voiding>.
3. Hillman D., Adams D., Pearson T., Williams B., Petrick B., Wilcoxon R. (2011) *The last will and testament of the BGA void*. Access mode: https://www.circuitinsight.com/pdf/last_testament_bga_void_smta.pdf
4. Azin A., Zhukov A., Narikovich A., Ponomarev S., Rikkonen S., Leitsin V. (2018) Nondestructive testing method for a new generation of electronics. *MATEC Web of Conferences*. 143. 04007. doi: 10.1051/mateconf/201814304007
5. Ponomarev S.V., Rikkonen S., Azin A., Karavatskiy A., Maritskiy N., Ponomarev S.A. (2015) The applicability of acoustic emission method to modeling the endurance of metallic construction elements. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 71(1). p. 012056. doi: 10.1088/1757-899X/71/1/012056
6. Simonov Yu.N., Simonov M.Yu. (2020) *Fizika prochnosti i mekhanicheskiye ispytaniya metallov: kurs lekciy* [Strength physics and mechanical testing of metals: a course of lectures]. Perm: Perm Polytech University.
7. Muzyka N.R., Shvets V.P. (2014) Effect of a loading mode on damage accumulation in the material *Strength of Materials*. 46(1). pp. 105–109.
8. Luchkin R.S. (2014) *Prochnost' i nadezhnost' payanykh konstruksiy* [Strength and reliability of brazed structures]. Togliatti: TSU Publishing House.
9. Ivanov A.V., Piganov M.N. (2016) Otsenka kachestva payanykh soyedineniy elektronnykh uzlov [Assessment of the quality of soldered joints of electronic components]. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk – Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*. 18(4-7). pp. 1381–1386.
10. Parfenov A.N. (2008) Vvedeniye v teoriyu prochnosti payanykh soyedineniy [Introduction to the theory of strength of brazed joints]. *Tekhnologii v elektronnoy promyshlennosti*. 2. pp. 46–52.
11. Lokoshchenko A.M. (2009) Ekvivalentnyye napryazheniya v raschetakh dlitel'noy prochnosti metallov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii (obzor) [Equivalent stresses in calculations of long-term strength of metals under complex stress state (review)]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*. 9(4). pp. 128–135. doi: 10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-128-135.
12. Bansal A., Ramakrishna G., Liu K. (2011) Investigation of pad cratering in large flip-chip BGA using acoustic emission. *IPC APEX EXPO Proceedings*.
13. Moskvitin V.V. (1972) *Soprotivleniye vyazkouprugikh materialov* [Resistance of viscoelastic materials]. Moscow: Nauka.
14. Otiaba K.C., Bhatti R.S., Ekere N.N., Mallik S., Ekpu M. (2013) Finite element analysis of the effect of silver content for Sn–Ag–Cu alloy compositions on thermal cycling reliability of solder die attach. *Engineering Failure Analysis*. 28. pp. 192–207. doi: 10.1016/j.engfailanal.2012.10.008.
15. Ladani L.J., Dasgupta A. (2009) A meso-scale damage evolution model for cyclic fatigue of viscoplastic materials. *International Journal of Fatigue*. 31. pp. 703–711. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2008.03.013.

Сведения об авторах:

Азин Антон Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: antonazin@mail.ru

Марицкий Николай Николаевич – кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nnmar.niipmm@mail.ru

Пonomarev Сергей Васильевич – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, заведующий отделом Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: psv@niipmm.tsu.ru

Рикконен Сергей Владимирович – кандидат технических наук, доцент, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: rikk2@yandex.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Azin Anton V. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: antonazin@mail.ru

Maritsky Nikolay N. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nnmar.niipmm@mail.ru

Ponomarev Sergey V. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: psv@niipmm.tsu.ru

Rikkonen Sergey V. (Candidate of Engineering Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rikk2@yandex.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 09.12.2021; принята к публикации 22.03.2022

The article was submitted 09.12.2021; accepted for publication 22.03.2022

Научная статья

УДК 532.5.011

doi: 10.17223/19988621/76/5

Методы определения коэффициента сопротивления при вдуве газа с поверхности сферической частицы

Владимир Афанасьевич Архипов¹, Сергей Александрович Басалаев²,
Ксения Григорьевна Перфильева³, Сергей Николаевич Поленчук⁴,
Анна Сергеевна Усанина⁵

1, 2, 3, 4, 5 Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ leva@niipmm.tsu.ru

² tarm@niipmm.tsu.ru

³ k.g.perfiljeva@yandex.ru

⁵ usaninaanna@mail.ru

Аннотация. Предложены новые методы определения коэффициента сопротивления твердой сферической частицы в условиях потока массы от ее поверхности. С использованием предложенных методов проведены экспериментальные исследования влияния вдува воздуха с поверхности твердой сферы на коэффициент сопротивления в переходном и автомодельном режимах обтекания частицы в области чисел Рейнольдса $Re = 133 \div 9\,900$. Получены экспериментальные данные для коэффициента сопротивления частицы в зависимости от числа Рейнольдса при варьировании величины интенсивности вдува газа (скорости вдуваемого газового потока с поверхности частицы). Для автомодельного режима течения найдена эмпирическая зависимость коэффициента сопротивления от соотношения скорости вдуваемого с поверхности частицы потока газа к скорости обдувающего частицу потока.

Ключевые слова: твердая сфера, вдув газа, коэффициент сопротивления, число Рейнольдса, переходный режим течения, автомодельный режим течения, экспериментальное исследование

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № FSWM-2020-0036.

Для цитирования: Архипов В.А., Басалаев С.А., Перфильева К.Г., Поленчук С.Н., Усанина А.С. Методы определения коэффициента сопротивления при вдуве газа с поверхности сферической частицы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 56–69. doi: 10.17223/19988621/76/5

Methods for determining the drag coefficient at gas injection from the surface of spherical particle

Vladimir A. Arkhipov¹, Sergey A. Basalaev², Ksenia G. Perfilieva³,
Sergey N. Polenchuk⁴, Anna S. Usanina⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ leva@niipmm.tsu.ru

² tarm@niipmm.tsu.ru

³ k.g.perfiljeva@yandex.ru

⁵ usaninaanna@mail.ru

Abstract. New methods for studying the effect of gas injection from the surface of a solid spherical particle on its drag coefficient in the transient and self-similar regimes of flow around the particle have been presented. An advantage of the proposed methods is the ability to isolate in a pure form the effect of the mass flux from the particle surface (without the effect of other factors, for example, particle acceleration) on the drag coefficient. New results of an experimental study of the effect of air flow blowing on the drag coefficient of a solid perforated sphere in the Reynolds number range $Re = 133 \div 9900$ have been presented. It has been shown that the drag coefficient decreases when air is blown from the particle surface. As the Reynolds number Re increases, the drag coefficient C_D upon gas injection in the transient flow regime decreases to a certain critical value corresponding to the onset of the self-similar regime. At the onset of the self-similar regime (reaching the critical value of C_D), the drag coefficient increases with an increase in the Reynolds number and asymptotically tends to a constant value $C_D = 0.44$. However, the opposite effect has been found for a small diameter of the particle ($D = 1$ cm) at a blowing velocity $u_e \geq 1.3$ m/s: an increase in the drag coefficient of the particle C_D at air efflux from the particle surface in comparison with the drag coefficient value in the absence of gas flow injection ($u_e = 0$ m/s). This is apparently associated with a change in the characteristics of the boundary layer of the particle due to the rearrangement of the flow profile near the spherical particle surface caused by a decrease in its size. An empirical dependence of the drag coefficient of a solid sphere on the ratio of the velocity of injection from the surface of the particle to the velocity of blowing $C_D = 0.15 + (0.44 - 0.15) / (1 + (9\bar{u} / 5)^{3.8})$ (with the coefficient of determination $R^2 = 0.89$) has been obtained for a self-similar particle regime flow.

Keywords: solid sphere, gas injection, drag coefficient, Reynolds number, transient flow regime, self-similar flow regime, experimental study

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of state assignment No. 0721-2020-0036.

For citation: Arkhipov, V.A., Basalaev, S.A., Perfilieva, K.G., Polenchuk, S.N., Usanina, A.S. (2022) Methods for determining the drag coefficient at gas injection from the surface of spherical particle. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 56–69. doi: 10.17223/19988621/76/5

Введение

Интерес к динамике движения частиц дисперсной фазы в потоке газа обусловлен их существенной ролью в целом ряде важных задач прикладного назначения, связанных с двухфазными течениями в энергоустановках, образованием атмосферных осадков, распространением капель топлива при отделении ступеней ракет-носителей, теплообменом при кипении, кавитацией, флотацией и другими технологическими процессами. В указанных задачах важнейшим фактором является режим обтекания частицы дисперсной фазы, определяемый числом Рейнольдса Re .

В зависимости от величины числа Рейнольдса выделяют три основных режима движения одиночной частицы дисперсной фазы [1]: стоксовский, переходный и автомоделный режимы. Каждый из указанных режимов характеризуется соответствующим выражением для коэффициента сопротивления C_D . Для твердой сферы коэффициент сопротивления в области малых чисел Рейнольдса $Re < 1$ рассчитывается по формуле Стокса

$$C_D = \frac{24}{Re}, \quad (1)$$

при числах $Re = 1 \div 700$ (промежуточный режим) C_D определяется по формуле Клячко [2]

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{4}{\sqrt[3]{Re}}, \quad (2)$$

при числах $Re > 700$ (автомоделный режим) C_D составляет

$$C_D = 0.44. \quad (3)$$

Однако данные выражения для коэффициента сопротивления твердой сферической частицы получены без учета истечения массы с поверхности частицы. В ряде практических задач с поверхности частицы происходит дув газообразных продуктов испарения и / или горения частицы [3–5]. В условиях ддува газа с поверхности частицы в несущую среду использование выражений (1)–(3) для коэффициента сопротивления приводит к погрешностям при расчете скорости движения частиц [6].

Большинство работ по исследованию влияния ддува газа с поверхности частицы являются численными. В частности, можно выделить работы [6, 7], в которых предложены теоретические зависимости для расчета коэффициента сопротивления C_D в условиях оттока массы с поверхности частицы при низких значениях числа Рейнольдса:

$$C_D = k(Re, Re_s)C_{D0},$$

где $k(Re, Re_s) < 1$ – функция чисел Рейнольдса основного потока Re и потока газа с поверхности частицы Re_s ; C_{D0} – коэффициент сопротивления без учета ддува газа с поверхности частицы.

Результаты экспериментов разных авторов показывают, что испарение или горение вещества частицы существенно снижает коэффициент сопротивления [7–11]. При анализе опубликованных результатов следует иметь в виду, что они получены, как правило, при наличии ускорения частицы. При этом выделить в чистом виде влияние потока массы от поверхности частицы достаточно трудно.

Целью настоящей работы является нахождение коэффициента сопротивления твердой сферической частицы при вдуве газа с ее поверхности на основе новых экспериментальных методик, позволяющих оценить с высокой точностью степень влияния интенсивности вдува с поверхности частицы при отсутствии ее ускорения на режим течения. Первая методика определения коэффициента сопротивления при истечении потока массы с поверхности частицы включает измерение силы сопротивления частицы (через угол поворота консоли с частицей) при воздействии на нее газового потока, а вторая – взвешивание частицы под действием вдуваемого с ее поверхности и обдувающего потоков воздуха.

Описание методик экспериментального определения коэффициента сопротивления твердой сферы в условиях вдува газа с ее поверхности

Для экспериментального исследования влияния вдува газа с поверхности твердой сферической частицы разработаны две экспериментальные установки и методики. Первая методика измерения аэродинамического коэффициента сопротивления сферической частицы при вдуве газа с ее поверхности заключается в измерении силы сопротивления частицы при воздействии на нее газового потока [12]. Твердый шарик размещается в равномерном обдувающем потоке газа путем подвешивания на тонкой металлической трубке, которая может вращаться вокруг горизонтальной оси, расположенной перпендикулярно направлению потока обдувающего газа. Во внутреннюю полость шарика подается под давлением газ. Затем измеряется угол отклонения металлической трубки от первоначального вертикального направления. Также определяются объемный расход Q подаваемого в полость шарика газа и скорость u обдувающего его газового потока.

Исследование коэффициента сопротивления твердой сферы при вдуве воздуха с ее поверхности по описанной выше методике проводилось на экспериментальной установке, схема которой приведена на рис. 1. Полая частица 1, в качестве которой использовался теннисный шарик, крепилась на тонкой полой трубке 2. Металлическая трубка 2 закреплялась на шарикоподшипнике 3. Верхняя часть металлической трубки 2 выполнена в виде стрелки 4, позволяющей измерять на шкале 5 угол поворота α трубки 2 при отклонении шарика 1 под воздействием обдувающего потока воздуха. Скорость обдува шарика измерялась с помощью трубки Пито 6 [13].

В ходе эксперимента во внутреннюю полость шарика 1 подавался через гибкий шланг 7 воздух из баллона 8 через редуктор 9 с контрольным манометром 10. Объемный расход вдуваемого в полость шарика воздуха измерялся расходомером 11. В экспериментах использовался турбинный расходомер СГ-6 [14]. После подачи потока воздуха из баллона 8 происходило равномерное истечение воздуха с поверхности шарика 1.

В процессе обтекания частицы равномерным потоком газа на нее действует три вида сил (рис. 2): сила тяжести F_g , сила аэродинамического сопротивления F_D и сила натяжения консоли F_n . При равновесии частицы соотношение данных сил имеет вид:

$$F_g = F_n \cdot \cos \alpha, \quad (4)$$

$$F_D = F_n \cdot \sin \alpha, \quad (5)$$

где α – угол отклонения металлической трубки от вертикального положения; $F_g = mg$; m – масса шарика; $g = 9.80665 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения.

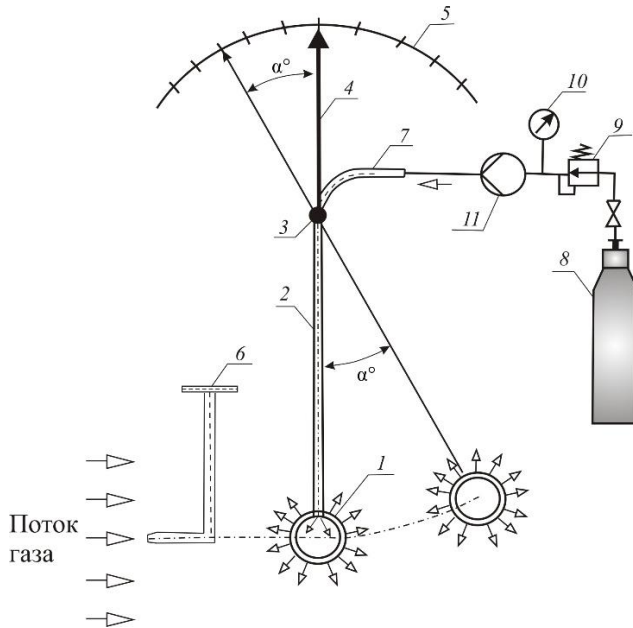


Рис. 1. Схема установки для определения коэффициента сопротивления твердой сферы при оттоке газа с ее поверхности, основанная на измерении силы сопротивления: 1 – шарик; 2 – полая металлическая трубка; 3 – шарикоподшипник; 4 – часть трубки, изготовленная в виде стрелки; 5 – шкала угломера; 6 – трубка Пито; 7 – силиконовый шланг; 8 – баллон с воздухом; 9 – редуктор; 10 – манометр; 11 – расходомер

Fig. 1. Diagram of the experimental setup for determining the drag coefficient at gas injection from its surface based on measuring the drag force: (1) sphere; (2) hollow metal tube; (3) multi-ball bearing; (4) arrow-shaped part of the tube; (5) goniometer scale; (6) Pitot tube; (7) silicone hose; (8) air cylinder; (9) reducer; (10) control pressure gauge; and (11) flow meter

Сила аэродинамического сопротивления для сферической частицы рассчитывается по формуле [1]

$$F_D = \frac{1}{8} C_D \pi D^2 \rho u^2, \quad (6)$$

где D – диаметр частицы; $\rho = 1.205 \text{ кг/м}^3$ – плотность воздуха, обдувающего частицу (при температуре 294 К и давлении атмосферы 101.3 кПа) [15]; u – скорость обдувающего потока воздуха. Из выражения (6) следует соотношение для коэффициента сопротивления

$$C_D = \frac{8F_D}{\pi D^2 \rho u^2} \quad (7)$$

Из (4) и (5) выведем соотношение

$$F_D = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

и, подставив его в (7), получим рабочую формулу для расчета коэффициента аэродинамического сопротивления:

$$C_D = \frac{8mg}{\pi D^2 \rho u^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

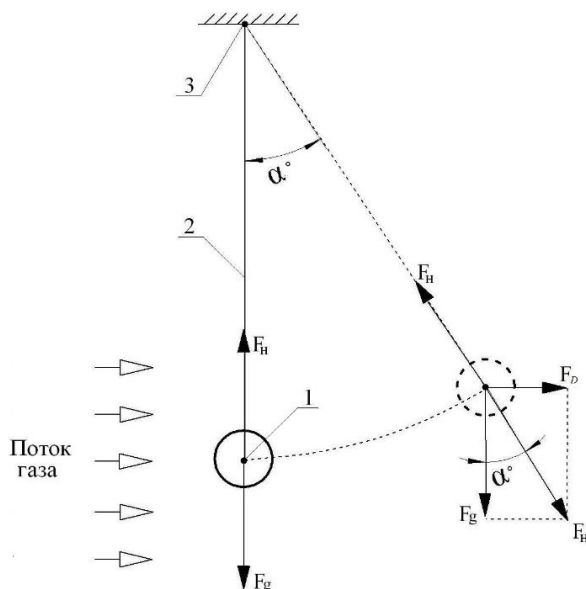


Рис. 2. Силы, действующие на частицу при воздействии на нее равномерного потока газа: 1 – частица; 2 – консоль; 3 – шарикоподшипник

Fig. 2. Forces acting on a particle under exposure to uniform gas flow: (1) particle; (2) console; and (3) ball bearing

В экспериментах в качестве частицы 1 использовался шарик диаметром $D = 4$ см и массой $m = 2.71$ г с равноудаленными перфорированными отверстиями диаметром $d = 1$ мм по всей его поверхности. Количество отверстий на шарике составляло 177 штук.

В экспериментах величина u варьировала в диапазоне $u = (1.18 \div 3.73)$ м/с.

Скорость обдувающего частицу потока воздуха определялась с помощью трубки Пито (с относительной погрешностью не менее 3%) по формуле

$$u = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}},$$

где Δp – перепад давления.

Для малых значений скорости обдувающего частицу потока измерения u проводились с помощью анемометра с относительной погрешностью $\sim 8\%$.

Для определения режима обтекания шарика потоком воздуха в экспериментах рассчитывалось число Рейнольдса по формуле

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu},$$

где $\mu = 1.808 \cdot 10^{-5}$ Па·с – коэффициент динамической вязкости воздуха.

Скорость истечения воздуха с поверхности шарика рассчитывалась по измеренному значению объемного расхода газа Q и суммарной площади сечения перфораций в шарике S :

$$u_e = \frac{Q}{S}$$

и составляла в экспериментах $u_g = 1.66$ м/с и 2.65 м/с. В экспериментах относительная погрешность определения скорости вдуваемого с поверхности шарика воздуха составляла 1.5%.

Для оценки интенсивности вдува проводились расчеты числа Рейнольдса вдуваемого потока воздуха с поверхности шарика по формуле

$$Re_g = \frac{\rho u_g D}{\mu}.$$

Вышеописанная методика применима для исследований только в автомоделном режиме обтекания частицы при числах Рейнольдса $Re > 3\,000$ ввиду сложности экспериментального измерения угла поворота консоли при меньших значениях числа Re из-за его малости.

Вторая методика исследования коэффициента сопротивления твердой сферической частицы в условиях вдува газа с ее поверхности основывается на измерении силы, действующей на частицу при обдуве ее потоком воздуха. Экспериментальная установка состоит из шарика 5, соединенного с металлической трубкой 4 и опорой 3, и жестко связанного с ним датчика силы 1, в качестве которого использовались высокоточные аналитические весы. Система подачи обдувающего и вдуваемого с поверхности частицы потоков воздуха состоит из расходомеров 9, запорных вентилей 10, контрольных манометров 11 и баллонов со сжатым воздухом 12 (рис. 3).

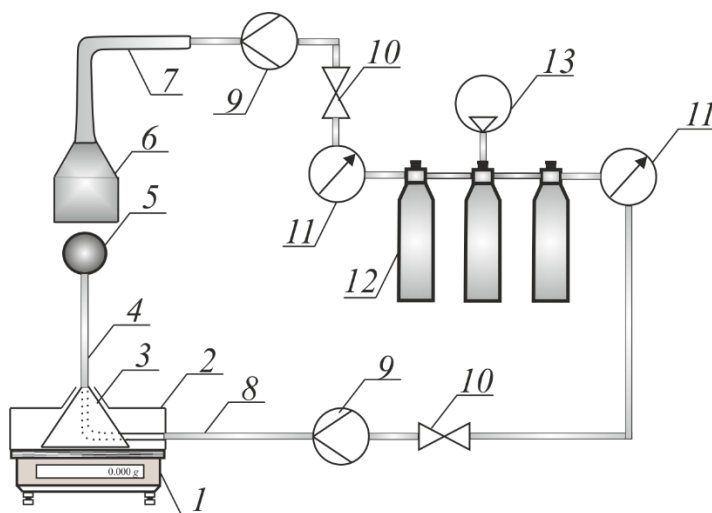


Рис. 3. Экспериментальная установка для исследования влияния вдува газа с поверхности твердой сферы на коэффициент сопротивления, основанная на измерении силы, действующей на частицу при обдуве ее потоком газа: 1 – датчик силы; 2 – защитный кожух; 3 – опора; 4 – полая металлическая трубка; 5 – перфорированный шарик; 6 – раструб; 7, 8 – гибкий шланг; 9 – расходомеры; 10 – вентили; 11 – манометры; 12 – ресивер; 13 – компрессор

Fig. 3. Experimental setup for studying the effect of gas injection from the surface of a solid sphere on the drag coefficient based on measuring the drag force of the particle on exposure to gas flow on it: (1) force sensor; (2) protective casing; (3) hold; (4) hollow metal tube; (5) perforated particle; (6) bell mouth; (7, 8) – flexible hose; (9) flow meter; (10) valve; (11) manometer; (12) receiver; and (13) compressor

Твердая сферическая частица 5 крепится к вертикально установленной на опоре 3 полый металлической трубке 4. Опора 3 с трубкой 4 и частицей 5 соединяются с датчиком силы 1. Во время экспериментов после открытия вентелей 10 баллонов с сжатым воздухом 12 создаются контролируемые с помощью расходомеров 9 потоки обдувающего и вдуваемого с поверхности частицы воздуха. Истечение обдувающего потока воздуха осуществляется по гибкому шлангу 7 и через раструб 6, расположенный над шариком. Подача потока воздуха во внутреннюю полость шарика осуществляется по гибкому шлангу 8, который помещается внутри полый трубки 4. Для исключения влияния обдувающего потока на мерную площадку весов сверху опоры 3 размещается защитный кожух 2.

Суммарная сила F_{Σ} , измеренная датчиком силы 1 при воздействии потока на шарик 5, складывается из силы тяжести и аэродинамической силы:

$$F_{\Sigma} = mg + C_D \frac{\rho u^2}{2} \frac{\pi D^2}{4}, \quad (8)$$

где m – суммарная масса шарика 5, трубки 4 и опоры 3.

Экспериментальный коэффициент сопротивления твердой сферы C_D выражался из уравнения (8) и определялся по формуле (с относительной погрешностью не более 10%)

$$C_D = 8(F_{\Sigma} - mg) / \pi D^2 \rho u^2.$$

Эксперименты проведены для двух перфорированных шариков диаметром $D = 1$ и 2 см и массой 0.22 и 1.14 г соответственно. Шарик крепился к полый металлической трубке длиной 65 см. Количество перфораций диаметром 1 мм в шарике диаметром 2 см составляло 44 штуки, в шарике диаметром 1 см – 11 штук. Скорость вдуваемого с поверхности шарика потока воздуха варьировала в диапазоне $u_6 = 0.5 \div 1.3$ м/с, а значения скорости обдувающего потока воздуха составляли $u = 0.2 \div 1$ м/с.

Преимуществом второй методики является возможность проведения экспериментальных исследований при различных режимах обтекания частицы: в стоксовском, переходном и автомодельном режимах.

Результаты экспериментальных исследований и их анализ

Результаты экспериментов, проведенных по первой из описанных методик, получены для автомодельного режима обтекания частицы в диапазоне чисел Рейнольдса $Re = (3.1 \div 9.9) \cdot 10^3$. При проведении экспериментов по второй методике исследовалось два режима течения: переходный и автомодельный; при этом значения чисел Рейнольдса составляли $Re = (133 \div 1\,333)$.

Варьируя расход вдуваемого через поверхность шарика воздуха, в работе получены экспериментальные зависимости коэффициента сопротивления сферической частицы C_D от числа Рейнольдса Re при различной заданной интенсивности вдува (скорости вдуваемого потока u_6). На рис. 4 приведены экспериментальные зависимости $C_D(Re)$, полученные с помощью первой методики, а на рис. 5, 6 – с помощью второй методики. Кривыми на рис. 4–6 показаны аппроксимационные зависимости.

Из анализа рис. 4, 5 следует, что при наличии вдува воздуха с поверхности шарика коэффициент сопротивления меньше, чем при его отсутствии. По мере

увеличения числа Рейнольдса Re коэффициент сопротивления C_D при вдуве воздуха в переходном режиме обтекания частицы уменьшается до некоторого переходного значения, соответствующего началу автомодельного режима (рис. 4).

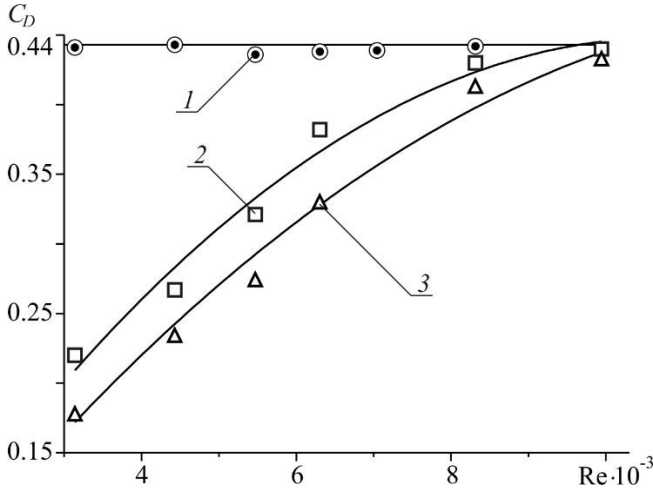


Рис. 4. Зависимости коэффициента сопротивления C_D от числа Рейнольдса Re (для шарика диаметром $D = 4$ см): 1 – при отсутствии вдува воздуха ($u_0 = 0$ м/с); 2 – $u_0 = 2.61$ м/с; 3 – $u_0 = 3.91$ м/с

Fig. 4. Dependences of the drag coefficient C_D on the Reynolds number Re (for the ball with a diameter $D = 4$ cm): (1) in the absence of air blowing ($u_0 = 0$ m/s); (2) $u_0 = 2.61$ m/s; and (3) $u_0 = 3.91$ m/s

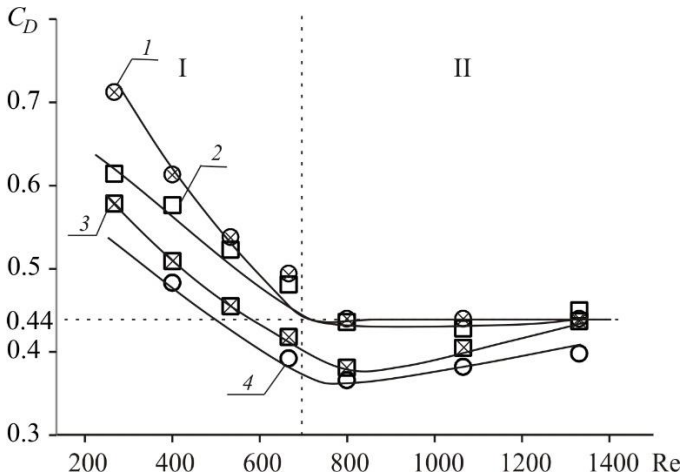


Рис. 5. Зависимости коэффициента сопротивления C_D от числа Рейнольдса Re (для шарика диаметром $D = 2$ см): 1 – при отсутствии вдува воздуха ($u_0 = 0$ м/с); 2 – $u_0 = 0.5$ м/с; 3 – $u_0 = 0.9$ м/с; 4 – $u_0 = 1.3$ м/с (I – переходный режим, II – автомодельный режим)

Fig. 5. Dependences of the drag coefficient C_D on the Reynolds number Re (for the ball with a diameter $D = 2$ cm): (1) in the absence of air blowing ($u_0 = 0$ m/s); (2) $u_0 = 0.5$ m/s; (3) $u_0 = 0.9$ m/s; (4) $u_0 = 1.3$ m/s (I is the transient regime; II is the self-similar regime)

При наступлении автомодельного режима (достижении переходного значения C_D) коэффициент сопротивления по мере увеличения числа Рейнольдса возрастает, асимптотически стремясь к постоянному значению $C_D = 0.44$ (см. рис. 4, 5).

Однако при определенных условиях вдув газа с поверхности частицы приводит к увеличению коэффициента сопротивления. Из анализа экспериментальных данных, полученных с помощью второй методики для шарика с наименьшим диаметром ($D = 1$ см), следует, что при скорости вдува $u_g \geq 1.3$ м/с наблюдается возрастание коэффициента сопротивления C_D по сравнению со значением C_D при отсутствии вдува (см. рис. 6). Обнаруженный эффект, по-видимому, можно объяснить изменением характеристик пограничного слоя шарика за счет перестройки профиля течения вблизи поверхности сферической частицы, вызванного уменьшением ее размера.

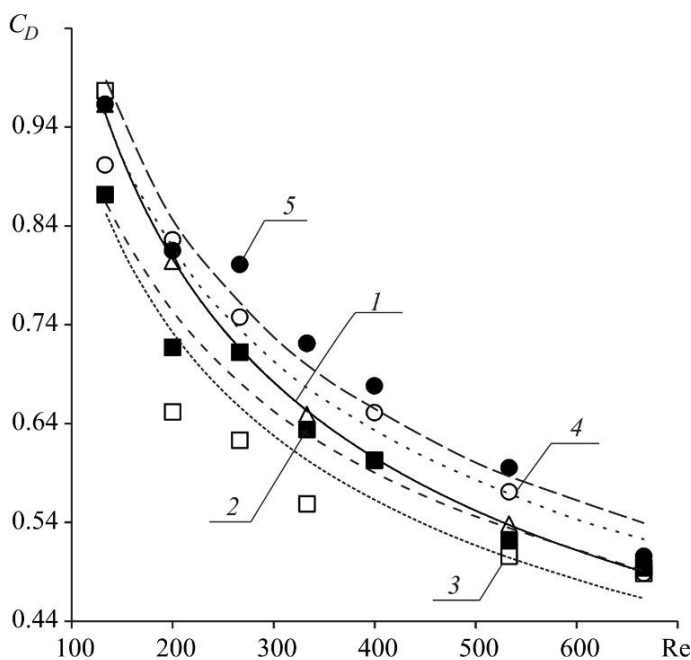


Рис. 6. Зависимости коэффициента сопротивления C_D от числа Рейнольдса Re (для шарика диаметром $D = 1$ см): 1 – при отсутствии вдува воздуха ($u_g = 0$ м/с); 2 – $u_g = 0.5$ м/с; 3 – $u_g = 0.9$ м/с; 4 – $u_g = 1.3$ м/с; 5 – $u_g = 1.6$ м/с

Fig. 6. Dependences of the drag coefficient C_D on the Reynolds number Re (for the ball with a diameter $D = 1$ cm): (1) in the absence of air blowing ($u_g = 0$ m/s); (2) $u_g = 0.5$ m/s; (3) $u_g = 0.9$ m/s; (4) $u_g = 1.3$ m/s; (5) $u_g = 1.6$ m/s

Зависимость коэффициента сопротивления от безразмерного отношения скорости вдуваемого с поверхности частицы потока к скорости обдувающего частицу потока $\bar{u} = u_g / u$ в автомодельном режиме приведена на рис. 7. Анализ полученных в эксперименте результатов показывает, что в автомодельном режиме при значениях скорости вдуваемого с поверхности частицы $u_g > u$ ($\bar{u} > 1$) наблюдается большее уменьшение коэффициента сопротивления частицы C_D , чем при

значениях $u_e < u$ ($\bar{u} < 1$). Также из рис. 7 видно, что результаты по коэффициенту сопротивления, полученные для автомодельного режима обтекания частицы с помощью двух описанных методик, хорошо согласуются.

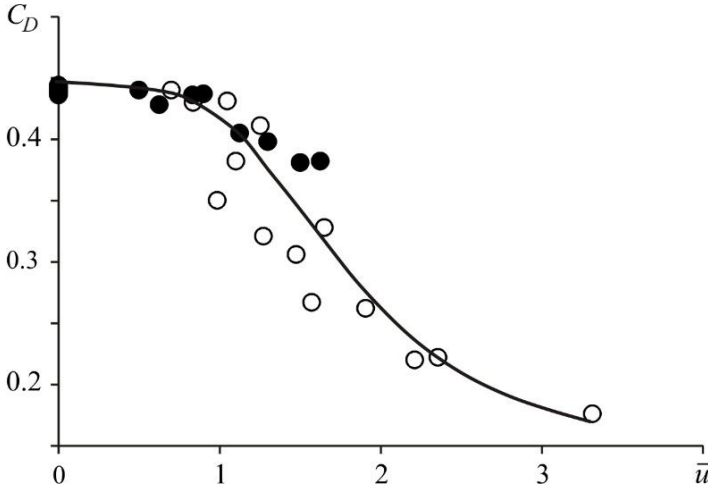


Рис. 7. Зависимость коэффициента сопротивления C_D от безразмерного отношения скоростей $\bar{u} = u_e/u$: $\circ$ – экспериментальные данные, полученные с помощью первой методики; $\bullet$ – экспериментальные данные, полученные с помощью второй методики

Fig. 7. Dependences of the drag coefficient C_D on the dimensionless ratio of velocities $\bar{u} = u_e/u$: ($\circ$) experimental data obtained using the first technique; ($\bullet$) experimental data obtained using the second technique

Методом наименьших квадратов на основе экспериментальных данных для коэффициента сопротивления твердой сферы C_D в автомодельном режиме обтекания получено эмпирическое выражение для C_D в зависимости от безразмерного соотношения скорости вдуваемого с поверхности частицы и скорости обдувающего частицу потока $\bar{u} = u_e/u$ (с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.99$)

$$C_D = 0.44 - 0.27 \exp(-3.08\bar{u}^{-3}).$$

Анализ результатов проведенных экспериментов с перфорированной твердой сферой в условиях обдувающего и вдуваемого с ее поверхности потоков воздуха позволяет сделать вывод о преобладающем влиянии на коэффициент сопротивления изменения величины скорости вблизи поверхности частицы за счет перестройки профиля течения.

Заключение

На основе полученных результатов экспериментов по исследованию процесса вдува газа с поверхности частицы на коэффициент сопротивления можно сделать следующие выводы:

– Разработаны две экспериментальные методики для исследования влияния в чистом виде только вдува газа с поверхности твердой сферы (при отсутствии ускорения частицы) на коэффициент сопротивления. Первая методика основана

на измерении силы сопротивления частицы, а вторая – на измерении силы, действующей на частицу при обдуве ее газовым потоком.

– Получены новые результаты экспериментов по влиянию вдува воздуха с поверхности твердой сферической перфорированной частицы на коэффициент сопротивления в области чисел Рейнольдса $Re = 133 \div 9\,900$.

– Обнаружено, что при истечении воздуха с поверхности твердой сферы коэффициент аэродинамического сопротивления частицы C_D уменьшается по сравнению с величиной C_D при отсутствии потока воздуха с поверхности частицы. Экспериментально доказано, что отклонение коэффициента сопротивления от стандартной кривой сопротивления возрастает по мере увеличения скорости вдува воздуха и уменьшения скорости обдува частицы потоком.

– Экспериментально показано, что для наименьшего из исследованных размеров частиц ($D = 1$ см) обнаружено увеличение коэффициента сопротивления C_D (по сравнению со значением C_D при отсутствии вдува) при скорости вдува $u_e \geq 1.3$ м/с. Выявленный эффект позволяет сделать вывод о преобладающем влиянии на коэффициент аэродинамического сопротивления изменения характеристик пограничного слоя шарика за счет перестройки профиля течения вблизи поверхности сферической частицы, вызванного уменьшением ее размера.

– В диапазоне чисел Рейнольдса $Re = 800 \div 9\,900$ получено эмпирическое выражение для коэффициента сопротивления твердой сферической частицы в зависимости от соотношения скорости вдуваемого с поверхности частицы и скорости обдувающего частицу потока $\bar{u} = u_e/u$ (с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.99$)

$C_D = 0.44 - 0.27 \exp(-3.08\bar{u}^{-3})$. Для условий проведенных экспериментов в авто-модельном режиме обтекания частицы с увеличением соотношения $\bar{u}$ от 0 до 3.3 коэффициент сопротивления уменьшается от 0.44 до 0.176.

Список источников

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М. : Наука, 1987. Ч. 1.
2. Архипов В.А., Васенин И.М., Усанина А.С., Шрагер Г.Р. Динамическое взаимодействие частиц дисперсной фазы в гетерогенных потоках. Томск : Изд. Дом Том. гос. ун-та, 2019.
3. Померанцев В.В., Арефьев К.М., Ахмедов Д.Б., Конович М.Н., Корчунов Ю.Н., Рундыгин Ю.А., Шагалова С.Л., Шестаков С.М. Основы практической теории горения. Л. : Энерготомиздат, 1986.
4. Раушенбах Б.В., Белый С.А., Беспалов И.В., Бородачев В.Я., Волынский М.С., Прудников А.Г. Физические основы рабочего процесса в камерах сгорания воздушно-реактивных двигателей. М. : Машиностроение, 1964.
5. Асовский В.П. Особенности тушения лесных пожаров вертолетами с использованием подвесных водосливных устройств // Научный вестник МГТУ ГА. Аэромеханика и прочность. 2009. № 138. С. 142–149.
6. Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Многофазные течения газа с частицами. М. : Машиностроение, 1994.
7. Шрайбер А.А. Многофазные полидисперсные течения с переменным фракционным составом дискретных включений // Итоги науки и техники. Комплексные и специальные разделы механики. М. : ВИНТИ, 1988. Т. 3. С. 3–80.
8. Никольский Ю.В., Хлопков Ю.И. Теоретическое и экспериментальное исследование обтекания сферы сверхзвуковым потоком малой плотности с учетом конденсации и испарения с поверхности // Ученые записки ЦАГИ. 1989. Т. 20, №. 5. С. 118–122.

9. Коваль М.А., Стулов В.П., Швец А.И. Экспериментальное исследование сверхзвукового обтекания затупленных тел с сильным распределенным вдувом // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1978. № 3. С. 84–95.
10. Глотов О.Г. Горение сферических титановых агломератов в воздухе. I. Экспериментальный подход // Физика горения и взрыва. 2013. Т. 49, № 3. С. 50–57.
11. Глотов О.Г. Горение сферических титановых агломератов в воздухе. II. Результаты экспериментов // Физика горения и взрыва. 2013. Т. 49, № 3. С. 58–71.
12. Архипов В.А., Басалаев С.А., Поленчук С.Н., Перфильева К.Г., Юсупов Р.А., Маслов Е.А. Способ определения коэффициента сопротивления сферической частицы при вдуве газа с ее поверхности. Патент 2700728 РФ. G01N 15/10, Оpubл. 19.09.2019. Бюл. № 26. С. 13.
13. Петунин А.Н. Методы и техника измерений параметров газового потока. М. : Машиностроение, 1996.
14. Архипов В.А., Бинфет Р.Г., Рожин Ю.К., Соболевский В.И. Счетчик газа «СГ-6». Патент РФ № 43023 на промышленный образец. МКП О 10-04, Оpubл. 16.12.1996. Бюл. № 12.
15. Гороновский И.Т. Краткий справочник по химии. Киев : Наукова думка, 1987.

References

1. Nigmatulin R.I. (1990) *Dynamics of Multiphase Medium*. V. 1. New York: Hemisphere Publ. Corp.
2. Arkhipov V.A., Vasenin I.M., Usanina A.S., Shrager G.R. (2019) *Dinamicheskoye vzaimodeystviye chastits dispersnoy fazy v geterogennykh potokakh* [Dynamic interaction of dispersed phase particles in heterogeneous flows]. Tomsk: Tomsk State University Publishing House.
3. Pomerantsev V.V., Aref'ev K.M., Akhmedov D.B., Konovich M.N., Korchunov Yu.N., Rundygina Yu.A., Shagalova S.L., Shestakov S.M. (1986) *Osnovy prakticheskoy teorii goreniya* [Foundations of the practical theory of combustion]. Leningrad: Energotomizdat.
4. Raushenbakh B.V., Belyy S.A., Bepalov I.V., Borodachev V.Ya., Volynskiy M.S., Prudnikov A.G. (1964) *Fizicheskiye osnovy rabochego protsessa v kamere sgoraniya vozdukhno-reaktivnykh dvigateley* [Physical foundations of the working process in the combustion chamber of ram jets]. Moscow: Mashinostroyeniye.
5. Asovskiy V.P. (2009) Osobennosti tusheniya lesnikh pozharov vertolyotami s ispol'zovaniem podvesnykh vodoslivnykh ustroystv [Features of the forest fires extinguishing with helicopters using suspended spillways]. *Nauchnyy vestnik MGTU GA: Aeromekhanika i prochnost'*. 138. pp. 142–149.
6. Sternin L.E., Shraiber A.A. (1994) *Mnogofaznyye techeniya gaza s chastitsami* [Multiphase gas flows with particles]. Moscow: Mashinostroyeniye.
7. Shraiber A.A. (1988) *Mnogofaznyye polidispersnyye techeniya s peremennym fraktsionnym sostavom diskretnykh vklyucheni* [Multiphase polydisperse flows with variable fractional composition of discrete inclusions]. Moscow: VINITI. 3. pp. 3–80.
8. Nikolskiy Yu.V., Khlopkov Yu.I. (1989) *Teoreticheskoye i eksperimental'noye issledovaniye sfery sverkhzvukovym potokom maloy plotnosti s uchetom kondensatsii i ispareniya s poverkhnosti* [Theoretical and experimental study of a low-density supersonic flow around a sphere taking into account condensation and evaporation from the surface] // *Uchenyye zapiski TSAGI*. 20(5), pp. 118–122.
9. Koval M.A., Stulov V.P., Shvets A.I. (1978) Experimental investigation of supersonic flow past blunt bodies with strong distributed injection. *Fluid Dynamics*. 13(3). pp. 406–415.
10. Glotov O.G. (2013) Combustion of spherical agglomerates of titanium in air. I. Experimental approach. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 49(3). pp. 299–306. doi: 10.1134/S0010508213030064.
11. Glotov O.G. (2013) Combustion of spherical agglomerates of titanium in air. II. Results of experiments. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 49(3). pp. 307–319. doi: 10.1134/S0010508213030076.

12. Arkhipov V.A., Basalayev S.A., Polenchuk S.N., Perfil'eva K.G., Yusupov R.A., Maslov E.A. (2018) Sposob opredeleniya koeffitsiyenta soprotivleniya sfericheskoy chastitsy pri vduve gaza s yeye poverkhnosti [Way of determination of the drag coefficient of a spherical particle at condition of gas injection from its surface]. RF Patent 2018142181.
13. Petunin A.N. (1996) *Metody i tekhnika izmereniy parametrov gazovogo potoka* [Methods and techniques for measuring gas flow parameters]. Moscow: Mashinostroyeniye.
14. Arkhipov V.A., Binfet R.G., Rozhin Yu.K., Sobolevskiy V.I. (1996) Schetchik gaza «SG-6» [SG-6 gas meter] Patent RF 43023 (МКПО 10-04).
15. Goronovskiy I.T. (1996) *Kratkiy spravochnik po khimii* [A short guide to chemistry]. Kiev: Naukova dumka.

Сведения об авторах:

Архипов Владимир Афанасьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом газовой динамики и физики взрыва Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Басалаев Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

Перфильева Ксения Григорьевна – инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: k.g.perfiljeva@yandex.ru

Поленчук Сергей Николаевич – техник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия).

