

Научная статья

УДК 512.54

15B33, 20H25, 20K15

doi: 10.17223/19988621/76/3

## Определяемость вполне разложимой группы ранга 3 ее группой автоморфизмов

Егор Александрович Тимошенко<sup>1</sup>, Иван Владиславович Третьяков<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>1</sup> tea471@mail.tsu.ru

<sup>2</sup> ivantretiyakov00@gmail.com

**Аннотация.** В работе Вильданова, Гайдак и Тимошенко ранее были найдены все вполне разложимые группы ранга 2, определяющиеся своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых групп. В настоящей статье аналогичная задача решена для групп ранга 3. Показано, что вполне разложимая группа ранга 3 определяется своей группой автоморфизмов тогда и только тогда, когда она является прямой суммой трех почти делимых слагаемых ранга 1, два из которых изоморфны друг другу и вкладываются в третье.

**Ключевые слова:** матрица, инволюция, вполне разложимая группа, группа автоморфизмов

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых – докторов наук МД-108.2020.1.

**Для цитирования:** Тимошенко Е.А., Третьяков И.В. Определяемость вполне разложимой группы ранга 3 ее группой автоморфизмов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 32–42. doi: 10.17223/19988621/76/3

Original article

## Determinability of a completely decomposable rank 3 group by its automorphism group

Egor A. Timoshenko<sup>1</sup>, Ivan V. Tretyakov<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> tea471@mail.tsu.ru

<sup>2</sup> ivantretiyakov00@gmail.com

**Abstract.** Let  $B \in \mathbf{X}$ , where  $\mathbf{X}$  is a class of Abelian groups. We say that  $B$  is *determined by its automorphism group in the class  $\mathbf{X}$*  if  $\text{Aut } B \cong \text{Aut } B'$  implies  $B \cong B'$  for every  $B' \in \mathbf{X}$ .

Recall that a group is said to be a *completely decomposable group of rank  $\kappa$*  if it is a direct sum of  $\kappa$  torsion-free rank 1 groups. A group  $Y$  is called *almost divisible* if  $pY = Y$  for almost all primes  $p$ . Our main theorem gives a criterion for determinability of a com-

pletely decomposable rank 3 group by its automorphism group in the class of all completely decomposable groups:

**Theorem 11.** For a completely decomposable group  $B$  of rank 3, the following are equivalent:

(1)  $B$  is determined by its automorphism group in the class of all completely decomposable groups.

(2)  $B \cong Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_2$  with  $Y_2$  being an almost divisible rank 1 group that can be embedded in  $Y_1$ .

**Keywords:** matrix, involution, completely decomposable group, automorphism group

**Acknowledgments:** The research was supported by the Russian Federation President's Grant for young Russian scientists MD-108.2020.1.

**For citation:** Timoshenko, E.A., Tretyakov, I.V. (2022) Determinability of a completely decomposable rank 3 group by its automorphism group. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 32–42. doi: 10.17223/19988621/76/3

Пусть  $B \in \mathbf{X}$ , где  $\mathbf{X}$  – некоторый класс абелевых групп. Мы будем говорить, что  $B$  определяется своей группой автоморфизмов в классе  $\mathbf{X}$ , если из изоморфизма групп автоморфизмов  $\text{Aut } B$  и  $\text{Aut } B'$ , где  $B' \in \mathbf{X}$ , всегда следует  $B \cong B'$ .

Всюду ниже под  $\mathbf{X}$  понимается класс всех вполне разложимых групп (без кручения). Данная статья служит продолжением работ [1, 2] и развивает некоторые идеи цикла работ Вильданова [3–6], посвященного вопросам определяемости абелевых групп их группами автоморфизмов в классе  $\mathbf{X}$  и некоторых его подклассах. Напомним, что *вполне разложимой группой ранга*  $k$  называется всякая группа  $B$ , представляющая собой прямую сумму  $k$  групп ранга 1; известно (см.: [7, предложение 86.1]), что любые два таких разложения группы  $B$  изоморфны. Так как всякая группа ранга 1 изоморфна подходящей *рациональной группе* (т.е. ненулевой подгруппе аддитивной группы поля рациональных чисел  $\mathbf{Q}$ ), то для удобства сразу рассматриваем группы из класса  $\mathbf{X}$  как прямые суммы рациональных групп.