Усанина Анна Сергеевна – кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: usaninaanna@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Arkhipov Vladimir A. (Doctor of Physical and Mathematical sciences, Professor, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

Basalaeв Sergey A. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

Perfilieva Ksenia G. (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: k.g.perfiljeva@yandex.ru

Polenchuk Sergey N. (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

Usanina Anna S. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: usaninaanna@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 08.10.2021; принята к публикации 22.03.2022

The article was submitted 08.10.2021; accepted for publication 22.03.2022

Научная статья

УДК 519.633

doi: 10.17223/19988621/76/6

Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в декартовых координатах при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений

Сергей Васильевич Бакушев

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, Пенза, Россия, bakuchsv@mail.ru

Аннотация. Рассматривается построение дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях в прямоугольных декартовых координатах для плоского деформирования сплошных сред при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений как без учета, так и с учетом геометрической нелинейности. Построение биквадратичных физических зависимостей основано на вычислении секущих модулей объемного и сдвигового деформирования. Исходя из предположения о независимости, вообще говоря, друг от друга диаграмм объемного и сдвигового деформирования, рассмотрено шесть основных случаев физических зависимостей, зависящих от взаимного расположения точек излома графиков диаграмм объемного и сдвигового деформирования, аппроксимированных каждый двумя параболой.

Ключевые слова: сплошная среда, плоская деформация, дифференциальные уравнения равновесия, биквадратичные замыкающие уравнения, геометрически линейная модель, геометрически нелинейная модель

Для цитирования: Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в декартовых координатах при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 70–86. doi: 10.17223/19988621/76/6

Original article

Differential equations of continuum equilibrium for plane deformation in cartesian axials at biquadratic approximation of closing equations

Sergey V. Bakushev

Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Russian Federation, bakuchsv@mail.ru

Abstract. The subject under analysis is construction of differential equations of equilibrium in displacements for plane deformation of physically and geometrically nonlinear

continuous media when the closing equations are biquadratically approximated in a Cartesian rectangular coordinate system. Proceeding from the assumption that, generally speaking, the diagrams of volume and shear deformation are independent from each other, six main cases of physical dependences are considered, depending on the relative position of the break points of biquadratic diagrams of volume and shear deformation. Construction of physical dependencies is based on the calculation of the secant module of volume and shear deformation. When approximating the graphs of volume and shear deformation diagrams using two segments of parabolas, the secant shear modulus in the first segment is a linear function of the intensity of shear deformations; the secant modulus of volume expansion–contraction is a linear function of the first invariant of the strain tensor. In the second section of the diagrams of both volume and shear deformation, the secant shear modulus is a fractional (rational) function of the intensity of shear deformations; the secant modulus of volume expansion–contraction is a fractional (rational) function of the first invariant of the strain tensor. The obtained differential equations of equilibrium in displacements can be applied in determining the stress-strain state of physically and geometrically nonlinear continuous media under plane deformation the closing equations of physical relations for which are approximated by biquadratic functions.

Keywords: continuous medium, plane deformation, differential equations of equilibrium, biquadratic closing equations, geometrically linear model, geometrically nonlinear model

For citation: Bakushev, S.V. (2022) Differential equations of continuum equilibrium for plane deformation in cartesian axials at biquadratic approximation of closing equations. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 70–86. doi: 10.17223/19988621/76/6

Качество моделирования напряженно-деформированного состояния сплошной среды определяется многими факторами, но ключевую роль при этом играет выбор закона состояния, или математической модели, описывающей связь между напряжениями и деформациями. Математическая модель сплошной среды, позволяющая определить напряженно-деформированное состояние деформированного тела, представляет собой, при определенном упрощении, совокупность двух математических зависимостей, одна из которых описывает связь между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций, а вторая – связь между вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций [1]. Для построения математических моделей используется либо экспериментальный, либо феноменологический подход. В первом случае математические зависимости между напряжениями и деформациями строятся на основании экспериментальных данных; во втором случае феноменологически построенные математические модели подтверждаются данными экспериментов. Вместе с тем в настоящее время прослеживается тенденция построения математических моделей сплошных сред без должного экспериментального обоснования [2]. В работах [2–4] обозначены пути совершенствования математических моделей сплошных сред и строительных конструкций с целью их максимального приближения к изучению реальных явлений. Приведены примеры построения расчетных и математических моделей на основе физических моделей и мотивированных гипотез, а также использования результатов корректно поставленных экспериментальных исследований.

Первой математической моделью для сплошной среды, не потерявшей своей актуальности и в настоящее время, является закон упругости, экспериментально установленный еще в 1678 г. Р. Гуком. Первыми законами состояния для нели-

нейно-упругого тела явились законы, предложенные B.R. Seth [5], Н.В. Зволинским и П.М. Ризом [6], A. Signorini [7], F.D. Murnaghan [8]. Математические модели в виде математических зависимостей, описывающих законы объемного и сдвигового деформирования, представлены в ряде работ профессора Г.А. Гениева [9–11]. Математические модели деформирования бетона и железобетона разрабатываются профессором Н.И. Карпенко [12, 13]. Для моделирования работы деформируемых тел, учитывающего как физическую, так и геометрическую нелинейность, предложен принцип эквивалентности формы записи замыкающих уравнений [14]. Согласно этому принципу форма записи зависимостей между инвариантами тензоров деформаций и напряжений в геометрически линейных средах и форма записи зависимостей между инвариантами тензоров нелинейных деформаций и обобщенных напряжений в геометрически нелинейных средах должна быть одной и той же [15].

В настоящее время совершенствование законов состояния и математических моделей сплошных сред и деформируемых тел активно продолжается. В ряде работ, в частности в [16, 17], предложена дискретная модель сплошной среды, допускающая модификацию на случай задач в геометрически нелинейной постановке [18]. В работе [19] на примере модели многокомпонентной сплошной среды рассматриваются возможные пути перехода от традиционных моделей механики сплошных сред к математическим моделям нового поколения. В статье [20] сплошная среда моделируется эквивалентной по физико-механическим свойствам системой взаимодействующих частиц. Данный подход позволяет имитировать и упругость, и пластичность, и вязкоупругость, а также физическую и геометрическую нелинейность. В работе [21] рассматривается применение решений неевклидовой модели сплошной среды [22] для описания остаточных напряжений в деформированном теле, находящемся в условиях плоско-деформированного состояния. В статье [23] выполнено построение кинематических и физических соотношений для исследования конечных упругопластических деформаций, получены определяющие соотношения для скоростей и приращений истинных напряжений Коши. Публикация [24] посвящена описанию способа формирования физических соотношений для составных многофазных стержней, основанного на аппроксимации диаграмм деформирования фазовых материалов целыми рациональными полиномами произвольной степени. В работе [25], предложен простейший вариант разномодульной теории упругости, в основе которой лежат тензорно-линейные определяющие уравнения, базирующиеся на трехконстантных потенциалах, не зависящих от третьего инварианта: модуль сдвига является константой, а модуль объемного расширения (сжатия) зависит от знака первого инварианта тензора напряжений. В статье [26], основываясь на исследовании решения плоской задачи теории упругости об изгибе консольной полосы, делается вывод, что сингулярность решений задач теории упругости связана с постановкой этих задач, явно или неявно предполагающей нарушение симметрии тензора напряжений. В статье [27] представлено решение физически нелинейной (зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций принята в виде кубического полинома) плоской задачи теории упругости в перемещениях. Принимая для перемещений разложение по В.З. Власову, задача свелась к решению системы $(n + m)$ обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. В статье [28] для бетона, находящегося в плоском напряженном состоянии, предложен новый

подход к построению физических соотношений, основанный на инвариантах механики деформируемого твердого тела. Показано, что предлагаемые зависимости соответствуют реальному напряженному и деформируемому состоянию материала. В статье [29] предлагается математическая модель теории упругости непрерывно-неоднородных тел. Получены новые формы определяющих уравнений для двумерной задачи. В работе [30], в отличие от общей нелинейной постановки задачи [31, 32], рассматривается квадратичное приближение для нелинейной теории физически линейных упругих стержней Коссера–Тимошенко.

Следует отметить, что разработка новых и уточнение существующих математических моделей сплошной среды, проводимые с целью достоверно точного описания механического поведения деформируемых тел и конструкций под нагрузкой, практически всегда приводят к их усложнению. При этом существует предложение аппроксимировать замыкающие уравнения физических соотношений механики деформируемого твердого тела либо билинейными [33], либо биквадратичными [34] функциями, что может привести к значительному упрощению как расчетных соотношений, так и процедуры расчета. В работе [35] приведены расчетные дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для характерных случаев деформирования физически нелинейной сплошной среды: одномерного плоского, центрально-симметричного, осесимметричного, а также плоской деформации в прямоугольных и цилиндрических координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений для физических соотношений как без учета, так и с учетом геометрической нелинейности.

В данной работе рассматривается построение расчетных дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях для случая плоской деформации $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = 0$ физически нелинейной сплошной среды в прямоугольных декартовых координатах при аппроксимации замыкающих уравнений произвольного, вообще говоря, вида биквадратичными функциями как для геометрически линейной, так и для геометрически нелинейной модели сплошной среды.

Построение физических уравнений для геометрически линейной модели

В соответствии с работой [34] секущие модули объемного расширения (сжатия) $K = K(\varepsilon, \Gamma)$ и сдвига $G = G(\varepsilon, \Gamma)$ на первом криволинейном участке диаграмм $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ и $T = T(\Gamma)$ (рис. 1) будут определяться выражениями

$$K^I(\varepsilon) = \frac{1}{3}K_0 + K_{01}\varepsilon; \quad G^I(\Gamma) = G_0 + G_{01}\Gamma. \quad (1)$$

$$\text{Здесь } K_{01} = \frac{\sigma_1 - K_0\varepsilon_1}{3\varepsilon_1^2}; \quad G_{01} = \frac{T_1 - G_0\Gamma_1}{\Gamma_1^2}. \quad (2)$$

На втором криволинейном участке диаграмм $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ и $T = T(\Gamma)$ секущий модуль объемного расширения (сжатия) $K = K(\varepsilon, \Gamma)$ и секущий модуль сдвига $G = G(\varepsilon, \Gamma)$ будут вычисляться по формулам:

$$K^{II}(\varepsilon) = a_1\varepsilon + b_1 + \frac{c_1}{\varepsilon}; \quad G^{II}(\Gamma) = a_2\Gamma + b_2 + \frac{c_2}{\Gamma}. \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Здесь } a_1 &= \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}; \quad b_1 = \frac{1}{3} \left[K_1 - 2 \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \varepsilon_1 \right]; \\
 c_1 &= \frac{1}{3} \left[\sigma_1 - K_1 \varepsilon_1 - \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \varepsilon_1^2 \right]; \quad a_2 = \frac{(T_2 - T_1) - G_1(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2}; \\
 b_2 &= G_1 - 2 \frac{(T_2 - T_1) - G_1(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2} \Gamma_1; \quad c_2 = T_1 - G_1 \Gamma_1 - \frac{(T_2 - T_1) - G_1(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2} \Gamma_1^2.
 \end{aligned} \quad (4)$$

Параметры I и II , введенные в соотношениях (1) и (3), здесь и в дальнейшем используются для обозначения переменных модулей объемного расширения (сжатия) $K(\varepsilon)$ и сдвига $G(\Gamma)$, относящихся к первому и второму участкам диаграмм объемного и сдвигового деформирования соответственно.

В формулах (2) и (4) обозначено: K_0 – начальный модуль объемного расширения (сжатия); G_0 – начальный модуль сдвига; K_1 – начальный модуль упрочнения при объемном расширении (сжатии); G_1 – начальный модуль упрочнения при сдвиге; σ_1, ε_1 – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $\sigma = \sigma(\varepsilon)$; T_1, Γ_1 – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $T = T(\Gamma)$; σ_2, ε_2 – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $\sigma = \sigma(\varepsilon)$; T_2, Γ_2 – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $T = T(\Gamma)$. Здесь также σ – первый инвариант тензора напряжений; ε – первый инвариант тензора деформаций; T – интенсивность касательных напряжений; Γ – интенсивность деформаций сдвига.

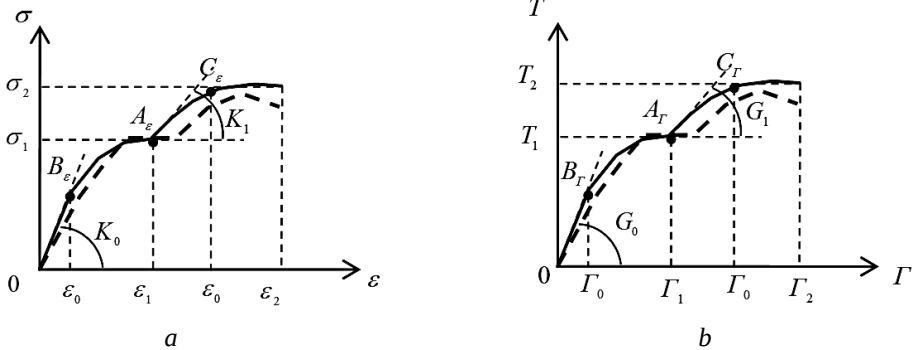


Рис. 1. Диаграммы объемного и сдвигового деформирования:
 а – диаграмма $\sigma = \sigma(\varepsilon)$; б – диаграмма $T = T(\Gamma)$. Пунктирные толстые линии – исходные кривые объемного и сдвигового деформирования; сплошные толстые линии – аппроксимирующие отрезки парабол

Fig. 1. Diagrams of volumetric and shear deformation:
 а – diagram $\sigma = \sigma(\varepsilon)$; б – diagram $T = T(\Gamma)$. Dotted thick lines are original curves of volume and shear deformation; solid thick lines are approximating segments of parabolas

При плоской деформации в декартовых координатах $\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$ и $\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{xy}^2}$. Кроме того, $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$.

Физические уравнения запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= K^i(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^j(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3} \varepsilon \right); \quad \sigma_{yy} = K^i(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^j(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{yy} - \frac{1}{3} \varepsilon \right); \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = G^j(\Gamma) \cdot \varepsilon_{xy}; \quad \sigma_{zz} = \left[K^i(\varepsilon) - \frac{2}{3} G^j(\Gamma) \right] \varepsilon. \end{aligned} \quad (5)$$

Значения величин i и j определяются как взаимным расположением точек излома на диаграммах объемного и сдвигового деформирования, так и текущими значениями первого инварианта тензора деформации и интенсивности деформаций сдвига. При этом следует иметь в виду, что в результате нагружения тела его напряженно-деформированное состояние может быть таковым, что точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования при некотором значении параметра внешней нагрузки могут достигаться одновременно (состояние 1) или не одновременно: когда первый инвариант тензора деформации уже достиг величины, соответствующей точке излома диаграммы объемного деформирования, а интенсивность деформаций сдвига еще не достигла величины, соответствующей точке излома диаграммы сдвига (состояние 2); когда первый инвариант тензора деформации еще не достиг величины, соответствующей точке излома диаграммы объемного деформирования, а интенсивность деформаций сдвига уже достигла величины, соответствующей точке излома диаграммы сдвига (состояние 3); когда первый инвариант тензора деформации уже превысил величину, соответствующую точке излома диаграммы объемного деформирования, а интенсивность деформаций сдвига еще только достигла величины, соответствующей точке излома диаграммы сдвига (состояние 4); когда первый инвариант тензора деформации достиг величины, соответствующей точке излома диаграммы объемного деформирования, а интенсивность деформаций сдвига уже превысила величину, соответствующую точке излома диаграммы сдвига (состояние 5).

$$\text{Случай 1: } \left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1, \quad \left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1, \text{ т.е. диаграммы и объемного, и}$$

сдвигового деформирования, аппроксимированные двумя параболами каждая, имеют точки излома графиков. При этом возможны три состояния диаграмм объемного и сдвигового деформирования.

Состояние 1. На рис. 1 данное состояние соответствует точкам A_ε и A_Γ . При этом и первый инвариант тензора деформации, и интенсивность деформаций сдвига удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \quad \text{и} \quad 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1. \quad (6)$$

Состояние 2. На рис. 1 данное состояние соответствует точкам A_ε и B_Γ . При этом и первый инвариант тензора деформации, и интенсивность деформаций сдвига удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \quad \text{и} \quad 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_0 < \Gamma_1. \quad (7)$$

Здесь, интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что

$$|\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}| = |\varepsilon_1|. \quad (8)$$

Состояние 3. На рис. 1 данное состояние соответствует точкам B_ε и A_Γ . При этом и первый инвариант тензора деформации, и интенсивность деформаций сдвига удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_0| < |\varepsilon_1| \text{ и } 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1. \quad (9)$$

Здесь объемной деформации $|\varepsilon_0|$ соответствуют такие компоненты деформации, что

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{xy}^2} = \Gamma_1. \quad (10)$$

В этом случае в физических уравнениях (5) величины i и j будут равны

$$i = I, \quad j = I. \quad (11)$$

Случай 2: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1, \quad \left. \frac{dT^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, т.е. диаграммы и объемного, и

сдвигового деформирования, аппроксимированные двумя параболой каждая, имеют точки излома графиков. При этом возможно одно состояние диаграмм объемного и сдвигового деформирования.

Состояние 4. На рис. 1 данное состояние соответствует точкам C_ε и A_Γ . При этом и первый инвариант тензора деформации, и интенсивность деформаций сдвига удовлетворяют неравенствам

$$|\varepsilon_1| \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_0| \text{ и } \Gamma_0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1. \quad (12)$$

Здесь объемной деформации $|\varepsilon_0|$ соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (10), а интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (8).

В этом случае в физических уравнениях (5) величины i и j будут равны

$$i = II, \quad j = I. \quad (13)$$

Случай 3: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1, \quad \left. \frac{dT^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, т.е. диаграммы и объемного, и

сдвигового деформирования, аппроксимированные двумя параболой каждая, имеют точки излома графиков. При этом возможно одно состояние диаграмм объемного и сдвигового деформирования.

Состояние 5. На рис. 1 данное состояние соответствует точкам A_ε и C_Γ . При этом и первый инвариант тензора деформации, и интенсивность деформаций сдвига удовлетворяют неравенствам

$$|\varepsilon_0| \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \text{ и } \Gamma_1 \leq \Gamma \leq \Gamma_0. \quad (14)$$

Здесь объемной деформации $|\varepsilon_0|$ соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (10), а интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (8).

В этом случае в физических уравнениях (5) величины i и j будут равны

$$i = I, \quad j = II. \quad (15)$$

Случай 4: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1, \quad \left. \frac{dT^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, то есть диаграммы и объём-

ного и сдвигового деформирования, аппроксимированные двумя параболоми каждая, имеют точки излома графиков. При этом возможны три состояния диаграмм объёмного и сдвигового деформирования.

Состояние 1. На рис. 1 это состояние соответствует точкам A_ε и A_Γ . При этом и первый инвариант тензора деформации, и интенсивность деформаций сдвига удовлетворяют неравенствам:

$$|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1| \quad \text{и} \quad \Gamma \geq \Gamma_1. \quad (16)$$

Состояние 4. На рис. 1 данное состояние соответствует точкам C_ε и A_Γ . При этом и первый инвариант тензора деформации, и интенсивность деформаций сдвига удовлетворяют неравенствам

$$|\varepsilon| \geq \varepsilon_0 \quad \text{и} \quad \Gamma \geq \Gamma_1. \quad (17)$$

Здесь объёмной деформации $|\varepsilon_0|$ соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (10).

Состояние 5. На рис. 1 данное состояние соответствует точкам A_ε и C_Γ . При этом и первый инвариант тензора деформации, и интенсивность деформаций сдвига удовлетворяют неравенствам

$$|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1| \quad \text{и} \quad \Gamma \geq \Gamma_0. \quad (18)$$

Здесь интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (8).

В этом случае в физических уравнениях (5) величины i и j будут равны

$$i = II, \quad j = II. \quad (19)$$

Случай 5: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} = K_1, \quad \left. \frac{dT^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, т.е. точка излома графика на

квадратичной диаграмме объёмного деформирования отсутствует, и второй участок графика $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ является продолжением первого участка. При этом если $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$, то физические уравнения для плоской деформации в декартовых координатах будут иметь вид (5) с коэффициентами (11); если $\Gamma \geq \Gamma_1$, то физические уравнения для плоской деформации в декартовых координатах будут иметь вид (5) с коэффициентами (15).

Случай 6: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1, \quad \left. \frac{dT^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} = G_1$, т.е. точка излома графика

на квадратичной диаграмме сдвигового деформирования отсутствует, и второй участок графика $T = T(\Gamma)$ является продолжением первого участка. При этом если $0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1|$, то физические уравнения для плоской деформации в декарто-

вых координатах будут иметь вид (5) с коэффициентами (11); если $|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1|$, то физические уравнения для плоской деформации в декартовых координатах будут иметь вид (5) с коэффициентами (13).

Построение дифференциальных уравнений для геометрически линейной модели

Подставляя физические уравнения (5) с коэффициентами (11), (13), (15), (19) в дифференциальные уравнения равновесия плоской деформации сплошной среды в декартовых координатах:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + F_x = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y = 0, \quad (20)$$

получим четыре вида разрешающих уравнений в перемещениях, имеющих одну и ту же структуру:

$$\begin{cases} A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + D_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + F_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + F_x = 0; \\ A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + F_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + F_y = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Коэффициенты $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ и $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$ в уравнениях (21) зависят от вида физических уравнений и определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} A_1 &= K^i(\varepsilon) + \frac{4}{3} G^j(\Gamma) + \alpha \varepsilon + \frac{4\beta}{3\Gamma} \left(\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3} \varepsilon \right) (2\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}); \quad B_1 = G^j(\Gamma) + \frac{\beta}{\Gamma} \varepsilon_{xy}^2; \\ C_1 &= \frac{4\beta}{3\Gamma} \varepsilon_{xy} (2\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}); \quad D_1 = \frac{2\beta}{\Gamma} \varepsilon_{xy} \left(\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3} \varepsilon \right); \quad E_1 = \frac{2\beta}{3\Gamma} \varepsilon_{xy} (2\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}); \\ F_1 &= K^i(\varepsilon) + \frac{1}{3} G^j(\Gamma) + \alpha \varepsilon + \frac{4\beta}{3\Gamma} \left(\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3} \varepsilon \right) (2\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}) + \frac{\beta}{\Gamma} \varepsilon_{xy}^2. \\ A_2 &= \frac{2\beta}{3\Gamma} \varepsilon_{xy} (2\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}); \quad B_2 = \frac{2\beta}{\Gamma} \varepsilon_{xy} \left(\varepsilon_{yy} - \frac{1}{3} \varepsilon \right); \\ C_2 &= K^i(\varepsilon) + \frac{1}{3} G^j(\Gamma) + \alpha \varepsilon + \frac{4\beta}{3\Gamma} \left(\varepsilon_{yy} - \frac{1}{3} \varepsilon \right) (2\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) + \frac{\beta}{\Gamma} \varepsilon_{xy}^2; \\ D_2 &= G^j(\Gamma) + \frac{\beta}{\Gamma} \varepsilon_{xy}^2; \quad E_2 = K^i(\varepsilon) + \frac{4}{3} G^j(\Gamma) + \alpha \varepsilon + \frac{4\beta}{3\Gamma} \left(\varepsilon_{yy} - \frac{1}{3} \varepsilon \right) (2\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}); \\ F_2 &= \frac{4\beta}{3\Gamma} \varepsilon_{xy} (2\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}). \end{aligned} \quad (22)$$

В формулах (22) для физических уравнений (5)

$$\text{— с коэффициентами (11): } i = I; \quad j = I; \quad \alpha = K_{01}; \quad \beta = G_{01}; \quad (23)$$

$$\text{— с коэффициентами (13): } i = II; \quad j = I; \quad \alpha = \left(a_1 - \frac{c_1}{\varepsilon^2} \right); \quad \beta = G_{01}; \quad (24)$$

$$\text{— с коэффициентами (15): } i = I; \quad j = II; \quad \alpha = K_{01}; \quad \beta = \left(a_2 - \frac{c_2}{\Gamma^2} \right); \quad (25)$$

– с коэффициентами (19): $i = II$; $j = II$; $\alpha = \left(a_1 - \frac{c_1}{\varepsilon^2}\right)$; $\beta = \left(a_2 - \frac{c_2}{\Gamma^2}\right)$. (26)

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для плоской деформации сплошной среды в прямоугольных декартовых координатах при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений для физических соотношений без учета геометрической нелинейности построены.

Построение физических уравнений для геометрически нелинейной модели

Замыкающие уравнения для геометрически нелинейной модели сплошной среды [15, 35] описываются соотношениями, устанавливающими в самом общем случае перекрестные зависимости между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов обобщенных напряжений и нелинейных деформаций:

$$\sigma^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \cdot \varepsilon^*, \quad T^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \cdot \Gamma^*. \quad (27)$$

Здесь σ^* – первый инвариант тензора обобщенных напряжений; ε^* – первый инвариант тензора нелинейных деформаций; T^* – интенсивность обобщенных касательных напряжений; Γ^* – интенсивность нелинейных деформаций сдвига.

Аппроксимируя зависимости (27) биквадратичными функциями, нетрудно получить секущие модули объемного расширения (сжатия) $K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ и сдвига $G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ на первом и втором криволинейных участках диаграмм $\sigma^* = \sigma^*(\varepsilon^*)$ и $T^* = T^*(\Gamma^*)$, аналогичных соотношениям (1)–(4). При этом все величины, входящие в формулы (1)–(4) следует записывать со звездочками.

Таким образом, K_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля объемного расширения (сжатия); G_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля сдвига; K_1^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля упрочнения при объемном расширении (сжатии); G_1^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля упрочнения при сдвиге; σ_1^* , ε_1^* – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $\sigma^* = \sigma^*(\varepsilon^*)$; T_1^* , Γ_1^* – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $T^* = T^*(\Gamma^*)$; σ_2^* , ε_2^* – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $\sigma^* = \sigma^*(\varepsilon^*)$; T_2^* , Γ_2^* – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $T^* = T^*(\Gamma^*)$.

Физические соотношения для геометрически нелинейной модели сплошной среды для случая плоской деформации будут записываться в форме, аналогичной

соотношениям (5) (если у всех величин, входящих в эти формулы, проставить звездочки), с коэффициентами i и j , определяемыми соотношениями (11), (13), (15), (19).

Построение дифференциальных уравнений для геометрически нелинейной модели

Система дифференциальных уравнений равновесия для геометрически нелинейной модели сплошной среды для случая плоской деформации в прямоугольных декартовых координатах имеет вид [17, 40]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{xx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xy}^* \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{yx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{yy}^* \right] + DF_x = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{xx}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_{xy}^* \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{yx}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_{yy}^* \right] + DF_y = 0. \end{cases} \quad (28)$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

При плоской деформации в декартовых координатах с учетом геометрической нелинейности $\varepsilon^* = \varepsilon_{xx}^* + \varepsilon_{yy}^*$ и $\Gamma^* = \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*)^2 + \varepsilon_{xx}^{*2} + \varepsilon_{yy}^{*2} + \frac{3}{2} \varepsilon_{xy}^{*2}}}$, причём

$$\varepsilon_{xx}^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]; \quad \varepsilon_{yy}^* = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right];$$

$$\varepsilon_{xy}^* = \varepsilon_{yx}^* = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Подставляя физические уравнения для геометрически нелинейной модели сплошной среды в систему дифференциальных уравнений равновесия плоской деформации в декартовых координатах (28), получим четыре вида разрешающих уравнений в перемещениях, имеющих структуру уравнений (21).

Коэффициенты $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ и $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$ в геометрически нелинейном аналоге уравнений (21) зависят от вида физических уравнений и определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} A_1 &= \sigma_{xx}^* + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) F + \frac{\partial u}{\partial y} B; \quad B_1 = \sigma_{yy}^* + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) C + \frac{\partial u}{\partial y} G; \\ C_1 &= 2\sigma_{xy}^* + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) K + \frac{\partial u}{\partial y} C + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) B + \frac{\partial u}{\partial y} H; \quad D_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) L + \frac{\partial u}{\partial y} D; \\ E_1 &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) E + \frac{\partial u}{\partial y} M; \quad F_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) N + \frac{\partial u}{\partial y} E + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) D + \frac{\partial u}{\partial y} P. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{\partial v}{\partial x} F + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) B; \quad B_2 = \frac{\partial v}{\partial x} C + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) G; \\
 C_2 &= \frac{\partial v}{\partial x} K + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) C + \frac{\partial v}{\partial x} B + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) H; \\
 D_2 &= \sigma_{xx}^* + \frac{\partial v}{\partial x} L + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) D; \quad E_2 = \sigma_{yy}^* + \frac{\partial v}{\partial x} E + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) M; \\
 F_2 &= 2\sigma_{xy}^* + \frac{\partial v}{\partial x} N + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) E + \frac{\partial v}{\partial x} D + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) P.
 \end{aligned}$$

Здесь $A = \alpha \varepsilon^* + K^{*i}(\varepsilon^*) - \frac{2}{3} G^{*j}(\Gamma^*)$;

$$B = \left[\beta \frac{2\varepsilon_{xy}^*}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \beta \frac{\varepsilon_{xy}^{*2}}{\Gamma^*} \frac{\partial u}{\partial y} + G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right];$$

$$C = \left[\beta \frac{2\varepsilon_{xy}^*}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{yy}^* - \varepsilon_{xx}^*) \frac{\partial u}{\partial y} + \beta \frac{\varepsilon_{xy}^{*2}}{\Gamma^*} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \right];$$

$$D = \left[\beta \frac{2\varepsilon_{xy}^*}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*) \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\varepsilon_{xy}^{*2}}{\Gamma^*} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \right];$$

$$E = \left[\beta \frac{2\varepsilon_{xy}^*}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{yy}^* - \varepsilon_{xx}^*) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \beta \frac{\varepsilon_{xy}^{*2}}{\Gamma^*} \frac{\partial v}{\partial x} + G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right];$$

$$\begin{aligned}
 F &= \left[A \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{4}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{\varepsilon_{xy}^*}{\Gamma^*} \frac{\partial u}{\partial y} \right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G &= \left[A \frac{\partial u}{\partial y} + 2G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{4}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{yy}^* - \varepsilon_{xx}^*) \frac{\partial u}{\partial y} + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{\varepsilon_{xy}^*}{\Gamma^*} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \right];
 \end{aligned}$$

$$H = \left[A \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{4}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2 \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{\varepsilon_{xy}^*}{\Gamma^*} \frac{\partial u}{\partial y} \right];$$

$$K = \left[A \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{4}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{yy}^* - \varepsilon_{xx}^*) \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{\varepsilon_{xy}^*}{\Gamma^*} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \right];$$

$$\begin{aligned}
 L &= \left[A \frac{\partial v}{\partial x} + 2G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{4}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*) \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{\varepsilon_{xy}^*}{\Gamma^*} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M &= \left[A \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2G^{*j} \left(\Gamma^* \right) \cdot \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \beta \frac{4}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{yy}^* - \varepsilon_{xx}^*) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \beta \frac{\varepsilon_{xy}^*}{\Gamma^*} \frac{\partial v}{\partial x} \right]; \\
 N &= \left[A \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \beta \frac{4}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{yy}^* - \varepsilon_{xx}^*) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \beta \frac{\varepsilon_{xy}^*}{\Gamma^*} \frac{\partial v}{\partial x} \right]; \\
 P &= \left[A \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \beta \frac{4}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*) \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \beta \frac{\varepsilon_{xy}^*}{\Gamma^*} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right].
 \end{aligned}$$

В формулах (29) для геометрически нелинейного аналога физических уравнений (5)

– с коэффициентами (11): $i = I; \quad j = I; \quad \alpha = K_{01}^*; \quad \beta = G_{01}^*; \quad (30)$

– с коэффициентами (13): $i = II; \quad j = I; \quad \alpha = \left(a_1^* - \frac{c_1^*}{\varepsilon^{*2}} \right); \quad \beta = G_{01}^*; \quad (31)$

– с коэффициентами (15): $i = I; \quad j = II; \quad \alpha = K_{01}^*; \quad \beta = \left(a_2^* - \frac{c_2^*}{\Gamma^{*2}} \right); \quad (32)$

– с коэффициентами (19): $i = II; \quad j = II; \quad \alpha = \left(a_1^* - \frac{c_1^*}{\varepsilon^{*2}} \right); \quad \beta = \left(a_2^* - \frac{c_2^*}{\Gamma^{*2}} \right). \quad (33)$

Таким образом, дифференциальные уравнения в перемещениях для плоской деформации сплошной среды в прямоугольных декартовых координатах при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений для физических соотношений с учетом геометрической нелинейности построены.

Заключение

Построенные в статье дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях в прямоугольных декартовых координатах могут найти применение при определении напряженно-деформированного состояния сплошных сред как с учетом, так и без учета геометрической нелинейности, находящихся в условиях плоской деформации, замыкающие уравнения физических соотношений для которых аппроксимированы биквадратичными функциями.

Список источников

1. Новожилов В.В. Теория упругости. М. : Судпромгиз, 1958. 370 с.
2. Колчунов В.И., Федоров В.С. Понятийная иерархия моделей в теории сопротивления строительных конструкций // Промышленное и гражданское строительство. 2020. № 8. С. 16–23. doi: 10.33622/0869-7019.2020.08.16-23
3. Lirola J.M. et al. A review on experimental research using scale models for buildings: application and methodologies // Energy and Buildings. 2017. V. 142. P. 72–110.
4. Li W. et al. In-plane strengthening effect of prefabricated concrete walls on masonry structures: shaking table test // Shock and Vibration. 2017. V. 2017. Art. 3178032. doi: 10.1155/2017/3178032

5. Seth B.R. Finite Strain in Elastic Problems // *Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A*. 1935. V. 234. P. 231–264.
6. Зволинский Н.В., Риз П.М. О некоторых задачах нелинейной теории упругости // *Прикладная математика и механика*. 1939. Т. 2, № 4. С. 417–426.
7. Signorini A. Trasformazioni termoelastiche finite // *Ann. Mat. Pur. Appl. Ser. IV*. 1943. V. 22. P. 33–143; 1948. V. 30. P. 1–72.
8. Murnaghan F.D. Finite Deformation of an Elastic Solid. New York : Wiley, 1951.
9. Гениев Г.А. К вопросу о деформационной теории пластичности сыпучей среды // *Строительная механика и расчет сооружений*. 1974. № 4. С. 8–10.
10. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. М. : Стройиздат, 1974. 316 с.
11. Гениев Г.А., Пятикрестовский К.П., Колчунов В.И., Ключева Н.В. Деформационные зависимости и определяющие уравнения для льда и ледовых массивов // *Известия высших учебных заведений. Строительство*. 2004. № 3 (543). С. 14–19.
12. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М. : Стройиздат, 1996. 416 с.
13. Карпенко Н.И., Карпенко С.Н. Построение физических соотношений для расчета железобетонных конструкций при объемном напряженном состоянии с учетом физической нелинейности материалов // *Жилищное строительство*. 2016. № 6. С. 16–20.
14. Бакушев С.В. Вариант построения расчетных моделей геометрически-нелинейных сплошных сред // *Известия вузов. Строительство и архитектура*. 1991. № 9. С. 24–29.
15. Бакушев С.В. Геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды: плоская задача. Изд. стереотип. М. : Либроком, 2020. 312 с.
16. Шамровский А.Д., Лымаренко Ю.А., Колесник Д.Н., Миняйло Т.А., Кривуляк В.В. Дискретные модели для плоских статических задач теории упругости // *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2011. Т. 3, № 7 (51). С. 11–18.
17. Metrikine A.V., Askes H. One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 1: Generic formulation // *European Journal of Mechanics A / Solids*. 2002. V. 21. P. 555–572.
18. Шамровский А.Д., Колесник Д.Н. Роль нелинейных эффектов при решении одной плоской задачи теории упругости // *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2011. Т. 5, № 7 (53). С. 59–62.
19. Куропатенко В.Ф. Новые модели механики сплошных сред // *Инженерно-физический журнал*. 2011. Т. 84, № 1. С. 74–92.
20. Ошхунов М.М., Нагоев З.В. Моделирование свойств деформируемых сред взаимодействиями частицами // *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика*. 2014. № 19 (190). С. 155–163.
21. Гузев М.А., Горбунов А.В. Неевклидова модель сплошной среды и описание остаточных напряжений // *Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета*. 2020. № 2 (43). С. 3–12. doi: 10.24866/2227-6858/2020-2-1
22. Kröner E. Incompatibility, defects, and stress functions in the mechanics of generalized continua // *International J. of Solids and Structures*. 1985. V. 21 (7). P. 747–756. doi: 10.1016/0020-7683(85)90077-0
23. Султанов Л.У. Исследование конечных упругопластических деформаций. Кинематика среды и определяющие соотношения // *Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки*. 2015. Т. 157, № 4. С. 158–165.
24. Мищенко А.В. Способ формирования нелинейных физических соотношений в прямых и обратных задачах расчета многофазных стержней // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Строительство и архитектура*. 2014. Т. 14, № 3. С. 12–16.
25. Цвелоуб И.Ю. О разномодульной теории упругости // *Прикладная механика и техническая физика*. 2008. Т. 49, № 1 (287). С. 157–164.
26. Васильев В.В. Симметрия тензора напряжений и сингулярные решения в теории упругости // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2010. № 2. С. 62–72.

27. Иванов С.П., Ахметшин М.Н. Решение физически нелинейной плоской задачи теории упругости и ее приложение к расчету балок, контактирующих со средой // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2012. № 2. С. 33–36.
28. Круглов В.М., Ерофеев В.Т., Ватин Н.И., Аль Д.С. Вариант деформационной теории пластичности бетона в плоском напряженном состоянии // *Транспортные сооружения*. 2019. Т. 6, № 4. С. 10. doi: 10.15862/11SATS419
29. Роганова Н.А., Шарафутдинов Г.З. Некоторые методы решения плоских задач теории упругости неоднородных тел // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011. № 4-5. С. 2460–2462.
30. Лалин В.В., Мякишкова Е.А. Квадратичное приближение в нелинейной теории стержней // *AlfaBuild*. 2018. № 3 (5). С. 20–32.
31. Simo J.C., Tarnow N., Doblare M. Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conservation algorithms // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1995. V. 38 (9). P. 1431–1473.
32. Antman S.S. *Nonlinear problems of elasticity*. Berlin–Heidelberg–New York : Springer, 2005. 835 p.
33. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования билинейными функциями // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2019. № 2 (283). С. 2–11.
34. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования квадратичными функциями // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2020. № 3 (290). С. 2–14. doi: 10.37538/0039-2383.2020.3.2.14
35. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения и краевые задачи механики деформируемого твердого тела. М. : ЛЕНАНД, 2020. 304 с.

References

1. Novozhilov V.V. (1958) *Teoriya uprugosti* [The theory of elasticity]. Leningrad: Sudpromgiz.
2. Kolchunov V.I., Fedorov V.S. (2020) Ponyatiynaya ierarkhiya modeley v teorii soprotivleniya stroitel'nykh konstruksiy. [Conceptual hierarchy of models in the theory of resistance of building structures]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo*. 8. pp. 16–23. doi: 10.33622/0869-7019.2020.08.16-23
3. Lirola J. M. et al. (2017) A review on experimental research using scale models for buildings: application and methodologies. *Energy and Buildings*. 142. pp. 72–110.
4. Li W. et al. (2017) In-plane strengthening effect of prefabricated concrete walls on masonry structures: shaking table. *Shock and Vibration*. 2017. pp. 1–13. doi: 10.1155/2017/3178032
5. Seth B.R. (1935) Finite strain in elastic problems, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 234. pp. 231–264.
6. Zvolinskiy N.V., Riz P.M. (1939). O nekotorykh zadachakh nelineynoy teorii uprugosti. [Some problems of nonlinear theory of elasticity] *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2(4). pp. 417–426.
7. Signorini A. (1943) Trasformazioni termoelastiche finite. *Annali di Matematica Pura ed Applicata. Serie Quarta*. 22. pp. 33–143; (1948) 30. pp. 1–72.
8. Murnaghan F. D. (1951) *Finite Deformation of an Elastic Solid*. New York: Wiley.
9. Geniev G.A. (1974) K voprosu o deformatsionnoy teorii plastichnosti sypuchey sredy. [To the question of granular medium plasticity deformation theory] *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 4. pp. 8–10.
10. Geniev G.A., Kissyuk V.N., Tyupin G.A. (1974) *Teoriya plastichnosti betona i zhelezobetona*. [Theory of plasticity of concrete and reinforced concrete]. Moscow: Stroyizdat.
11. Geniev G.A., Pyatikrestovskiy K.P., Kolchunov V.I., Klyuyeva N.V. (2004) Deformatsionnyye zavisimosti i opredelyayushchiye uravneniya dlya l'da i ledovykh massivov. [Deformation dependences and constitutive equations for ice and ice massifs]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Stroitel'stvo*. (3). pp. 14–19.

12. Karpenko N.I. (1996) *Obshchiye modeli mekhaniki zhelezobetona*. [General models of reinforced concrete mechanics]. Moscow: Stroyizdat.
13. Karpenko N.I., Karpenko S.N. (2016) Postroyeniye fizicheskikh sootnosheniy dlya raschëta zhelezobetonnykh konstruksiy pri ob"yëmnom napryazhënnom sostoyanii s uchëtom fizicheskoy nelineynosti materialov. [Construction of physical relationships for the calculation of reinforced concrete structures in a volumetric stress state, taking into account the physical nonlinearity of materials]. *Zhilishchnoye stroitel'stvo*. 6. pp. 16–20.
14. Bakushev S.V. (1991) Variant postroyeniya raschëtnykh modeley geometricheskii-nelineynykh sploshnykh sred. [Option for constructing computational models of geometrically nonlinear continuous media]. *Izvestiya VUZov. Stroitel'stvo i arkhitektura*. 9. pp. 24–29.
15. Bakushev S.V. (2020) *Geometricheski i fizicheski nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy: Ploskaya zadacha* [Geometrically and physically nonlinear mechanics of continuous media: Plane problem]. Moscow: Librokom.
16. Shamrovskiy A.D., Lymarenko Yu.A., Kolesnik D.N., Minyaylo T.A., Krivulyak V.V. (2011) Diskretnyye modeli dlya ploskikh staticheskikh zadach teorii uprugosti [Discrete models for plane static problems of theory of elasticity]. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy*. 3(7). pp. 11–18.
17. Metrikine A.V., Askes H. (2002) One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 1: Generic formulation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 21. pp. 555–572.
18. Shamrovskiy A.D., Kolesnik D.N. (2011) Rol' nelineynykh effektiv pri reshenii odnoy ploskoy zadachi teorii uprugosti. [Role of nonlinear effects in solving a plane problem of elasticity theory]. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy*. 5(7). pp. 59–62.
19. Kuropatenko V.F. (2011) New models of continuum mechanics. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 84(1). 77–99.
20. Oshkhunov M.M., Nagoev Z.V. (2014) Modelirovaniye svoystv deformiruyemykh sred vzaimodeystvuyushchimi chastitsami [Modeling the properties of deformable media by interacting particles]. *Nauchnyye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika*. 19. pp. 155–163.
21. Guzev M.A., Gorbunov A.V. (2020) Neyevklidova model' sploshnoy sredy i opisaniye ostatochnykh napryazheniy. [Non-Euclidean model of a continuous medium and description of residual stresses]. *Vestnik Inzhenernoy shkoly Dal'nevostochnogo federal'nogo universiteta*. (2). pp. 3–12. doi: 10.24866/2227-6858/2020-2-1
22. Kröner E. (1985) Incompatibility, defects, and stress functions in the mechanics of generalized continua. *International Journal of Solids and Structures*. 21(7): pp. 747–756. doi: 10.1016/0020-7683(85)90077-0
23. Sultanov L.U. (2015) Issledovaniye konechnykh uprugoplasticheskikh deformatsiy. Kinematika sredy i opredelyayushchiye sootnosheniya. [Study of finite elastoplastic deformations. Kinematics of the environment and constitutive relations]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskoye nauki*. 157 (4). pp. 158–165.
24. Mishchenko A.V. (2014) Sposob formirovaniya nelineynykh fizicheskikh sootnosheniy v pryamykh i obratnykh zadachakh rascheta mnogofaznykh stержney. [Method of forming nonlinear physical equations in the direct and inverse problems of multiphase rods analysis]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura*. 14(3). pp. 12–16.
25. Tselodub I.Yu. (2008) O raznomodul'noy teorii uprugosti. [On multimodulus elasticity theory]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 49(1). pp. 157–164.
26. Vasil'ev V.V. (2010) Stress tensor symmetry and singular solutions in the theory of elasticity. *Mechanics of Solids*. 45(2). 205–213.
27. Ivanov S.P., Akhmetshin M.N. (2012) Resheniye fizicheskii nelineynoy ploskoy zadachi teorii uprugosti i ee prilozheniye k raschetu balok, kontaktiruyushchikh so sredoy. [The solution of physically nonlinear flat problem of the theory of elasticity and its application to cal-

- culatation of beams contacting with the medium]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktсий i sooruzheniy*. 2. pp. 33–36.
28. Kruglov V.M., Erofeev V.T., Vatin N.I., Al' D.S.D.S. (2019) Variant deformatsionnoy teorii plastichnosti betona v ploskom napryazhennom sostoyanii. [Version of the deformation theory of plastic ductility of concrete in a plane stress state]. *Transportnye sooruzheniya*. 6(4). p. 10. doi: 10.15862/11SATS419.
 29. Roganova N.A., Sharafutdinov G.Z. (2011) Nekotoryye metody resheniya ploskikh zadach teorii uprugosti neodnorodnykh tel. [Some methods of analyzing plane elasticity problems of inhomogeneous bodies]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta imeni N.I. Lobachevskogo*. 4-5. pp. 2460–2462.
 30. Lalin V.V., Myakshikova E.A. (2018) Kvadratischnoye priblizheniye v nelineynoy teorii sterzhney [Quadratic approximation in the nonlinear theory of rods]. *AlfaBuild*. 5. pp. 20–32.
 31. Simo J.C., Tarnow N., Doblare M. (1995) Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conservation algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 38(9). pp. 1431–1473.
 32. Antman S.S. (2005) *Nonlinear problems of elasticity*. Berlin–Heidelberg–New York: Springer.
 33. Bakushev S.V. (2019) Approksimaciya diagramm deformirovaniya bilineynymi funktsiyami. [Approximations of deformation diagrams by bilinear functions]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. (2). pp. 2–11.
 34. Bakushev S.V. (2020) Approksimatsiya diagramm deformirovaniya kvadratischnymi funktsiyami. [Approximation of deformation diagrams by quadratic functions]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 3. pp. 2–14. doi: 10.37538/0039-2383.2020.3.2.14.
 35. Bakushev S.V. (2020) *Differentsial'nye uravneniya i kraevyye zadachi mekhaniki deformiruyemogo tverdogo tela*. [Differential equations and boundary problems in the mechanics of a deformable solid] Moscow: LENAND.

Сведения об авторе:

Бакушев Сергей Васильевич – доктор технических наук, профессор кафедры механики строительного факультета Пензенского государственного университета архитектуры и строительства (Пенза, Россия). E-mail: bakuchsv@mail.ru

Information about the author:

Bakushev Sergey V. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Russian Federation). E-mail: bakuchsv@mail.ru

Статья поступила в редакцию 25.12.2021; принята к публикации 22.03.2022

The article was submitted 25.12.2021; accepted for publication 22.03.2022

Научная статья

УДК 531.39, 52-17

doi: 10.17223/19988621/76/7

Применение методов машинного обучения для классификации резонансного движения астероидов

Татьяна Юрьевна Галушина¹, Елизавета Александровна Николаева²,
Дмитрий Сергеевич Красавин³, Оксана Никитична Летнер⁴

^{1, 3, 4} Томский государственный университет, Томск, Россия

² Тартуский университет, Тарту, Эстония

¹ tanastra@nxt.ru

² volna@sibmail.com

³ iosfixed@gmail.com

⁴ oksana.letner@gmail.com

Аннотация. При изучении динамики резонансных астероидов возникает необходимость классификации критических аргументов в зависимости от поведения на циркуляцию, либрацию и смешанный случай. Для автоматизации этой задачи предлагается использовать методы машинного обучения, такие как искусственные нейронные сети и HDBSCAN (Hierarchical Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise). В результате экспериментов по подбору параметров получена обученная модель, способная классифицировать резонансное движение.

Ключевые слова: астероид, орбитальный резонанс, машинное обучение, искусственная нейронная сеть

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-72-10022).

Для цитирования: Галушина Т.Ю., Николаева Е.А., Красавин Д.С., Летнер О.Н. Применение методов машинного обучения для классификации резонансного движения астероидов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 87–100. doi: 10.17223/19988621/76/7

Application of machine learning methods for the classification of asteroid resonance motion

Tatyana Yu. Galushina¹, Elizaveta A. Nikolaeva²,
Dmitriy S. Krasavin³, Oksana N. Lenter⁴

^{1, 3, 4} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

² University of Tartu, Tartu, Estonia

¹ tanastra@nxt.ru

² volna@sibmail.com

³ iosfixed@gmail.com

⁴ oksana.letner@gmail.com

Abstract. When studying the resonant asteroid dynamics, it is necessary to classify time series of critical arguments on circulation, libration, or mixed case depending on their behavior. It is logical to use modern methods of machine learning to automatize this process. Earlier, a similar problem was solved for artificial satellites of the Earth.

The purpose of this paper is to adapt the software attended for distinguishing resonant and nonresonant motion of satellites to solving asteroid dynamics problems. To achieve this goal, it is necessary to modify the program code and to train the created model on time rows obtained during the study of the asteroid orbital evolution.

Operation of the modified software can be divided into three stages. At the first stage, to simplify the model-classifier, we make coding of time series of asteroid resonant arguments by vectors of lower dimension using an artificial neural network – an autoencoder. The second stage includes automatic clustering time series of asteroid resonant arguments by the HDBSCAN method (Hierarchical Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise) and their manual labeling to learn the classifier. At the third stage, based on the obtained training set, the artificial neural network-classifier is learned.

The results of the classifier operation are estimated by visual comparison of graphs of the time series and received assessments. We may conclude that the classifier works correctly in most cases; some inaccuracies are observed in case of extreme amplitude and in the mixed case when libration passes to circulation.

Keywords: asteroid, mean motion resonance, machine learning, artificial neural network

Acknowledgments: This work was supported by the Russian Science Foundation (Scientific Project № 19-72-10022).

For citation: Galushina, T.Yu., Nikolaeva, E.A., Krasavin, D.S., Lenter, O.N. (2022) Application of machine learning methods for the classification of asteroid resonance motion. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 87–100. doi: 10.17223/19988621/76/7

Введение

В настоящее время динамика астероидов, сближающихся с Землей (АСЗ), привлекает все большее внимание ученых, что связано с рядом причин, одна из которых – их опасность для нашей планеты [1]. На сегодняшний день выявление потенциально опасных для Земли астероидов и исследование эволюции их орбит

является важной и актуальной задачей, поскольку на крайне высоких скоростях падение даже небольшого небесного тела может привести как к региональной, так и к глобальной катастрофе.

Необходимо также отметить, что орбитальные резонансы играют существенную роль в изучении движения рассматриваемых объектов. Способствуя поддержанию геометрической конфигурации «астероид–планета», устойчивый резонанс является своего рода механизмом защиты астероида от сближения с соответствующей планетой, в то время как неустойчивый резонанс приводит к регулярным сближениям и хаотичности движения. Таким образом, неустойчивые орбитальные резонансы могут вызывать тесные и многократные сближения АСЗ с большими планетами, что, в свою очередь, приводит к существенным изменениям параметров орбит астероидов и увеличивает вероятность их столкновений с планетами [2].

При исследовании большого числа реальных или виртуальных астероидов возникает необходимость визуально оценить значительное количество графиков с целью классификации движения на резонансное, нерезонансное или смешанное. Использование ручного труда не только занимает много времени, но и может приводить к ошибкам вследствие невнимательности, свойственной людям при выполнении монотонной работы. Естественным является желание привлечь современные методы машинного обучения для автоматизации данного процесса. Ранее подобная задача была решена для искусственных спутников Земли [3, 4].

Цель настоящей работы – адаптировать программно-алгоритмическое обеспечение, предназначенное для разделения резонансного и нерезонансного движения спутников, к решению задач астероидной динамики. Для достижения указанной цели требуется модифицировать программный код и обучить созданную модель на временных рядах, полученных в ходе исследования орбитальной эволюции астероидов.

Резонансные характеристики

Явление орбитального резонанса возникает вследствие соизмеримости периодов (или средних движений) астероида и большой планеты. Это значит, что если отношение периодов астероида и планеты можно представить как отношение двух взаимно простых целых чисел, то эти небесные тела движутся в орбитальном резонансе. В таком случае возмущения, вызванные взаимным гравитационным влиянием тел друг на друга, имеют периодический характер и усиливаются в момент соединения астероида и планеты. В зависимости от определенных условий резонансы могут оказывать как стабилизирующее воздействие на орбиту, тем самым защищая астероиды от сближений и столкновений с планетами, так и дестабилизирующее, что значительно изменяет орбиту и приводит к хаотичности движения [2].

Резонансный (критический) аргумент β и его производная по времени α , называемая резонансной щелью [5], являются основными характеристиками резонансного движения. Следует отметить, что при нахождении α производными аргумента перицентра ω_0 и долготы восходящего узла Ω_0 пренебрегают, так как изменения этих величин несут существенные по сравнению с изменениями средних долгот астероида и планеты. Усиление возмущений происходит в момент соеди-

нения астероида и планеты, откуда следует, что выражение для долготы соединения является основным [2]. Тогда резонансный аргумент определяется как

$$\beta = k_1\lambda_1 - k_2\lambda_2 - (k_1 - k_2)\omega_1 - (k_1 - k_2)\Omega_1, \quad (1)$$

а резонансная щель имеет вид:

$$\alpha \approx k_1n_1 - k_2n_2. \quad (2)$$

где n_1, n_2 – средние движения, λ_1, λ_2 – средние долготы астероида и планеты соответственно, ω_1 – аргумент перигентра астероида, Ω_1 – долгота восходящего узла астероида, k_1, k_2 – целые положительные числа. Порядок резонанса определяется величиной $k = k_1 + k_2$.

В соответствии с [2], если α и β испытывают колебания около значения точной соизмеримости, так что $|\beta - \beta_{\text{ср}}| \leq 180^\circ$ и $|\alpha| \leq \alpha_{\text{max}}$, то астероид движется в окрестности резонанса. Здесь $\beta_{\text{ср}}$ – центр либрации резонансного аргумента, а величина α_{max} характеризует границы резонансного движения и определяется по максимальной амплитуде колебаний резонансного аргумента β .

Таким образом, либрация резонансного аргумента говорит о наличии устойчивого резонанса, в то время как при его циркуляции резонанс отсутствует. Существует также смешанный случай, когда либрация сменяется циркуляцией или наоборот, что указывает на наличие неустойчивого резонанса.

Используемые методы

Машинное обучение – это подход к анализу данных, который включает в себя построение и адаптацию математических моделей, позволяющих программам «учиться» на опыте. Алгоритмы машинного обучения можно разделить на четыре основных категории: обучение с учителем, обучение с частичным привлечением учителя, обучение без учителя и обучение с подкреплением [6, 7]. В данной работе используются методы обучения с учителем и без учителя, поэтому далее представим описание только для них.

Задачу одного из основных видов машинного обучения, а именно задачу обучения с учителем, можно описать следующим образом [8]. Пусть имеется множество объектов, которые описываются парой переменных – признаковой и целевой. Пусть X – это множество допустимых признаковых переменных, а Y – множество допустимых целевых переменных. Пусть также имеется некоторая целевая функция $f : X \rightarrow Y$. Вид этой функции, вообще говоря, неизвестен, она не обязательно является математической функцией, но известны ее значения $y_i = f(x_i)$ на некотором подмножестве $\{x_1, \dots, x_t\} \subset X$. При этом пары объектов (x_i, y_i) формируют множество $T = \{(x_1, y_1), \dots, (x_t, y_t)\}$, называемое обучающей выборкой. Задача машинного обучения заключается в том, чтобы подобрать некоторую параметрическую функцию $p : X \rightarrow Y$, которая наилучшим образом приближала бы целевую функцию f на всем множестве T , а также ее параметры.

При обучении без учителя обучающая выборка содержит только множество признаковых объектов $T' = \{x_1, \dots, x_t\}$. Целью алгоритма обучения без учителя является создание модели, которая принимает на вход объект x_i и затем преобра-

зует его в некоторое значение или вектор в зависимости от типа рассматриваемой проблемы.

В данной работе решаются задачи кодирования временных рядов векторами низкой размерности, кластеризации и классификации кодов временных рядов резонансных аргументов астероидов. Для этого применяются такие методы машинного обучения, как искусственные нейронные сети (классификация), автокодировщики (уменьшение размерности), *k*-means и HDBSCAN (Hierarchical Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise) (кластеризация).

Искусственная нейронная сеть (ИНС) – это математическая модель, построенная по принципу организации и функционирования биологических нейронных сетей, а также ее программное воплощение. Структура ИНС представляет собой совокупность узловых слоев, содержащую входной слой, один или несколько скрытых слоев и выходной слой. Через входной слой внешние данные поступают в сеть, в скрытых слоях выполняется основная обработка данных, а выходной слой выполняет финальные вычисления и несет в себе результат работы сети.

Как и любой алгоритм машинного обучения, искусственная нейронная сеть обучается на наборе данных. В зависимости от вида обучения (с учителем, с частичным привлечением учителя, без учителя, с подкреплением) процесс обучения ИНС будет происходить по-разному, однако в качестве основных его принципов можно выделить обработку данных нейронами, обновление значений весов в соответствии с определенным правилом и повторение всех шагов обучающего алгоритма до тех пор, пока не будет минимизирована некоторая функция потерь.

Автокодировщик – это искусственная нейронная сеть, которая обучается восстанавливать входной сигнал на выходе. Такую ИНС можно рассматривать как сеть, состоящую из двух частей: кодировщика и декодировщика. Искусственные нейронные сети с данной архитектурой имеют симметричную по количеству нейронов в слоях структуру относительно среднего слоя. Этот слой описывает так называемый код (или же скрытое представление), являющийся отображением исходного сигнала в пространство меньшей размерности.

Процесс обучения автокодировщика заключается в следующем: на вход сети подается набор признаков X , кодировщик переводит этот входной набор в его скрытое представление $Z = f(X)$, а декодировщик затем производит реконструкцию сигнала, получая на выходе набор $X' = f(Z)$. Таким образом, автокодировщик стремится получить выходные значения, близкие к целевым, т.е. к X , минимизируя функцию потерь. В данной работе функция потерь представляет собой логарифм гиперболического косинуса ошибки прогнозирования и имеет следующий вид:

$$L = \sum_i \log(\cosh(g_i)), \quad (3)$$

где $g_i = \sum_j |x'_i - x_i|$, x'_i – выходное значение, x_i – целевое, $i = \overline{1..t}$, $j = \overline{1..d}$, t – размер обучающей выборки, а d – размерность признаковой переменной.

Метод *k*-means, или же метод *k*-средних, является алгоритмом машинного обучения без учителя, используемым для кластеризации объектов. Цель данного алгоритма – разбить множество объектов $T' = \{x_1, \dots, x_m\}$ на k кластеров таким образом, чтобы каждый объект в своем кластере походил на другие объекты

из этого же кластера больше, чем на объекты из какого-либо другого кластера. Метод k -средних использует итеративный подход для получения конечного результата.

HDBSCAN – это основанный на плотности расположения объектов алгоритм иерархической пространственной кластеризации приложений с шумом. Основанные на плотности алгоритмы кластеризации объединяют объекты в кластеры путем поиска таких областей в пространстве данных, которые имеют высокую плотность и при этом окружены областями с меньшей плотностью. Особенность HDBSCAN как алгоритма иерархической кластеризации состоит в том, что он способен идентифицировать кластеры с переменной плотностью благодаря созданию иерархии вложенных кластеров.

Описание программно-алгоритмического обеспечения

Язык программирования Python наилучшим образом подходит для написания программ в сфере машинного обучения вследствие наличия большого числа библиотек и больших возможностей для визуализации данных и результатов. Работу модифицированной программы можно разделить на три этапа. На первом этапе для упрощения модели классификатора и ускорения его обучения проводится кодирование временных рядов резонансных аргументов астероидов векторами более низкой размерности. Второй этап заключается в автоматической кластеризации временных рядов резонансных аргументов астероидов и их последующей ручной разметке для обучения классификатора. На основе полученной обучающей выборки на третьем этапе происходит обучение классификатора.

Перед выполнением вышеперечисленных задач входные данные, которые представляют собой текстовые файлы с временными рядами, разбиваются на обучающую и тестовую выборки в процентном соотношении 80/20. Это осуществляется запуском отдельной программы, которая каждый файл случайным образом определяет в одну из выборок. Обучающая выборка предназначена для построения модели, в то время как тестовая – для проверки построенной модели.

Решение первой задачи осуществляется путем обучения автокодировщика. Для этого запускается основной скрипт с набором параметров, необходимых для задания конфигурации программы, который, в свою очередь, вызывает скрипт с алгоритмом автокодировщика. После завершения обучения и тестирования получаем модель, которая позволяет преобразовывать временные ряды, уменьшая их размерность до заданного значения. Далее осуществляется запуск программы, используемой для получения скрытых представлений временных рядов и записи их в файл.

Для решения второй задачи используется отдельная программа, которая выполняет кластеризацию скрытых представлений временных рядов методами k -means и HDBSCAN, а также их разметку. Для разметки вручную указываются номера кластеров, относящихся к либрации (метка 1), циркуляции (метка 0) или смешанному типу движения (метка 0.5), после чего каждый временной ряд сопоставляется с соответствующей ему меткой с помощью цикла. В результате получается набор данных, состоящий из размеченных скрытых представлений временных рядов.

Третья задача решается с помощью программы, реализующей искусственную нейронную сеть, способную классифицировать временные ряды. На данном эта-

не используются методы обучения с учителем, где обучающей выборкой служат данные, полученные на предыдущем шаге. Обученная ИНС позволяет сопоставить временной ряд уменьшенной размерности с числом в диапазоне от 0 до 1, которое определяет близость объекта к одному из трех классов.

Результаты и обсуждение

Исходные данные представляют собой 27 432 текстовых файла, содержащих временные ряды критических (резонансных) аргументов астероидов в радианах. Каждый временной ряд состоит из 1 024 элементов, что существенно усложняет работу с данными, поэтому выполняется несколько экспериментов по их кодированию векторами меньшей размерности, направленных на подбор оптимального размера скрытого представления. Чем больше размер скрытого представления, тем более сложные временные ряды удастся представлять с его помощью. В качестве начального приближения берется любое число, а затем в зависимости от полученных результатов необходимо либо повышать размерность, либо понижать. Если результат представления временных рядов получается неудовлетворительным, то выполняется повышение размерности. Если же результат получается хорошим или даже отличным, то осуществляется понижение размерности, так как всегда есть вероятность, что выбранная размерность скрытого представления является избыточной.

Результаты работы автокодировщика просматриваются с помощью графиков, изображающих исходные и восстановленные ряды для обучающей и тестовой выборок. Эти графики отбираются случайным образом и отражают разное поведение критического аргумента. Кроме того, строятся графики функции потерь L (3) для тестовой выборки в зависимости от номера эпохи. Эпоха в машинном обучении представляет собой одно полное прохождение обучающего набора данных через алгоритм.

Первый эксперимент проводился с размерностью скрытого представления, равной 24. Пример графиков исходного и восстановленного рядов для обучающей и тестовой выборок, полученных в этом случае, представлен на рис. 1 (a – обучающая, b – тестовая), а график функции потерь изображен на рис. 2. На рис. 1 исходный ряд отмечен серым цветом, а восстановленный – черным.

Из рис. 1 видно, что при данном размере скрытого представления автокодировщик очень хорошо восстановил временной ряд, о чем к тому же свидетельствует низкое значение ошибки. По окончании данного эксперимента сформировался набор весов модели, который принимался за основу при обучении моделей в последующих экспериментах. За счет этого уменьшилось количество эпох, что позволило сократить время обучения с четырех дней до одного.

Далее эксперимент был повторен для значений размерности скрытого представления 16, 12 и 8. Значения функции потерь на последней эпохе для всех экспериментов по уменьшению размерности вынесены в табл. 1, что позволяет более наглядно представить ошибку в каждом эксперименте. После сравнения всех результатов становится очевидным, что наилучшая точность достигалась при размере скрытого представления, равном 24, поэтому модель, полученная при таком значении, использовалась при последующей работе с временными рядами.

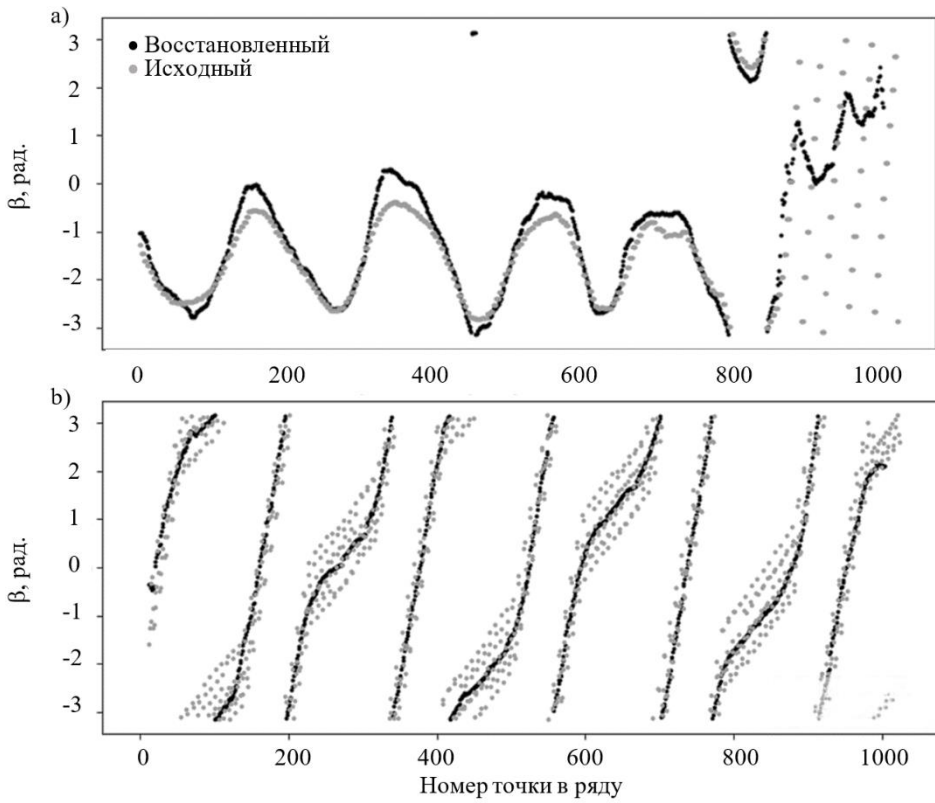


Рис. 1. Исходный (серый) и восстановленный (черный) ряды для (a) обучающей выборки и (b) тестовой выборки (размер скрытого представления равен 24)

Fig. 1. Original (gray) and reconstructed (black) series for (a) training and (b) test sets (the dimension of the hidden representation is 24)

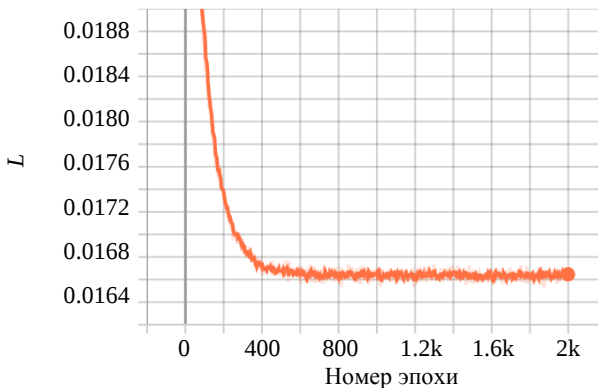


Рис. 2. График функции потерь для тестовой выборки (размер скрытого представления равен 24)

Fig. 2. Graph of the loss function for the test set (the dimension of the hidden representation is 24)

Таблица 1

Значения функции потерь на последней эпохе

Размеры скрытого представления	Значения функции потерь
8	0.02515
12	0.02273
16	0.02271
24	0.01663

Первый эксперимент по кластеризации проводился с использованием метода *k*-means, основным параметром которого является количество кластеров *k*. В ходе эксперимента данный метод вызывался три раза для различных значений *k*, равных 20, 25 и 30. Остальные параметры метода оставались постоянными при всех запусках, чтобы имелась возможность провести сравнение между результатами.

Использование метода *k*-means для кластеризации данных временных рядов не принесло достаточно хороших результатов. Во всех трех случаях самые большие кластеры содержат не единообразные объекты, т.е. объекты, не относящиеся к одинаковому типу движения. Это говорит о том, что многие объекты определены алгоритмом в неподходящие кластеры. Подобные результаты прослеживаются и во многих меньших кластерах, однако кластеры с единообразными объектами все же присутствуют. Следует отметить, что для применения данного метода необходимо хотя бы примерно понимать, какое количество кластеров должно образоваться. Это делает его неудобным и слабо применимым к данным текущей задачи, так как в ней невозможно предугадать точное количество кластеров.

Для следующего эксперимента использовался более мощный метод кластеризации HDBSCAN, важной особенностью которого является то, что он учитывает шум в данных путем объединения объектов, не отнесенных ни к одному кластеру, в кластер с меткой -1 . При необходимости объекты из кластера с такой меткой можно пропустить через метод повторно. Параметрами метода [9], которые требуют экспериментального подбора, являются следующие величины:

- 1) `min_cluster_size` (минимальный размер кластера): определяет минимальное число объектов, которое алгоритм рассматривает как кластер;
- 2) `min_samples` (минимальное количество образцов): определяет, какое количество образцов должно находиться в окрестности объекта, чтобы он рассматривался как основной. Чем больше это число, тем больше точек принимается за шум;
- 3) `cluster_selection_epsilon` (величина ϵ): выступает как некоторое граничное значение для разделения кластеров на меньшие группы. Например, если $\epsilon = 0.5$, то алгоритм не разделяет кластеры, расстояние между которыми меньше этого значения.

Описанные параметры оказывают влияние друг на друга и имеют несколько неочевидный эффект, поэтому необходимо многократно запустить алгоритм HDBSCAN для выявления их наиболее оптимального сочетания. В данной работе алгоритм запускался 7 раз для различных значений `min_cluster_size`, `min_samples` и `cluster_selection_epsilon`, которые подбирались опытным путем с опорой на их смысл и выдаваемый результат. Эти значения приведены в табл. 2 вместе с соответствующим им количеством кластеров, образовавшихся по завершении работы HDBSCAN.

**Значения параметров HDBSCAN и соответствующее им количество
получившихся кластеров**

Номер эксперимента	min_cluster_size	min_samples	cluster_selection_epsilon	Количество кластеров
1	20	1	0.5	58
2	50	5	0.5	39
3	100	1	0.5	29
4	100	1	0.7	25
5	150	50	0.3	23
6	200	15	0.5	24
7	200	15	0.7	23

Оценка результатов кластеризации осуществляется визуально с помощью графиков временных рядов, отобранных случайным образом из каждого кластера. Наименее пригодные результаты получились в эксперименте 7, так как в двух из самых больших кластеров оказались объекты, не относящиеся к одному типу движения. Наиболее удачным оказался эксперимент 3, по завершении которого как самые крупные, так и более мелкие кластеры содержали объекты с единым типом движения, хотя некоторая неточность в одном небольшом кластере все же присутствовала. Примеры объектов, отнесенных в данном эксперименте к одному кластеру, показаны на рис. 3, где каждый столбец представляет собой отдельный кластер. Из рис. 3 видно, что кластер 11 соответствует смешанному типу движения, 9 – либрации, 4 – циркуляции.

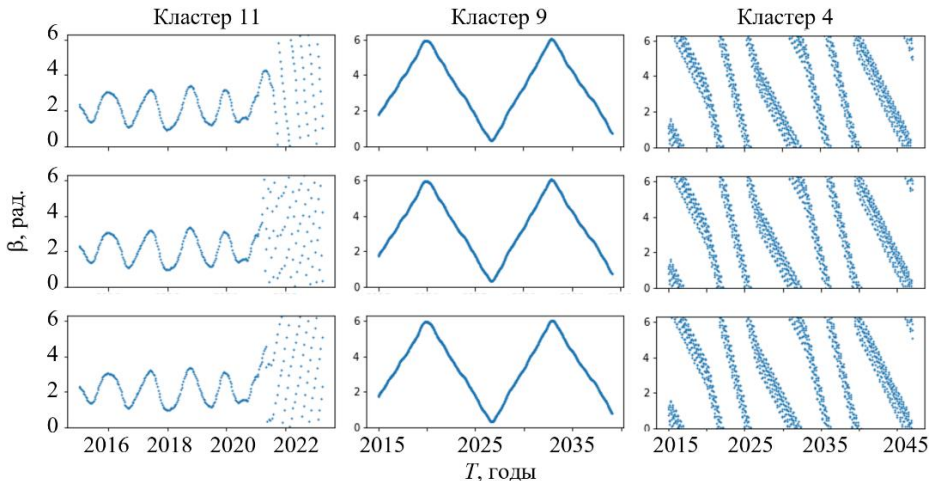


Рис. 3. Примеры объектов в кластерах 11, 9 и 4, получившихся в эксперименте 3

Fig. 3. Examples of objects in clusters 11, 9, and 4 obtained in experiment 3

Отметим, что в данном эксперименте менее 10% всех данных алгоритм определил в кластер –1. В связи с небольшим размером этого кластера было принято

решение не проводить его повторную кластеризацию и, соответственно, не включать объекты этого кластера в обучающую выборку для ИНС-классификатора, а затем использовать их в качестве тестовых объектов.

Кластеры, полученные в эксперименте 3 (см. табл. 2), использовались далее для разметки объектов в соответствии с типом движения, что является необходимым шагом перед обучением ИНС-классификатора. Каждый временной ряд сопоставляется с меткой 0 (циркуляция), 1 (либрация) или 0.5 (смешанный тип) в соответствии с технологией, описанной выше. Результаты обученной ИНС-классификатора на данный момент можно оценить только зрительным способом с помощью графиков, где изображен временной ряд критического аргумента астероида. На каждом графике подписано число в диапазоне от 0 до 1, определяющее близость движения к либрации, циркуляции или смешанному типу. Это число также можно интерпретировать как вероятность того, что конкретный временной ряд соответствует устойчивому резонансу.

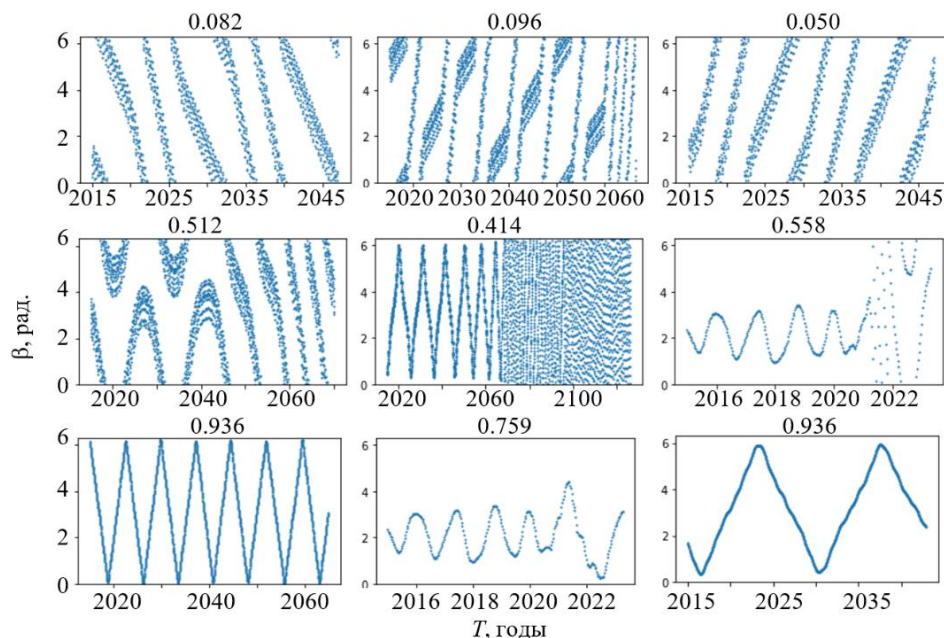


Рис. 4. Примеры объектов, оцененных ИНС в процессе классификации
Fig. 4. Examples of objects evaluated by an artificial neural network during the classification process

На рис. 4 представлены некоторые примеры объектов, оцененных ИНС в процессе классификации, где видно, что присвоенные объектам значения соответствуют типам их движения. В процессе визуальной оценки результатов определено, что большинству объектов классификатор присвоил корректные метки, однако в некоторых случаях присутствуют явные неточности. Примеры неудачной классификации приведены на рис. 5, где можно увидеть, что ИНС дает ошибочную оценку типа движения в случаях, когда амплитуда колебаний критического аргумента является предельной.

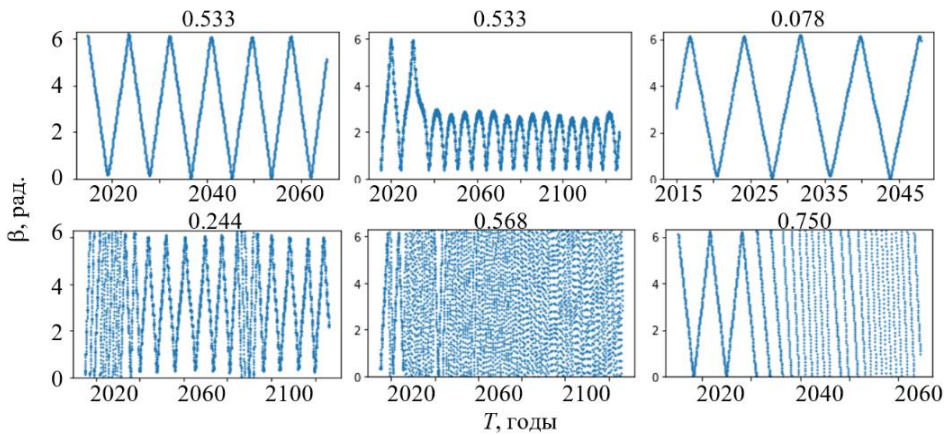


Рис. 5. Примеры неудачной классификации объектов

Fig. 5. Examples of unsuccessful classification of objects

Заключение

В данной работе выполнена адаптация программно-алгоритмического обеспечения, предназначенного для разделения резонансного и нерезонансного движения спутников, к решению задач астероидной динамики, полученная модель обучена на выборке временных рядов резонансных аргументов астероидов. На первом этапе с целью выбора оптимального размера скрытого представления проведен эксперимент с разными значениями, лучшие результаты показала размерность 24. На следующем этапе кластеризации протестированы методы k -means и HDBSCAN с различными значениями параметров. HDBSCAN показал лучшие результаты, которые были использованы для ручной разметки кластеров. На третьем этапе на основе полученной разметки проводилось обучение ИНС-классификатора, результатом работы которого является число от 0 до 1, которое можно интерпретировать как вероятность наличия устойчивого резонанса. Результат работы классификатора оценивается визуально сопоставлением графиков временных рядов и полученных оценок. Можно сделать вывод, что в большинстве случаев классификатор работает корректно, некоторые неточности наблюдаются в случае либрации с предельной амплитудой и в смешанном случае, когда предельная либрация переходит в циркуляцию.

Список источников

1. Астероидно-кометная опасность: вчера, сегодня, завтра / под ред. Б.М. Шустова, Л.В. Рыхловой. М. : Физматлит, 2010. 384 с.
2. Галушина Т.Ю. Орбитальные и вековые резонансы в движении астероидов, сближающихся с Землей // Физика космоса : тр. 49-й Междунар. студенческой науч. конф., Екатеринбург, 27–31 января 2020 г. Екатеринбург : УрФУ, 2020. С. 6–18.
3. Красавин Д.С., Александрова А.Г., Томилова И.В. Применение искусственных нейронных сетей в задачах анализа динамической структуры областей околоземного орбитального пространства // Известия вузов. Физика. 2020. Т. 63, № 3. С. 70–75.

4. Красавин Д.С., Александрова А.Г., Томилова И.В. Применение искусственных нейронных сетей в исследовании динамической структуры околоземного орбитального пространства // Известия вузов. Физика. 2021. Т. 64, №10. С. 38–43.
5. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. М. : Наука, 1978. 128 с.
6. Géron A. Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow: Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems. 2nd ed. Sebastopol : O'Reilly Media, 2019. 484 p.
7. Burkov A. The Hundred-Page Machine Learning Book. 2019. 152 p. URL: <http://ema.cri-info.cm/wp-content/uploads/2019/07/2019BurkovTheHundred-pageMachineLearning.pdf> (accessed: 27.07.2021).
8. Nilsson N.J. Introduction to machine learning. URL: <http://robotics.stanford.edu/people/nilsson/MLBOOK.pdf> (accessed: 26.04.2021).
9. Parameter Selection for HDBSCAN : HDBSCAN Clustering Library Documentation. URL: https://hdbscan.readthedocs.io/en/latest/parameter_selection.html (accessed: 09.01.2021).

References

1. Asteroidno-kometnaya opasnost: vchera, segodnya, zavtra [Asteroid-comet hazard: yesterday, today, tomorrow] (2010) Ed. by Shustova B.M., Rykhlovoy L.V. Moscow: Fizmatlit.
2. Galushina T.Yu. (2020) Orbitalnyye i vekovyye rezonansy v dvizhenii asteroidov, sblizhayushchikhsya s Zemley [Mean motion and secular resonances in the motion of near-Earth asteroids]. *Proceeding of the 49-th International Student Conference "Physics of space", Ekaterinburg, 2020*. pp. 6–18. DOI: 10.15826/B978-5-7996-2935-9.01.
3. Krasavin D.S., Aleksandrova A.G., Tomilova I.V. (2020) Application of artificial neural networks to an analysis of the dynamic structure of the near-Earth orbital space. *Russian Physics Journal*. 63(3). pp. 426–431. DOI: 10.1007/s11182-020-02053-z.
4. Krasavin D.S., Aleksandrova A.G., Tomilova I.V. (2022) Application of artificial neural networks in studying the dynamic structure of the near-Earth orbital space. *Russian Physics Journal*. 64(10). pp. 1824–1830.
5. Grebenikov E.A., Ryabov Y.A. (1978) *Rezonansy i малыe znamenateli v nebesnoy mekhanike* [Resonances and small denominators in celestial mechanics] Moscow: Nauka.
6. Géron A. (2019) *Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow: Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems, 2nd edition*. Sebastopol: O'Reilly Media.
7. Burkov A. (2019) *The Hundred-Page Machine Learning Book*. Andriy Burkov.
8. Nilsson N.J. (2021) *Introduction to machine learning*. Access mode: <http://robotics.stanford.edu/people/nilsson/MLBOOK.pdf>
9. (2021) *Parameter Selection for HDBSCAN* [Electronic resource]: HDBSCAN Clustering Library Documentation. Access mode: https://hdbscan.readthedocs.io/en/latest/parameter_selection.html

Сведения об авторах:

Галушина Татьяна Юрьевна – кандидат физико-математических наук, заведующая лабораторией компьютерного моделирования и машинного анализа астрономических данных НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tanastra@nxt.ru

Николаева Елизавета Александровна – магистрант Тартуского университета (Тарту, Эстония). E-mail: volna@sibmail.com

Красавин Дмитрий Сергеевич – младший научный сотрудник лаборатории компьютерного моделирования и машинного анализа астрономических данных НИИ прикладной

математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: iosfixed@gmail.com

Летнер Оксана Никитична – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории компьютерного моделирования и машинного анализа астрономических данных НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: oksana.letner@gmail.com

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Galushina Tatyana Yu. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tanastra@nxt.ru

Nikolaeva Elizaveta A. (University of Tartu, Tartu, Estonia). E-mail: volna@sibmail.com

Krasavin Dmitriy S. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: iosfixed@gmail.com

Letner Oksana N. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: oksana.letner@gmail.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 30.12.2021; принята к публикации 22.03.2022

The article was submitted 30.12.2021; accepted for publication 22.03.2022

Научная статья

УДК 534.647

doi: 10.17223/19988621/76/8

Минимизация виброактивности малошумных вентиляторов

Виктор Степанович Дмитриев¹, Леонид Леонидович Миньков²,
Тамара Георгиевна Костюченко³, Владимир Владимирович Дердященко⁴,
Дмитрий Сергеевич Панфилов⁵, Дмитрий Владимирович Ермаков⁶

¹ Томский политехнический университет, Томск, Россия

² Томский государственный университет, Томск, Россия

³ Детский технопарк «Кванториум», Томск, Россия

^{4, 5, 6} НПП «Полус», Томск, Россия

¹ dmitriev@tpu.ru

² lminkov@ftf.tsu.ru

³ ktg@tpu.ru

⁴ derdiyaschenkova@mail.ru

⁵ panfilovds8@gmail.com

⁶ ermakdmit@yandex.ru

Аннотация. Малошумный вентилятор как многопараметрическая электромеханическая система подвергается целому комплексу периодических механических воздействий: статических, динамических, электромагнитных, акустических.

Аналитически показано, что на степень эффективности демпфирования колебаний механической системы (малошумного вентилятора) влияет структура схемы демпфирования.

Рассмотрен алгоритм минимизации виброактивности малошумного вентилятора с внутренним источником вибрации.

Ключевые слова: малошумный вентилятор, вибрация, амплитуда, колебания, демпфирование

Для цитирования: Дмитриев В.С., Миньков Л.Л., Костюченко Т.Г., Дердященко В.В., Панфилов Д.С., Ермаков Д.В. Минимизация виброактивности малошумных вентиляторов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 101–117. doi: 10.17223/19988621/76/8

Minimizing vibration of low-noise fans

Victor S. Dmitriev¹, Leonid L. Minkov², Tamara G. Kostyuchenko³,
Vladimir V. Derdiyashchenko⁴, Dmitry S. Panfilov⁵, Dmitriy V. Ermakov⁶

¹ Tomsk Polytechnic University, Томск, Россия

² Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

³ Children's Technopark "Quantorium", Томск, Россия

^{4, 5, 6} Scientific Production Center Polus, Tomsk, Russian Federation

¹ dmitriev@tpu.ru

² lminkov@ftf.tsu.ru

³ ktg@tpu.ru

⁴ derdiyashchenkovv@mail.ru

⁵ panfilovds8@gmail.com

⁶ ermakdmit@yandex.ru

Abstract. Reducing the vibration activity of low-noise fans is becoming the most important direction in the creation of their new modifications.

It is analytically shown that the efficiency of vibration damping of a mechanical system depends not only on the ratio of natural frequencies, vibration frequencies and damping coefficient, but also on technical solutions for installing dampers, for example, on an elastic or rigid foundation.

The article proposes an algorithm for minimizing the vibration activity of a mechanical system which is an axial low-noise fan.

To solve the problem of minimizing noise in the operating mode of the fan, an innovative technical solution for the construction of the case is being considered – the walls are made in the form of a "sandwich" consisting of layers of structural materials that provide strength characteristics, as well as noise and vibration protection.

Keywords: fan, low noise, vibration, amplitude, noise, acoustic, impeller

For citation: Dmitriev, V.S., Minkov, L.L., Kostyuchenko, T.G., Derdiyashchenko V.V., Panfilov D.S., Ermakov D.V. (2022) Minimizing vibration of low-noise fans. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 101–117. doi: 10.17223/19988621/76/8

Введение

По мере развития техники все чаще приходится иметь дело с колебательными явлениями. Все механизмы (устройства, аппараты), имеющие подвижные части, совершающие периодические движения, являются генераторами колебательного движения, т.е. обладают определенным уровнем виброактивности [1–4].

Вибрация в любых устройствах оказывает отрицательное воздействие на их функционирование. Кроме того, вибрация вредна также с экологической точки зрения, так как является источником шума. Поэтому в определенных случаях борьба с вибрацией (шумом) становится одной из главных технологических задач и зачастую превращается в научно-техническую проблему.

Малощумный вентилятор, будучи неотъемлемой частью системы жизнеобеспечения, является электромеханической системой, содержащей элементы массы

и упругости, поэтому при воздействии периодических сил (моментов) от внутреннего источника (электродвигателя) в рабочем режиме он находится в вибрационном состоянии [5, 6].

В настоящей статье показано влияние взаимосвязанных параметров малошумного вентилятора: собственной частоты элементов конструкции, частоты возбуждающих воздействий, разницы этих частот, коэффициента демпфирования, – на уровень виброактивности механической системы, которой является электровентилятор.

Общий принцип вибродемпфирования

Малошумный вентилятор является многопараметрической электромеханической системой, математическая модель которой представляет систему дифференциальных и алгебраических уравнений, содержащую десятки параметров, связанных прямой и обратной зависимостями [7–9].

Технически малошумный вентилятор представляет собой электродвигатель с закрепленной на валу крыльчаткой (лопастным колесом), который через систему амортизаторов зафиксирован в корпусе вентилятора (рис. 1).

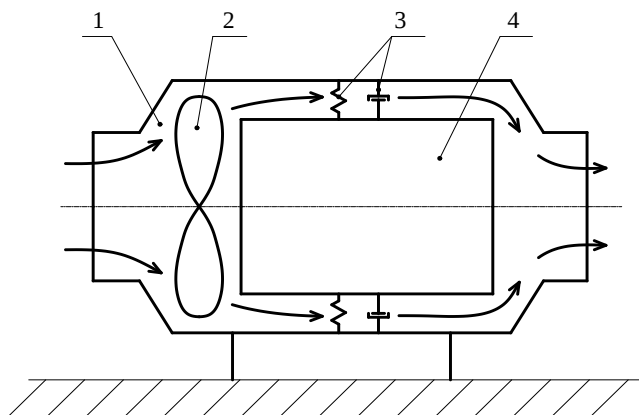


Рис. 1. Конструктивная схема вентилятора: 1 – корпус, 2 – крыльчатка, 3 – амортизированный узел крепления вентилятора к корпусу, 4 – электродвигатель

Fig. 1. Design diagram of the fan: (1) housing, (2) impeller, (3) damped fan attachment unit to the housing, and (4) electric motor

Расчетная схема рассматриваемого малошумного вентилятора представлена на рис. 2.