Результаты работы [6] позволяют указать необходимые и достаточные условия для того, чтобы 2-делимая группа  $B \in \mathbf{X}$  ранга 3 определялась группой  $\text{Aut } B$  в классе всех 2-делимых групп, принадлежащих  $\mathbf{X}$ . В настоящей статье аналогичная задача решена уже для произвольных групп ранга 3 из класса  $\mathbf{X}$  (не обязательно являющихся 2-делимыми).

Через  $M(n, R)$ , где  $R$  – некоторое кольцо с единицей, мы обозначаем кольцо матриц порядка  $n$  над  $R$ , а через  $GL_n(R)$  – группу всех обратимых матриц этого матричного кольца. Символом ■ будет обозначаться конец доказательства (либо отсутствие доказательства).

Пусть  $\mathbf{P}$  – множество всех простых чисел. Для всякого множества  $L \subset \mathbf{P}$  будем обозначать символом  $\mathbf{Q}^{(L)}$  то подкольцо поля  $\mathbf{Q}$ , которое порождается элементом 1 и числами  $p^{-1}$ , где  $p \in L$ . Хорошо известно, что все подкольца (с единицей) поля  $\mathbf{Q}$  исчерпываются кольцами вида  $\mathbf{Q}^{(L)}$ .

Для группы  $Y$  ранга 1 через  $t(Y)$  обозначается тип этой группы (подробнее о типах см.: [7]). Пусть  $B$  – прямая сумма рациональных групп  $Y_i$ , где  $i \in I$ . Для  $i, j \in I$  положим  $\Gamma_{ij} = \{\alpha \in \mathbf{Q} \mid \alpha Y_i \subset Y_j\}$ . Несложно установить следующие свойства:

1. Всякий гомоморфизм  $Y_i \rightarrow Y_j$  представляет собой умножение на некоторое число  $\alpha \in \Gamma_{ij}$ . Таким образом,  $(\Gamma_{ij}, +)$  – абелева группа, изоморфная группе гомоморфизмов  $\text{Hom}(Y_i, Y_j)$ .

2.  $\Gamma_{ii} = \mathbf{Q}^{(L)}$ , где  $L$  – множество всех простых чисел  $p$ , таких, что  $pY_i = Y_i$ . При этом кольцо  $\Gamma_{ii}$  изоморфно кольцу эндоморфизмов  $E(Y_i)$  группы  $Y_i$ , а группа обратимых элементов  $U(\Gamma_{ii})$  кольца  $\Gamma_{ii}$  изоморфна группе  $\text{Aut } Y_i$ .

3.  $\Gamma_{ij}\Gamma_{jk} \subset \Gamma_{ik}$  для любых  $i, j, k \in I$ .

4. Если неравенство  $\mathbf{t}(Y_i) \leq \mathbf{t}(Y_j)$  не выполнено, то  $\Gamma_{ij} = 0$ .

5. Если  $\mathbf{t}(Y_i) \leq \mathbf{t}(Y_j)$ , то  $\Gamma_{ij} \neq 0$  и  $\mathbf{t}(\Gamma_{ij}) = \mathbf{t}(Y_j) : \mathbf{t}(Y_i)$ .

Нетрудно убедиться, что кольцо  $E(B)$  изоморфно кольцу конечно-столбцовых  $(I \times I)$ -матриц  $(a_{ij})_{i,j \in I}$ , таких что  $a_{ij} \in \Gamma_{ji}$  при всех  $i, j \in I$  (напомним, что матрицу называют *конечно-столбцовой*, если каждый ее столбец содержит лишь конечное число элементов, отличных от 0). Поэтому в дальнейшем будем отождествлять кольцо  $E(B)$  с указанным матричным кольцом.

Ясно, что всякая рациональная группа изоморфна некоторой рациональной группе, содержащей 1. Договоримся сразу считать, что  $1 \in Y_i$  при всех  $i \in I$ ; для всякого простого  $p$  будем обозначать  $p$ -высоту элемента 1 в группе  $Y_i$  через  $h(p, i)$ . В формулировке следующей технической леммы считаем, что  $\infty - \infty = \infty$ :

**Лемма 1.** Пусть  $\mathbf{t}(Y_i) \leq \mathbf{t}(Y_j)$ . Тогда:

а) множество  $M = \{p \in \mathbf{P} \mid h(p, j) < h(p, i) < \infty\}$  конечно;

б) группа  $\Gamma_{ij}$  содержит натуральное число  $m$ , равное произведению выражений  $p^{h(p, i) - h(p, j)}$  по всем  $p \in M$ . При этом  $p$ -высота элемента  $m$  в группе  $\Gamma_{ij}$  равна 0, если  $p \in M$ , и равна  $h(p, j) - h(p, i)$ , если  $p \notin M$ . ■

Абелеву группу  $Y$  называем *почти делимой*, если  $pY = Y$  почти для всех  $p \in \mathbf{P}$ . Следующий результат для полноты изложения приведем с доказательством.