Для составления уравнения движения технической системы (см. рис. 2) воспользуемся вторым методом Лагранжа. Эту систему можно с достаточной степенью точности рассматривать как систему с одной степенью свободы.

Электродвигатель, имеющий ротор в качестве рабочей части, является ротационной машиной, в которой центр тяжести ротора не совпадает с его осью вращения. Неуравновешенность измеряется произведением неуравновешенной массы m на эксцентриситет e . Эксцентричная масса вращается со скоростью ω , и ее вертикальное перемещение равно $x_0 + e \sin \omega t$.

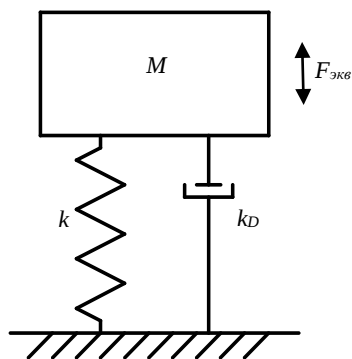


Рис. 2. Расчетная схема малошумного вентилятора (вариант 1)

Fig. 2. Calculation diagram of a low-noise fan circuit (option 1)

Рассмотрим уравнение движения такой механической системы [1, 2, 7]:

$$M\ddot{x} + k_D\dot{x} + kx = F_{\text{экр}} \sin \omega t. \quad (1)$$

Здесь $F_{\text{экр}}$ – амплитуда вынуждающей силы, равная $m\epsilon\omega^2$; k_D – коэффициент демпфирования; M – масса механической системы, k – коэффициент упругости конструкции.

Уравнение (1) – неоднородное дифференциальное уравнение, решение которого равно сумме решений – общего x_1 , описывающего собственные колебания системы, и частного решения x_2 , определяющего ее вынужденные колебания.

Для практики инженерного проектирования важно знать не только значения амплитуды и частоты колебательного движения, но и степень эффективности демпфирования этих колебаний.

Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = Ae^{-\xi\omega_c t} \sin(\omega_\delta t + \psi) + \frac{F_{\text{экр}}}{k} \lambda \sin(\omega t - \varphi), \quad (2)$$

где ω_δ – круговая частота при демпфировании, равная $\omega_\delta = \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega_c$; ξ – безразмерный коэффициент демпфирования, равный $\xi = \frac{k_D}{2\sqrt{kM}}$; λ – коэффициент передачи (динамический коэффициент), равный $\lambda = 1 / \sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}$; r – отношение вынужденной частоты к собственной, ω / ω_c ; ω_c – собственная частота системы, равная $\sqrt{k/M}$; φ – сдвиг фаз между перемещением и приложенной силой, равный $\arctg(2\xi r / (1 - r^2))$.

Константы A и ψ в решении (2) находятся из начальных условий $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

Так как при проектировании интересен только установившийся процесс с незатухающими колебаниями, решение (2) следует рассматривать при $t \rightarrow \infty$.

$$x_2(t) = \frac{F_{\text{экр}}}{k} \lambda \sin(\omega t - \varphi). \quad (3)$$

Если в (3) числитель и знаменатель умножить на M , а амплитуду обозначить через X , то это решение можно записать в виде:

$$x_2(t) = \frac{m}{M} e r^2 \lambda \sin(\omega t - \varphi) = X_2 \sin(\omega t - \varphi). \quad (4)$$

В результате из (4) следует удобное для проектирования соотношение

$$\frac{MX_2(r, \xi)}{me} = r^2 \lambda(r, \xi). \quad (5)$$

Представление решения установившегося режима в виде (4), (5) удобно использовать при расчете параметров вентилятора, так как оно позволяет регулировать параметры уровня шума через подбор отношения собственных частот конструкции и вынуждающих сил, а также коэффициента демпфирования.

Для удобства восприятия на рис. 3 представлена зависимость левой части соотношения (5) (относительная амплитуда колебания системы) от отношения частот r . Вид графического представления определяется коэффициентом передачи (динамическим коэффициентом) λ , который зависит от отношения частот r и от безразмерного коэффициента демпфирования ξ . При резонансе, $r = 1$, динамический коэффициент λ будет зависеть только от ξ .

Амплитуда установившейся реакции есть функция амплитуды и частоты возбуждающих сил; чем больше упругость конструкции, тем амплитуда реакции больше [2].

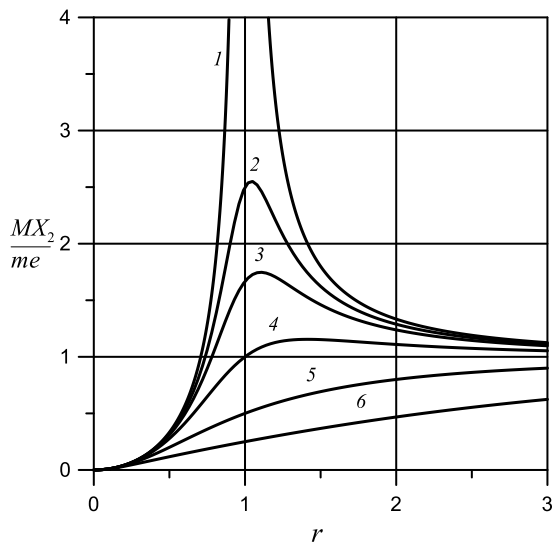


Рис. 3. Установившаяся реакция на инерционное возмущение системы:

1 – $\xi = 0$, 2 – $\xi = 0.2$, 3 – $\xi = 0.3$, 4 – $\xi = 0.5$, 5 – $\xi = 1$, 6 – $\xi = 2$

Fig. 3. Steady-state reaction to the inertial perturbation of the system:

$\xi = (1) 0, (2) 0.2, (3) 0.3, (4) 0.5, (5) 1, \text{ and } (6) 2$

Изменение фазового угла φ с изменением частоты происходит вследствие процесса демпфирования в технической системе ($\varphi = \arctg \frac{2\xi r}{1-r^2}$). На рис. 4, 5

представлено изменение фазового угла и динамического коэффициента соответственно в зависимости от отношения частот r .

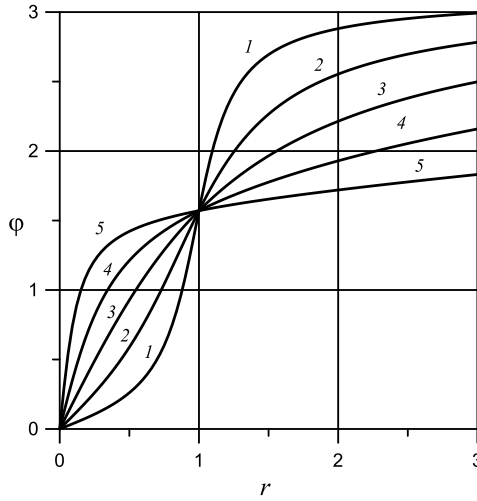


Рис. 4. Зависимость фазового угла φ от отношения частот r при разных значениях коэффициента затухания ξ : 1 – $\xi = 0.2$, 2 – $\xi = 0.5$, 3 – $\xi = 1$, 4 – $\xi = 2$, 5 – $\xi = 5$

Fig. 4. Dependence of the phase angle φ on the ratio of frequencies r at different values of the attenuation coefficient ξ : $\xi = (1) 0.2, (2) 0.5, (3) 1, (4) 2$, and $(5) 5$

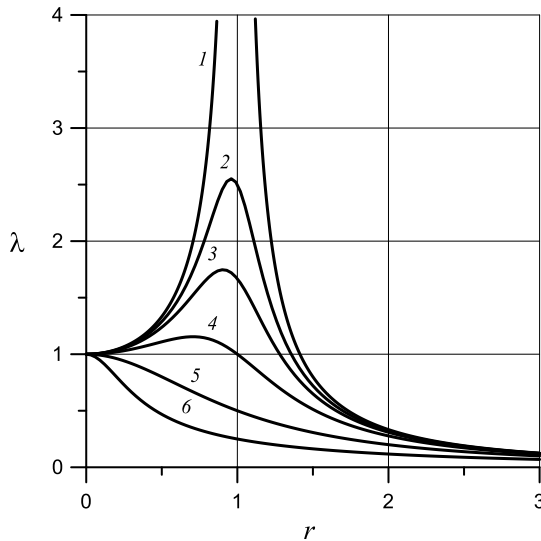


Рис. 5. Зависимость коэффициента передачи сил от отношения частот r при разных значениях безразмерного коэффициента затухания ξ : 1 – $\xi = 0$, 2 – $\xi = 0.2$, 3 – $\xi = 0.3$, 4 – $\xi = 0.5$, 5 – $\xi = 1$, 6 – $\xi = 2$

Fig. 5. Dependence of the force transfer coefficient on the frequency ratio r at different values of the dimensionless attenuation coefficient ξ : $\xi = (1) 0, (2) 0.2, (3) 0.3, (4) 0.5, (5) 1$, and $(6) 2$

Виброактивность механических систем без демпфирования

Предлагаемый метод минимизации виброактивности предполагает, что начальным эталоном является определение исходных данных на базе схемы недемпфированной конструкции электродвигателя. В нем минимальная величина коэффициентов демпфирования обеспечивается материалом элементов конструкции последнего, поэтому в алгоритме расчета параметров малошумного вентилятора следует начинать со схемы, представленной на рис. 6. На этой схеме показано, что вентилятор испытывает вынужденные механические воздействия без демпфирования. Тогда уравнение (1) преобразуется к виду:

$$M\ddot{x} + kx = F_{\text{экв}} \sin \omega t. \quad (6)$$

Соответствующее перемещение $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ определяется решением

$$x = x_0 \cos \omega_c t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_c} - \frac{F_{\text{экв}}}{k} \frac{r}{1-r^2} \right) \sin \omega_c t + \frac{F_{\text{экв}}}{k} \frac{1}{1-r^2} \sin \omega t. \quad (7)$$

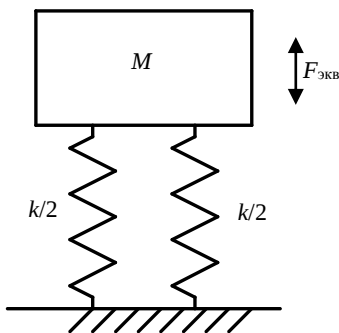


Рис. 6. Расчетная схема вентилятора без демпфирования колебаний
Fig. 6. Design scheme of the fan without vibration damping

Если принять начальные условия нулевыми, то из (7) следует, что установившиеся колебания системы будут определяться частотой колебаний внешней силы и частотой собственных колебаний:

$$x(t) = \frac{F_{\text{экв}}}{k} \frac{1}{1-r^2} (\sin(r\omega_c t) - r \sin(\omega_c t)). \quad (8)$$

Установившаяся реакция проиллюстрирована на рис. 3 для коэффициента затухания $\xi = 0$.

Так же, как и в предыдущем случае, коэффициент передачи λ зависит от отношения частот и может быть больше или меньше единицы. При резонансе отношение частот равно единице и теоретически коэффициент передачи – бесконечная величина.

Для таких систем амплитуда увеличивается пропорционально времени и, как следует из (8), при $r \rightarrow 1$ решение имеет вид:

$$x_r = \frac{F_{\text{экв}}}{2k} (\sin(\omega_c t) - \omega_c t \cos(\omega_c t)). \quad (9)$$

То есть теоретически амплитуда может возрастать до бесконечности, а практически амплитуда возрастает до величины, при которой механизм становится неработоспособным.

Дополнительно следует иметь в виду, что резонанс наступает через определенное время, и поэтому, если пройти быстро зону резонанса, механизмы могут работать в зарезонансной зоне и при частотах значительно выше резонансной, при этом коэффициент передачи будет меньше единицы. При остановке механизма снова проходит через критическую точку. Поэтому режим работы «разгон–остановка» для зарезонансной зоны работы весьма нежелателен.

Вибродемпфирование с демпфером, установленным на упругое основание

При минимизации (редуцировании) уровня шума для повышения эффективности целесообразно использовать установку демпфера на упругую основу (рис. 7)

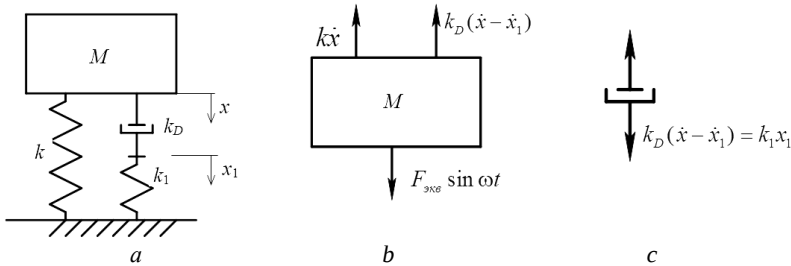


Рис. 7. Установка демпфера на упругом основании:

a – вариант 2; *b* – расчетная схема прибора; *c* – расчетная схема демпфера

Fig. 7. Installing the damper on an elastic base:

(*a*) option 2; (*b*) design diagram of the device; and (*c*) design diagram of the damper

Динамика технической системы (см. рис. 7) описывается уравнением

$$M\ddot{x} + k_D(\dot{x} - \dot{x}_1) + kx = F_{\text{экр}} \sin \omega t. \quad (10)$$

Демпфер с пружиной устанавливается последовательно, поэтому

$$k_D(\dot{x} - \dot{x}_1) = k_1 \dot{x}_1. \quad (11)$$

В результате получаем уравнение в виде:

$$x_1 = \frac{1}{k_1} (F_{\text{экр}} \sin \omega t - M\ddot{x} - kx). \quad (12)$$

Подставляя производные по времени уравнения (12) в уравнение (10), получаем дифференциальное уравнение 3-го порядка:

$$\ddot{x} + \frac{k_1}{k_D} \ddot{x} + \frac{k_1 + k}{M} \dot{x} + \frac{k_1 k}{k_D M} x = \frac{k_1}{k_D M} F_{\text{экр}} \sin \omega t + \frac{\omega}{M} F_{\text{экр}} \cos \omega t. \quad (13)$$

Таким образом, движение массы M описывается дифференциальным уравнением 3-го порядка, получение общего решения которого весьма затруднительно, в отличие от получения решения дифференциального уравнения 2-го порядка, для которого математический аппарат довольно хорошо разработан для различного вида технических систем.

Однако установившуюся реакцию для уравнения (13) сравнительно просто получить методом импеданса с одновременным решением уравнений (10) и (11). Для этого возмущение представим комплексной функцией $F_{\text{эКВ}} e^{j\omega t}$, а соответствующие перемещения $x(t)$ и $x_1(t)$ – функциями $\bar{X} e^{j\omega t}$ и $\bar{X}_1 e^{j\omega t}$, где $\bar{X}$ и $\bar{X}_1$ – комплексные амплитуды.

Подставив эти выражения в уравнения (10) и (11) и сократив на $e^{j\omega t}$, получаем

$$\begin{aligned} (k - M\omega^2 + jk_D\omega)\bar{X} - jk_D\omega\bar{X}_1 &= F_{\text{эКВ}}, \\ -jk_D\omega\bar{X} + (k_1 + jk_D\omega)\bar{X}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Далее комплексные амплитуды определяются по правилу (признаку) Крамера через определители:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{F_{\text{эКВ}}(k_1 + jk_D\omega)}{k_1(k - M\omega^2) + jk_D\omega(k + k_1 - M\omega^2)}, \\ \bar{X}_1 &= \frac{jk_D\omega F}{k_1(k - M\omega^2) + jk_D\omega(k + k_1 - M\omega^2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя отношение коэффициентов $N = \frac{k_1}{k}$, $\omega_c = \sqrt{\frac{k}{M}}$, $\frac{k_D}{M} = 2\xi\omega_c$, $r = \frac{\omega}{\omega_c}$, в выражении (15) получаем

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{F_{\text{эКВ}}}{k} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2\xi r}{N}\right)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + \left[2\xi r \left(1 + \frac{1}{N} - \frac{r^2}{N}\right)\right]^2}} e^{-j\gamma} = X e^{-j\gamma}, \\ \bar{X}_1 &= \frac{F_{\text{эКВ}}}{k} \frac{\frac{2\xi r}{N}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + \left[2\xi r \left(1 + \frac{1}{N} - \frac{r^2}{N}\right)\right]^2}} e^{-j\gamma_1} = X_1 e^{-j\gamma_1}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{где } \gamma = \arctg \frac{2\xi r \left(1 + \frac{1}{N} - \frac{r^2}{N}\right)}{1-r^2} - \arctg \frac{2\xi r}{N}, \quad \gamma_1 = \arctg \frac{2\xi r \left(1 + \frac{1}{N} - \frac{r^2}{N}\right)}{1-r^2} - \frac{\pi}{2}.$$

Так как возмущение задается синус-функцией, то установившуюся реакцию можно записать в виде:

$$x = X \sin(\omega t - \gamma), \quad x_1 = X_1 \sin(\omega t - \gamma_1). \quad (17)$$

Далее приведем выражение реакции X к виду, удобному для инженерного использования в методе минимизации. Выразим силу $F_{\text{эКВ}}$ через составляющие и разделим числитель и знаменатель на массу M , получим выражение аналогичное (5), отличающееся только динамическим коэффициентом λ :

$$\frac{MX(r, \xi, N)}{me} = r^2 \vartheta(r, \xi, N), \quad (18)$$

$$\text{где } \vartheta(r, \xi, N) = \frac{\sqrt{1 + \left(2\xi r / N\right)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + \left[2\xi r \left(1 + \frac{1}{N} - \frac{r^2}{N}\right)\right]^2}}.$$

На рис. 8 для сравнения представлены в графическом виде решения уравнения (5) и уравнения (18), при этом видна разница в эффективности виброгашения для варианта, представленного на рис. 2, и варианта на рис. 7, а. Из представленных сравнительных результатов вариантов кинематических схем демпфирующих устройств видно заметное преимущество эффективности схемы устройства с установленным демпфером на упругом основании (см. рис. 8, кривая 3).

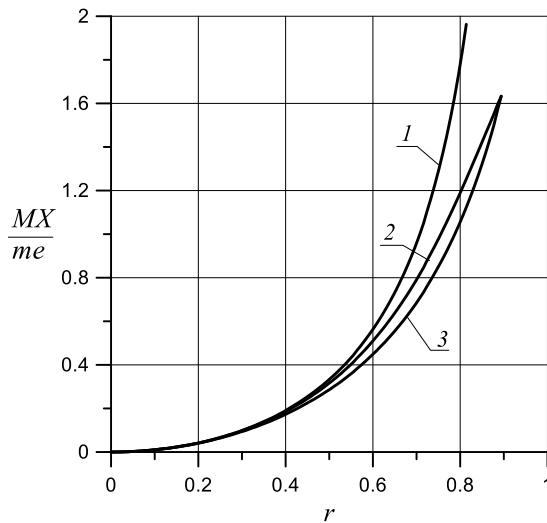


Рис. 8. График сравнительных результатов эффективности виброгашения:
1 – система без демпфирования, 2 – система демпфирования по варианту 1,
3 – система демпфирования по варианту 2, $\xi = 0.25$, $N = 0.5$

Fig. 8. Graph of comparative results of vibration damping efficiency:
(1) system without damping, (2) damping system according to option 1,
(3) damping system according to option 2, $\xi = 0.25$, $N = 0.5$

Определим параметры N , ξ , r , при которых амплитуда колебания системы для схемы демпфирования на упругом основании будет меньше амплитуды колебания системы для схемы демпфирования на жестком основании, т.е.

$$r^2 \vartheta(r, \xi, N) < r^2 \lambda(r, \xi). \quad (19)$$

Из неравенства (19) после преобразований получается следующее:

$$r < \left(1 + \frac{2\xi^2}{N}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

Неравенство (20) означает, что безразмерная частота вращения вентилятора r должна быть меньше величины, зависящей от квадрата коэффициента демпфи-

вания ξ и отношения жесткостей пружин N . Поскольку правая часть неравенства (20) меньше единицы, то получается, что частота вращения вентилятора ω должна быть меньше собственной частоты механической системы ω_c .

Рассмотрим величину относительной разности амплитуд колебаний вентиляторов, демпфируемых по разным схемам, которая может быть представлена

в виде: $g(r, N, \xi) = \frac{\vartheta(r, \xi, N)}{\lambda(r, \xi)} - 1$. Ее значение в диапазоне $0 < r < \left(1 + \frac{2\xi^2}{N}\right)^{-\frac{1}{2}}$

меньше нуля.

На рис. 9 показаны характерные зависимости относительной разности амплитуд колебаний от относительной частоты вращения вентилятора для относительной жесткости пружин $N = 0.1$ и коэффициента демпфирования ξ , изменяющегося в диапазоне от 0.01 до 0.06.

Видно, что для указанного диапазона параметров существуют такие значения относительной скорости вращения вентилятора r , при которых относительная разность амплитуд колебания достигает минимального значения. Уменьшение коэффициента ξ сначала ведет к уменьшению минимального значения относительной разности амплитуд (кривые 1–3), а затем – к увеличению (кривая 4)

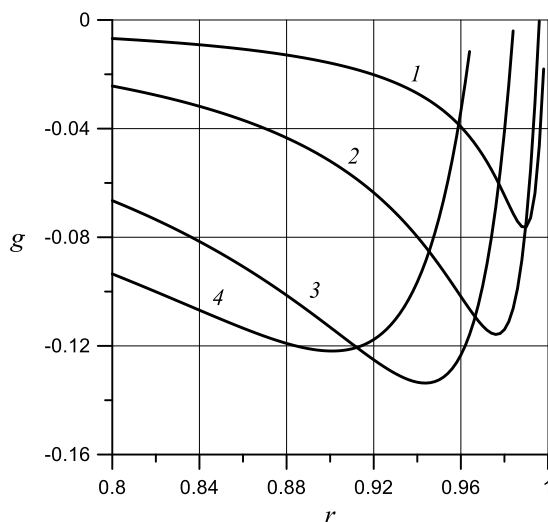


Рис. 9. Влияние коэффициента демпфирования на зависимость относительной разности амплитуд колебаний от отношения частот r , $N = 0.1$:

1 – $\xi = 0.01$, 2 – $\xi = 0.02$, 3 – $\xi = 0.04$, 4 – $\xi = 0.06$

Fig. 9. Influence of the damping factor on the dependence of the relative difference of oscillation amplitudes on the frequency ratio r , $N = 0.1$:

$\xi = (1) 0.01, (2) 0.02, (3) 0.04, \text{ and } (4) 0.06$

Численное решение задачи минимизации функции $g(r, N, \xi)$ показывает, что ее минимальное значение равно $-(\sqrt{3}/2 - 1) \approx -0.134$, и оно достигается на множестве значений r, N, ξ , между которыми существуют функциональные связи

$N = N(r)$ и $\xi = \xi(r)$, представленные на рис. 10. Это означает, что уменьшение амплитуды колебаний рассматриваемой механической системы на 13.4% при использовании демпфирования на упругом основании по сравнению с демпфированием на жестком основании возможно при любых относительных скоростях вращения вентилятора, лежащих в диапазоне от 0 до 1. И для каждой относительной скорости вращения r существует единственная пара значений ξ и N , при которых относительная амплитуда колебаний уменьшится на 13.4%.

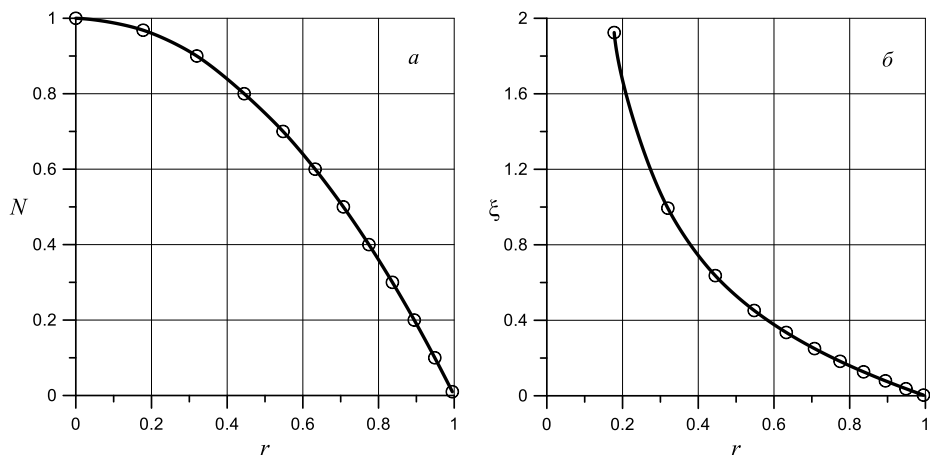


Рис. 10. Оптимальные зависимости параметров от отношения частот r :
 a – отношение коэффициентов жесткости пружин; b – относительный коэффициент демпфирования

Fig. 10. Optimum dependences of parameters on the frequency ratio r :
 (a) the spring stiffness ratio and (b) the relative damping factor

Минимизация виброактивности механической системы (вентилятор) с внутренним генератором колебаний (электродвигатель)

Суть метода заключается в поэтапном редуцировании (уменьшении) уровня виброактивности в кинематической цепи малошумного вентилятора «вал электродвигателя – подшипниковые опоры – блок крепления электродвигателя – корпус вентилятора – основание вентилятора». Конструктивно в каждое звено этой цепи можно встраивать демпфирующее устройство, тем самым как бы создавая виброгасящие ступени «звукового редуктора».

На рис. 11 приведена 3D-модель малошумного вентилятора с круглым корпусом. Такая форма корпуса обусловлена конструкторскими и технологическими соображениями.

В рассматриваемом вентиляторе электродвигатель с крыльчаткой находится в специальном шумоизолированном корпусе, что обеспечивает его малошумную работу. Корпус имеет геометрическую форму, максимально устойчивую к внешним нагрузкам, а стенки корпуса представляют собой «сэндвич», состоящий из слоев конструкционных материалов, обеспечивающих одновременно механическую прочность и шумозащищенность окружающей среды, а также виброза-

щищенность от внешних дополнительных механических периодических воздействий электродвигателя.

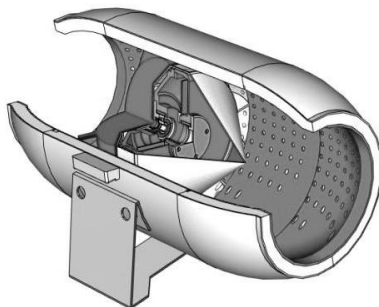


Рис. 11. 3D-модель осевого канального вентилятора
Fig. 11. 3D-model of the axial channel fan

Расчетная силовая схема минимизации приведена на рис. 12, где M_1 – масса ротора, M_2 – масса статора и корпуса электродвигателя, M_3 – масса всего электродвигателя, M_4 – масса вентилятора, M_5 – вентилятора с основанием.

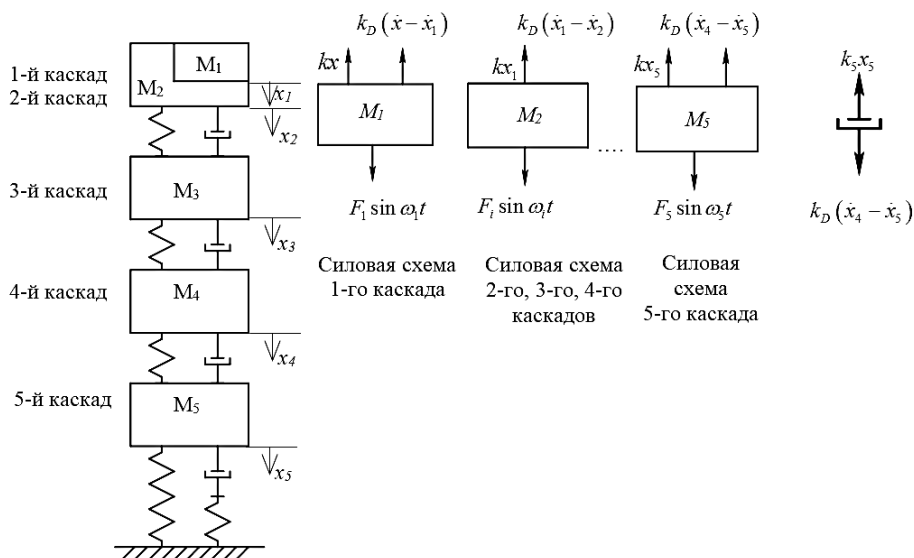


Рис. 12. Силовая схема каскадов
Fig. 12. Power scheme of the cascades

Схема маломощного вентилятора, представленная на рис. 12, является механической системой со многими степенями свободы, реакция которой определяется решением дифференциального уравнения n -го порядка.

Для решения практических задач при проектировании механических систем, подобных маломощному вентилятору, связанных с регулированием виброактивности, предлагается метод редуцирования виброактивности. Суть метода заклю-

чается в следующем: механическая система разбивается на каскады, в каждом из которых находится демпфирующее устройство.

В дифференциальных уравнениях движения каждого каскада амплитуда выходной реакции является входным воздействием для последующего каскада. При этом условно принимается, что масса предыдущего каскада неподвижна, а механическая связь каскадов осуществляется через реакцию предыдущего каскада, физически являющегося входным воздействием для последующего.

При таком подходе очевидно, что подготовительная работа для расчетов значительно упрощается.

Что касается определения количества собственных частот, а соответственно, и зон резонанса, то оно будет равно количеству степеней свободы, а величина смещения значения ω_c от принятого допущения будет с достаточной точностью соответствовать реальному объекту, потому что уровень виброактивности механической системы зависит не от значения вынуждающей частоты, а от разницы частоты вынуждающих воздействий и собственной частоты рассматриваемой системы с учетом коэффициентов демпфирования каскадов, которые легко определяются. Тем более что в практике проектирования таких механических систем практически всегда пользуются результатами механических испытаний, при этом уровень виброактивности регулируется, руководствуясь опытом разработчика.

Еще одним доводом допустимости такого подхода является то, что техническая задача состоит в отыскании не значений параметров вибрации рабочего режима маломощного вентилятора (амплитуды и частоты), а их отношения в каскадах кинематической цепи «источник возбуждения вибрации – основание вентилятора», и в итоге получении суммарного отношения.

В таблице приведена структура редуцирования виброактивности маломощного вентилятора.

Структура редуцирования виброактивности маломощного вентилятора

Каскад	Кинематическая схема каскада	Отношение параметров	Описание результата эффективности каскада
1-й каскад	Рис. 7	$\frac{A_1}{F/k} = \frac{1}{1-r_1^2}$	Эффективность конструкционного демпфирования в роторе электродвигателя
2-й каскад	Рис. 2	$\frac{x_2}{x_1} = r_2^2 \lambda_2$	Эффективность жидкостного демпфирования в шарикоподшипниковой опоре электродвигателя
3-й каскад	Рис. 2	$\frac{x_3}{x_2} = r_3^2 \lambda_3$	Эффективность демпфирования в блоке крепления электродвигателя в корпусе вентилятора
4-й каскад	Рис. 2	$\frac{x_4}{x_3} = r_4^2 \lambda_4$	Эффективность демпфирования в корпусе вентилятора
5-й каскад	Рис. 2	$\frac{x_5}{x_4} = r_5^2 \lambda_5$	Эффективность вибродемпфирования в основании корпуса вентилятора
Суммарный коэффициент передачи $i_\Sigma = r_2^2 \lambda_2 \cdot r_3^2 \lambda_3 \cdot r_4^2 \lambda_4 \cdot r_5^2 \lambda_5$			

Величина коэффициента передачи каждого каскада меньше единицы, поэтому суммарно можно реализовать реакцию выходного воздействия в сотни раз меньше входного так, что, используя предложенный метод, можно изготавливать электромеханическую часть вентилятора бесшумной в части наличия причин механической природы. Для проектирования в целом бесшумного вентилятора необходим другой принципиальный подход решения проблемы – устранение причин аэродинамической природы.

Заключение

Изложенные в статье [7] результаты исследования показывают, что ключевым в регулировании уровня виброактивности механических систем, содержащих источник вибрации, является соотношение вынужденных и собственных частот объекта исследования.

В основу результата минимизации виброактивности малошумного вентилятора положено отношение реакции механической системы на входящее воздействие, которое, в свою очередь, зависит от отношения частот и динамического коэффициента.

Предложен способ минимизации уровня виброактивности с учетом технической компоновки узлов малошумного вентилятора.

Для этапа проектирования предложен способ редуцирования виброактивности, зависящей от причин механической природы.

Предложен алгоритм минимизации виброактивности, реализуемый с использованием технического решения [8].

Магистральным направлением НИОКР по уменьшению уровня шума аэродинамической природы следует считать результаты аналитических исследований, разработку малошумной крыльчатки, а также корпуса вентилятора с максимальным вибро- и шумопоглощением.

Перспективной схемой устройства для практического применения снижения виброактивности в механической системе является схема с демпфером, установленным на упругом основании.

Список источников

1. Клюкин И.И. Борьба с шумом и звуковой вибрацией на судах. Л. : Судостроение, 1971. 416 с.
2. Дмитриев В.С., Иванова В.С. Основы теории колебаний и моделирование колебательных систем. Томск : Изд-во ТПУ, 2012. 215 с.
3. Магнус К. Колебания. Введение в исследование колебательных систем. М. : Мир, 1982. 304 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М. : Наука, 1965. 204 с.
5. СН 2.2.4/2.1.8.562–96. Шум на рабочих местах, в помещениях жилых, общественных зданий и на территории жилой застройки. Санитарные нормы. URL: <https://dokipedia.ru/document/3982778>
6. ГОСТ 23941–2002. Шум машин. Методы определения шумовых характеристик. Общие требования. URL: <https://dokipedia.ru/document/5164315>
7. Дмитриев В.С., Миньков Л.Л., Костюченко Т.Г., Дердященко В.В., Панфилов Д.С. Виброактивность малошумных вентиляторов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика 2020. № 68. С. 61–71.

8. Дмитриев В.С., Панфилов Д.С., Дердиященко В.В. Радиальный подшипниковый амортизатор. Патент № 195655 РФ. 2020.
9. Дмитриев В.С., Панфилов Д.С., Дердиященко В.В. Демпфер вязкого трения. Патент № 203324 РФ. 2021.

References

1. Klyukin I.I. (1971) *Bor'ba s shumom i zvukovoy vibratsiyey na sudakh* [Suppression of noise and sound vibration on ships]. Leningrad: Sudostroyeniye.
2. Dmitriev V.S., Ivanova V.S. (2012) *Osnovy teorii kolebaniy i modelirovaniye kolebatelnykh system* [Fundamentals of oscillation theory and modeling of oscillatory systems]. Tomsk: Tomsk Polytechnic University.
3. Magnus K. (1982) *Kolebaniya. Vvedeniye v issledovaniye kolebatelnykh system* [Oscillations: Introduction to the Study of Oscillatory Systems]. Moscow: Mir.
4. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1976) *Course of Theoretical Physics: Vol. 1, Mechanics*. Amsterdam: Elsevier Butterworth-Heinemann.
5. SN 2.2.4/2.1.8.562-96. *Shum na rabochikh mestakh, v pomeshcheniyakh zhilykh, obshchestvennykh zdaniy i na territorii zhiloy zastroyki. Sanitarnye normy* [Noise in workplaces, accommodations, public buildings, and residential areas. Sanitary standards]. Access mode: <https://dokipedia.ru/document/3982778>.
6. GOST 23941-2002. *Shum mashin. Metody opredeleniya shumovykh kharakteristik. Obshchie trebovaniya* [Machinery noise. Methods for determining of noise characteristics. General requirements]. Access mode: <https://dokipedia.ru/document/5164315>.
7. Dmitriev V.S., Minkov L.L., Kostyuchenko T.G., Derdiyashchenko V.V., Panfilov D.S. (2020) Vibroaktivnost maloshumnykh ventilyatorov [Vibroactivity of low-noise fans]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 61–71. doi: 10.17223/19988621/68/6
8. Dmitriev V.S., Panfilov D.S., Derdiyashchenko V.V. (2020) *Radialnyy podshipnikovyy amortizator* [Radial bearing damper]. RF Patent 195655.
9. Dmitriev V.S., Panfilov D.S., Derdiyashchenko V.V. (2021) *Dempfer vyazkogo treniya* [Viscous friction damper]. RF Patent 203324.

Сведения об авторах:

Дмитриев Виктор Степанович – доктор технических наук, профессор отделения диагностики и контроля инженерной школы неразрушающего контроля и безопасности Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: dmitriev@tpu.ru

Миньков Леонид Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Костюченко Тамара Георгиевна – кандидат технических наук, доцент отделения электронной инженерии инженерной школы неразрушающего контроля и безопасности Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: ktg@tpu.ru

Дердиященко Владимир Владимирович – руководитель отдела НПЦ «Полюс» (Томск, Россия). E-mail: derdiyaschenkova@mail.ru

Панфилов Дмитрий Сергеевич – сотрудник НПЦ «Полюс» (Томск, Россия). E-mail: panfilovds8@gmail.com

Ермаков Дмитрий Владимирович – сотрудник НПЦ «Полюс» (Томск, Россия). E-mail: ermakdmit@yandex.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Dmitriev Victor S. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Division for Electronic Engineering, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dmitriev@tpu.ru

Minkov Leonid L. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Physics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Kostyuchenko Tamara G. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, tutor of the Children's Technopark "Quantorium", Tomsk, Russian Federation). E-mail: ktg@tpu.ru

Derdiyashchenko Vladimir V. (Head of the Department, Research and Production Center Polus, Tomsk, Russian Federation). E-mail: derdiyashenkovv@mail.ru

Panfilov Dmitry S. (Design Engineer, Scientific Production Center Polus, Tomsk, Russian Federation). E-mail: panfilovds8@gmail.com

Ermakov Dmitrij V. (Leading Design Engineer, Scientific Production Center Polus, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ermakdmit@yandex.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 26.06.2021; принята к публикации 22.03.2022

The article was submitted 26.06.2021; accepted for publication 22.03.2022

Научная статья

УДК 539.41, 620.178.1

doi: 10.17223/19988621/76/9

Исследование структуры и свойств изделий из жаростойких сплавов на основе Ni–Cr–CrN с высоким содержанием азота, полученных с применением аддитивной технологии прямого лазерного сплавления порошковых материалов

Мансур Хузиахметович Зиатдинов¹, Александр Степанович Жуков²,
Николай Сергеевич Евсеев³, Михаил Александрович Марков⁴,
Виталий Валерьевич Бобырь⁵, Дмитрий Александрович Ткачев⁶,
Павел Юрьевич Никитин⁷

^{1, 2, 3, 6, 7} Томский государственный университет, Томск, Россия

³ Институт проблем химико-энергетических технологий СО РАН, Бийск, Россия

^{4, 5} НИЦ «Курчатовский институт» – ЦНИИ КМ «Прометей», Санкт-Петербург, Россия

¹ ziatdinovm@mail.ru

² zhuk_77@mail.ru

³ evseevns@gmail.com

⁴ barca0688@mail.ru

⁵ npk3@mail.ru

⁶ d.tkachev11@gmail.com

⁷ upavelru@yandex.ru

Аннотация. Проведено исследование механизмов формирования структуры и свойств в ходе консолидации аддитивным методом прямого лазерного сплавления никель-хромового сплава системы Ni–Cr–CrN с повышенным содержанием азота. Сплав был получен путем добавления нитрида хрома, синтезированного методом самораспространяющегося высокотемпературного синтеза, в качестве лигатуры в никель-хромовый сплав. Произведена атомизация полученного сплава с целью получения сферических порошков, пригодных для использования в технологии прямого лазерного сплавления. Исследован химический состав полученных порошков, свидетельствующий о высоком итоговом содержании азота в сплаве (0.5%). Методом прямого лазерного сплавления порошков получены компактные образцы на основе Ni–Cr–CrN. Проведено исследование структуры полученных образцов, предела прочности при трехточечном изгибе и микротвердости по Виккерсу. Максимальное значение предела прочности при трехточечном изгибе составило 1 500 МПа, микротвердости 450 НВ.

Ключевые слова: аддитивные технологии, прямое лазерное сплавление металлов, самораспространяющийся высокотемпературный синтез, азотированный никель-хромовый сплав, микротвердость, прочность на изгиб

Благодарности: СВС и исследование полученных материалов выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-38-60036. Данная работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках соглашения от 26.07.2021 № 075-15-2021-693 (№ 13.ЦКП.21.0012). Аддитивное выращивание материалов выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 0721-2020-0028.

Для цитирования: Зиятдинов М.Х., Жуков А.С., Евсеев Н.С., Марков М.А., Бобырь В. В., Ткачев Д.А., Никитин П.Ю. Исследование структуры и свойств изделий из жаростойких сплавов на основе Ni–Cr–CrN с высоким содержанием азота, полученных с применением аддитивной технологии прямого лазерного сплавления порошковых материалов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 118–130. doi: 10.17223/19988621/76/9

Original article

Study of the structure and properties of products made of heat-resistant alloys based on Ni–Cr–CrN with a high nitrogen content by direct metal laser sintering

Manzur Kh. Ziatdinov¹, Alexander S. Zhukov², Nikolay S. Evseev³,
Mikhail A. Markov⁴, Vitaly V. Bobyr¹⁵, Dmitry A. Tkachev⁶,
Pavel Yu. Nikitin⁷

^{1, 2, 3, 6, 7} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

³ Institute for Problems of Chemical and Energetic Technologies of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Biysk, Russian Federation

^{4, 5} National Research Center “Kurchatov Institute” – Central Research Institute of Structural Materials “Prometey”, Saint-Petersburg, Russia

¹ ziatdinovm@mail.ru

² zhuk_77@mail.ru

³ evseevns@gmail.com

⁴ barca0688@mail.ru

⁵ npk3@mail.ru

⁶ d.tkachev11@gmail.com

⁷ upavelru@yandex.ru

Abstract. This work presents a study of the preparation of additive materials based on a nickel–chromium alloy of the Ni–Cr–CrN system by direct metal laser sintering (DMLS). The additive materials were produced on the EOS M270 setup (with the option of open editing modes). The research range: laser radiation from 100 to 200 W, the speed of the laser beam from 600 to 1100 mm/s. The chemical composition of the obtained materials is investigated. The composition indicates a high final content of nitrogen in the alloy (0.5%). The structure of the obtained samples and their mechanical characteristics, namely, the bending strength (1500 MPa) and Vickers microhardness (450 HV), have been investigated. The morphology, microstructure, and elemental analysis of the initial powder and the resulting additive materials were studied by scanning electron microscopy and X-ray spectral microanalysis on the TESCAN Vega research complex. Analysis of the structure shows that the elements Ni, Cr and Fe are distributed evenly over the entire area of the samples, which indicates a uniform Ni–Cr–CrN melt.

Keywords: additive technologies, direct metal laser sintering, self-propagating high-temperature synthesis, nitrided nickel-chromium alloy, microhardness, bending strength

Acknowledgments: The SHS and the study of the obtained materials were funded by RFBR, project number 19-38-60036. Additive growing materials was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State assignment No. 0721-2020-0028).

For citation: Ziatdinov, M.Kh., Zhukov, A.S., Evseev, N.S., Markov, M.A., Bobyr', V.V., Tkachev, D.A., Nikitin, P.Yu. (2022) Study of the structure and properties of products made of heat-resistant alloys based on Ni–Cr–CrN with a high nitrogen content by direct metal laser sintering. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 118–130. doi: 10.17223/19988621/76/9

На сегодняшний день при стремительном развитии технологий возрастают требования к эксплуатационным характеристикам узлов и агрегатов, в частности для таких областей, как авиастроение, атомная энергетика, в которых широко применяются газотурбинные двигатели. Такие агрегаты должны отвечать ряду требований: обладать высокими показателями жаропрочности, жаростойкости, износостойкости. Это формирует ряд научных проблем, связанных с разработкой новых конструкционных материалов, обладающих повышенными механическими характеристиками, сохраняющимися при высокотемпературных воздействиях. При этом ресурс материалов, применяемых в настоящий момент, исчерпан, их дальнейшее усовершенствование дает незначительные результаты при существенных затратах, в связи с чем актуальностью обладает разработка принципиально новых материалов и подходов к их изготовлению, способных существенно повысить механические характеристики деталей газотурбинных установок при высокотемпературных воздействиях.

В настоящее время в машиностроении широко применяются жаропрочные никелевые сплавы, рабочие температуры которых находятся в области 1 100°C. Одним из таких жаростойких сплавов является Ni–Cr [1–4]. Он обладает высокой стойкостью к окислению до 1 200°C [5]. Однако прочность и износостойкость никель-хромовых сплавов невысока, особенно при высоких температурах. Так, по данным работы [6] прочность на изгиб Ni–Cr достигает 660 МПа при содержании пор около 15%, что вдвое превосходит прочность на изгиб чистого Ni (330 МПа) [7].

Для улучшения механических характеристик в систему Ni–Cr вводятся различные добавки. Одним из перспективных путей повышения механических свойств никель-хромовых сплавов является легирование их азотом [8]. Азот наряду с никелем является стабилизатором γ -фазы системы Cr–Ni–N. Это позволяет повысить концентрацию хрома в нихроме с сохранением γ -структуры и значительно улучшить эксплуатационные характеристики: высокую прочность при высокой вязкости и высокую прочность при высоких температурах.

Для выплавки азотированного нихрома используется нитрид хрома, добавляемый в расплав в качестве лигатуры. Для синтеза нитридов хрома возможно использование свободного спекания и метода самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (СВС) [9]. Метод СВС более эффективен: во-первых, он более экономичен (отсутствие затрат электроэнергии), во-вторых, позволяет получать более чистые нитриды хрома, в особенности данный метод способствует снижению содержания кислорода. Низкое содержание кислорода обеспечивает высокое и стабильное усвоение азота никель-хромовым расплавом.

Новый уровень развития газотурбинных установок в будущем могут обеспечить только принципиально новые материалы и технологии, так как традиционные уже исчерпали себя, и дальнейшее их использование дает незначительные результаты при существенных затратах. Наряду с разработкой материалов не менее важной задачей является разработка способов формирования изделий из них, так как

с развитием техники возрастает сложность геометрии отдельных функциональных узлов; при этом подходы к изготовлению изделий должны обладать высокой экономической эффективностью. В области развития методов изготовления сложнопрофильных изделий аддитивные технологии, активно развивающиеся в настоящий момент, представляют собой инновационный инструмент для решения задач различных отраслей промышленности. Одно из важнейших направлений аддитивных технологий – лазерное выращивание металлических изделий. Особенно актуальным является производство деталей сложных узлов аэрокосмической техники, в частности жаростойких элементов турбореактивных двигателей. На сегодняшний день одним из наиболее развитых и перспективных методов для изготовления сложнопрофильных металлических изделий является технология послойного лазерного спекания порошков (технология SLS) [6]. При помощи SLS разрабатываются точные сложнопрофильные детали для работы в составе узлов и агрегатов. Данный процесс способен успешно заменить традиционные методы производства, так как физико-механические свойства изделий, построенных по технологии SLS, зачастую превосходят свойства изделий, изготовленных по традиционным технологиям. Кроме того, в некоторых случаях сложнопрофильные детали невозможно получить традиционными методами [10].

Важнейшими проблемами при изготовлении изделий аддитивными методами являются определение технологических параметров выращивания и соответствие характеристик исходного порошкового материала определенным требованиям, одно из которых – форма частиц, которая должна быть близка к сферической. Имеется ряд работ, в которых исследуется получение изделий из хром-никелевых сплавов аддитивными методами. Так, в работе [11] экспериментальные образцы системы Ni–Cr с микротвердостью 320 HV получены методом селективного лазерного сплавления. В работе [12] проводилась лазерная наплавка (метод LMD) лабораторных образцов из Ni–Cr–N при различных технологических параметрах; микротвердость по Виккерсу полученных образцов достигала 310 HV. В работе [13] приведены исследования микроструктуры и механических свойств одного из вариантов никель-хромовых сплавов – сплава марки Inconel 625, полученного методом аддитивной дуги (WAAM): средняя микротвердость сплава Inconel 625 составила 264 HV.

В результате развития SLS-технологии появляются новые модификации, основанные на данной методике, позволяющие достичь большей точности и повысить технологические характеристики формируемых изделий. Одной из таких модификаций является методика прямого лазерного сплавления металлов (DMLS), разработанная и запатентованная компанией EOS и позволяющая увеличить точность выращивания изделия и повысить сложность геометрии за счет нанесения нового материала для каждого слоя [10]. Несмотря на существующие исследования по получению изделий из сплавов Ni–Cr аддитивными методами (SLM, SLS, WAAM), а также большой интерес различных групп авторов к системам Ni–Cr и Ni–Cr–N, отсутствуют работы в области получения изделий Ni–Cr–N методом DMLS. Однако такой метод достаточно эффективен, а определение режимных параметров при получении аддитивных изделий данным методом является актуальной задачей.

Таким образом, целью настоящей работы является аддитивное выращивание материалов Ni–Cr–CrN методом DMLS и исследование их структуры и физико-механических характеристик.

Материалы и методика эксперимента

Процесс получения исходного композиционного порошка системы Ni–Cr–CrN и аддитивных образцов на его основе включал в себя четыре основных технологических этапа (рис. 1).

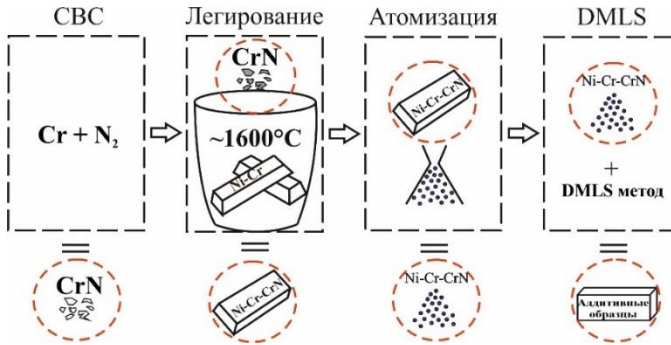


Рис. 1. Схема получения Ni–Cr–CrN материалов
Fig. 1. Main stages of obtaining Ni–Cr–CrN materials

Первый этап – получение нитрида хрома. Синтез нитрида хрома осуществлен при помощи метода самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (CBC) в реакторе высокого давления. Для синтеза CrN использовали порошок алюмотермического хрома с чистотой 99.0%. Подробно процесс получения CrN методом CBC описан в работе [14].

Второй этап – получение азотированного никель-хромового сплава Ni–Cr–CrN. Для этого CrN, полученный на первом этапе, вводился в расплав Ni–Cr в качестве лигатуры. Температура расплава никель-хромового сплава марки X20H80 составляет ~ 1 500°C. При получении порошков азотированного нихрома (0.3–0.5% N) температура расплава повышалась до 1 550–1 600°C, затем в расплав добавлялся порошок нитрида хрома, полученный методом CBC. В результате был получен никель-хромовый азотистый сплав Ni 55%; N 0.5–0.7%; Cr – ост.

На третьем этапе производилась атомизация полученного легированного сплава для получения порошков сферической формы, обладающих высокой текучестью и пригодных для формирования изделий аддитивными методами послойного лазерного выращивания. Процесс сфероидизации Ni–Cr–CrN осуществлялся в колонне распыления с вакуумной камерой с дальнейшей классификацией и сфероидизацией композиционного порошка в индукционно связанной плазме. В результате был получен порошок Ni–Cr–CrN сферической формы с диаметром частиц 20–80 мкм. Химический состав полученного порошка, который являлся исходным компонентом при создании аддитивных изделий, представлен в табл. 1.

Таблица 1

Химический состав порошка Ni–Cr–CrN после сфероидизации

Химический состав, мас. %									
Ni	Cr	N	C	Fe	Al	Si	P	S	O
основа	45.0	0.5	0.014	0.17	0.05	0.12	0.01	0.0012	0.15

Содержание азота и кислорода определялось методом инфракрасной спектроскопии на установке TCH600 фирмы LECO. Полученный легированный сплав в порошковой форме содержал 45% хрома, 0.5% азота и 0.5% примесей, находившихся в исходном никель-хромовом сплаве и внесенных на этапе легирования.

Четвертым технологическим этапом являлось аддитивное лазерное выращивание образцов из сферического композиционного порошка системы Ni–Cr–CrN методом прямого лазерного сплавления металлов DMLS. Для выращивания аддитивных образцов в настоящей работе использовалась установка EOS M270 (Германия) с опцией открытого редактирования режимов, расположенная в НИЦ «Курчатовский институт» – ЦНИИ КМ «Прометей». Выращивание образцов производилось в атмосфере воздуха. Мощность лазерного излучения варьировала в диапазоне 100–200 Вт, скорость движения лазерного луча – в диапазоне 600–1 100 мм/с. В результате были изготовлены экспериментальные образцы в форме балок размером $5 \times 5 \times 25$ мм.

Гранулометрический состав порошков определялся при помощи анализатора Analysette 22 MicroTec plus фирмы FRITSCH методом лазерной дифракции. Рентгенофазовый анализ проводился с использованием многофункционального рентгеновского дифрактометра Rigaku Ultima IV с $\text{CuK}\alpha$ -излучением на основе базы данных PDF-2. Исследование морфологии, микроструктуры и элементный анализ исходного порошка и полученных аддитивных материалов проводили методами сканирующей электронной микроскопии и микрорентгеноспектрального анализа на исследовательском комплексе TESCANA Vega. Определение микротвердости по Виккерсу проводилось на микротвердомере PMT-3M при нагрузке 300 г и времени выдержки 10 с. Определение прочности полученных образцов производилось путем испытания на трехточечный изгиб в соответствии с ГОСТ 24409–80 с помощью универсальной испытательной машины Zwick Roell.

Результаты и обсуждение

В настоящей работе выращены экспериментальные образцы из полученного композиционного порошка системы Ni–Cr–CrN.

Дифрактограммы поверхности исследуемых образцов № 1 и № 2 приведены на рис. 2. Согласно результатам рентгенофазового анализа, фазовый состав образцов № 1 и № 2 представлен фазой Cr_2Ni_3 с гранецентрированной (ГЦК) кристаллической решеткой с параметром решетки $a = 3.579 \text{ \AA}$. При этом фазовый состав исходного порошка и полученных образцов идентичен.

В результате проведенных механических испытаний определены предел прочности на изгиб и микротвердость по Виккерсу аддитивных материалов. Результаты испытаний образцов в зависимости от использования стандартных режимов селективного лазерного сплавления порошков Ni–Cr–CrN (применяемых при сплавлении стальных материалов) на установке EOS представлены в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что наибольшее значение микротвердости и предела прочности на изгиб достигается при мощности лазера 200 Вт и скорости движения луча 800 мм/с. Очевидно, это связано с большим временем теплового воздействия, в результате чего частицы порошка проплавляются более однородно, что приводит к более плотной структуре материала и увеличению его механических характеристик. На рис. 3 показан внешний вид образцов после испытаний на изгиб. Исходя из характера деформирования образцов и разрушения с сохранением

целостности образца при образовании трещины, возможно сделать вывод, что полученные материалы обладают высокой пластичностью.

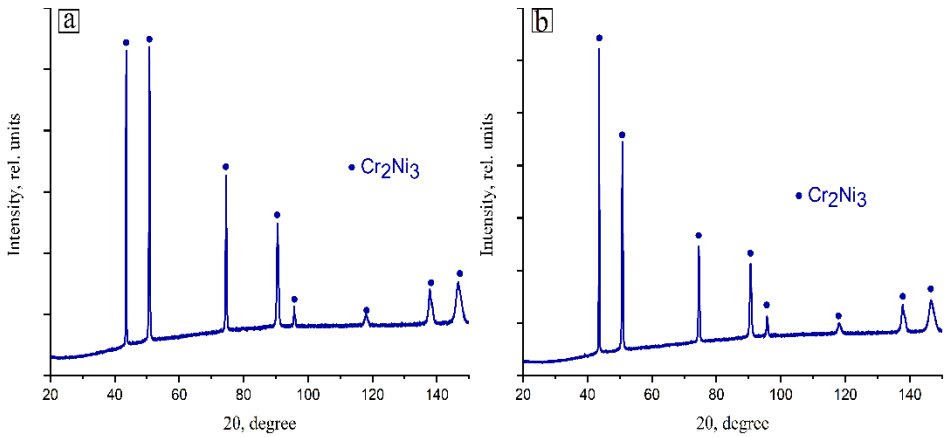


Рис. 2. Дифрактограммы поверхности полученных образцов: *a* – № 1, *b* – № 2
Fig. 2. Diffraction patterns of the surface of samples nos. (a) 1 and (b) 2

Таблица 2

**Механические свойства исследуемых образцов, полученных из порошка
 Ni–Cr–CrN при сплавлении в стандартных режимах DMLS**

№ образца	Скорость движения лазерного луча, мм/с	Мощность лазерного излучения, Вт	Предел прочности на изгиб, МПа	Микротвердость, HV
1	800	200	1 500	450
2	1 000	200	1 400	380
3	800	150	1 380	370
4	900	170	1 350	370



Рис. 3. Внешний вид образцов после испытаний на изгиб
Fig. 3. Appearance of specimens after bending tests

В табл. 3 приведено сравнение микротвердости образцов, полученных в настоящей работе, и микротвердости образцов, полученных в работах [12, 13, 15] аддитивными методами, а также сравнение предела прочности на изгиб с данными работ [6, 7] для образцов из чистого никеля и сплава Ni–Cr.

Из таблицы видно, что полученные образцы имеют высокую микротвердость, в то время как предел прочности на изгиб более чем в 2 раза превосходит предел прочности сравниваемых образцов, полученных другими авторами.

Таблица 3

**Сравнение механических характеристик полученных
аддитивных материалов с аналогами**

Образец	Метод получения	Микротвердость, HV	Предел прочности на изгиб, МПа	Источники данных
Ni–Cr–CrN	DMLS	450	1 500	Настоящая работа
Ni–Cr–CrN	DMLS	380	1 400	
Ni–Cr–CrN	DMLS	370	1 380	
Ni–Cr–CrN	DMLS	370	1 350	
Ni–Cr	SLM	280–320	–	[12]
Ni–Cr–CrN	LMD	310	–	[13]
Inconel 625	WAAM	264	–	[15]
Ni–Cr	традиционный	–	660	[6]
Ni	традиционный	–	330	[7]

На рис. 4 показан внешний вид аддитивных образцов № 1 и № 2 в поперечном сечении.

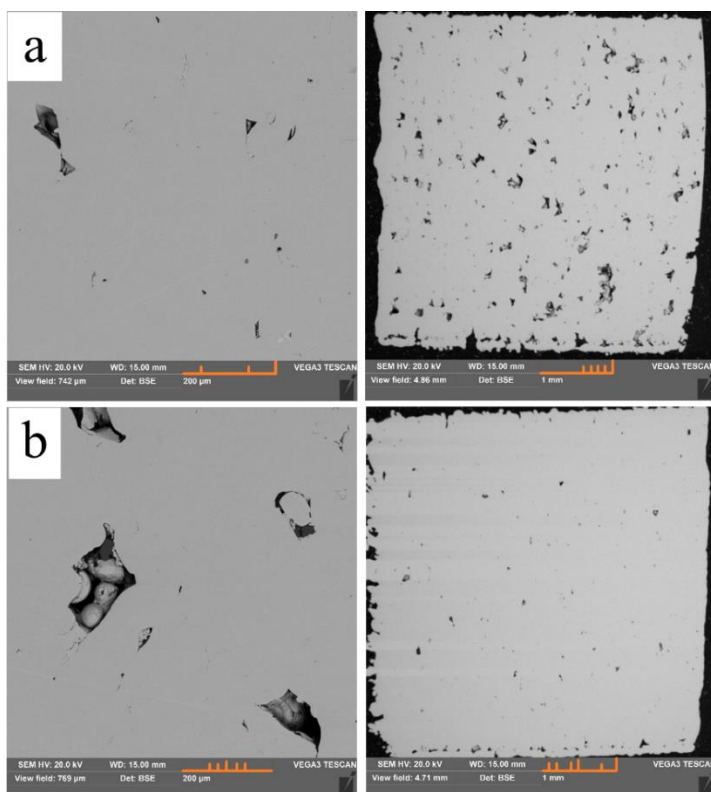


Рис. 4. Внешний вид аддитивного образца № 1 (а) и № 2 (б) в поперечном сечении
Fig. 4. Cross-sectional view of samples nos. (a) 1 and (b) 2

Наличие порообразования вызвано в первую очередь наличием крупных частиц порошка (диаметр частиц более 60 мкм). В процессе DMLS при нанесении порошка лезвием оно цепляло и смещало порошок в сторону, что могло привести к несплошности в слое и повышенному порообразованию. Таким образом, для уменьшения порообразования в процессе DMLS необходимо использовать частицы меньшего диаметра, предположительно 20–60 мкм [16], и осуществить более тщательный подбор режима сплавления.

На рис. 5 для примера приведено ЭДС-изображение (поперечное сечение) образца № 1.

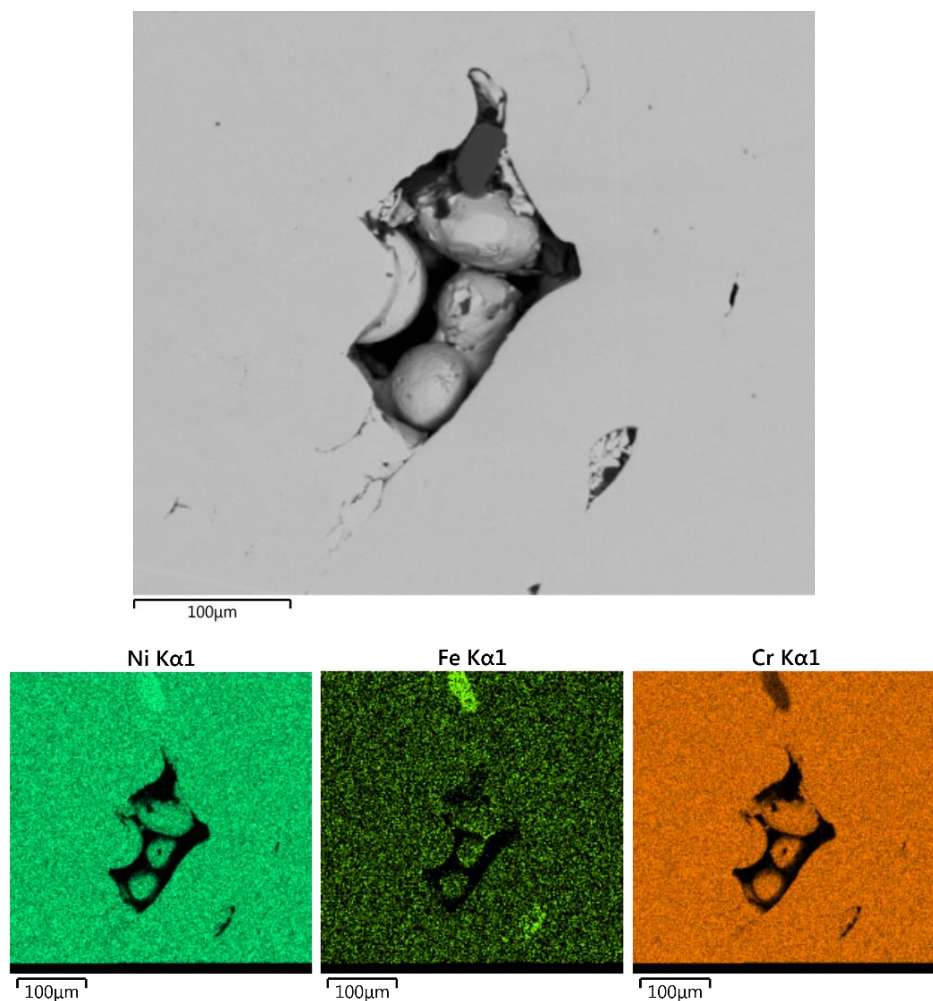


Рис. 5. ЭДС-изображение, поперечное сечение, образец № 1

Fig. 5. EDS, cross section, sample no. 1

Из рис. 5 видно, что элементы Ni, Cr и Fe распределены равномерно по всей площади образца, что свидетельствует о равномерном расплаве Ni–Cr–CrN.

Заключение

В работе проведено исследование механизмов формирования структуры и свойств в ходе консолидации аддитивным методом прямого лазерного сплавления никель-хромового сплава системы Ni–Cr–CrN с повышенным содержанием азота. Сплав был получен путем добавления нитрида хрома, синтезированного методом самораспространяющегося высокотемпературного синтеза, в качестве лигатуры в никель-хромовый сплав. Произведена атонизация полученного сплава с целью получения сферических порошков, пригодных для использования в технологии прямого лазерного сплавления. Исследован химический состав полученных порошков, свидетельствующий о высоком итоговом содержании азота в сплаве (0.5%). Методом прямого лазерного сплавления порошков получены компактные образцы на основе Ni–Cr–CrN. Проведено исследование структуры полученных образцов, предела прочности при трехточечном изгибе и микротвердости по Виккерсу. Максимальное значение предела прочности при трехточечном изгибе составило 1 500 МПа, микротвердости 450 HV. Анализ структуры показал, что элементы Ni, Cr и Fe распределены равномерно по всей площади образцов, что говорит о равномерном расплаве Ni–Cr–CrN. Анализ структуры также показал наличие пор, что связано с наличием крупных частиц порошка (более 60 мкм). Для уменьшения порообразования предполагаются использование частиц меньшего диаметра (~ 20–60 мкм) и более тщательный подбор режима сплавления. Ожидается, что при использовании сферического порошка Ni–Cr–CrN диаметром 20–60 мкм возможно получить более плотные аддитивные изделия с большим пределом прочности на изгиб и более высоким значением микротвердости. Таким образом, азотированные порошки нихрома пригодны для получения изделий как традиционными методами порошковой металлургии, так и сложно-профильных изделий методами 3D-печати.

Список источников

1. Sustaita-Torres I.A. *et al.* Aging of a cast 35Cr–45Ni heat resistant alloy // *Mater. Chem. Phys.* 2012. V. 133, No. 2. P. 1018–1023.
2. Zhang Y. *et al.* High-temperature deformation and fracture mechanisms of an advanced heat resistant Fe–Cr–Ni alloy // *Materials Science and Engineering: A*. 2017. V. 686. P. 102–112.
3. Xie Y. *et al.* Corrosion behaviour of Ni–Cr alloys in wet CO₂ atmosphere at 700 and 800°C // *Corros. Sci.* 2019. V. 146. P. 28–43.
4. Zhu J. *et al.* Fabrication of ZrO–NiCr functionally graded material by powder metallurgy // *Mater. Chem. Phys.* 2001. V. 68. P. 130–135.
5. Kazakov A.A. Phase formation control in liquid and solidifying steels and nickel-chromium alloys // *Advanced materials: St-Petersburg State Technical University Transactions*. 1996. No. 463. P. 8–21 (in Russian).
6. Zhu J., Lai Z., Yin Z. *et al.* Fabrication of ZrO₂–NiCr Functionally Graded Material by Powder Metallurgy // *Materials Chemistry and Physics*. 2001. V. 68. P. 130–135. doi: 10.1016/S0254-0584(00)00355-2
7. Zhu J.C., Lee S.Y., Yin Z.D., Lai Z.H. Fabrication of ZrO₂–Ni functionally graded material by powder // *Functionally Graded Materials* / ed. by I. Shiota, M.Y. Miyamoto. Amsterdam *et al.* : Elsevier, 1996. P. 203–208.
8. Козлова О.Ю., Овсепян С.В., Помельникова А.С., Ахмедзянов М.В. Влияние высокотемпературного азотирования на структуру и свойства свариваемых жаропрочных нике-

- левых сплавов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2016. Т. 6. С. 33–42. doi: 10.18698/0236-3941-2016-6-33-42
9. Evseev N., Ziatdinov M., Romandin V., Zhukov A., Tolynbekov A., Ryzhikh Yu. Process of Obtaining Chromium Nitride in the Combustion Mode under Conditions of Co-Flow Filtration // *Processes*. 2020. V. 8 (9). Art. 1056. doi: 10.3390/pr8091056
 10. Khaing M.W., Fuh J.Y.H., Lu L. Direct metal laser sintering for rapid tooling: processing and characterisation of EOS parts // *Journal of Materials Processing Technology*. 2001. V. 113. P. 269–272. doi: 10.1016/S0924-0136(01)00584-2
 11. Paula A., Peres G., Avançado C. Direct metal laser sintering (DMLS): technology for design and construction of microreactors // 6th Brazilian Conference on Manufacturing Engineering. April 11th to 15th, 2011 – Caxias do Sul – RS – Brazil.
 12. Song B., Dong S., Coddet P., Liao H., Coddet C. Fabrication of NiCr alloy parts by selective laser melting: Columnar microstructure and anisotropic mechanical behavior // *Materials & Design*. 2014. V. 53. P. 1–7. doi: 10.1016/j.matdes.2013.07.010
 13. Климова-Корсмик О.Г., Дроконов Д.А., Промахов В.В., Корсмик Р.С., Жуков А.С., Шульц Н.А., Клименко В.А. Влияние технологических параметров лазерной наплавки азотированного никель-хромового сплава марки ПР-Н55Х45Ана формирование структуры получаемых слоев // Технологии аддитивного производства. 2019. Т. 1, № 2. С. 5–19.
 14. Браверман Б.Ш., Зиятдинов М.Х., Максимов Ю.М. Горение хрома в азоте // *Физика горения и взрыва*. 1999. Т. 35, № 5. С. 50–52.
 15. Wang Y., Chen X., Su C. Microstructure and mechanical properties of Inconel 625 fabricated by wire-arc additive manufacturing // *Surface and Coatings Technology*. 2019. V. 374. P. 116–123. doi: 10.1016/j.surfcoat.2019.05.079
 16. Kuznetsov P.A., Shakirov I.V., Zukov A.S. et al. Effect of particle size distribution on the structure and mechanical properties in the process of laser powder bed fusion // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. V. 1758: VIII International Conference “Functional Nanomaterials and High-Purity Substances FNM”, 5–9 October 2020, Suzdal, Russian Federation. doi: 10.1088/1742-6596/1758/1/012021

References

1. Sustaita-Torres I.A., et al. (2012) Aging of a cast 35Cr–45Ni heat resistant alloy. *Materials Chemistry and Physics*. 133(2). pp. 1018–1023.
2. Zhang Y., et al. (2017) High-temperature deformation and fracture mechanisms of an advanced heat resistant Fe–Cr–Ni alloy. *Materials Science and Engineering: A*. 686. pp. 102–112.
3. Xie Y., et al. (2019) Corrosion behaviour of Ni–Cr alloys in wet CO₂ atmosphere at 700 and 800 °C *Corrosion Science*. 146. pp. 28–43.
4. Zhu J., et al. (2001) Fabrication of ZrO–NiCr functionally graded material by powder metallurgy. *Materials Chemistry and Physics*. 68. pp. 130–135.
5. Kazakov A.A. (1996) Upravleniye protsessami fazoobrazovaniya v zhidkikh i zatverdevayushchikh stalyakh i nikel’-khromovykh splavakh [Phase formation control in liquid and solidifying steels and nickel-chromium alloys]. *Advanced materials: St. Petersburg State Technical University Transactions*. 463. pp. 8–21.
6. Zhu J., Lai Z., Yin Z., et al (2001) Fabrication of ZrO₂–NiCr functionally graded material by powder metallurgy. *Materials Chemistry and Physics*. 68. pp. 130–135. doi: 10.1016/S0254-0584(00)00355-2
7. Zhu J. C., Lee S. Y., Yin Z. D., and Lai Z. H. (1996) in *Functionally Graded Materials*, edited by I. Shiota and M.Y. Miyamoto (Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 1997). pp. 203–208.

8. Kozlova O. Yu., Ovsepyan S. V., Pomelnikova A. S., Akhmedzyanov M. V. (2016) Influence of high-temperature nitriding on the structure and properties of heat-resistant nickel alloys being welded. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Series "Mechanical Engineering"*. 6. pp. 33–42. doi: 10.18698/0236-3941-2016-6-33-42
9. Evseev N., Ziatdinov M., Romandin V., Zhukov A., Tolynbekov A., Ryzhikh Yu. (2020) Process of obtaining chromium nitride in the combustion mode under conditions of co-flow filtration. *Processes*. 8(9). 1056. doi: 10.3390/pr8091056
10. Khaing M.W., Fuh J.Y.H., Lu L. (2001) Direct metal laser sintering for rapid tooling: processing and characterisation of EOS parts. *Journal of Materials Processing Technology*. 113. pp. 269–272. doi: 10.1016/S0924-0136(01)00584-2
11. Paula A., Peres G., Avançado C. (2011). Direct metal laser sintering (DMLS): technology for design and construction of microreactors. *6th Brazilian conference on manufacturing engineering April 11th to 15th, 2011 – Caxias do Sul – RS – Brazil*.
12. Song B., Dong S., Coddet P., Liao H., Coddet C. (2014) Fabrication of NiCr alloy parts by selective laser melting: Columnar microstructure and anisotropic mechanical behavior. *Materials & Design*. 53. pp. 1–7. doi: 10.1016/j.matdes.2013.07.010
13. Klimova-Korsmik O.G., Dronov D.A., Promahov V.V., et al. (2019) Effect of technological parameters when laser fusion of nitride NI–CR alloy on structure formation of obtained layers. *Additive Fabrication Technology*. 1(2). pp. 5–19.
14. Braverman B., Ziatdinov M., Maksimov Y. (1999) Chromium combustion in nitrogen. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 35. pp. 501–505. doi: 10.1007/BF02674493
15. Wang Y., Chen X., Su C. (2019) Microstructure and mechanical properties of Inconel 625 fabricated by wire-arc additive manufacturing. *Surface and Coatings Technology*. 374. pp. 116–123. doi: 10.1016/j.surfcoat.2019.05.079
16. Kuznetsov P. A., Shakhov I. V., Zukov A. S., et al. (2020) Effect of particle size distribution on the structure and mechanical properties in the process of laser powder bed fusion. *Journal of Physics: Conference Series*, V. 1758, VIII International Conference "Functional Nanomaterials and High-Purity Substances FNM 5-9 October 2020, Suzdal, Russian Federation. doi: 10.1088/1742-6596/1758/1/012021

Сведения об авторах:

Зиятдинов Мансур Хузиахметович – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории высокоэнергетических систем и новых технологий Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ziatdinovm@mail.ru

Жуков Александр Степанович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией высокоэнергетических систем и новых технологий Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: zhuk_77@mail.ru

Евсеев Николай Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия); научный сотрудник Института проблем химико-энергетических технологий СО РАН (Бийск, Россия). E-mail: evseevns@gmail.com

Марков Михаил Александрович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник НИЦ «Курчатовский институт» – ЦНИИ КМ «Прометей» (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: barca0688@mail.ru

Бобырь Виталий Валерьевич – сотрудник НИЦ «Курчатовский институт» – ЦНИИ КМ «Прометей» (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: npk3@mail.ru

Ткачев Дмитрий Александрович – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: d.tkachev11@gmail.com

Никитин Павел Юрьевич – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: upavelru@yandex.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Ziatdinov Manzur Kh. (Doctor of Technical Sciences, Senior Researcher, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ziatdinovm@mail.ru

Zhukov Alexander S. (Doctor of Physics and Mathematics; Head of laboratory, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: zhuk_77@mail.ru

Evseev Nikolay S. (Candidate of Physics and Mathematics; Associate professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation; Researcher, Institute for Problems of Chemical and Energetic Technologies of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Biysk, Russian Federation). E-mail: evseevns@gmail.com

Markov Mikhail A. (Candidate of technical sciences; Senior Researcher National Research Center “Kurchatov Institute” – Central research institute of structural materials “Prometey”, Saint-Petersburg, Russia). E-mail: barca0688@mail.ru

Bobyry Vitaly V. (Engineer, National Research Center “Kurchatov Institute” – Central research institute of structural materials “Prometey”, Saint-Petersburg, Russia). E-mail: npk3@mail.ru

Tkachev Dmitry A. (Researcher, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: d.tkachev11@gmail.com

Nikitin Pavel Yu. (Researcher, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: upavelru@yandex.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 17.08.2021; принята к публикации 22.03.2022

The article was submitted 17.08.2021; accepted for publication 22.03.2022

Научная статья

УДК 536.37+536.24+ 614.841.42

doi: 10.17223/19988621/76/10

Теоретическое и экспериментальное исследование пожаров в крупных топливных резервуарах и создание инновационной технологии их тушения

Николай Петрович Копылов¹, Сергей Николаевич Копылов²,
Алексей Васильевич Карпов³, Дмитрий Вячеславович Федоткин⁴,
Елена Юрьевна Сушкина⁵

1, 2, 3, 4, 5 ФГБУ ВНИИПО МЧС России, Балашиха, Россия

4 НИТУ МИСИС, Москва, Россия

¹ np.nanpb@mail.ru

² firetest@mail.ru

³ k708@yandex.ru

⁴ fdv982@mail.ru

⁵ sushkina@bk.ru

Аннотация. Разработана инновационная технология пенного тушения пожара в резервуарах, основанная на использовании твердотопливных газогенераторов. Предложена математическая модель, основанная на численном решении системы уравнений Навье–Стокса. По результатам расчетов по данной модели показано, что при классической технологии тушения пожаров происходят унос пены конвективными потоками и ее разрушение от контакта с высокотемпературной зоной воздействия теплового излучения.

Ключевые слова: взрыв газозавоздушной смеси, тепло-массоперенос, численное моделирование, твердотопливные газогенераторы, пена, пожаротушение, крупные резервуары с нефтепродуктами

Для цитирования: Копылов Н.П., Копылов С.Н., Карпов А.В., Федоткин Д.В., Сушкина Е.Ю. Теоретическое и экспериментальное исследование пожаров в крупных топливных резервуарах и создание инновационной технологии их тушения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 131–149. doi: 10.17223/19988621/76/10

Theoretical and experimental investigation of fires in large fuel tanks and creation of an innovative technology of their extinguishment

Nikolay P. Kopylov¹, Sergey N. Kopylov², Aleksey V. Karpov³,
Dmitry V. Fedotkin⁴, Elena Yu. Sushkina⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} FGBU VNIPO EMERCOM of Russia, Balashikha, Russia

⁴ MISiS, Moscow, Russia

¹ np.nanpb@mail.ru

² firetest@mail.ru

³ k708@yandex.ru

⁴ fdv982@mail.ru

⁵ sushkina@bk.ru

Abstract. Fundamental inefficiency of existing foam fire systems extinguishing tanks with oil and petroleum products having a volume of 5000 m³ or more is shown by methods of mathematical modeling. The required foam supply intensity and foam supply rate allowing effective fire suppression in large tanks with a volume of up to 20000 m³ are theoretically predicted. On this basis of theoretical conclusions, a new method of foam fire extinguishing in large fuel tanks has been developed. To obtain the required intensities and supply rates, fire extinguishing foam is formed in a special container with the use of solid-fuel gas generators. The theoretical predictions were confirmed in 21 full-scale successful experiments, in which fire suppression system based on the new method was able to extinguish a fully developed gasoline fire in tanks with a volume of 5000 m³ and 20 000 m³ just for 30–90 seconds. The required amount of the foaming agent to extinguish a fire in a 20 000 m³ tank is only 450 liters, which is at least 100 times less than for traditional foam fire fighting

Keywords: foam, fire extinguishing, large fuel tanks

For citation: Kopylov, N.P., Kopylov, S.N., Karpov, A.V., Fedotkin, D.V., Sushkina, E.Yu. (2022) Theoretical and experimental investigation of fires in large fuel tanks and creation of an innovative technology of their extinguishment. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 131–149. doi: 10.17223/19988621/76/10

Введение

Склады нефти и нефтепродуктов являются объектами повышенной опасности. Пожары на таких объектах обычно носят затяжной характер, приводят к огромному экономическому ущербу и ущербу для окружающей среды, часто сопровождаются гибелью людей и вызывают большой негативный общественный резонанс не только на национальном, но и на мировом уровне. Примерами таких пожаров являются крупнейшие пожары на складах нефти и нефтепродуктов в Бансфилде, Великобритания, 11 декабря 2005 г., когда 23 больших резервуара были уничтожены, а 43 человека получили ранения [1], в Конде, Ханты-Мансийский автономный округ, Россия, 22 августа 2009 г. (3 больших резервуара объемом 20 тыс. м³ уничтожено, 3 повреждено; погибли 3 человека, 5 ранены [2]), на нефтебазе в Крячках, Киевская область, Украина, 8 июня 2015 г. (все 17 больших топливных

резервуаров были уничтожены, 1 человек погиб, 5 ранены [3]), на нефтеперерабатывающем заводе НОРСИ в Кстово, Нижегородская область, Россия, 5 октября 2017 г. (повреждено 6 резервуаров объемом 10 тыс. м³, 4 человека погибли [4]); и этот список можно продолжать. Как показывает опыт, топливные резервуары емкостью более 10 тыс. м³ практически не тушатся, а резервуары объемом 5 тыс. м³ тушатся с вероятностью менее 50%, особенно резервуары с современными топливами, содержащими спирты. Поскольку практически каждый топливный резервуар в мире защищается автоматической системой пенного пожаротушения, можно утверждать, что традиционное пенное пожаротушение неэффективно при таком применении. Для ответа на вопрос: «Почему так происходит?» – выполнена настоящая работа.

Расчет объема взрывоопасной зоны и давления взрыва в больших топливных резервуарах

Одной из главных причин неэффективности способов тушения пожаров, используемых на складах нефти и нефтепродуктов, является неустойчивость систем пенного пожаротушения, установленных на резервуарах, к давлению взрыва газозооных смесей под крышей резервуара. Известно, что более 90% пожаров на резервуарах начинаются со взрыва [5].

Давление взрыва рассчитывается по следующей формуле [6]:

$$\Delta p = \frac{m_v \cdot H_T \cdot p_0 \cdot Z}{V \cdot \rho_a \cdot C_p \cdot T_0} \cdot \frac{1}{K_H}, \quad (1)$$

где m_v – масса паров горючего во взрывоопасной зоне, кг; H_T – теплота сгорания топлива, Дж/кг; p_0 – начальное давление, кПа (допускается использовать значение 101 кПа); Z – коэффициент участия горючих газов и паров в процессе горения (допускается использовать значения Z из [6, табл. А.1]; V – свободный объем топливного резервуара (под крышей), м³; T_0 – начальная температура воздуха, К; ρ_a – плотность воздуха при температуре T_0 , кг/м³; C_p – теплоемкость воздуха, Дж/(кг·К) (допускается принимать равным $1,01 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К)); K_H – коэффициент, учитывающий утечки и неадиабатичность процесса горения (допускается использовать $K_H = 3$).

$$m_v = \rho_{\Pi} \cdot V_{\text{взр}}, \quad (2)$$

где ρ_{Π} – плотность взрывоопасной смеси, кг/м³; $V_{\text{взр}}$ – объем взрывоопасной смеси, м³.

Объем горючей (взрывоопасной) смеси в газовом пространстве резервуаров $V_{\text{взр}}$ можно оценить по следующей формуле [7]:

$$V_{\text{взр}} = F \left(\sqrt{\frac{\varphi_{\text{в}}}{\varphi_{\text{с}}}} - \sqrt{\frac{\varphi_{\text{н}}}{\varphi_{\text{с}}}} \right) \cdot \sqrt{\frac{12 D_t \tau}{1 - \varphi_{\text{с}}}}, \quad (3)$$

где F – площадь поверхности испарения горючей жидкости, м²; D_t – коэффициент диффузии, м²/с; $\varphi_{\text{с}}$ – насыщенная концентрация паров углеводородов, г·м⁻³; $\varphi_{\text{н}}$ – нижний концентрационный предел распространения пламени, г·м⁻³; $\varphi_{\text{в}}$ – верхний концентрационный предел распространения пламени г·м⁻³; τ – время, с.

Согласно предложенному методу были выполнены расчеты для резервуаров объемом 5 тыс. и 20 тыс. м³, заполненных бензином Аи-93. Результаты расчетов представлены на рис. 1.

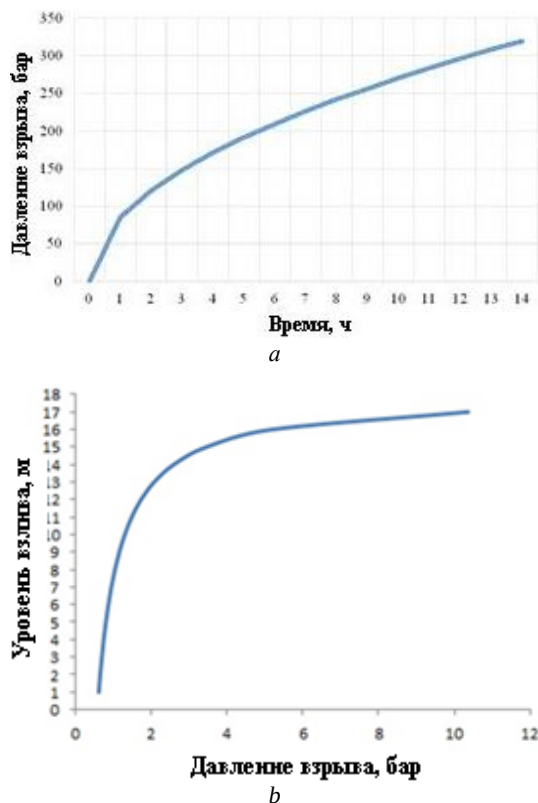


Рис. 1. Зависимости давления взрыва: *a* – от времени испарения для резервуара 5 000 м³; *b* – от уровня взлива топливного резервуара объемом 20 000 м³ с крышей
Fig. 1. Dependence of explosion pressure: *a* – on evaporation time for a 5 000 m³ tank; *a* – on the filling level of a roofed fuel tank with a volume of 20 000 m³

Как следует из полученных значений давления взрыва, пеногенераторы системы пожаротушения, установленные в верхней части топливного резервуара, с высокой вероятностью будут повреждены или уничтожены взрывом под крышей топливного резервуара. Это означает, что огнетушащая пена не будет сформирована при выпуске огнетушащего вещества, и, соответственно, пожаротушение будет однозначно безуспешным.

Полевая математическая модель пожара в больших топливных резервуарах

Для оценки значений параметров пожара проведено математическое моделирование горения нефтепродуктов, хранящихся в резервуарах.

Математическая модель, реализованная с помощью программного комплекса SOFIE [8] включала следующие основные уравнения:

– уравнения неразрывности и сохранения импульса

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho u_x}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_x u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_x u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_x u_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_t \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_t \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_t \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \rho g_x, \\
 & \frac{\partial \rho u_y}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_x u_y}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_y u_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_t \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_t \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_t \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \rho g_y, \\
 & \frac{\partial \rho u_z}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_x u_z}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y u_z}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z u_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_t \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_t \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_t \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \rho g_z;
 \end{aligned} \tag{5}$$

– уравнения k - ε модели турбулентности [9] с поправкой на влияние естественной конвекции [10]

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho k}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_x k}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y k}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial z} \right) + G_K + G_B - \rho \varepsilon, \\
 & \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_x \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z \varepsilon}{\partial z} = \\
 & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \\
 & + \frac{\varepsilon}{k} [c_1 (G_K + G_B)] - c_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k};
 \end{aligned} \tag{6}$$

где $\mu_t = c_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$,

$$G_K = \mu_t \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right\},$$

$$G_B = -\beta \frac{\mu_t}{\sigma_t} \left(g_x \frac{\partial T}{\partial x} + g_y \frac{\partial T}{\partial y} + g_z \frac{\partial T}{\partial z} \right);$$

– уравнение сохранения энергии

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho h}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_x h}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y h}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z h}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\mu}{\sigma_h} + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\mu}{\sigma_h} + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{\mu}{\sigma_h} + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + S_{h,rad}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $h = h_0 + \int_{T_0}^T c_p dT + \sum_k Y_k H_k$ – удельная массовая энтальпия смеси, h_0 – удельная

массовая энтальпия воздуха при начальной температуре, Y_k – массовая доля k -го компонента смеси, H_k – теплота образования k -го компонента смеси;

– уравнение сохранения массы горючего

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho Y_f}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_x Y_f}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y Y_f}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z Y_f}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial Y_f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial Y_f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial Y_f}{\partial z} \right) + S_f; \end{aligned} \quad (9)$$

– уравнение для функции смешения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho f}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_x f}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y f}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z f}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial f}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Значения констант были приняты согласно [11]:

$$C_\mu = 0.09; C_1 = 1.44; C_2 = 1.92; \sigma_k = 1.0; \delta_\varepsilon = 1.3; \sigma_t = \sigma_h = Sc_h = Sc_t = 0.7.$$

Для моделирования горения был применен вариант диффузионно-вихревой модели горения Магнуссена [12]:

$$S_f = -\rho \frac{\varepsilon}{k} \min \left\{ C \cdot Y_f, C \frac{Y_{ox}}{s}, B \frac{Y_{pr}}{s+1} \right\}, \quad (11)$$

где $C = 4, B = 2$.

Функция смешения $f = \frac{\beta - \beta_o}{\beta_f - \beta_o}$, где $\beta = Y_f - (Y_o / s)$ – консервативная пере-

менная Шваба–Зельдовича, а индексы f и o относятся к топливу и окислителю соответственно.

$$Y_{pr} = \begin{cases} \left[Y_{ox,0} + (Y_{f,f} - Y_{ox,0}) f \right] - Y_{ox,0} \left[\frac{f_{st} - f}{f_{st}} \right], & 0 < f < f_{st}, \\ \left[Y_{ox,0} + (Y_{f,f} - Y_{ox,0}) f \right] - Y_{f,f} \left[\frac{f - f_{st}}{1 - f_{st}} \right], & f_{st} < f < 1, \end{cases} \quad (12)$$

где стехиометрическое значение $f_{st} = \frac{Y_{ox,0}}{sY_{f,f} + Y_{ox,0}}$, $Y_{ox,0}$ – массовая доля кислорода

да в потоке окислителя, Y_{ff} – массовая доля топлива в потоке топлива.