**Теорема 2 [8].** Если хотя бы одно из слагаемых  $Y_i$  в прямом разложении группы  $B$  не является почти делимым, то существует группа  $B' \in \mathbf{X}$ , не изоморфная  $B$  и такая, что  $E(B') \cong E(B)$ .

**Доказательство.** Пусть для некоторого  $k \in I$  слагаемое  $Y_k$  не является почти делимым, т.е. множество  $L = \{p \in \mathbf{P} \mid h(p, k) < \infty\}$  бесконечно. Для всех  $i \in I$  определим группу  $Z_i \subset \mathbf{Q}$ , такую что  $1 \in Z_i$  и  $p$ -высота элемента 1 в  $Z_i$  равна числу

$$h'(p, i) = \begin{cases} h(p, i), & \text{если } p \notin L, \\ h(p, i) + h(p, k) + 1, & \text{если } p \in L. \end{cases}$$

Для  $i, j \in I$  положим  $\Omega_{ij} = \{\alpha \in \mathbf{Q} \mid \alpha Z_i \subset Z_j\}$ .

Ясно, что условия  $h(p, j) + h(p, k) + 1 < h(p, i) + h(p, k) + 1 < \infty$  и  $h(p, j) < h(p, i) < \infty$  равносильны при любых  $i, j \in I$  и  $p \in L$ . Следовательно, условия  $h'(p, j) < h'(p, i) < \infty$  и  $h(p, j) < h(p, i) < \infty$  равносильны для всякого  $p \in \mathbf{P}$ . Так как при всех  $p \in \mathbf{P}$  равносильны также условия  $h'(p, j) < h'(p, i) = \infty$  и  $h(p, j) < h(p, i) = \infty$ , для любых  $i, j \in I$  можно записать следующие эквивалентности:

$$\Gamma_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{t}(Y_i) \leq \mathbf{t}(Y_j) \Leftrightarrow \mathbf{t}(Z_i) \leq \mathbf{t}(Z_j) \Leftrightarrow \Omega_{ij} \neq 0.$$

Зафиксируем произвольную пару  $i, j \in I$ , для которой  $\mathbf{t}(Y_i) \leq \mathbf{t}(Y_j)$  и  $\mathbf{t}(Z_i) \leq \mathbf{t}(Z_j)$ . Легко видеть, что конечное множество  $M = \{p \in \mathbf{P} \mid h(p, j) < h(p, i) < \infty\}$  совпадает с множеством  $\{p \in \mathbf{P} \mid h'(p, j) < h'(p, i) < \infty\}$  и при всех  $p \in M$  выполнено равенство  $h'(p, i) - h'(p, j) = h(p, i) - h(p, j)$ . Кроме того,  $h'(p, j) - h'(p, i) = h(p, j) - h(p, i)$  для каждого  $p \notin M$ . Применяя теперь пункт б) леммы 1, мы найдем натуральное число  $m$ , принадлежащее группам  $\Gamma_{ij}$  и  $\Omega_{ij}$  и имеющее в этих группах одинаковые  $p$ -высоты для всех  $p \in \mathbf{P}$ . Таким образом,  $\Omega_{ij} = \Gamma_{ij}$ .

Мы показали, что при всех  $i, j \in I$  выполнено  $\Omega_{ij} = \Gamma_{ij}$ . Поэтому для группы  $B'$ , равной прямой сумме групп  $Z_i$  по всем  $i \in I$ , будем иметь  $E(B') = E(B)$ . С другой стороны, для всякого  $i \in I$  множество  $\{p \in \mathbf{P} \mid h'(p, i) > h(p, k)\} = L$  является бесконечным, и значит  $t(Z_i) \neq t(Y_k)$ . Поэтому  $B'$  и  $B$  не могут быть изоморфны, так как в противном случае прямое разложение группы  $B'$  в прямую сумму групп ранга 1 содержало бы слагаемое, изоморфное  $Y_k$ . ■

Поскольку из  $E(B') \cong E(B)$  вытекает изоморфизм  $\text{Aut } B' \cong \text{Aut } B$ , мы приходим к такому результату:

**Следствие 3.** Если хотя бы одно слагаемое  $Y_i$  в прямом разложении группы  $B$  не является почти делимым, то  $B$  не определяется своей группой автоморфизмов в классе  $\mathbf{X}$ . ■

Если группа  $B \in \mathbf{X}$  имеет конечный ранг  $n$ , то можно взять  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ; при этом кольцо конечно-столбцовых матриц превратится в кольцо обычных квадратных матриц порядка  $n$ , элементы которых должны удовлетворять условию  $a_{ij} \in \Gamma_{ji}$ . В этом случае  $E(B)$  оказывается подкольцом кольца  $M(n, \mathbf{Q})$ , а матричная группа  $\text{Aut } B = U(E(B))$  – подгруппой группы  $GL_n(\mathbf{Q})$ . Мы будем использовать следующий результат:

**Теорема 4 [6].** Если  $B = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_n$  и ни для какого  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$  не выполнено  $t(Y_i) \leq t(Y_1)$ , то  $B$  не определяется группой  $\text{Aut } B$  в классе  $\mathbf{X}$ . ■

Ранее была установлена

**Теорема 5 [2].** Группа  $B \in \mathbf{X}$  ранга 2 определяется своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых групп ранга 2 тогда и только тогда, когда  $B \cong Y \oplus Y$ , где  $Y$  – почти делимая группа ранга 1. ■

Будем называть *инволюцией* всякую матрицу, у которой квадрат совпадает с единичной матрицей. Если группа  $B \in \mathbf{X}$  имеет конечный ранг  $n$ , то наибольшая мощность множества попарно коммутирующих инволюций, которое содержится в  $\text{Aut } B$ , равна  $2^n$  (см.: [3, 6, 9]). Если же ранг группы  $B \in \mathbf{X}$  бесконечен, то  $\text{Aut } B$  содержит бесконечное множество попарно коммутирующих инволюций (в качестве таких инволюций можно взять диагональные матрицы из  $E(B)$ , на главной диагонали которых стоят только 1 и  $-1$ ). Отсюда следует, что если  $B, B' \in \mathbf{X}$  и  $B$  имеет конечный ранг  $n$ , то изоморфизм  $\text{Aut } B' \cong \text{Aut } B$  возможен лишь тогда, когда и  $B'$  имеет ранг  $n$ . Таким образом, группа  $B$  определяется своей группой автоморфизмов в классе  $\mathbf{X}$  тогда и только тогда, когда она определяется группой  $\text{Aut } B$  в классе всех вполне разложимых групп ранга  $n$ . В частности, теорема 5 описывает те группы  $B$  ранга 2, которые определяются группой  $\text{Aut } B$  во всем классе  $\mathbf{X}$ .

Перейдём к рассмотрению вопроса об определяемости вполне разложимых групп ранга 3 их группами автоморфизмов в классе  $\mathbf{X}$  (или, что то же самое, в классе всех вполне разложимых групп ранга 3). Будем нумеровать слагаемые  $Y_i$  таким образом, чтобы матрицы кольца  $E(B)$  были блочно-верхнетреугольными либо блочно-нижнетреугольными; критерии принадлежности таких матриц группе  $\text{Aut } B = U(E(B))$  приведены в [6, 9]. Мы выделим пять случаев.

**I.** Пусть  $B = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3$ , где  $Y_1, Y_2, Y_3$  – попарно неизоморфные рациональные группы. Так как в трехэлементном множестве  $\{t(Y_1), t(Y_2), t(Y_3)\}$  есть минимальный элемент, то в силу теоремы 4 группа  $B$  не определяется своей группой автоморфизмов в классе  $\mathbf{X}$ .

**II.** Пусть  $B = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_2$ , причем типы  $\mathbf{t}(Y_1)$  и  $\mathbf{t}(Y_2)$  несравнимы. Вновь применяя теорему 4, получаем, что  $B$  не определяется группой  $\text{Aut } B$  в классе  $\mathbf{X}$ .

**III.** Если  $B = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_2$  и  $\mathbf{t}(Y_1) < \mathbf{t}(Y_2)$ , то, полагая  $\Delta_{12} = \begin{pmatrix} \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} \end{pmatrix}$ , имеем

$$E(B) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 \\ \Delta_{12} & M(2, \Gamma_{22}) \end{pmatrix}, \quad \text{Aut } B = \begin{pmatrix} U(\Gamma_{11