Теплоперенос излучением учитывался средствами метода дискретного радиационного переноса (DTRM) [13]. Для него характерны некоторые черты методов Монте-Карло, а именно прохождение «лучей» электромагнитного излучения через вычислительную область между границами. Однако в отличие от методов Монте-Карло, где направления лучей генерируются случайным образом, в этой модели они выбираются предварительно, таким же образом, как выбирается расположение гидродинамической сетки. Метод включает в себя решение уравнения радиационного переноса вдоль путей этих лучей, выбираемых обычно таким образом, чтобы они приходили в центры граничных поверхностей гидродинамических контрольных объемов.

Число и направление лучей для каждой точки выбирается предварительно, чтобы обеспечить желаемый уровень точности, аналогично тому, как выбирается конечно-разностная сетка для проведения гидродинамических расчетов. Полусфера вокруг каждой точки разбивается на сегменты с равными площадями поверхностей на полусфере, в пределах которых интенсивность считается однородной.

Для каждого луча при его прохождении от одной границы до другой решается уравнение радиационного переноса

$$\frac{dI}{ds} = -(k_a + k_s)I + k_a \frac{E_g}{\pi} + \frac{k_s}{4\pi} \int_{4\pi} P(\Omega, \Omega') I(\Omega') d\Omega', \quad (13)$$

где I – интенсивность радиационного излучения в направлении Ω , S – расстояние в направлении Ω , $E_g = \sigma T_g^4$ – энергия, излучаемая абсолютно черным газом при температуре газа T_g , k_a и k_s – коэффициенты поглощения и рассеяния, $P(\Omega, \Omega')$ – вероятность того, что излучение в направлении Ω' после рассеяния попадет в телесный угол $d\Omega$ в окрестности направления Ω .

Если для краткости ввести коэффициент ослабления $k_e = k_a + k_s$, оптическую глубину элемента $dS^* = k_e dS$ и модифицированную энергию излучения

$$E^* = \frac{1}{k_e} \left(k_a E_g + \frac{k_s}{4\pi} \int_{4\pi} P(\Omega, \Omega') I(\Omega') d\Omega' \right),$$

то уравнение переноса можно переписать в виде:

$$\frac{dI}{ds^*} = -I + \frac{E^*}{\pi}. \quad (14)$$

Для элементарного контрольного объема, в котором температуру можно считать постоянной, уравнение (13) можно проинтегрировать и привести к виду:

$$Ie^{\delta s^*} = \frac{E^*}{\pi} e^{\delta s^*} + const. \quad (15)$$

Если считать величину E^* постоянной внутри контрольного объема, что вполне согласуется с обычной практикой применения конечно-разностного подхода к уравнениям динамики жидкости, получается простое рекуррентное соотношение:

$$I_{n+1} = I_n + \frac{E^*}{\pi} (1 - e^{-\delta S^*}), \quad (16)$$

где I_n и I_{n+1} – соответственно значения интенсивности излучения, входящего и выходящего из n -го контрольного объема, δS^* – оптическая длина контрольного объема.

Затем в каждом контрольном объеме, с учетом всех пересекающих его лучей, вычисляется величина чистого поглощения или выделения энергии излучения, которая, как упоминалось выше, может использоваться в уравнении сохранения энергии. Для n -го контрольного объема

$$S_{h,rad} = \sum_{n=1}^N (I_{n+1} - I_n) \Omega \delta \Omega \delta A, \quad (17)$$

где N – общее количество лучей, δA – площадь поверхности ячейки.

Радиационные свойства продуктов горения были определены согласно модели взвешенной суммы серых газов [14] с коэффициентами аппроксимации Трюлава [15].

Плотность смеси газов вычислялась из уравнения состояния идеального газа. Температурные зависимости теплофизических свойств веществ учитывались с помощью кусочно-полиномиальной аппроксимации. Давление определялось с использованием уравнения для поправок давления согласно итерационной схеме SIMPLEC [16], являющейся модификацией процедуры SIMPLE [17].

Для приведения исходной системы к алгебраической форме в большинстве исследовательских работ по пожарам и в большинстве случаев практического применения полевого моделирования, когда конвекция преобладает над диффузией, используются разностные схемы «против потока» и «комбинированная» для описания конвективного члена и центральная разностная схема для описания диффузионного. Схема «против потока» более строгая и стабильная, но дает значительную ошибку усечения и численную диффузию, когда линии течения проходят под углом к линиям сетки. Хотя ошибка усечения для центральной разностной схемы меньше, чем для схемы «против потока» первого порядка, она менее приемлема для потоков, где конвекция преобладает над диффузией. Комбинированная схема [18] сочетает в себе достоинства центральной схемы и схемы «против потока» первого порядка. Она состоит в переключении с центральной разностной схемы на схему «против потока» при сеточном числе Пекле

$$P_m = \frac{(\rho u_i)_m (\delta x_i)_m}{\Gamma_m} \text{ больше } 2, \text{ т.е. когда конвективный поток более чем в 2 раза}$$

превышает диффузионный поток. Поэтому в данной работе была использована комбинированная разностная схема.

Для дискретизации производной по времени использовалась полностью неявная разностная схема первого порядка. При решении системы уравнений были применены сильно неявная процедура Стоуна SIP [19] для уравнения поправки давления и метод прогонки для остальных уравнений.

На свободной границе расчетной области в вариантах без ветра использовалось граничное условие $p = 0$. При этом для касательных составляющих скорости использовались условия $\partial v / \partial n = 0$, а нормальная составляющая определялась из уравнения Бернулли [8]. Для уменьшения влияния граничного условия на зону

горения в соответствии с рекомендациями [20] расчетная область была выбрана таким образом, чтобы свободная граница располагалась на удалении от резервуара.

В вариантах с наличием ветра на границах, нормальных к направлению ветра, нормальные составляющие скорости принимались равными скорости ветра. При этом рассматривался равномерный профиль скорости ветра по высоте. Значение кинетической энергии турбулентности на свободной границе принималось равным $0.01u^2$. Значение $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$.

Особое внимание необходимо уделить заданию граничных условий для турбулентных параметров k и ε на поверхности горючей жидкости. Как показывают экспериментальные исследования [21], в тонком слое вблизи границы горючего происходит резкое снижение величины турбулентной кинетической энергии от значений, характерных для процессов, протекающих в области пламени, до значений, характерных для потока паров горючего. Стандартная k – ε модель турбулентности не позволяет смоделировать этот эффект, поэтому использование в качестве граничных условий значений k и ε , соответствующих параметрам потока горючего, приводит к занижению значений турбулентной вязкости в области пламени и, как следствие, к завышению значений скоростей и температур в области пламени и восходящей свободно-конвективной струи [22]. Строгого решения задачи о постановке этих граничных условий на данный момент не существует. Для практических расчетов в качестве граничных условий используют искусственные значения k и ε [23–25], обеспечивающие разумные значения турбулентной вязкости в области пламени без рассмотрения процессов, протекающих в тонком слое вблизи поверхности горючего. Так, проведенные исследования [22] показали, что хорошие результаты при использовании k – ε модели в сочетании с диффузионно-вихревой моделью горения [12] дает использование значений $k = 0,3 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ и $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$.

Начальное значение температуры соответствовало 293 К. Начальные значения скоростей соответствовали скорости ветра.

Результаты моделирования пожара в больших топливных резервуарах

С использованием этого модельного подхода для двух типов топливных резервуаров (5 тыс. м^3 и 20 тыс. м^3) в зависимости от времени были рассчитаны температурное поле над горящим резервуаром, плотность теплового потока на поверхность горючего, скорости потоков в конвективной колонке. Расчеты учитывают скорость ветра $0 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ и $10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, а также уровень залива топливного резервуара. Некоторые из полученных результатов представлены на рис. 2–6.

Полученные результаты показывают, что если при анализе учитывать только фактор скорости, то для топливного резервуара объемом 5 тыс. м^3 существуют некоторые возможности тушения пожара с помощью классической технологии пенного тушения (интенсивность подачи пены $27,4 \text{ л} \cdot \text{с}^{-1}$, скорость подачи $2\text{--}3 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$). В этом случае для полностью заполненного топливного резервуара скорость потока пены превышает скорости потоков в конвективной колонке (около $0,5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$; см. рис. 3), но уже при более низком уровне заполнения сильные вертикальные потоки ($10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ и более), действующие на половине расстояния от верхней кромки резервуара, не позволяют пене достичь поверхности горящей жидкости (см. рис. 3, б).

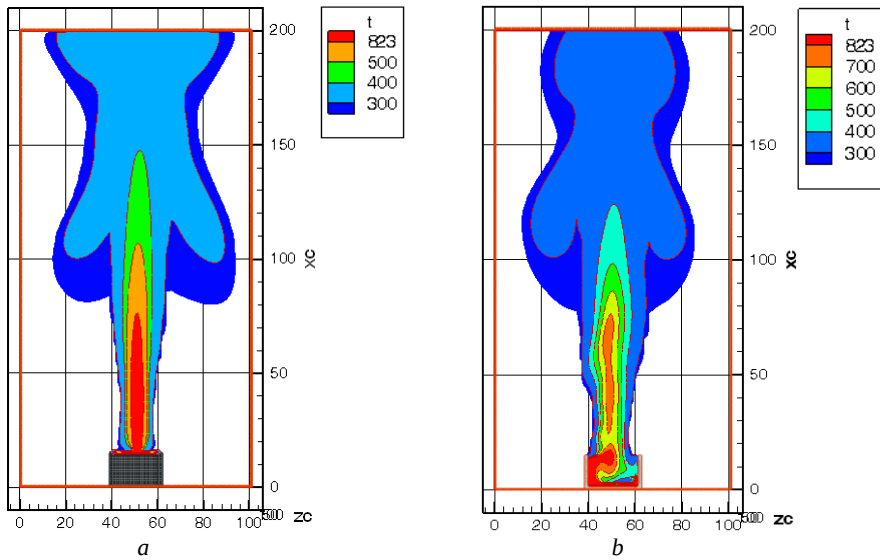


Рис. 2. Температурное поле (K) при пожаре в топливном резервуаре объемом 5 000 м³ (время горения 60 с) при отсутствии ветра: *a* – полностью заполненный резервуар; *b* – уровень заполнения 2 м

Fig. 2. Temperature field (K) in case of fire in a fuel tank with a volume of 5 000 м³ in the absence of wind (combustion time is 60 s): (*a*) fully filled tank and (*b*) the filling level is 2 m

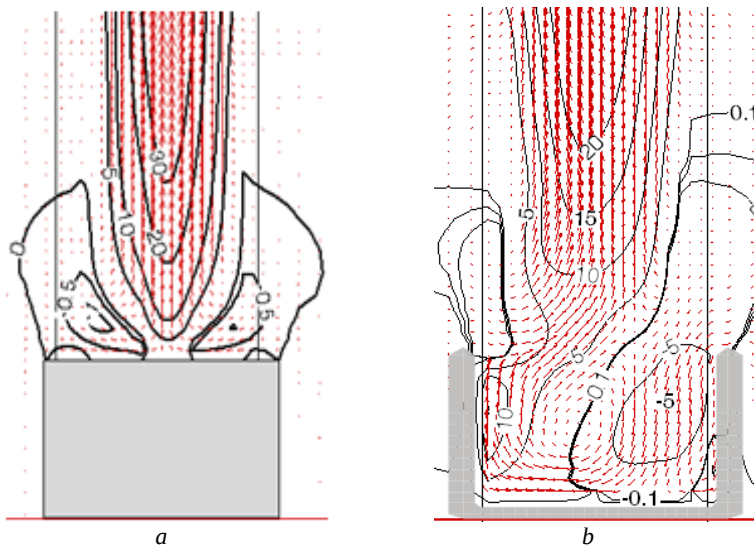


Рис. 3. Скорости потоков (м·с⁻¹) над горящим резервуаром объемом 5 000 м³ (время горения 60 с) при отсутствии ветра: *a* – полностью заполненный резервуар; *b* – уровень заполнения 2 м

Fig. 3. Flow velocities (м·с⁻¹) over a burning tank with a volume of 5 000 м³ in the absence of wind (combustion time is 60 s): *a* – fully filled tank, *b* – filling level is 2 m

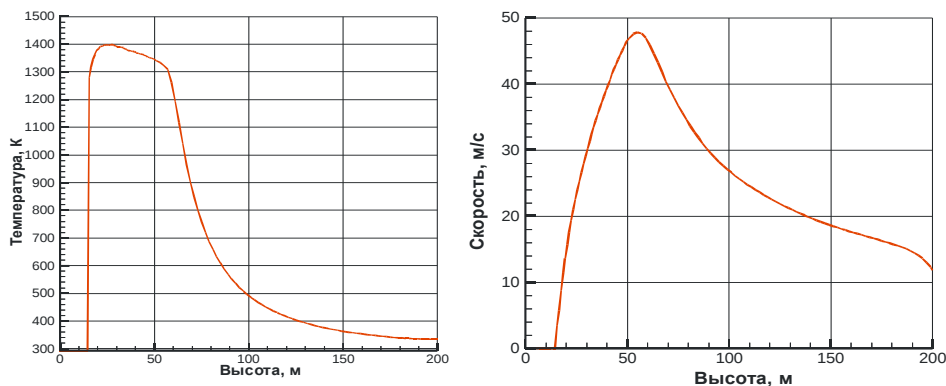


Рис. 4. Графики температуры и вертикальной скорости потоков ($\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$) на оси симметрии горящего резервуара объемом $5\,000\text{ м}^3$ (время горения 300 с) при отсутствии ветра

Fig. 4. Dependencies of temperature and vertical flow velocity ($\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$) along the symmetry axis of a burning tank with a volume of 5000 м^3 in the absence of wind (combustion time is 300 s)

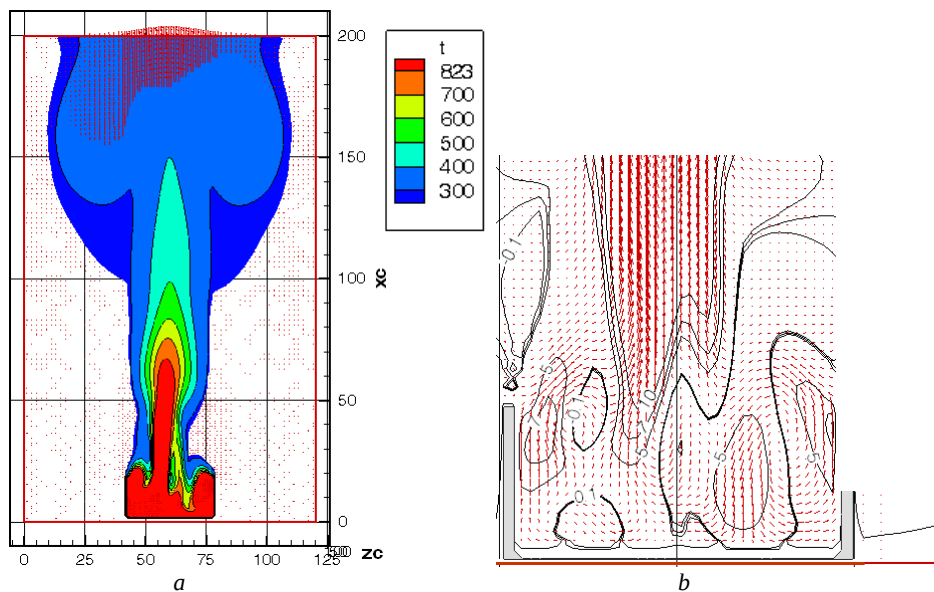


Рис. 5. Горение в резервуаре объемом $20\,000\text{ м}^3$ (время горения 60 с) при отсутствии ветра, уровень заполнения 2 м: *a* – температурное поле (K); *b* – скорости потоков ($\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$)

Fig.5. Combustion in a tank with a volume of 20000 м^3 (combustion time is 60 s), no wind, filling level is 2 m: *a* – temperature field (K), *b* – flow velocities ($\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$)

При горении в резервуаре объемом 20 тыс. м^3 возникают постоянно действующие сильные вертикальные потоки (имеющие скорость $5\text{--}10\text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ при отсутствии ветра; см. рис. 4, *b*) или горизонтальные потоки (имеющие скорость $7\text{--}10\text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ при скорости ветра $10\text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$, см. рис 5, *b*) на кромке резервуара, которые будут предотвращать попадание пены к поверхности горячей жидкости (нормативная интенсивность подачи пены $114\text{ л}\cdot\text{с}^{-1}$, скорость подачи $2\text{--}3\text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$).

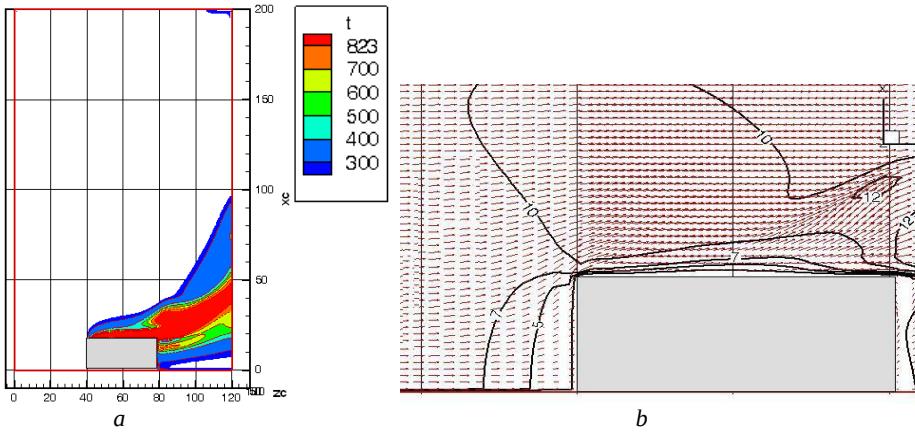
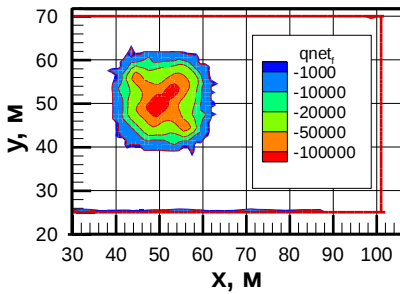
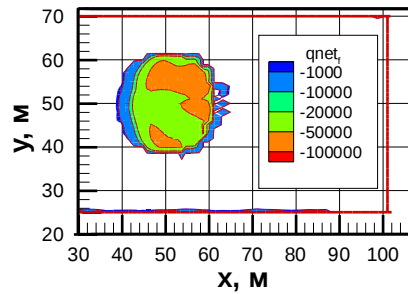


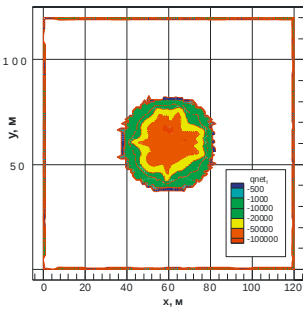
Рис. 6. Горение в полностью заполненном резервуаре объемом 20 000 м³ (время горения 60 с), скорость ветра 10 м·с⁻¹: *a* – температурное поле (K); *b* – скорости потоков (м·с⁻¹)
Fig. 6. Combustion in a fully filled tank with a volume of 20000 м³ (combustion time is 60 s), the wind speed is 10 м·с⁻¹: (*a*) temperature field (K) and (*b*) flow velocities (м·с⁻¹)



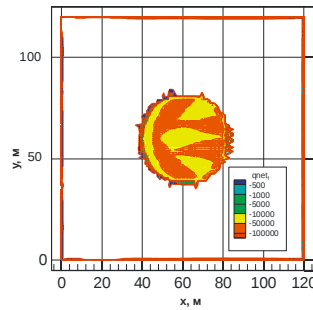
d = 21 м, *v_b* = 0 м·с⁻¹, высота свободного борта 0 м, момент времени 300 с



d = 21 м, *v_b* = 10 м·с⁻¹, высота свободного борта 0 м, момент времени 270 с



d = 40 м, *v_b* = 0 м·с⁻¹, высота свободного борта 0 м, момент времени 180 с



d = 40 м, *v_b* = 10 м·с⁻¹, высота свободного борта 0 м, момент времени 180 с

Рис. 7. Результаты расчетов плотности теплового потока q_{netf} (Вт·м⁻²) на уровне зеркала жидкости для резервуаров диаметром *d* = 21 и 40 м (объем 5 000 м³ и 20 000 м³) при скорости ветра 0 и 10 м·с⁻¹

Fig. 7. Results of calculations of the heat flux density q_{netf} (W·м⁻²) at the liquid surface level for tanks with diameters *d* = 21 and 40 м (the volumes are 5000 м³ and 20000 м³) at wind speeds of 0 and 10 м·с⁻¹

Если учесть при анализе пожара также фактор высокой температуры, то легко видеть, что если пена будет подана спустя 3 мин свободного горения (максимально допустимое время задержки подачи пены), то она будет контактировать с температурной зоной 1 000–1 100°C и будет интенсивно разрушаться (см. рис. 2, 4, 5). Разрушение пены происходит также при воздействии на нее теплового излучения от факела пламени (см. рис. 7 и данные статьи [26]). Плотность теплового потока на поверхности горючего для резервуаров объемом более 5 тыс. м³ имеет значение 50–100 кВт·м⁻². Известно, что даже если огнетушащая пена образует слой на поверхности горящей жидкости, то она разрушается со скоростью 0,2–0,4 см·с⁻¹ [27]. На этом основании можно заключить, что традиционный подход, когда предполагается, что пена подается на холодный свободный борт резервуара, не работает в случае больших топливных резервуаров.

Все полученные результаты показывают, что нормативные интенсивности подачи пены недостаточны для преодоления эффектов деструкции пены и потери пены через конвективную колонку при тушении пожаров в резервуарах с объемом более 5 тыс. м³.

Для определения параметров подачи пены, которые были бы достаточны для преодоления указанных выше эффектов, были выполнены дополнительные расчеты. Для того чтобы исключить унос пены вертикальными потоками, формирующимися при пожаре в резервуаре, вектор направления движения пены должен отклоняться от горизонтали в пределах допустимой погрешности, т.е. на величину угла $\alpha \leq 10^\circ$. Скорость вертикальных потоков, как показали приведенные выше расчеты, составляет $V_v = 6\text{--}7 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$. Тогда скорость выхода пены из подающего устройства $V_n = V_v/\text{tg}\alpha \approx 35 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$. Объемный расход огнетушащего вещества при подаче на тушение должен быть таким, чтобы компенсировать его потери от разрушающего действия теплоизлучения. Выбрав диаметр подающего трубопровода в 159 мм, получим расход $Q = V_n \cdot S \approx 700 \text{ л}\cdot\text{с}^{-1}$ ($S = 0,02 \text{ м}^2$ – площадь отверстия трубы).

Новая технология пенного пожаротушения

Используя уравнение Бернулли для горизонтального течения жидкости, можно определить, какое давление необходимо создать в емкости при работе твердо-топливных газогенераторов:

$$\frac{\rho V_n^2}{2} + P_1 = \frac{\rho V_v^2}{2} + P_2,$$

где ρ – плотность раствора; V_n – начальная скорость движения раствора; V_v – скорость движения раствора на выходе; P_1 – давление, создаваемое газогенераторами; P_2 – атмосферное давление.

$V_n = 0$, тогда

$$P_1 = \frac{\rho V_v^2}{2} + P_2.$$

Полагая, что $V_v = 35 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$, $\rho = 1\,000 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$, $P_2 = 1 \text{ бар}$, получим $P_1 \approx 7 \text{ бар}$.

На основе сделанных теоретических прогнозов был разработан новый метод пенного пожаротушения в больших топливных резервуарах. Чтобы получить требуемые интенсивности и скорости подачи пены, огнетушащая пена формиру-

ется внутри специальной емкости при помощи твердотопливных газогенераторов. Вода с добавлением 3% пенообразователя заливается в емкость (стальную или пластиковую). После того как внутри емкости срабатывают газогенераторы, происходит насыщение газом раствора пенообразователя, давление в емкости растет до 7 бар. В ходе этого процесса газы и аэрозоли растворяются (сорбируются) в растворе пенообразователя.

Когда давление в сосуде достигает 7 бар, вскрывается мембрана, и смесь направляется по трубопроводу на тушение пожара. Из-за разницы между давлением в растворе и атмосферным давлением происходит десорбция газа из раствора (аналогично эффекту при вскрытии бутылки с шампанским) и образуется пена низкой кратности (кратность пены 10–18). Пузырьки пены заполнены не воздухом, а CO_2 и N_2 , при этом тонкодисперсный аэрозоль оседает на поверхности пузырьков, обеспечивая их большую стабильность [28].

Параметры подачи пены в описанном методе имеют значения: интенсивность подачи пены $700 \text{ л} \cdot \text{с}^{-1}$, скорость подачи около $35 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Необходимо также отметить, что предложенный способ нечувствителен к взрыву в топливном резервуаре, так как пена формируется вне резервуара, и способ не требует применения пеногенераторов.

Натурные эксперименты и их результаты

Для подтверждения теоретических результатов по оценке эффективности нового метода пенного пожаротушения была проведена серия натурных экспериментов по тушению полностью развитого пожара бензина в резервуарах объемом 5 тыс. и 20 тыс. м^3 при различных уровнях заполнения. Время свободного горения перед подачей пены составляло 180 с. В экспериментах была использована одна емкость с раствором пенообразователя общим объемом $7,5 \text{ м}^3$.

В 21 успешном эксперименте было показано, что эффективное тушение пожара достигается всего за 30–90 секунд (рис. 8). Требуемое количество пенообразователя для тушения пожара в топливном резервуаре объемом 20 тыс. м^3 составляет всего 450 л, что несопоставимо с традиционным пенным пожаротушением, когда десятки тысяч литров пенообразователя расходуются в неэффективных попытках тушения пожара (например, при тушении пожара в Бансфилде на 1 резервуар расходовалось приблизительно 32,5 тыс. литров пенообразователя и 2,4 млн литров воды [1]).



Рис. 8. Эффективное тушение пожара новым методом в полностью заполненном топливном резервуаре объемом $20\,000 \text{ м}^3$

Fig. 8. Effective fire extinguishing with a new method in a fully filled fuel tank with a volume of $20\,000 \text{ м}^3$

Эксперименты также подтвердили результаты математического моделирования по значениям температуры свободного борта, скорости потоков на кромке резервуара, высоты конвективной колонки. Скорость выхода пены совпала с расчетными значениями с точностью 10–20%.

Выводы

1. Расчетами давления взрыва газозвоздушных смесей под крышей топливного резервуара установлено, что пеногенераторы автоматической системы пожаротушения с высокой вероятностью будут повреждены или уничтожены и огнетушащая пена не будет подана на тушение.

2. Методами математического моделирования показано, что в зависимости от уровня взлива топлива в резервуарах объемом более 5 тыс. м³ на их кромке формируются постоянно действующие сильные вертикальные потоки, имеющие скорость 5–10 м·с⁻¹ при отсутствии ветра, или горизонтальные потоки, имеющие скорость 7–10 м·с⁻¹ при скорости ветра 10 м·с⁻¹, которые будут предотвращать попадание пены к поверхности горящей жидкости (нормативная интенсивность подачи пены от 27,4 до 114 л·с⁻¹, скорость подачи 2–3 м·с⁻¹. Проведенные расчеты также показывают, что поданная на тушение пена будет контактировать с высокотемпературной зоной 1 000–1 100°C и подвергаться воздействию теплового излучения от факела пламени (плотность теплового потока 50–100 кВт·м⁻². В результате пена будет разрушаться со скоростью 0,2–0,4 см·с⁻¹.

На этом основании можно утверждать, что традиционный подход при тушении пожара в больших резервуарах не работает.

3. Теоретически и экспериментально показано, что пенное пожаротушение в больших резервуарах будет эффективным, если пена будет подаваться с интенсивностью 700 л·с⁻¹ и более и скоростью 35 м·с⁻¹ и более.

4. Разработан инновационный метод пенного пожаротушения в больших резервуарах. Для получения требуемых интенсивностей и скоростей подачи огнетушащая пена в этом методе формируется внутри специальной емкости при помощи твердотопливных газогенераторов.

5. В 21 успешном эксперименте подтверждено, что тушение пожара достигается за 30–90 секунд. Для тушения пожара в резервуаре объемом 20 тыс. м³ используется емкость объемом 7,5 м³, а количество пенообразователя составляет 450 л.

Список источников

1. The Buncefield Incident 11 December, 2005. The Final Report of the Major Incident Investigation Board. V. 1. Buncefield Major Incident Investigation Board, 2008.
2. Fire and Explosion at Konda Oil Depot. 2018. URL: <http://www.travmatizma.net/> (accessed: 19.12.2018).
3. Fire at fuel depot near Kiev not suppressed, new explosions occur. 2018. URL: <http://www.eadaily.com/> (accessed: 19.12.2018).
4. Fire at oil refinery kills 4 in Nizhny Novgorod Region. <http://www.interfax.com/>, 2018 (дата обращения: 19.12.2018).
5. Безродный И.Ф., Гилетич А.Н., Меркулов В.А. и др. Тушение нефти и нефтепродуктов : пособие. М. : ВНИИПО, 1996. 216 с.

6. СП 12.13130.2009. Определение категорий помещений, зданий и наружных установок по пожаровзрывоопасности. URL: <http://www.docs.cntd.ru/> (дата обращения: 19.12.2018).
7. Горячев С.А., Молчанов С.В., Назаров В.П. и др. Пожарная безопасность технологических процессов : учебник / под общ. ред. В.П. Назарова, В.В. Рубцова. М. : Акад. ГПС МЧС России, 2007. Ч. 2: Анализ пожарной опасности и защиты технологического оборудования. 221 с.
8. Welch S., Rubini P. *SOFIE, Simulations of Fires in Enclosures : User Guide*. Cranfield University, South England, UK, 1996.
9. Launder B.E., Spalding D.B. The Numerical Computation of Turbulent Flow // *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1974. V. 3. P. 269–289.
10. Hossain M.S., Rodi W. A Turbulence Model for Buoyant Flows and Its Application for Vertical Buoyant Jets // *Turbulent Buoyant Jets and Plums*. Oxford, 1982. P. 121–172. (HMT Series; book 6).
11. Cox G. *Combustion Fundamentals of Fire*. London : Academic Press, 1995.
12. Magnussen B.F., Hjertager B.H. On mathematical modelling of turbulent combustion with special emphasis on soot formation and combustion // *Proc. Combust. Inst.* 1977. V. 16. P. 719–729. doi: 10.1016/S0082-0784(77)80366-4
13. Lockwood F.C., Shah N.G. A new radiation solution method for incorporation in general combustion prediction procedures // *Proc. Combust. Inst.* 1981. Vol. 18. P. 1405–1414. doi: 10.1016/S0082-0784(81)80144-0
14. Bressloff N.W., Moss J.B., Rubini P.A. Assessment of a Total Absorptivity Solution to the Radiative Transfer Equation as Applied in the Discrete Transfer Radiation Model // *Numerical Heat Transfer. Part B*. 1996. V. 29. P. 381–397. doi: 10.1080/10407799608914988
15. Truelove J.S. The two-flux model for radiative transfer with strongly anisotropic scattering // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1984. V. 27 (3). P. 464–466. doi: 10.1016/0017-9310(84)90294-1
16. Van Doormaal J.P., Raithby G.D. Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows // *Numerical Heat Transfer*. 1984. V. 7 (2). P. 147–163. doi: 10.1080/01495728408961817
17. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамика жидкостей. М. : Энергоатомиздат, 1984. 150 с.
18. Spalding D.B. A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives // *Int. J. Num. Mech. Eng.* 1972. No. 4. P. 551. doi: 10.1002/nme.1620040409
19. Stone H.L. Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Differential Equations // *SIAM J. Numer. Anal.* 1968. V. 5 (3). P. 530–558. doi: 10.1137/0705044
20. Рыжов А.М., Хасанов И.Р., Карпов А.В., Волков А.В., Лицкевич В.В., Дектерев А.А. Применение полевого метода математического моделирования пожаров в помещениях : метод. рекомендации. М. : ВНИИПО, 2002. 35 с.
21. Weckman E.J., Strong A.B. Experimental Investigation of epe Turbulence Structure of Medium Scale Methanol Pool Fires // *Combustion and Flame*. 1996. V. 105 (3). P. 245–266. doi: 10.1016/0010-2180(95)00103-4
22. Карпов А.В., Крюков А.П., Рыжов А.М. Полевое моделирование процессов тепло- и массопереноса в пламени и восходящей свободноконвективной струе // *Пожаровзрывобезопасность*. 2001. Т. 10, № 2. С. 35–41.
23. Adiga K.C., Ramaker D.E., Tatem P.A., Williams F.W. Modeling thermal radiation in open liquid pool fires // *Fire Safety Science : Proc. of II Int Symp. on Fire Safety Science*. 1989. P. 241–250. doi: 10.3801/IAFSS.FSS.2-241
24. Gengembre E., Cambray P., Karmad D., Bellet J.C. Turbulent diffusion flames with large buoyancy effects // *Combustion Science and Technology*. 1984. V. 41. P. 55–67. doi: 10.1080/00102208408923822
25. Blunsdon C.A., Beeri Z., Malalasekera W.M.G., Dent J.C. Modeling Buoyant Turbulent Diffusion Flames in Coherent Flame-sheet model // *Symposium on Fire and Combustion*, ASME Winter Annual Meeting, November 1994. Chicago : ASME, 1994.

26. Копылов Н.П., Федоткин Д.В., Карпов А.В., Сушкина Е.Ю. Моделирование тушения пожаров нефтепродуктов в резервуарах с применением водопенных огнетушащих веществ // Безопасность труда в промышленности. 2020. № 8. С. 12–22. doi: 10.24000/0409-2961-2020-8-14-22
27. Безродный И.Ф., Бабенко В.В. О разрушающем воздействии пламени на пену // Пожарная техника и пожаротушение. М. : ВНИИПО. 1998. С. 80–82.
28. Милёхин Ю.М., Деревякин В.А., Кононов Б.В., Краушанский Я.М., Красов А.В., Копылов Н.П., Федоткин Д.В. Автономная установка пенного пожаротушения крупных резервуаров с легковоспламеняющимися жидкостями. Патент № 2674710 РФ. 2018.

References

1. (2008) The Buncefield Incident 11 December, 2005. The Final Report of the Major Incident Investigation Board. Volume 1. Buncefield Major Incident Investigation Board.
2. (2018) Fire and Explosion at Konda Oil Depot. <http://www.travmatizma.net/>
3. (2018) Fire at fuel depot near Kiev not suppressed, new explosions occur. <http://www.eadaily.com/>
4. (2018) Fire at oil refinery kills 4 in Nizhny Novgorod Region. <http://www.interfax.com/>
5. Bezrodnyy I.F., Giletych A.N., Merkulov V.A. (1996) Tusheniye nefi i nefteproduktov [Extinguishing oil and oil products]. Moscow: VNIPO.
6. SP 12.13130.2009. *Opredeleyeniye kategoriy pomeshcheniy, zdaniy i naruzhnykh ustanovok po pozharovzryvoopasnosti* [Determination of categories of rooms, buildings and external installations by explosion and fire hazard]. <http://docs.cntd.ru/document/1200071156>
7. Goryachev S.A., Molchanov S.V., Nazarov V.P. (2007) *Pozharnaya bezopasnost' tekhnologicheskikh protsessov. Chast' 2. Analiz pozharnoy opasnosti i zashchity tekhnologicheskogo oborudovaniya* [Fire safety of technological processes. Part 2. Analysis of fire hazard and protection of technological equipment]. Moscow: SFA of EMERCOM of Russia.
8. Welch S, Rubini P. (1996) *SOFIE, Simulations of Fires in Enclosures, User Guide*. Cranfield University, South England, United Kingdom.
9. Launder B.E., Spalding D.B. (1974) The numerical computation of turbulent flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 3. 269–289.
10. Hossain M.S., Rodi W. (1982) A turbulence model for buoyant flows and its application for vertical buoyant jets. *Turbulent Buoyant Jets and Plumes*. HMT Series, Oxford, England. pp. 121–178.
11. Cox G. (1995) *Combustion Fundamentals of Fire*. London: Academic Press.
12. Magnussen B.F., Hjertager B.H. (1977) On mathematical modelling of turbulent combustion with special emphasis on soot formation and combustion. *Symposium (International) on Combustion*. 16(1). pp. 719–729. doi:10.1016/S0082-0784(77)80366-4
13. Lockwood F.C., Shah N.G. (1981) A new radiation solution method for incorporation in general combustion prediction procedures. *Symposium (International) on Combustion*. 18(1). pp. 1405–1414. doi: 10.1016/S0082-0784(81)80144-0
14. Bressloff N.W., Moss J.B., Rubini P.A. (1996) Assessment of a differential total absorptivity solution to the radiative transfer equation as applied in the discrete transfer radiation model. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*. 29(3). pp. 381–397. doi: 10.1080/10407799608914988
15. Truelove J.S. (1984) The two-flux model for radiative transfer with strongly anisotropic scattering. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 27(3). pp. 464–466. doi: 10.1016/0017-9310(84)90294-1
16. Van Doormaal J.P. and Raithby G.D. (1984) Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer*. 7(2). pp. 147–163. doi: 10.1080/01495728408961817

17. Patankar S. (1980) *Numerical heat transfer and fluid flow*. New York: Hemisphere Publishing Corporation.
18. Spalding D.B. (1972) A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 4(4). pp. 551–559. doi: 10.1002/nme.1620040409/
19. Stone H.L. (1968) Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 5(3). pp. 530–558. doi: 10.1137/0705044
20. Ryzhov A.M., Khasanov I.R., Karpov A.V., Volkov A.V., Litskevich V.V., Dekterev A.A. (2002) *Primeneniye polevogo metoda matematicheskogo modelirovaniya pozharov v pome-shcheniyakh. Metodicheskiye rekomendatsii* [Application of the field method of mathematical modeling of fires in enclosures. Methodical recommendations]. Moscow: VNIPO.
21. Weckman E.J., Strong A.B. (1996) Experimental investigation of the turbulence structure of medium scale methanol pool fires. *Combustion and Flame*. 105(3). pp. 245–266. doi: 10.1016/0010-2180(95)00103-4
22. Karpov A.V., Kryukov A.P., Ryzhov A.M. (2001) Polevoye modelirovaniye protsessov teplo- i massoperenosa v plameni i voskhodyashchey svobodnokonvektivnoy struye [Field modeling of heat and mass transfer in a flame and in an ascending free-convection jet]. *Pozharovzryvbezopasnost' - Fire and Explosion Safety*. 10(2). pp. 35–41.
23. Adiga K.C., Ramaker D.E., Tatem P.A., Williams F.W. (1989) Modeling thermal radiation in open liquid pool fires. *Fire Safety Science-Proceedings of the Second International Symposium*. pp. 241–250. doi: 10.3801/IAFSS.FSS.2-241
24. Gengembre E., Cambray P., Karmad D., Bellet J.C. (1984) Turbulent diffusion flames with large buoyancy effects. *Combustion Science and Technology*. 41(1-2). pp. 55–67. doi: 10.1080/00102208408923822
25. Blunsdon C.A., Beeri Z, Malalasekera W.M.G., Dent J.C. (1994) Modeling buoyant turbulent diffusion flames in coherent flame-sheet model. *Symposium on Fire and Combustion, ASME Winter Annual Meeting*. Chicago: ASME.
26. Kopylov N.P., Fedotkin D.V., Karpov A.V., Sushkina E. Yu. (2020) Modelirovaniye tusheniya pozharov nefteproduktov v rezervuarakh s primeneniym vodopennykh ognetchishchikh veshchestv [Modeling of extinguishing oil product fires in tanks using water-based extinguishing agents]. *Bezopasnost' truda v promyshlennosti – Occupational safety in industry*. 8. pp. 14–22. doi: 10.24000/0409-2961-2020-8-14-22
27. Bezrodnyy I.F., Babenko V.V. (1998) *O razrushayushchem vozdeystvii plameni na penu* [On the destructive effect of flame on foam]. *Pozharnaya tekhnika i pozharotushenie*. Moscow: VNIPO. pp. 80–82.
28. Milekhin Yu.M., Derevyakin V.A., Kononov B.V., Kraushanskiy Ya.M., Krasov A.V., Kopylov N.P., Fedotkin D.V. (2018) *Avtonomnaya ustanovka pennogo pozharotusheniya krupnykh rezervuarov s legkovosplamenyayushchimisya zhidkostyami* [Autonomous foam fire extinguishing system for large tanks with flammable liquids]. RF Patent 2674710.

Сведения об авторах:

Копылов Николай Петрович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Отдела специальных исследований ФГБУ ВНИИПО МЧС России (Балашиха, Россия). E-mail: np.nanpb@mail.ru

Копылов Сергей Николаевич – доктор технических наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра автоматических установок обнаружения и тушения пожаров ФГБУ ВНИИПО МЧС России (Балашиха, Россия). E-mail: firetest@mail.ru

Карпов Алексей Васильевич – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Отдела моделирования пожаров и нестандартного проектирования ФГБУ ВНИИПО МЧС России (Балашиха, Россия). E-mail: k708@yandex.ru

Федоткин Дмитрий Вячеславович – кандидат технических наук, заместитель начальника Отдела специальных исследований ФГБУ ВНИИПО МЧС России, доцент НИТУ МИСиС (Москва, Россия). E-mail: fdv982@mail.ru

Сушкина Елена Юрьевна – кандидат технических наук, начальник Отдела ученого секретаря – ученый секретарь ФГБУ ВНИИПО МЧС России (Балашиха, Россия). E-mail: sushkina@bk.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Kopylov Nikolay P. (Doctor of Technical Science, Professor, Main Researcher, FGBU VNIIPPO EMERCOM of Russia, Balashikha, Russia). E-mail: np.nanpb@mail.ru

Kopylov Sergey N. (Doctor of Technical Science, Main Researcher, FGBU VNIIPPO EMERCOM of Russia, Balashikha, Russia). E-mail: firetest@mail.ru

Karpov Aleksey V. (Candidate of Technical Sciences, Leading Researcher FGBU VNIIPPO EMERCOM of Russia, Balashikha, Russia). E-mail: k708@yandex.ru

Fedotkin Dmitry V. (Candidate of Technical Sciences, Deputy Chef of Department, FGBU VNIIPPO EMERCOM of Russia, Balashikha, Russia; assistant professor, MISiS, Moscow, Russia). E-mail: fdv982@mail.ru

Sushkina Elena Yu. (Candidate of Technical Sciences, Head of Department – Academic Secretary, FGBU VNIIPPO EMERCOM of Russia, Balashikha, Russia). E-mail: sushkina@bk.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 08.02.2021; принята к публикации 22.03.2022

The article was submitted 08.02.2021; accepted for publication 22.03.2022

Научная статья

УДК 531.3:631.362.3:621.313.282

doi: 10.17223/19988621/76/11

Математическое моделирование движения зерноочистительной машины с приводом от линейного электродвигателя

Марат Закиевич Нафиков¹, Ильнур Илдарович Загиров²,
Хасан Талхиевич Каримов³, Валерий Николаевич Пермяков⁴,
Ильшат Расимович Ахметьянов⁵

1, 2, 3, 4, 5 Башкирский государственный аграрный университет, Уфа, Россия

¹ nafikovmz@rambler.ru

² zagirych22@mail.ru

³ carimov.ces@mail.ru

⁴ ir.perm@yandex.ru

⁵ ahmetir09@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается механизм очистки зерновых смесей с приводом от линейного асинхронного электродвигателя. На основе уравнений Лагранжа выполнено математическое описание движения звеньев механизма. Найдена требуемая в соответствии с технологией очистки электромагнитная сила, создаваемая в обмотках линейного электродвигателя электронным коммутатором. При применении предлагаемого механизма создаются более благоприятные условия просеивания зерновой смеси по сравнению с традиционно используемыми машинами, приводимыми двигателями вращения.

Ключевые слова: зерноочистительная машина, линейный электродвигатель, уравнения Лагранжа, электродвижущая сила, электронный коммутатор

Для цитирования: Нафиков М.З., Загиров И.И., Каримов Х.Т., Пермяков В.Н., Ахметьянов И.Р. Математическое моделирование движения зерноочистительной машины с приводом от линейного электродвигателя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 150–164. doi: 10.17223/19988621/76/11

Determination of electromagnetic force of a linear electric motor in the drive of a grain cleaning machine by modeling

Marat Z. Nafikov¹, Ilnur I. Zagirov², Xacan T. Karimov³,
Valery N. Permyakov⁴, Il'shat R. Akhmet'yanov⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Bashkir State Agrarian University, Ufa, Russian Federation

¹ nafikovmz@rambler.ru

² zagirych22@mail.ru

³ carimov.ces@mail.ru

⁴ ir.perm@yandex.ru

⁵ ahmetir09@rambler.ru

Abstract. An experimental mechanism for cleaning grain mixtures with a drive from a linear asynchronous electric motor has been developed and manufactured in the Bashkir State Agrarian University. More favorable conditions for sifting the grain mixture are created as a result of the use of an asynchronous linear electric motor for its drives in comparison with traditionally used machines driven by rotation motors. Based on the Lagrange equations, a mathematical description of the movement of the links of the mechanism is carried out and the electromagnetic force required in accordance with the cleaning technology is found. It is created in the windings of a linear electric motor by an electronic switch. It is found that the shape of the pulse of the required electromagnetic force is close to sinusoidal. However, it is possible to replace the electromotive force varying according to the sinusoidal law by a force constant in modulus and equal in impulse.

Keywords: grain cleaning machine, linear electric motor, Lagrange equations, electromotive force, electronic switch

For citation: Nafikov, M.Z., Zagirov, I.I., Karimov, Kh.T., Permyakov, V.N., Akhmet'yanov, I.R. (2022) Determination of electromagnetic force of a linear electric motor in the drive of a grain cleaning machine by modeling. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 150–164. doi: 10.17223/19988621/76/11

Введение

Традиционно сепарация зерновой смеси осуществляется на установках, приводимых асинхронными электродвигателями вращения [1, 2]. При этом технологический процесс просеивания осуществляют на резонансных режимах с относительно высокой частотой, малой амплитудой колебаний и при фиксированном угле наклона решет.

Такие зерноочистительные машины имеют недостатки, наиболее существенными из которых являются сложность конструкции, трудности запуска и остановки работы, повышенные динамические нагрузки на детали и узлы, вызванные высокочастотной вибрацией. При работе на высоких частотах вследствие большой инертности привода создается дополнительный динамический момент сопротивления, что приводит к увеличению потребления электроэнергии.

Имеются исследования и опытно-конструкторские разработки, в которых показано, что более благоприятные условия для просеивания зерновой смеси по сравнению с существующими машинами обеспечиваются при использовании режимов колебаний решет с относительно большими амплитудами (0.01 м и более) и малыми частотами (2–3 Гц и менее) [3, 4]. Способствуют качеству очистки периодическое изменение угла качания решет и перетряхивание зерновой смеси.

При указанных условиях существенно снижаются энергетические затраты на сепарацию зерновой смеси. Имеется возможность повысить качество разделения сыпучих смесей при использовании машин, допускающих регулируемые режимы колебаний. Поэтому создание управляемого привода для воспроизведения указанных параметров движения качающихся решет является актуальной задачей.

Другая важная задача – создание электропривода с автоколебаниями непосредственно от ротора электродвигателя, что позволяет существенно упростить конструкцию и снизить массоемкость зерноочистительной машины.

Достичь этого можно путем применения в управляемом приводе качающихся решет линейного синхронного или асинхронного электродвигателя [5]. В устройствах на основе таких электроприводов отпадает необходимость в массоемких и энергозатратных элементах: редукторе, устройстве преобразования вращательного движения в поступательное. Линейный асинхронный двигатель отличается простотой конструкции, технологичностью изготовления, легкостью монтажа и демонтажа, низкой ценой, надежностью и разнообразием конструктивного исполнения, более широкими возможностями управления.

Некоторые сложности применения линейных электродвигателей в различных областях связаны с необходимостью разработки электронного блока управления [5–7]. Такое устройство должно обеспечивать требуемый в соответствии с технологическими условиями работы машины закон движения ротора линейного электродвигателя относительно его статора.

Для создания устройства управления составляется математическая модель движения разрабатываемой машины. Во многих случаях для моделирования движения машины используют дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода).

Цель исследования – разработка и исследование путем математического моделирования безредукторного механизма с приводом от линейного асинхронного электродвигателя, позволяющего воспроизводить и регулировать режимы колебаний решет большой амплитуды (0.1 м и более) и малой частоты (2–3 Гц и менее) без остановки процесса сепарации.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие конкретные задачи исследования:

- 1) выбрать кинематическую схему механизма привода решетного стана, определить его рациональные геометрические и кинематические параметры;
- 2) рассмотреть динамику очистительной машины и составить математическую модель ее движения;
- 3) получить выражение управляющей силовой функции (электромагнитной силы) линейного асинхронного электродвигателя.

Методика исследования. Применена аналитическая методика исследования, основанная на законах и положениях теоретической механики и теории механиз-

мов и машин. В частности, для исследования динамики механизма с одной степенью свободы составлялось уравнение Лагранжа второго рода.

Поскольку в данном исследовании определялась силовая управляющая функция, создаваемая блоком управления электродвигателя, то в качестве обобщенной координаты был выбран ход h его ротора относительно статора.

Расчетная схема

В Башкирском ГАУ на базе цилиндрического линейного асинхронного электродвигателя был спроектирован и изготовлен опытный вариант механизма качающегося сепаратора [8]. На рис. 1 приведена его кинематическая и расчетная схема.

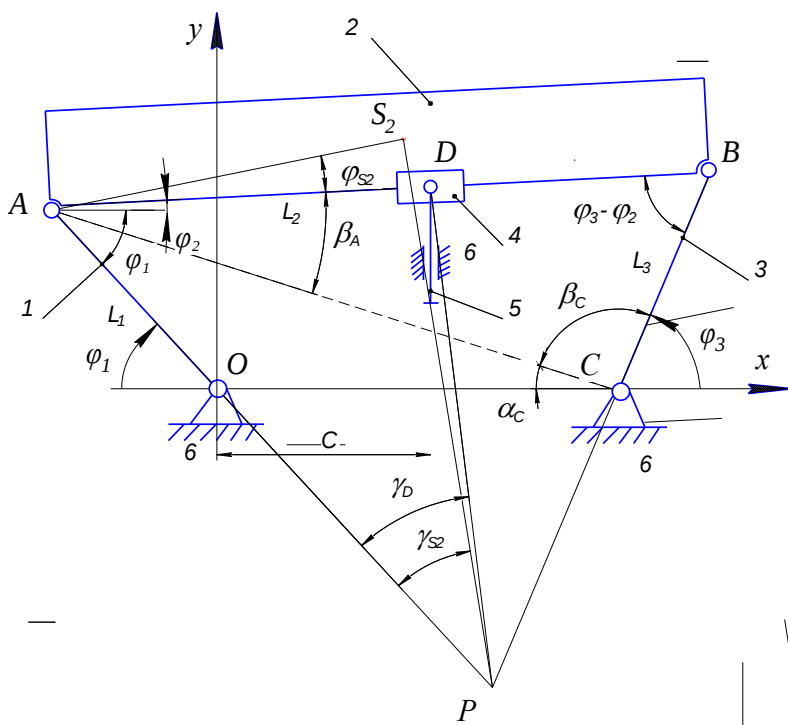


Рис. 1. Схема механизма привода качающегося сепаратора

Fig. 1. Oscillating separator drive mechanism diagram

Механизм состоит из пяти подвижных звеньев и стойки: 1 – коромысло; 2 – шатун, выполненный как одно звено с ротором электродвигателя; 3 – коромысло; 4 – ползун, составляющий одно звено со статором двигателя; 5 – штанга. Коромысла 1 и 3 совершают вращательные движения соответственно вокруг неподвижных осей O и C ; шатун 2 движется плоскопараллельно; ползун 4 также движется плоскопараллельно, вращаясь вместе с шатуном 2 и перемещаясь относительно него поступательно; статор 4 мотора закреплен на движущейся поступательно штанге 5; 6 – неподвижная стойка (корпус механизма). Механизм качающегося

сепаратора приводится линейным электродвигателем в соответствии с законом, заданным коммутатором (электронным блоком управления).

Геометрические размеры показанного на рис. 1 плоского пятизвенного механизма с одной степенью свободы, определенные предварительными расчетами, равны: $OA = L_1 = 0.056$ м, $AB = L_2 = 1$ м, $BC = L_3 = 0.059$ м, $OC = 0.028$ м, $c = 0.014$ м. Положение центра тяжести качающегося сита S_2 определяется указанными на схеме параметрами: $AS_2 = 0.5$ м, $\varphi_{S_2} = 20^\circ$.

Определены также характеристики инертности звеньев: $I_{1A} = 0.004$ кгм², $I_{2S} = 2.0$ кгм², $I_{3C} = 0.005$ кгм², $I_{4S} = 0.1$ кгм², $m_2 = 100$ кг, $m_4 = 20$ кг, $m_5 = 10$ кг.

Угловые координаты звеньев φ_1 , φ_2 , φ_3 и положительные направления их отсчета показаны на рис. 1, мгновенный центр скоростей звена 2 обозначен на схеме как P .

Частота колебаний и ход ротора линейного электродвигателя относительно его статора обеспечиваются настройкой коммутатора – электронного блока управления машиной. Был выбран гармонический колебательный закон движения ротора электродвигателя, обеспечиваемый коммутатором:

$$h = a \cdot \sin(k \cdot t), \quad (1)$$

где a – амплитуда колебательного движения ротора; k – частота его колебаний.

В последующих вычислениях принимались значения $a = 0.1$ м, $k = 12$ рад/с.

Вычисление геометрических параметров механизма

Составляем, пользуясь расчетной схемой на рис. 1, следующие геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta OAS. \quad \alpha_c &= \tan^{-1} \left(\frac{L_1 \cdot \sin \varphi_1}{OC + L_1 \cdot \cos \varphi_1} \right), \quad AC = L_1 \cdot \frac{\sin \varphi_1}{\cos \alpha_c}. \\ \Delta ABC. \quad \beta_c &= \cos^{-1} \left(\frac{L_2^2 + AC^2 - L_3^2}{2 \cdot AC \cdot L_3} \right), \quad \beta_A = \cos^{-1} \left(\frac{L_1^2 + AC^2}{2 \cdot AC \cdot L_2} \right). \\ \varphi_2 &= \beta_A - \alpha_c, \quad \varphi_3 = \pi - \beta_c - \alpha_c. \\ \Delta ABP. \quad AP &= L_2 \cdot \frac{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_3)}, \quad BP = L_2 \cdot \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_3)}. \\ \Delta ADP. \quad AD &= \frac{L_1 \cdot \cos \varphi_1 + c}{\cos \varphi_2}, \quad DP = \sqrt{AP^2 + AD^2 - 2AP \cdot AD \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}. \\ \gamma_D &= \sin^{-1} \left(\frac{AD}{DP} \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right). \\ \Delta APS_2. \quad PS_2 &= \sqrt{AP^2 + AS_2^2 - 2AP \cdot AS_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_{S_2})}. \end{aligned} \quad (2)$$

Ордината точки D , принадлежащей звеньям 4 и 5, равна

$$\gamma_D = L_1 \cdot \sin \varphi_1 + AD \cdot \sin \varphi_2. \quad (3)$$

Результаты вычислений по зависимостям (2), (3) сведены в табл. 1.

Таблица 1

Геометрические параметры исследуемого механизма

№ п.п.	φ_1 , град	φ_2 , град	φ_3 , град	γ_{S2} , рад	PS_2 , мм	γ_D , мм	AP , мм	BP , мм	AD , мм	h , мм
1	30	16.05	70.59	0.631	774.79	459.80	828.67	732.43	650.32	–
2	40	9.23	61.88	0.635	788.58	452.43	812.36	773.92	576.45	–100.00
3	45	5.76	57.27	0.638	792.30	450.05	801.06	792.62	538.70	–62.25
4	50	2.24	52.49	0.643	793.64	448.50	787.48	809.69	500.34	–23.89
5	53.07	0.037	49.45	0.647	793.21	447.98	777.95	819.29	476.45	0
6	55	–1.36	47.51	0.650	792.44	447.81	771.50	824.94	461.33	15.12
7	60	–5.03	42.23	0.659	788.53	448.02	753.02	838.22	421.62	54.83
8	65	–8.80	36.94	0.670	781.81	449.23	732.00	849.38	381.15	95.30
9	65.57	–9.24	36.30	0.672	780.86	449.84	729.42	850.52	376.45	100.00
10	70	–12.69	31.31	–	772.19	451.60	708.40	858.33	339.83	–
11	75	–16.71	25.43	–	759.60	455.37	682.26	865.01	297.50	–
12	80	–20.90	19.27	–	744.04	460.89	653.63	869.40	253.96	–
13	90	–29.91	5.97	–	704.14	479.46	589.27	871.53	161.51	–
14	100	–40.04	–8.96	–	653.15	515.56	516.39	865.79	55.85	–
15	110	–51.82	–26.13	–	592.30	591.75	436.00	854.63	–83.36	–
16	120	–66.15	–46.73	–	523.40	801.60	347.10	843.21	–346.2	–
Примечание. Жирным шрифтом показан рабочий диапазон										

На рис. 2 показаны зависимости углов качания звеньев 2 и 3, а также относительного положения шарнира D на шатуне AB от угловой координаты φ_1 коромысла OA .

Анализируя полученные результаты вычислений, выбираем рабочий диапазон исследуемого экспериментально-лабораторного механизма. При значениях хода ротора относительно статора $h = \pm 0.1$ м угол качания звена 1 меняется в пределах $40^\circ \leq \varphi_1 \leq 65.6^\circ$, чем обеспечиваются благоприятные углы давления в шарнире A . Также удовлетворительные значения имеет угол давления в шарнире B . В выбранном рабочем диапазоне угол качания решетки сепаратора φ_2 периодически меняется в пределах от 9.23° до -9.23° , т.е. в диапазоне, рекомендованном в литературных источниках [3, 4].

В механизме амплитуда линейного колебательного движения исполнительного второго звена соответствует ходу h ротора электродвигателя.

В проводимых исследованиях нам более интересны зависимости геометрических параметров механизма не от угла φ_1 , а от обобщенной координаты h (рис. 3).

В результате анализа расчетных данных из табл. 1 установлено, что углы качания φ_1 , $\varphi_2 = \varphi_4$, φ_3 звеньев механизма в пределах его рабочего диапазона меняются линейно, подчиняясь зависимостям

$$\varphi_1 = 2.227 \cdot h + 0.924, \quad \varphi_2 = -1.613 \cdot h + 0.0003, \quad \varphi_3 = -2.241 \cdot h + 0.860. \quad (4)$$

В уравнениях (4), которые в дальнейшем будем называть эмпирическими, ход h в метрах, углы φ в радианах.

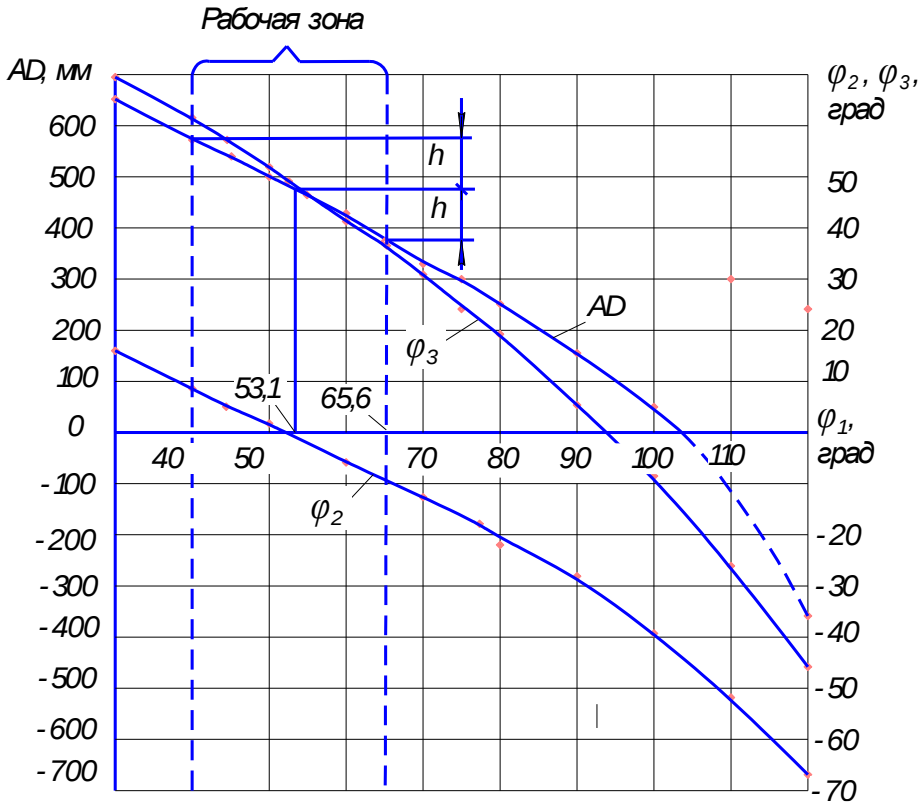


Рис. 2. Зависимости геометрических параметров механизма от положения звена 1
Fig. 2. Dependences of geometric parameters of the mechanism on the position of link 1

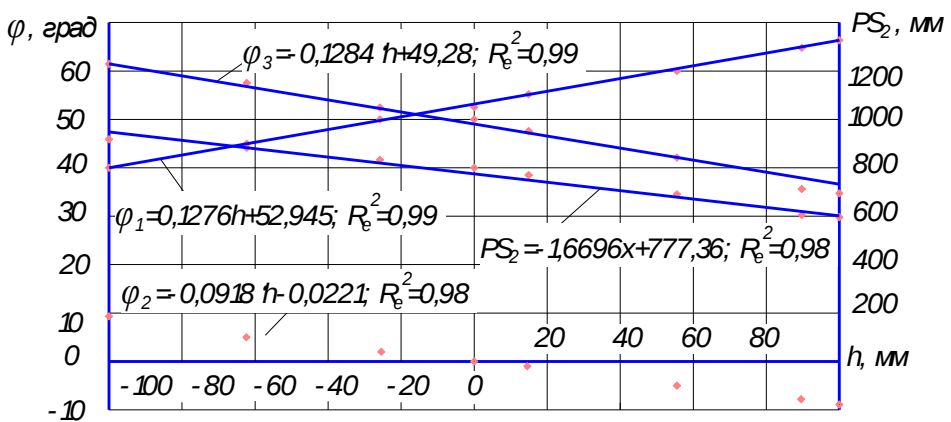


Рис. 3. Зависимости углов положений звеньев механизма от хода h ротора линейного электродвигателя
Fig. 3. Dependences of position angles of the mechanism links on the stroke of the rotor of the linear electric motor

Аналогичным образом в результате статистической обработки данных, представленных в табл. 1, получены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} PS_2 &= -0.0484 \cdot h + 0.7894, \quad \gamma_D = 0.3 \cdot h^2 - 0.0142 \cdot h + 0.448, \\ \gamma_{S2} &= 0.1911 \cdot h + 650. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь также линейные размеры в метрах, угол γ_{S2} в радианах.

Расстояние DP в выбранном рабочем диапазоне изменяется незначительно – от 0,617 до 0,622 м.

Значения геометрических параметров механизма, вычисленные по эмпирическим зависимостям (4), (5), практически не отличаются от данных в табл. 1.

Определение линейных и угловых скоростей

Исходя из эмпирических уравнений (4), (5) определялись линейные и угловые скорости механизма как функции от обобщенной скорости, времени, а также обобщенной координаты.

Зависимости скоростей звеньев от обобщенной скорости $\dot{h}$ получаем дифференцированием эмпирических соотношений (4):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2.227 \cdot \dot{h}, \quad \omega_2 = -1.613 \cdot \dot{h}, \quad \omega_3 = -2.241 \cdot \dot{h}, \\ v_{S2} &= \omega_2 \cdot PS_2 = -1.613 \cdot \dot{h} \cdot \left(-0.0484 \cdot \frac{\sqrt{a^2 \cdot k^2 - h^2}}{k} + 0.789 \right), \\ v_{S4} &= v_{S5} = \dot{\gamma}_D = \dot{h} \cdot \left(0.6 \cdot \frac{\sqrt{k^2 \cdot \alpha^2 - h^2}}{k} \cdot \dot{h} - 0.0142 \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь обобщенная координата равна $h = a \cdot \sin(k \cdot t)$, обобщенная скорость $\dot{h} = a \cdot k \cdot \cos(k \cdot t)$. Перепишем выражения (6) для скоростей как функции времени:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2.227 \cdot a \cdot k \cdot \cos(k \cdot t), \quad \omega_2 = -1.613 \cdot a \cdot k \cdot \cos(k \cdot t), \\ \omega_3 &= -2.241 \cdot a \cdot k \cdot \cos(k \cdot t), \\ v_{S2} &= 0.0390 \cdot a^2 \cdot k \cdot \sin(2k \cdot t) - 0.0142 \cdot a \cdot k \cdot \cos(k \cdot t), \\ v_{S4} &= v_{S5} = 0.3 \cdot a^2 \cdot k \cdot \sin(2k \cdot t) - 0.0142 \cdot a \cdot k \cdot \cos(k \cdot t). \end{aligned} \quad (7)$$

Также выражаем скорости звеньев механизма как функции обобщенной координаты h :

$$\begin{aligned} \dot{h} &= k \cdot \sqrt{a^2 - h^2}, \quad \omega_1 = 2.227 \cdot k \cdot \sqrt{a^2 - h^2}, \\ \omega_2 &= -1.613 \cdot k \cdot \sqrt{a^2 - h^2}, \quad \omega_3 = -2.241 \cdot k \cdot \sqrt{a^2 - h^2}, \\ v_{S2} &= -1.613 \cdot k \cdot \sqrt{a^2 - h^2} \cdot (-0.0484 \cdot h + 0.789), \\ v_{S4} &= v_{S5} = 0.6 \cdot k \cdot \sqrt{a^2 - h^2} \cdot (h - 0.0142). \end{aligned} \quad (8)$$

Для проверки правильности и точности вычислений эти же скорости в исследовании [8] определяли и традиционным способом [9], предусматривающим постро-

ение планов скоростей и составление передаточных отношений. Расхождение результатов, определенных различными способами, не превышает 2–3%.

Определение кинетической энергии механизма

С учетом характера движения звеньев механизма составлено выражение для вычисления его кинетической энергии:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5,$$

$$T = \frac{1}{2} I_{10} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_{s2}^2 + \frac{1}{2} I_{2s} \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_{3c} \cdot \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_4 \cdot v_{s4}^2 + \frac{1}{2} I_{4s} \cdot \omega_4^2 + m_5 \cdot v_{s5}^2. \quad (9)$$

Результаты вычислений кинетических энергий звеньев и всего рычажного механизма приведены в табл. 2.

Таблица 2

Зависимости кинетических энергий звеньев и механизма в целом от обобщенной координаты и обобщенной скорости

№ п.п.	h , м	v_{D2D} , м/с	T_1 , Дж	$T_{2П}$, Дж	$T_{2ВР}$, Дж	T_3 , Дж	$T_{4П}$, Дж	$T_{4ВР}$, Дж	T_5 , Дж	T , Дж
1	0	1.200	0.014	116.58	3.747	0.018	0.003	0.187	0.001	120.6
2	0.050	1.039	0.011	86.896	2.810	0.014	0.003	0.140	0.001	89.86
3	0.087	0.600	0.006	28.835	0.937	0.005	0.005	0.047	0.003	29.83
4	0.100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0.087	–0.600	0.006	28.835	0.937	0.005	0.005	0.047	0.003	29.83
6	0.050	–1.039	0.011	86.896	2.810	0.014	0.003	0.140	0.001	89.86
7	0	–1.200	0.014	116.58	3.747	0.018	0.003	0.187	0.001	120.6
8	–0.050	–1.039	0.011	86.896	2.810	0.014	0.003	0.140	0.001	89.86
9	–0.087	–0.600	0.006	28.835	0.937	0.005	0.005	0.047	0.003	29.83
10	–0.100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	–0.087	0.600	0.006	28.835	0.937	0.005	0.005	0.047	0.003	29.83
12	–0.050	1.039	0.011	86.896	2.810	0.014	0.003	0.140	0.001	89.86
13	0	1.200	0.014	116.58	3.747	0.018	0.003	0.187	0.001	120.6

Расчеты показали, что в наибольшей степени на кинетическую энергию механизма влияет кинетическая энергия T_2 исполнительного звена, а слагаемые T_1 , T_3 , T_4 и T_5 , входящие в выражение (9), пренебрежимо малы.

С учетом сказанного и с учетом соотношений (6) зависимость кинетической энергии механизма от обобщенной координаты h и обобщенной скорости $\dot{h}$ будет иметь вид:

$$T \approx T_2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot v_{s2}^2 + \frac{1}{2} I_{s2} \cdot \omega_2^2 = 130,1 \cdot \dot{h}^2 \cdot (0,0484 \cdot h - 0,789)^2 + 2,602 \cdot h^2. \quad (10)$$

Составление уравнения Лагранжа

Уравнение Лагранжа составляем в форме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{h}} \right) - \frac{\partial T}{\partial h} = Q_h. \quad (11)$$

Производные в левой его части равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{h}} &= 260.2 \cdot \dot{h} \cdot (0.0484 \cdot h - 0.789)^2, \quad \frac{\partial T}{\partial h} = 12.59 \cdot \dot{h} \cdot (0.0484 \cdot h - 0.789), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{h}} \right) &= 260.2 \cdot (0.0484 \cdot h - 0.789) \cdot \ddot{h} + 260.2 \cdot \dot{h} \cdot 2 \cdot (0.0484 \cdot h - 0.789) \cdot \dot{h}, \\ \dot{h} &= k \cdot \sqrt{a^2 - h^2}, \quad \ddot{h} = -\frac{k \cdot n \cdot h}{\sqrt{a^2 - h^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для определения обобщенной силы Q_h составляем расчетную схему. На рис. 4 показано звено 2 механизма, на которое действуют сила тяжести $\overline{m_2 g}$, электромагнитная сила $\overline{F}$, действующая между обмотками ротора и статора электродвигателя и направленная по линии AB . Реакции $\overline{R}_{12}$, $\overline{R}_{32}$ на звено 2 соответственно со стороны звеньев 1 и 3, весом которых пренебрегаем, направлены по стержням OA и BC . Массы звеньев 4 и 5 также пренебрежимо малы, поэтому реакция $\overline{R}_{42} \approx 0$.

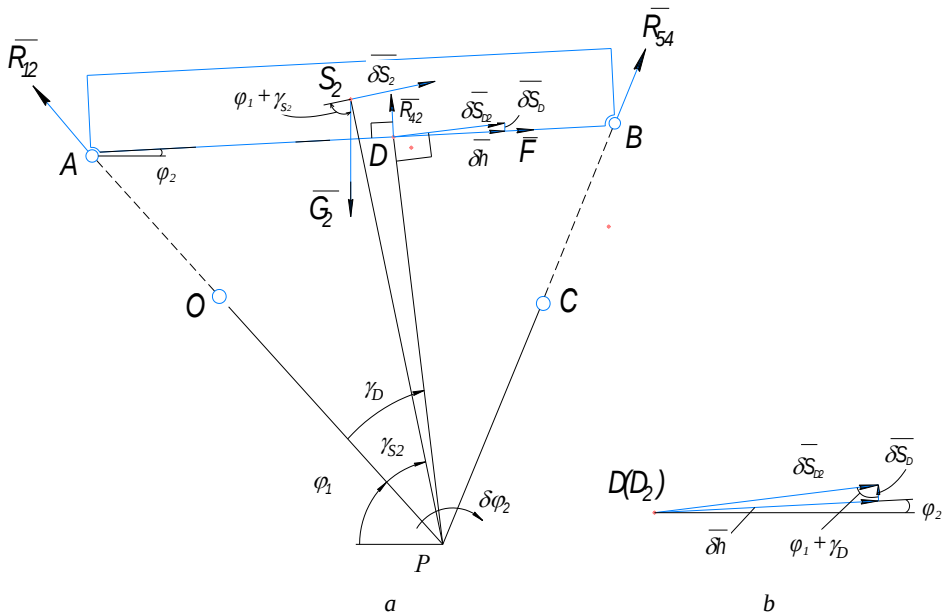


Рис. 4. К определению обобщенной силы: *a* – действующие на второе звено силы и малые перемещения его точек; *b* – перемещение точки D

Fig. 4. To the definition of the generalized force: (a) forces acting on the second link and small displacements of its points and (b) moving point D

Выразим перемещения точек приложения действующих на шатун 2 активных сил $\bar{F}$ и $\overline{m_2 g}$ через вариацию δh обобщенной координаты.

При повороте звена 2 вокруг его мгновенного центра скоростей P на малый угол $\delta\varphi_2$ центр тяжести S_2 и точка D получают элементарные перемещения, связанные соотношением $\delta S_2 = \delta_{D2} \cdot PS_2 / DP$. Из векторного треугольника на рис. 4, б получим

$$\delta S_{D2} \cdot \sin(\varphi_1 + \gamma_D) = \delta h \cdot \cos \varphi_2.$$

Таким образом,

$$\delta S_{D2} = \frac{\delta h \cdot \cos \varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \gamma_D)}, \quad \delta_{S2} = \delta h \cdot \frac{PS_2}{DP} \cdot \frac{\cos \varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \gamma_D)}. \quad (13)$$

Активные силы $\bar{G}_2$ и $\bar{F}$, действующие на шатун, на вариации обобщенной координаты совершают малые работы:

$$\begin{aligned} \delta A = \delta A(\bar{F}) + \delta A(\bar{G}_2) &= F \cdot \delta h - m_2 g \cdot \delta S_2 \cdot \cos(\varphi_1 + \gamma_{S2}) = \\ &= \left[F - m_2 g \cdot \frac{PS_2}{DP} \cdot \frac{\cos(\varphi_1 + \gamma_{S2}) \cdot \cos \varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \gamma_D)} \right] \cdot \delta h. \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда обобщенная сила равна в уравнении Лагранжа (11) равна

$$Q_h = F - m_2 g \cdot \frac{PS_2}{DP} \cdot \frac{\cos(\varphi_1 + \gamma_{S2}) \cdot \cos \varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \gamma_D)}. \quad (15)$$

Обсуждение результатов

Из уравнения Лагранжа (11) с учетом (12), (15) получим выражение для управляющей силовой функции F (электромагнитной силы линейного асинхронного электродвигателя)

$$F = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{h}} \right) - \frac{\partial T}{\partial h} + m_2 g \cdot \frac{PS_2}{DP} \cdot \frac{\cos(\varphi_1 + \gamma_{S2}) \cdot \cos \varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \gamma_D)}. \quad (16)$$

Были выполнены многократные вычисления по выражениям (11), (12) и построен график зависимости электромагнитной силы от времени в диапазоне одного периода (рис. 5).

Если посредством коммутатора в обмотках электродвигателя создается сила, меняющаяся по установленному (близкому к синусоидальному) закону, обеспечивается требуемый закон движения исполнительного звена 2 машины и происходит эффективная очистка зерновой смеси.

Однако создание такого управляющего электронного устройства, обеспечивающего синусоидальное изменение электродвижущей силы, является достаточно сложной технической задачей. На практике в большинстве случаев применяют более простое и дешевое устройство, обеспечивающее постоянное по модулю значение электродвижущей силы, показанное на рис. 5 пунктирной линией. Значение постоянной электродвижущей силы определяется из условия равенства за полупериоды $T/2$ импульсов (соответствующих площадям подынтегральных линий) вычисленной и заменяющей сил.

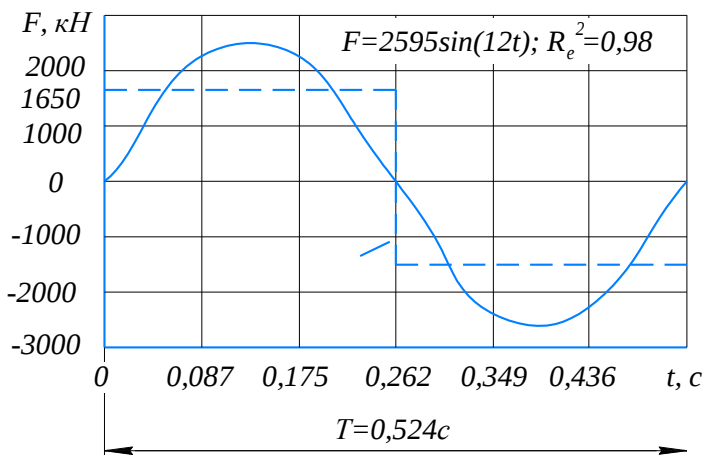


Рис. 5. Изменение электромагнитной силы линейного электродвигателя
Fig. 5. Variation in the electromagnetic force of a linear electric motor

Как показывает опыт создания технологических машин с приводом от линейного асинхронного электродвигателя, такая замена закона изменения электро-движущей силы на показателях их работы существенно не отражается [10, 11].

Закключение

1. Предложена кинематическая схема и изготовлен опытно-лабораторный экземпляр механизма качающегося сепаратора для просеивания зерновой смеси. В результате применения для его привода асинхронного линейного электродвигателя создаются более благоприятные условия просеивания зерновой смеси по сравнению с существующими машинами, приводимыми двигателями вращения. Достоинствами разрабатываемого механизма являются возможность безостановочного регулирования режимов колебательного плоскопараллельного движения решетных станов (амплитуды, частоты и углов качания), снижение энергоемкости процесса сепарации зерновой смеси, отсутствие необходимости применения энергозатратных, массоемких элементов привода (редуктора, устройства преобразования вращательного движения в поступательное и др.).

2. Предложено для системы с одной степенью свободы в качестве обобщенной координаты, определяющей положения звеньев механизма, использовать перемещение ротора линейного электродвигателя относительно его статора. Определены линейные и угловые скорости звеньев рычажного механизма в зависимости от обобщенной координаты h и обобщенной скорости $\dot{h}$. Составлены выражения кинетической энергии механизма в форме уравнений (10), (11), что удобно для составления входящих в уравнения Лагранжа частных производных $\partial T / \partial h$ и $\partial T / \partial \dot{h}$.

3. Найдена из уравнения Лагранжа второго рода требуемая электромагнитная сила, создаваемая в обмотках линейного электродвигателя электронным коммутатором. По форме импульс требуемой электромагнитной силы близок к синусоидальному.

4. Показано, что возможна замена меняющейся по синусоидальному закону электродвижущей силы на постоянную по модулю и равную по импульсу силу. В этом случае упрощается и удешевляется электронное коммутирующее устройство, а на эффективности очистки зерновой смеси такая замена существенно не отражается.

Список источников

1. Babic M., Babic L. Influence of basic wheat grain physical properties onto hydrodinamical regimes // AgEng. Madrid, 23–26 September 1996. Paper 96F–067.
2. Bohnet M. Mechanische Verfahrenstechnik. Weinheim : Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2004. 270 S.
3. Быков В.С. Повышение эффективности процесса сепарирования зерновых смесей на плоских качающихся решетках : дис. ... д-ра техн. наук : 05.20.01. Воронеж, 1999. 422 с.
4. Корнев А.С., Оробинский В.И., Сундеев А.А. Повышение эффективности работы плоских решет, решетных станков зерноочистительных машин // Инновационные технологии и технические средства для АПК. 2014. Ч. III. С. 84–89.
5. Linenko A.V., Gabitov I.I., Baynazarov V.G., Tuktarov M.F., Aipov R.S., Akchurin S.V., Kamalov T.I., Badretdinov I.D., Leontiev D.S., Vokhmin V.S. The mechatronic module “linear electric drive – sieve boot” intelligent control system of grain cleaner // Journal of the Balkan Tribological Association. 2019. V. 25 (3). P. 708–717.
6. Michalczyk J., Cieplik G. Maximal amplitudes of vibrations of the suspended screens, during the transient resonance // Archives of Mining Sciences. 2016. V. 61 (3). P. 537–552.
7. Аипов Р.С., Линенко А.В. Линейные электрические машины и линейные асинхронные электроприводы технологических машин. Уфа : Башкирский ГАУ, 2013. 308 с.
8. Nafikov M.Z., Gabitov I.I., Aipov R.S., Akchurin S.V., Ahmetianov I.R., Zagirov I.I. Kinematic parameters of the swinging separator driven by linear electric motor // Journal of the Balkan tribological association. 2019. V. 25 (3). С. 832–844.
9. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин : учебник для вузов. М. : Наука, 1988. 640 с.
10. Aipov R.S., Linenko A.V., Tuktarov M.F., Bainazarov V.G. Analysis of pulsed operating mode of linear induction drive of grain cleaning // Proceedings of the International Conference “Actual Issues of Mechanical Engineering” 2017 (AIME 2017). P. 420–424.
11. Туктаров М.Ф., Байназаров В.Г., Махмудов Р.Ф., Яруллин Р.Б. Управление линейным электроприводом зерноочистительной машины // Вестник Башкирского государственного аграрного университета. 2020. № 2 (54). С. 131–138.

References

1. Babic M., Babic L. (1996) Influence of basic wheat grain physical properties onto hydrodynamical regimes. *AgEng '96 International Conference on Agricultural Engineering', Madrid, 23–26 September 1996*, Paper 96 F – 067.
2. *Mechanische Verfahrenstechnik* (2004) Ed. by Bohnet M. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA.
3. Bykov V.S. (1999) *Povysheniye effektivnosti protsessa separirovaniya zernovykh smesey na ploskikh kachayushchikhsya reshetakh*. [Improving the efficiency of the process of separating grain mixtures on flat swinging sieves]. Dissertation. Voronezh.
4. Kornev A.S., Kornev A.S., Orobinskiy V.I., Sundeyev A.A. (2014) *Povyshenie effektivnosti raboty ploskikh reshet, reshetnykh stanov zernoochistitel'nykh mashin*. [Improving the efficiency of flat sieves, sieve mills of grain cleaning machines]. *Innovatsionnyye tekhnologii i tekhnicheskiye sredstva dlya APK. Chast' III*. pp. 84–89.

5. Linenko A.V., Gabitov I.I., Baynazarov V.G., Tuktarov M.F., Aipov R.S., Akchurin S.V., Kamalov T.I., Badretdinov I.D., Leontiev D.S., Vokhmin V.S. (2019) The mechatronic module “linear electric drive – sieve boot” intelligent control system of grain cleaner. *Journal of the Balkan Tribological Association*. 25(3). pp. 708–717.
6. Michalczyk J., Cieplak G. (2016) Maximal amplitudes of vibrations of the suspended screens, during the transient resonance. *Archives of Mining Sciences*. 61(3). pp. 537–552.
7. Aipov P.S., Linenko A.V. (2013) *Lineynyye elektricheskiye mashiny i lineynyye asinkhronnyye elektropriivody tekhnologicheskikh mashin* [Linear electric machines and linear asynchronous electric drives of technological machines]. Ufa: Bashkir State Agrarian University.
8. Nafikov M.Z., Gabitov I.I., Aipov R.S., Akchurin S.V., Ahmetianov I.I., Zagirov I.R. (2019) Kinematic parameters of the swinging separator driven by a linear electric motor. *Journal of the Balkan Tribological Association*. 25(3). pp. 832–844.
9. Artobolevskiy I.I. (1988) *Teoriya mekhanizmov i mashin*. [Theory of mechanisms and machines]. Moscow: Nauka.
10. Aipov R.S., Linenko A.V., Tuktarov M.F., Bainazarov V.G. (2017) Analysis of pulsed operating mode of linear induction drive of grain cleaning. *Proceedings of the International Conference "Actual Issues of Mechanical Engineering" 2017 (AIME 2017)*. pp. 420–424.
11. Tuktarov M.F., Baynazarov V.G., Makhmutov R.F., Yarullin R.B. (2020) Upravlenie lineinym elektropriivodom zernoochistitel'noy mashiny [Control of the linear electric drive of the grain cleaning machine]. *Vestnik Bashkirskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta*. 54(2). pp. 131–138.

Сведения об авторах:

Нафиков Марат Закиевич – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры механики и конструирования машин Башкирского государственного аграрного университета (Уфа, Россия). E-mail: nafikovmz@rambler.ru

Загиров Ильнур Илдарович – кандидат технических наук, доцент кафедры механики и конструирования машин Башкирского государственного аграрного университета (Уфа, Россия). E-mail: zagiryh22@mail.ru.

Каримов Хасан Талхиевич – кандидат технических наук, доцент кафедры механики и конструирования машин Башкирского государственного аграрного университета (Уфа, Россия). E-mail: carimov.ces@mail.ru.

Пермяков Валерий Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры механики и конструирования машин Башкирского государственного аграрного университета (Уфа, Россия). E-mail: ir.perm@yandex.ru.

Ахметьянов Ильшат Расимович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры механики и конструирования машин Башкирского государственного аграрного университета (Уфа, Россия). E-mail: ahmetir09@rambler.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Nafikov Marat Zakievich (Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Mechanics and Machine Design, Bashkir State Agrarian University, Ufa, Russian Federation). E-mail: nafikovmz@rambler.ru

Zagirov Ilnur Ildarovich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Mechanics and Machine Design, Bashkir State Agrarian University, Ufa, Russian Federation). E-mail: zagiryh22@mail.ru

Karimov Xacan Talxievich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Mechanics and Machine Design, Bashkir State Agrarian University, Ufa, Russian Federation). E-mail: carimov.ces@mail.ru

Permyakov Valery Nikolaevich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the chair of mechanics and engineering graphics, of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Bashkir State Agrarian University», Ufa, Russian Federation). E-mail: ir.perm@yandex.ru

Akhmet'yanov Il'shat Rasimovich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the chair of mechanics and engineering graphics, of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Bashkir State Agrarian University», Ufa, Russian Federation). E-mail: ahmetir09@rambler.ru

***Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.
The authors declare no conflicts of interests.***

Статья поступила в редакцию 08.12.2021; принята к публикации 22.03.2022

The article was submitted 08.12.2021; accepted for publication 22.03.2022

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/76/12

Численное моделирование процесса изготовления крупногабаритного композитного кокона с учетом термовязкоупругости

Ляйсан Рамилевна Сахабутдинова¹, Олег Юрьевич Сметанников²,
Глеб Валентинович Ильиных³

^{1, 2, 3} *Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия*

¹ *lyaysans@list.ru*

² *vmm@pstu.ru*

³ *ilinykh.pnpu@yandex.ru*

Аннотация. Представлены результаты моделирования основных этапов технологического процесса производства крупногабаритной оболочки методом непрерывной намотки. Сформулирована система граничных и начальных условий для конечно-элементного анализа. На основе экспериментальных данных и концепции многоуровневого моделирования получены эффективные вязкоупругие характеристики для материала оболочки. Описана физическая модель из пакета ANSYS Mechanical APDL для имитации термомеханического поведения материалов оправки и оболочки, получены параметры выбранной модели.

Ключевые слова: термовязкоупругость, метод непрерывной намотки, слоистый композиционный материал, многоуровневое моделирование, Prony series, Williams–Landel–Ferry shift function

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Пермского края в рамках научного проекта № 20-48-596009.

Для цитирования: Сахабутдинова Л.Р., Сметанников О.Ю., Ильиных Г.В. Численное моделирование процесса изготовления крупногабаритного композитного кокона с учетом термовязкоупругости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 165–181. doi: 10.17223/19988621/76/12

Numerical simulation of the process manufacture of large-scale composite shell taking into account thermo viscoelastic

Lyaysan R. Sakhabutdinova¹, Oleg Yu. Smetannikov², Gleb V. Il'inykh³

^{1,2,3} Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

¹ lyaysans@list.ru

² vmm@pstu.ru

³ ilinykh.pnpu@yandex.ru

Abstract. The aim of this work is to obtain the evolution of contact pressure on the surface of the forming mandrel during the manufacture of large-scale composite shells by continuous winding. A numerical analogue of a real structure is built in the form of a system of assembly equipment, a forming mandrel and a shell. Effective viscoelastic characteristics for the shell material are obtained on the basis of experimental data and the concept of multilevel modeling. A series of computational experiments has been carried out to verify the model of thermoviscoelastic behavior of a composite material; the model is a combination of anisotropic elastic behavior of a medium with one independent viscoelastic operator. It has been found that, at the stage of winding, the influence of the behavior model of the shell material is not significant because viscoelasticity of the mandrel material makes the greatest contribution to the reduction of the contact pressure on the mandrel surface. Based on the data obtained, a conclusion is made that it is advisable and important to take into account the rheological properties not only of the material of the forming mandrel but also of the multilayer shell. The methods of finite element analysis presented in the work and the computational modules and programs implemented on their basis, as well as the calculation results, are of great practical importance for automating the process of predicting the evolution of the stress-strain state at the technological stages of manufacturing structures of the mandrel-shell type.

Keywords: thermoviscoelasticity, continuous winding method, laminated composite material, multilevel modeling, Prony series, Williams-Landel-Ferry shift function

Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR and Perm Territory, project number 20-48-596009.

For citation: Sakhabutdinova, L.R., Smetannikov, O.Yu., Il'inykh, G.V. (2022) Numerical simulation of the process manufacture of large-scale composite shell taking into account thermo viscoelastic. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 165–181. doi: 10.17223/19988621/76/12

Введение

Полимерные композиционные материалы занимают одно из лидирующих мест среди конструкционных материалов. Улучшенные физико-механические и эксплуатационные характеристики позволили значительно расширить применение полимерных композитов в машиностроении [1], строительстве [2], авиастроении [3], недропользовании [4] и других отраслях промышленности. Полимерные

материалы применяются в качестве защитных и защитно-упрочняющих покрытий и прослоек [5], для создания элементов конструкций [6], а также для создания изделий с использованием метода намотки [7–8]. Намотка – это процесс изготовления высокопрочных армированных изделий, форма которых определяется вращением произвольных образующих (оправок). Для связующей матрицы выбирают эпоксидные или полиэфирные смолы, полимеры сложных виниловых эфиров. Выбор связующего зависит от типа армирующего материала [9–10]. Оправки для намотки должны иметь форму и размеры, точно соответствующие внутренней поверхности наматываемых изделий, эффективно воспринимать силовые и температурные воздействия при намотке и отверждении связующего. При производстве крупногабаритных изделий преимущественно используются разрушаемые оправки, для их изготовления возможно применение песчано-полимерных смесей или легкоплавких материалов [11].

В процессе роста объемов производства изделий из композитных материалов, в том числе и способом мокрой намотки, актуальной становится проблема точного прогнозирования несущей способности конструкций, что тесно связано с разработкой эффективных математических моделей поведения как композиционных материалов в целом, так и матрицы, связующего и армирующих элементов в частности. Качественные модели поведения композитов позволят оценить влияние наиболее значимых конструктивных и технологических факторов на напряженно-деформированное состояние и прочность конструкций [12].

На протяжении последних десятилетий многие группы и отечественных, и зарубежных ученых занимались исследованием проблем, связанных с изготовлением намоточных изделий. Основные исследуемые вопросы можно разделить на три группы: определение эффективных механических характеристик [13]; определение усилий, реализуемых в материале в процессе намотки армирующих волокон на формообразующую оправку [14]; определение остаточных напряжений после изготовления [15]. Отдельно стоит проблема изучения термовязкоупругого поведения материалов, используемых в процессе производства конструкций [16]. В силу особенностей процесса изготовления крупногабаритных намоточных изделий, таких как длительность процесса намотки (от 10 до 15 суток) и высокотемпературный режим полимеризации связующего (до 170°C), целесообразно учитывать реологические процессы, протекающие в материале песчано-полимерных оправок и наматываемых оболочек, поскольку они оказывают существенное влияние на напряженно-деформированное состояние изделия. Экспериментальные методы определения характеристик достаточно дорогостоящие и имеют ряд физических ограничений, не позволяющих установить весь набор необходимых для проектирования характеристик [17]. Поэтому развитие численных моделей является перспективным и быстроразвивающимся направлением в вопросах изучения и применения полимерных композиционных материалов.

Объединение в единый расчетный модуль задач по определению эффективных характеристик материалов, усилий, реализуемых в процессе укладки армирующих материалов, температурных полей и деформаций в процессе отверждения позволит рассмотреть поведение конструкции с технологической оснасткой на всех ключевых этапах процесса производства, а также локализовать зоны возникновения дефектов.

Объект исследования

Объектом данного исследования является крупногабаритное намоточное изделие, представляющее собой пластиковую оболочку типа «кокон» с технологической оснасткой, состоящей из вала, песчано-полимерной оправки и прижимающего устройства, обеспечивающего фиксацию оправки. На рис. 1 представлены схема рассматриваемой конструкции и модель для решения тестовых задач в виде трехслойного сегмента цилиндра. Поскольку поставлена задача разработки комплексной методики прогнозирования напряженно-деформированного состояния конструкции в процессе изготовления, то в качестве предмета исследования выбраны два этапа технологического процесса – намотка и отверждение связующего.

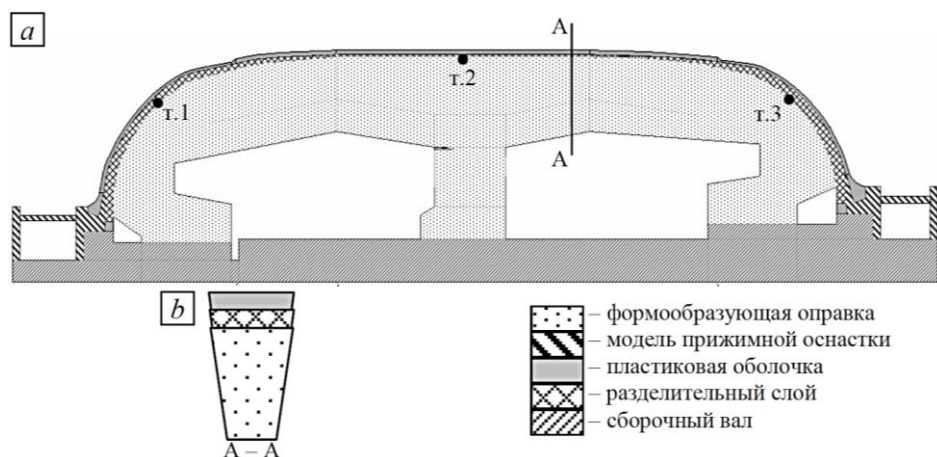


Рис. 1. Расчетная схема конструкции:

a – схема реальной конструкции; *b* – тестовая модель

Fig. 1. Scheme of the construction:

(*a*) real construction and (*b*) simplified model

Реальная конструкция не осесимметрична, так как секции формообразующей оправки укреплены ребрами жесткости и имеют технологические отверстия. Поэтому при численном моделировании разработан трехмерный конечно-элементный аналог, учитывающий не только габариты конструкции, но и ее технические особенности. Конечно-элементная модель параметризирована по размерам, углам, схеме армирования оболочки, усилиям и режиму полимеризации, что значительно расширяет ее применимость на производстве.

Подобные крупногабаритные изделия, как правило, малосерийные. К готовой оболочке предъявляются повышенные требования по прочности и точности геометрической формы. Особенно важно, что готовое изделие не должно иметь геометрических дефектов на внутренней поверхности. На появление таких отклонений, прежде всего, влияют свойства и поведение оправки в процессе производства. Поэтому при проектировании изделий данного класса важно вычислить зависимость нормального давления на поверхности оправки от условий техноло-

гического процесса. Для этого применяют упрощенные модели в упругой постановке, поскольку экспериментально измерить значения контактного давления на производстве трудоемко, нетехнологично и финансовозатратно [18]. Использование численных моделей позволяет как оценить эволюцию нормального давления в конкретных точках на поверхности оправки, так и получить интегральные оценки. В рамках исследования для первого этапа валидации модели выбрано три ключевых точки на поверхности оправки, обозначенные на рис. 1, для количественной и качественной оценки эволюции нормального давления. Точки 1 и 3 расположены на полусферических донных участках, точка 2 – на цилиндрическом.

Таким образом, разработка трехмерного численного аналога – новый этап для повышения точности расчетов и численных исследований напряженно-деформированного состояния систем «оправка–оболочка». Основываясь на особенностях технологического процесса изготовления пластиковых оболочек, построены расчетные схемы этапов технологического процесса. Определена система внешних силовых и температурных воздействий.

Постановка задачи

Поскольку технологический процесс сопряжен с температурным воздействием, необходимо последовательно решать два типа задач. Для определения изменения температурных полей в конструкции на протяжении процесса полимеризации решается задача нестационарной теплопроводности в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой. Общая постановка представлена в [19]. Для определения эволюции напряженно-деформированного состояния конструкции в процессе изготовления решается квазистатическая краевая задача. В общем случае постановка задачи без учета объемных сил описана в [20]. В качестве исходных данных для описания поведения материалов выступали экспериментальные кривые релаксации материалов оправки [21], однонаправленного пластика и эпоксидного связующего, полученные при различных температурах. Согласно [22] рассматриваемые материалы можно принять линейновязкоупругими и термореологически простыми. В качестве определяющих соотношений выбрана вязкоупругая модель Пропу, использующая в качестве релаксационного ядра сумму экспонент с постоянным модулем объемного сжатия.

В выбранной модели предполагается, что материал испытывает только сдвиговую релаксацию при постоянном значении модуля объемного сжатия. Для получения экспериментальных параметров удобно использовать данные испытаний на одноосное растяжение–сжатие. Модуль релаксации для одноосного растяжения–сжатия имеет вид:

$$E(t) = E_0 \left[c_0 + \sum_{i=1}^{N_e} c_i \exp\left(-\frac{t}{\beta_i}\right) \right] \quad (1)$$

здесь c_i – относительные модули растяжения–сжатия для времен релаксации β_i , N_e – количество времен релаксации растяжения–сжатия.

Определяющее соотношение для одноосного случая:

$$\sigma(t) = \int_0^t \left[E_\infty + E_0 \sum_{i=1}^{N_e} c_i \exp\left(-\frac{t-\tau}{\beta'_i}\right) \right] d\varepsilon(\tau), \quad (2)$$

где $\beta'_i = \frac{\beta_i}{A(T)}$ – приведенное время, $A(T)$ – функция сдвига. Поскольку материал предполагается термореологически простым, то используется функция сдвига Вильямса–Ланделла–Ферри

$$\lg(A(T)) = \frac{C_1(T - T_r)}{C_2 + (T - T_r)} \quad (3)$$

где T – текущая температура, T_r – постоянная базовая температура, C_1 , C_2 – эмпирические постоянные для материала.

Механическое поведение материалов в среде ANSYS Mechanical можно описать средствами модели Pgonu, предполагающей для среды наличие одного вязкоупругого оператора. При этом данная модель допускает описание поведения материала в виде сочетания ортотропно-упругих характеристик и релаксации компонент пропорционально упругим значениям [23]. Параметрами модели Pgonu являются c_i, β_i – коэффициенты аппроксимации обобщенной функции релаксации (1). Учет влияния температуры на скорость протекания релаксационных процессов описывается моделью Shift (в документации описана как Williams–Landel–Ferry Shift Function) с параметрами модели Вильямса–Ланделла–Ферри (3).

Особенности численного решения задачи

Для разработки численного аналога исследуемой конструкции предложено несколько новых подходов к конечно-элементному моделированию ключевых технологических этапов изготовления оболочки вращения, получаемой методом непрерывной намотки. Одной из рекомендаций является разделение процесса изготовления оболочки на два основных этапа: намотку высокомодульных лент на формообразующую оправку и полимеризацию связующей матрицы оболочки в печи. Такой подход позволяет проводить последовательные расчеты и оперативно варьировать параметры технологических процессов – усилия натяжения армирующих лент, усилия в прижимной оснастке, а также режим полимеризации.

При численном моделировании процесса изготовления композиционной оболочки необходимо определение эффективных вязкоупругих характеристик материала. Исходя из особенностей армирования, материал оболочки на макроуровне конструкции принято считать ортотропным. Для решения проблемы прогнозирования характеристик оболочки при изменении схемы армирования была разработана и предложена комплексная экспериментально-расчетная методика, основанная на решении краевых квазистатических задач термомеханики и принципах многоуровневого моделирования [24].

Моделирование технологического процесса изготовления осуществляется в четыре последовательных этапа. На первом этапе определяются усилия, возникающие в конструкции при натяжении высокомодульных армирующих лент на формообразующую оправку. Для реализации первого этапа моделирования на тестовой схеме (см. рис. 1, б) решена квазистатическая задача механики деформируемого тела в упругой постановке, имитирующая послойное наращивание толщины оболочки с применением технологии «оживления» конечных элемен-

тов. В каждом элементе слоя оболочки в качестве начальных условий вносились значения компонент тензора напряжений, возникающих от усилий наматывания армирующих лент. Для оценки возможности рационализации процедур численного моделирования проведено исследование влияния послойного и одномоментного оживления наматываемых слоев на изменение значения контактного давления по толщине оболочки и на поверхности оправки во время процесса намотки (рис. 2).

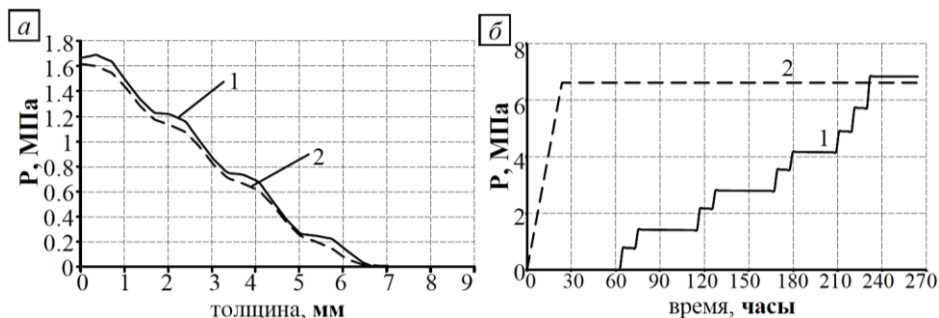


Рис. 2. Динамика контактного давления: а – по толщине; б – в процессе намотки; 1 – послойное оживление; 2 – одномоментное оживление

Fig. 2. Contact pressure curve: (a) by the thickness and (b) on the surface of the mandrel during winding; (1) layer-by-layer activation; (2) single-step activation

При одномоментном оживлении всех слоев значение максимального давления получилось на 10% ниже эталонного. Для коррекции данного значения было предложено ввести поправочный коэффициент для значений компонент тензора напряжений. На основе полученных данных сделан вывод о целесообразности объединения отдельных слоев в один слой с эффективными характеристиками и эффективными начальными напряжениями, которые обеспечивают необходимый уровень давления от оболочки на оправу. Для исследования реальной конструкции реализован параметризованный модуль для вычисления начальных напряжений в многослойной оболочке от действия силы натяжения армирующих волокон.

На втором этапе решается нестационарная задача теплопроводности для определения эволюции температурных полей в конструкции «оправка–оболочка» на протяжении полимеризации. При решении задачи теплопроводности реализуются граничные условия третьего рода, определяющие нагрев оболочки путем конвективного теплообмена с окружающей средой. Значения температуры внешней среды задаются на внешней поверхности оболочки и технологической оснастки, начальное распределение температур в конструкции постоянно. Коэффициенты конвективного теплообмена определены из серии вычислительных экспериментов, в рамках которых проводилось сравнение получаемого решения с термометрией реальной конструкции в процессе полимеризации.

Третий этап включает моделирование начального напряженного состояния в оболочке, возникающего от усилия натяжения ленты в процессе намотки, и расчет релаксации напряжений в материалах оправки и оболочки на протяжении времени, соответствующего процессу намотки. Вычисленные начальные деформации учитываются в материале оболочки как преднапряженное состояние.

Затем проводится решение квазистатической задачи. На четвертом этапе проводится расчет по определению эволюции напряженно-деформированного состояния конструкции в процессе полимеризации с использованием итерационной процедуры, в которой для последовательных моментов времени подгружается соответствующее решение задачи нестационарной теплопроводности в качестве объемной нагрузки.

Полученные таким образом результаты, основанные на экспериментальных данных и предложенных приемах конечно-элементного моделирования, позволяют оценить вклад релаксации напряжений в оправке и оболочке на эволюцию напряженно-деформированного состояния в процессе изготовления реальной конструкции.

О многоуровневом подходе к прогнозированию вязкоупругих характеристик материала оболочки

В рамках численного моделирования процесса изготовления исследуемой конструкции при изменении схемы армирования материала многослойной оболочки каждый раз необходимо решать проблему определения эффективных вязкоупругих характеристик. Выбранный метод многоуровневого моделирования позволяет выделить этот этап решения в отдельную расчетную процедуру в рамках решения общей задачи. В исследовании выбрано два масштабных уровня. На первом уровне определяются свойства ячейки периодичности однонаправленного армированного слоя. На втором уровне определяются механические характеристики пластиковой оболочки, рассмотренной на представительном объеме наматываемого композита в виде набора отдельных слоев с постоянными углами армирования.

В композиционных оболочках слои в зависимости от угла укладки арматуры разделяют на два вида – кольцевые и спиральные. Кольцевые слои – слои с арматурой, уложенной перпендикулярно оси изделия. Спиральные слои представляют собой переплетенные ленты арматуры с симметричным относительно оси оболочки углом. Традиционно [13, 25] при решении задач по определению эффективных характеристик спиральные слои принято разделять на два слоя с симметричными углами армирования. Направление армирования в каждом слое соответствует заранее определенной схеме укладки волокон. Данный подход успешно применяется при прогнозировании эффективных упругих характеристик материалов. Численная процедура прогнозирования вязкоупругих характеристик материала реализована в ANSYS Mechanical APDL. На каждом масштабном уровне решался набор квазистатических задач итерационным методом [26]. Метод основан на решении задач линейной вязкоупругости с помощью квазиконстантных операторов. При численной реализации задачи методом конечных элементов выбранный подход вырождается в решении упругой задачи на каждой итерации (каждом шаге) интегрирования по времени.

При рассмотрении первого масштабного уровня предполагаем, что волокна уложены параллельно друг другу и материал имеет однонаправленную структуру. Такой материал описывается в литературе [13, 25] как трансверсально-изотропный в плоскостях, перпендикулярных направлению армирования. В упругой постановке поведение такого композита характеризуется пятью независимыми кон-

стантами. Для определения необходимых констант формулируется три вычислительных эксперимента для трехмерной ячейки периодичности: исследование продольной, поперечной и сдвиговой продольной деформаций ячейки. Для определения коэффициентов линейного температурного расширения формулируется вычислительный эксперимент по вычислению температурной деформации. Для обобщения метода квазиконстантных операторов на данный случай упругие константы заменяются соответствующими вязкоупругими операторами. В таком случае ставятся вычислительные эксперименты на исследование релаксации ячейки периодичности при продольном, поперечном и сдвиговом продольном деформировании.

Исходными данными для моделирования ячейки периодичности выступают результаты аппроксимации экспериментальных кривых продольной релаксации однонаправленного пластика и эпоксидного связующего, полученные при различных температурах. Для материала связующего функция релаксации была построена ранее на основе экспериментальных данных [27]. Однако для численной реализации первого уровня необходимо выделить функцию релаксации волокна. При моделировании механических свойств материал волокна считается изотропным и термореологически простым. Для получения функции релаксации материала используются соотношения для определения эффективного продольного модуля однонаправлено-армированного композиционного материала в операторной форме [13, 25]. Выделенная в результате кривая функции релаксации волокна представлена на рис. 3, *а*. Результаты реализации предложенного алгоритма решения задачи по прогнозированию эффективных характеристик в виде кривой ядра продольной релаксации для однонаправленного органопластика представлены на рис. 3, *б*. Значение мгновенного модуля E_y^* в поперечном направлении однонаправленного пластика получено равным 33 ГПа, а длительного – 2 ГПа.

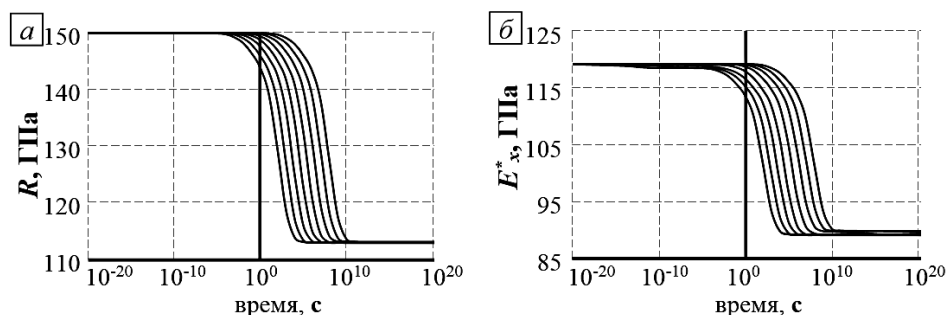


Рис. 3. Кривые ядра релаксации при различных температурах (справа налево) 20°C, 40°C, 60°C, 80°C, 100°C, 120°C, 140°C, 160°C: *а* – волокно, *б* – уровень монослоя

Fig. 3. Relaxation kernel curves at different temperatures (from right to left) 20°C, 40°C, 60°C, 80°C, 100°C, 120°C, 140°C, 160°C: (a) fiber and (b) lamina monolayer

Определение эффективных вязкоупругих характеристик материала оболочки в виде представительного объема многослойного пакета проведено на основе вычислительных экспериментов, в рамках которых исследуется эволюция напряженно-деформированного состояния с использованием метода конечных элементов. Поскольку исследуемый материал на макроуровне в глобальной системе ко-

ординат конструкции принято считать ортотропным, то для определения всех искомых операторов требуется проведение следующих вычислительных экспериментов: релаксация ячейки при деформировании в направлении кольцевого армирования; релаксация ячейки при деформировании в направлении, перпендикулярном кольцевому армированию; релаксация ячейки при деформировании в направлении, перпендикулярном плоскости слоев; сдвиговая релаксация ячейки в трех плоскостях.

Результаты реализации предложенного алгоритма решения задачи по прогнозированию эффективных вязкоупругих характеристик на уровне многослойного пакета представлены на рис. 4. Для операторного продольного модуля E_x^* мгновенное и длительное значения на 40% ниже, чем у однонаправленного пластика. Мгновенное значение операторного поперечного модуля E_y^* получено на уровне 55 ГПа, а длительное значение равно 26 ГПа, что выше значений для монослоя на порядок. Таким образом, рассматриваемая схема армирования приводит к более равномерному распределению прочностных характеристик и повышению прочности при повышенных температурах и / или длительных периодах эксплуатации.

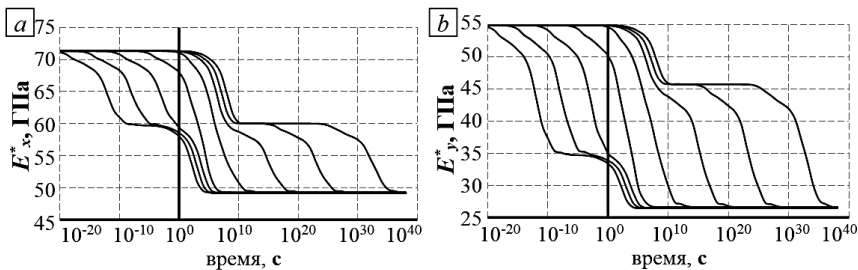


Рис. 4. Операторные ядра релаксации оболочки при различных температурах (справа налево) 20°C, 40°C, 60°C, 80°C, 100°C, 120°C, 140°C, 160°C: *a* – модуль E_x^* , *b* – модуль E_y^*
Fig. 4. Relaxation kernels at different temperatures (from right to left) 20°C, 40°C, 60°C, 80°C, 100°C, 120°C, 140°C, 160°C: Young's moduli (a) E_x^* and (b) E_y^*

Для адаптации полученных кривых релаксации в вычислительном комплексе конечно-элементного анализа выбрана методика обработки данных методами нелинейного программирования. Параметры коэффициента температурно-временного сдвига (3) определяются решением системы линейных алгебраических уравнений, составляемых из сравнения кривых релаксации при трех различных температурах. Коэффициенты аппроксимации (1) определяются минимизацией среднеквадратичной невязки.

Поскольку в ANSYS Mechanical APDL модель вязкоупругого поведения материалов Prony предполагает наличие для среды одного ядра релаксации, исходя из особенностей деформирования исследуемой конструкции сделано предположение, что наиболее существенным на эволюцию напряженно-деформированного состояния будет влияние релаксационных процессов в направлении кольцевого армирования. Параметры модели Prony определялись аппроксимацией ядра операторного модуля E_x^* . Для вычисления коэффициентов аппроксимации выбрана температура приведения $T_b = 80^\circ\text{C}$, и рассмотрен временной интервал, на котором

происходит достижение длительного модуля. Параметры аппроксимации определялись из решения задачи о поиске минимума среднеквадратичной невязки, относительная погрешность аппроксимации не превысила 0,6%.

Анализ влияния модели поведения оболочки на значение нормального давления на поверхности оправки

Для оценки влияния модели Prony с полученными параметрами на эволюцию напряженно-деформированного состояния конструкции проведено сравнение релаксации напряжений, возникающих от усилия укладки лент, на поверхности оправки при температуре 80°C. Серия вычисленных экспериментов с тремя различными вариантами представления материала оболочки выполнена на тестовой модели (рис. 1, b). Методом переменных параметров упругости были реализованы расчеты для послойного представления оболочки и оболочки с эффективными вязкоупругими характеристиками слоев. Третьим вариантом было однородное представление материала оболочки с набором упругих характеристик, описывающих ортотропность материала, и одним ядром релаксации посредством модели Prony с учетом влияния температуры на скорость протекания релаксационных процессов. Результаты решения задач представлены на рис. 5 в виде средних напряжений на поверхности оправки в трех направлениях. Обозначения соответствуют цилиндрической системе координат.

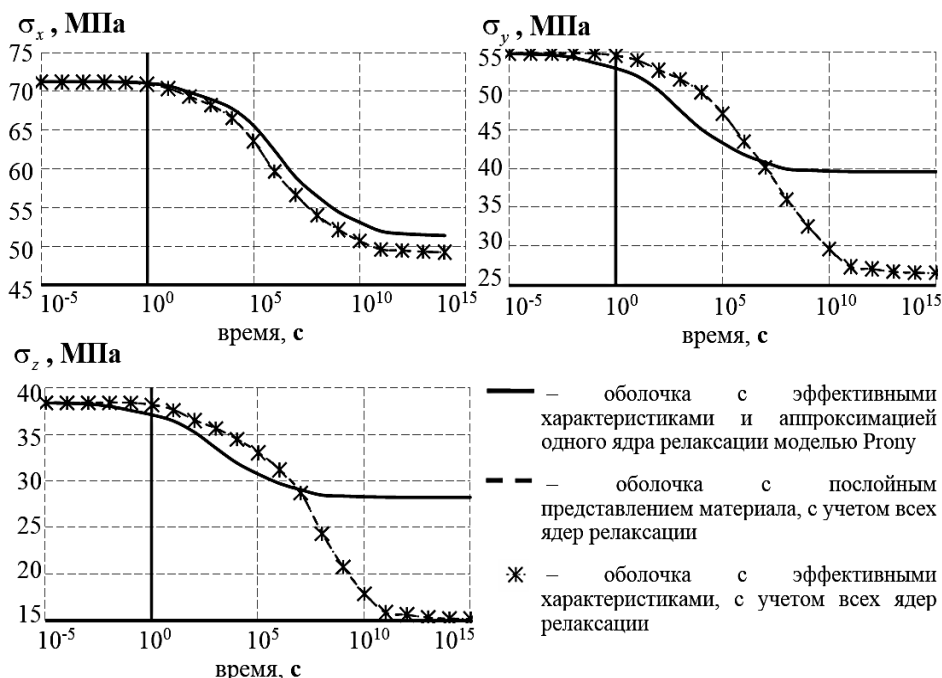


Рис. 5. Эволюция средних напряжений при температуре 80°C

Fig. 5. Evolution of mean stresses at temperature of 80°C

Решения тестовой задачи для многослойного представления и для осредненного методом переменных параметров упругости полностью идентичны. При сравнении с решением квазистатической задачи с моделью Prony получено, что отклонения длительных значений средних напряжений модели с аппроксимацией составляют: $\langle \sigma_x \rangle - 3,7\%$, $\langle \sigma_y \rangle - 23\%$, $\langle \sigma_z \rangle - 34\%$. На интервале времени до 10^7 с максимальные погрешности для разных направлений равны 3,7, 8,7 и 6,5% соответственно.

Сходимость решений по радиальному напряжению наиболее значима, поскольку оправка подвергается сжатию со стороны оболочки. Таким образом, выбранная модель описания поведения материала оболочки в исследуемой конструкции применима при решении задач по оценке прочности формообразующей оправки в процессе изготовления композиционной оболочки.

Сравнение нормального давления на поверхности оправки для двух моделей поведения оболочки

Используя вышеизложенные приемы конечно-элементного моделирования, реализовано решение комплексной задачи прогнозирования эволюции напряженно-деформированного состояния формообразующей оправки в процессе изготовления композиционной оболочки. Для оценки влияния релаксационных процессов в материале оболочки на значение нормального давления на поверхности оправки решено провести сравнение с упругой моделью, применяемой сегодня на производстве. Для этого моделирование этапов намотки и полимеризации оболочки реализовано с двумя моделями поведения материала оболочки – упругой и термовязкоупругой. Материал оправки описан как термовязкоупругий, параметры модели Prony и Shift определены по аналогичному алгоритму, что и для оболочки. В качестве исходных данных выступали результаты натурных экспериментов на сжатие при различных температурах [21]. Сравнение результатов расчетов проводится по значениям нормального давления в трех контрольных точках. Поскольку результаты, полученные для точек 1 и 3, идентичны, для качественного сравнения взято их среднее значение. Для наглядности и интерпретации полученных результатов оценка проведена для двух временных интервалов – этапа намотки оболочки и процесса полимеризации связующего. Результаты сравнения на этапе намотки представлены на рис. 6, а, на этапе полимеризации – на рис. 6, б.

На этапе намотки влияние модели поведения материала оболочки несущественно, поскольку наибольший вклад в снижение контактного давления на поверхности оправки вносит вязкоупругость материала оправки. Это подтверждается и реологическим поведением материала при нормальной температуре. По результатам экспериментальных данных при температуре 22°C снижение напряжений в образцах к моменту времени 10^5 с составило порядка 70%, с 8,5 до 2,5 ГПа.

На этапе полимеризации значения контактного давления на поверхности оправки, полученные для вязкоупругой модели оболочки, ниже на 10–15%, что также соответствует снижению продольного модуля материала многослойной оболочки. Например, для продольного модуля оболочки падение составляет 14,5% при всех рассмотренных температурах, с 70 до 60 ГПа.

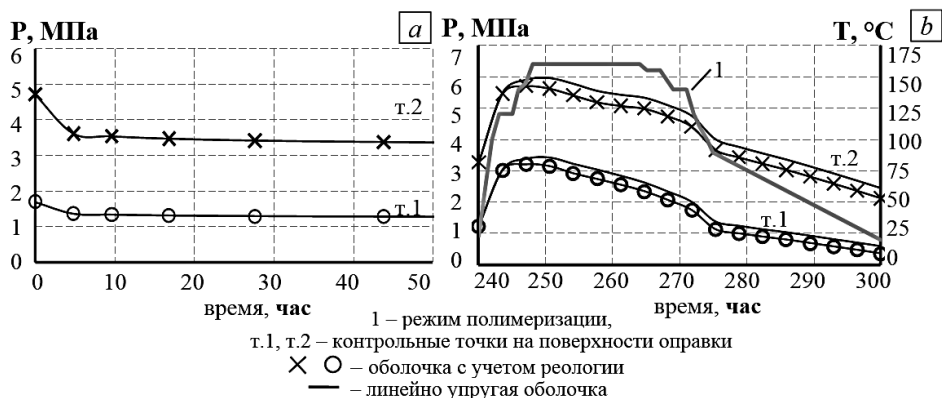


Рис. 6. Сравнение эволюции нормального давления на поверхности оправки:
 а – в процессе намотки, б – в процессе полимеризации

Fig. 6. Comparison of evolution of normal pressure on the surface of the mandrel:
 (a) winding process and (b) polymerization process

На основе полученных данных можно сделать вывод о целесообразности и важности учета термовязкоупругого поведения в композиционном материале многослойной оболочки при прогнозировании эволюции напряженно-деформированного состояния конструкции в целом и оценке прочности формообразующей оправки в процессе изготовления изделий.

Заключение

В результате численного моделирования для реальной конструкции получены количественные и качественные закономерности эволюции нормального давления на поверхности формообразующей оправки на протяжении процесса намотки и полимеризации с учетом реологического поведения ключевых элементов конструкции – многослойной оболочки и оправки.

Предложенные методы и разработанные программные модули позволят в дальнейшем количественно оценивать влияние на напряженно-деформированное состояние конструкции таких технологических параметров, как схема армирования, усилия натяжения армирующего материала, усилия, возникающие от действия технологической оснастки, режима термообработки. Планируемые в дальнейшем исследования по совершенствованию и верификации разрабатываемой модели позволят оптимизировать технологические процессы и повысить качество получаемых изделий. Предложенные методы и подходы к конечно-элементному моделированию дадут возможность существенно расширить области применения изделий из полимерных композиционных материалов, получаемых методом непрерывной намотки.

Список источников

1. Chang-Uk Kim, Jung-il Song. Development of lightweight fiber-reinforced composite pins for heavy load long pitch roller chains // Composite Structures. 2020. V. 236. Art. 111839. doi: 10.1016/j.compstruct.2019.111839

2. Адамов А.А., Каменских А.А., Панькова А.П. Численный анализ геометрической конфигурации сферической опорной части с антифрикционной прослойкой из разных материалов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 4. С. 15–26.
3. Донецкий К.И., Быстрикова Д.В., Караваев Р.Ю., Тимошков П.Н. Полимерные композиционные материалы для создания элементов трансмиссий авиационной техники (обзор) // Труды ВИАМ. 2020. № 3 (87). С. 82–93. doi: 10.18577/2307-6046-2020-0-3-82-93
4. Sebaey T.A. Design of Oil and Gas Composite Pipes for Energy Production // Energy Procedia. 2019. V. 162. P. 146–155.
5. Benea L., Simionescu N., Mardare L. The effect of polymeric protective layers and the immersion time on the corrosion behavior of naval steel in natural seawater // Journal of Materials Research and Technology. 2020. V. 9 (6). P. 13174–13184.
6. Changliang Lai, Yang Hu, Qing Zheng, Hualin Fan. All-composite flanges for anisogrid lattice-core sandwich panels to bear stretching load // Composites Communications. 2020. V. 19. P. 189–193.
7. Lei Zu, Hui Xu, Huabi Wang, Bing Zhang, Bin Zi. Design and analysis of filament-wound composite pressure vessels based on non-geodesic winding // Composite Structures. 2019. V. 207. P. 41–52.
8. Сироткин О.С., Боголюбов В.С., Малков И.В., Сыровой Г.В. Формообразование намоткой корпусных конструкций ЛА сложной формы из композиционных материалов // Авиационная промышленность. 2016. № 4. С. 29–35.
9. Воробей В.В., Евстратов С.В. Новые направления в современной технологии намотки конструкций из композиционных материалов // Вестник МАИ. 2009. Т. 16, № 1. С. 61–72.
10. Русаков И.Ю., Софронов В.Л. Основы конструирования и расчета элементов оборудования отрасли : учеб. пособие. Северск : Изд-во СТИ НИЯУ МИФИ, 2018. 271 с.
11. Зуев А.С., Емашев А.Ю., Шайдунова Г.И. Анализ особенностей изготовления изделий из полимерных композиционных материалов методом намотки. Формообразующие оправки // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2018. № 3. С. 4–13. doi: 10.18698/0236-3941-2018-3-4-13
12. Кожанов Д.А., Любимов А.К. Моделирование гибких тканых композитов в системе ANSYS MECHANICAL APDL // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Т. 10, № 6. С. 789–799. doi: 10.20537/2076-7633-2018-10-6-789-799
13. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1988. 272 с.
14. Антонов В.И. Начальные напряжения в анизотропном неоднородном цилиндре, образованном намоткой // Вестник МГСУ. 2010. № 4. С. 28–33.
15. Захарычев С.П., Иванов В.А., Отмахов Д.В., Авдеев В.А. Влияние технологических условий намотки на свойства полимерных композиционных материалов // Вестник ТОГУ. 2010. № 1 (16). С. 55–64.
16. Янковский А.П. Моделирование линейно-термовязкоупругого поведения композитов с пространственной структурой армирования // Конструкции из композиционных материалов. 2016. № 2. С. 3–14.
17. Бабушкин А.В., Вильдеман В.Э., Лобанов Д.С. Испытания на растяжение однонаправленного высоконаполненного стеклопластика при нормальных и повышенных температурах // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2010. Т. 76, № 7. С. 57–59.
18. Суходоева А.А. Совместное деформирование оправки и композиционной оболочки при силовой намотке // Вестник ПГТУ. Вычислительная математика и механика. 2000. С. 52–55.
19. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности. М. : Высшая школа, 1982. Ч. 2. 304 с.
20. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М. : Наука, 1977. 416 с.

21. Слетова А.А., Лобанов Д.С., Вильдеман В.Э., Сметанников О.Ю. Экспериментальное изучение температурных зависимостей прочностных и упругих характеристик и реологического поведения образцов песчано-полимерной композиции при сжатии // *Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации*. 2018. Т. 1. С. 272–276.
22. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязко-упругости. М. : Наука, 1970. 281 с.
23. Otero J.A., Rodríguez-Ramos R., Guinovart-Díaz R. et al. Asymptotic and numerical homogenization methods applied to fibrous viscoelastic composites using Prony's series // *Acta Mech*. 2020. V. 231. P. 2761–2771. doi: 10.1007/s00707-020-02671-1
24. Bednarczyk B.A., Stier B., Simon J-W., Reese S., Pineda E.J. Meso- and micro-scale modeling of damage in plain weave composites // *Composite Structures*. 2015. V. 121. P. 258–270. doi: 10.1016/J.COMPSTRUCT.2014.11.013
25. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
26. Куликов Р.Г., Труфанов Н.А. Применение итерационного метода к решению задачи деформирования однонаправленного композиционного материала с нелинейно-вязкоупругим связующим // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2011. Т. 4, № 2. С. 61–71.
27. Сметанников О.Ю., Труфанов Н.А. Численный анализ технологических и остаточных напряжений в стеклующихся телах // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2008. Т. 1, № 1. С. 92–107.

References

1. Chang-Uk Kim, Jung-il Song (2020) Development of lightweight fiber-reinforced composite pins for heavy load long pitch roller chains. *Composite Structures*. 236. pp. 111839. doi: 10.1016/j.compstruct.2019.111839
2. Adamov A.A., Kamenskikh A.A., Pan'kova A.P. (2020) Numerical analysis of the geometric configuration of a spherical support part with an antifriction layer made of different materials. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 4. pp. 15–26. doi: 10.15593/perm.mech/2020.4.02
3. Doneckiy K.I., Bystrikova D.V., Karavayev R.Ju., Timoshkov P.N. (2020) Polimernyye kompozitsionnyye materialy dlya sozdaniya elementov transmissiy aviatsionnoy tekhniki (obzor) [Application of polymeric composite materials for creation of elements of transmissions of aviation engineering (review)]. *Trudy VIAM – Proceedings of VIAM*. 3(87). pp. 82–93. doi: 10.18577/2307-6046-2020-0-3-82-93
4. Sebaey T.A. (2019) Design of oil and gas composite pipes for energy production. *Energy Procedia*. 162. pp. 146–155.
5. Benea L., Simionescu N., Mardare L. (2020) The effect of polymeric protective layers and the immersion time on the corrosion behavior of naval steel in natural seawater. *Journal of Materials Research and Technology*. 9(6). pp. 13174–13184.
6. Changliang Lai, Yang Hu, Qing Zheng, Hualin Fan (2020) All-composite flanges for anisogrid lattice-core sandwich panels to bear stretching load. *Composites Communications*. 19. pp. 189–193.
7. Lei Zu, Hui Xu, Huabi Wang, Bing Zhang, Bin Zi (2019) Design and analysis of filament-wound composite pressure vessels based on non-geodesic winding. *Composite Structures*. 207. pp. 41–52.
8. Sirotkin O.S., Bogolyubov V.S., Malkov I.V., Syrovoy G.V. (2016) Formoobrazovaniye namotkoy korpusnykh konstruksiy LA slozhnoy formy iz kompozitsionnykh materialov [Winding of aircraft complex-shaped structures made of composite materials]. *Aviatsionnaya promyshlennost'*. 4. pp. 29–35.
9. Vorobey V.V., Evstratov S.V. (2009) Novyye napravleniya v sovremennoy tekhnologii namotki konstruksiy iz kompozitsionnykh materialov [New directions in modern technology

- of winding structures from composite materials]. *Vestnik MAI – Aerospace MAI Journal*. 16(1). pp. 61–72.
10. Rusakov I.Ju., Sofronov V.L. (2018) *Osnovy konstruirovaniya i rascheta jelementov oborudovaniya otrasli: uchebnoe posobie* [Fundamentals of design and calculation of equipment items industry: study guide]. Seversk: STI NIYaU MIFI.
11. Zuev A.S., Emashev A.Yu., Shaydurova G.I. (2018) Analiz osobennostey izgotovleniya izdeliy iz polimernykh kompozitsionnykh materialov metodom namotki. Formoobrazuyushchie opravki [Analysing specifics of manufacturing items out of polymer composite materials by means of filament winding. Shaping mandrels]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Mashinostroyeniye – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*. 3(120). pp. 4–13. doi: 10.18698/0236-3941-2018-3-4-13
12. Kozhanov D.A., Lyubimov A.K. (2018) Import model of flexible woven composites in ANSYS Mechanical APDL. *Computer research and modeling*. 10(6). pp. 789–799. doi: 10.20537/2076-7633-2018-10-6-789-799
13. Vasil'ev V.V. (1988) *Mekhanika konstruksiy iz kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite structures]. Moscow: Mashinostroyeniye.
14. Antonov V.I. (2010) Nachal'nyye napryazheniya v anizotropnom neodnorodnom tsilindre, obrazovannom namotkoy [Initial stresses in an anisotropic inhomogeneous cylinder formed by winding]. *Vestnik MGSU*. 4. pp. 28–33.
15. Zakharychev S.P. (2010) Vliyaniye tekhnologicheskikh usloviy namotki na svoystva polimernykh kompozitsionnykh materialov [Influence of technological conditions of winding on properties of polymer composite materials]. *Vestnik TOGU – Bulletin of PNU*. 1(16). pp. 55–64.
16. Yankovskiy A.P. (2016) Modelirovaniye lineyno-termovyazkoupругogo povedeniya kompozitov s prostranstvennoy strukturoy armirovaniya [Modeling of linear thermoviscoelastic behavior of spatial-reinforced composites]. *Konstruksii Iz Kompozitsionnykh Materialov*. 2(142). pp. 3–14.
17. Babushkin A.V., Vil'deman V.E., Lobanov D.S. (2010) Ispytaniya na rastyazheniye odnonapravlennoogo vysokonapolnennogo stekloplastika pri normal'nykh i povyshennykh temperaturakh [Tensile testing of unidirectional highly filled fiberglass at normal and elevated temperatures]. *Industrial Laboratory*. 76(7). pp. 57–59.
18. Sukhodoyeva A.A. (2000) Sovmestnoye deformirovaniye opravki i kompozitsionnoy obolochki pri silovoy namotke [Joint deformation of the mandrel and the composite shell during power winding]. *Vestnik PGTU. Vychislitel'naya matematika i mekhanika*. pp. 52–55.
19. Belyayev N.M., Ryadno A.A. (1982) *Metody teorii teploprovodnosti. Chast' 2*. [Methods of the theory of heat conduction. Part 2]. Moscow: Vysshaya shkola.
20. Lehnitskiy S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [The theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow: Nauka.
21. Sletova A.A., Lobanov D.S., Vil'deman V.E., Smetannikov O.Yu. (2018) Eksperimental'noye izucheniye temperaturnykh zavisimostey prochnostnykh i uprugikh kharakteristik i reologicheskogo povedeniya obraztsov peschano-polimernoy kompozitsii pri szhatii [Experimental study of temperature dependences of strength and elastic characteristics and rheological behavior of samples of sand-polymer composition under compression]. *Aerokosmicheskaya tekhnika, vysokie tekhnologii i innovatsii*. 1. pp. 272–276.
22. Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. (1970) *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazko-uprugosti* [Fundamentals of the mathematical theory of thermoviscous elasticity]. Moscow: Nauka.
23. Otero J.A., Rodriguez-Ramos R., Guinovart-Díaz R. (2020) Asymptotic and numerical homogenization methods applied to fibrous viscoelastic composites using Prony's series. *Acta Mechanica*. 231(7). pp. 2761–2771. doi: 10.1007/s00707-020-02671-1
24. Bednarczyk B.A., Stier B., Simon J-W., Reese S., Pineda E.J. (2015) Meso- and micro-scale modeling of damage in plain weave composites. *Composite Structures*. 121. pp. 258–270. doi: 10.1016/J.COMPSTRUCT.2014.11.013

25. Pobedrya B.E. (1984) *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta.
26. Kulikov R.G., Trufanov N.A. (2011) *Primeneniye iteratsionnogo metoda k resheniyu zadachi deformirovaniya odonapravlennoy kompozitsionnoy materiala s nelineynoy-vyazkoupругim svyazuyushchim* [Application of the iteration method for solving the problem of deformation of unidirectional composites with nonlinear viscoelastic matrix]. *Vychislitel'naya mehanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*. 4(2). pp. 61–71.
27. Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A. (2008) *Chislennyy analiz tekhnologicheskikh i ostatочnykh napryazheniy v stekloyushhihsya telakh* [Numerical analysis of technological and residual stresses in vitrified bodies]. *Vychislitel'naya mehanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*. 1(1). pp. 92–107.

Сведения об авторах:

Сахабудинова Ляйсан Рамилевна – старший преподаватель кафедры вычислительной математики, механики и биомеханики факультета прикладной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (Пермь, Россия). E-mail: lyaysans@list.ru

Сметанников Олег Юрьевич – доктор технических наук, доцент кафедры вычислительной математики, механики и биомеханики факультета прикладной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (Пермь, Россия). E-mail: vmm@pstu.ru

Ильиных Глеб Валентинович – старший преподаватель кафедры вычислительной математики, механики и биомеханики факультета прикладной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (Пермь, Россия). E-mail: ilinykh.pnpu@yandex.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Sakhabutdinova Lyaysan R. (Senior lecturer, Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation). E-mail: lyaysans@list.ru

Smetannikov Oleg Yu. (Doctor of science in engineering sciences, Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation). E-mail: vmm@pstu.ru

Ilinykh Gleb V. (Senior lecturer, Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation). E-mail: ilinykh.pnpu@yandex.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.
The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 16.06.2021; принята к публикации 22.03.2022

The article was submitted 16.06.2021; accepted for publication 22.03.2022

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2022. № 76

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 15.04.2022 г. Формат 70×100¹/₁₆.
Печ. л. 11,4; усл. печ. л. 14,8. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 4985.

Дата выхода в свет 19.04.2022 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru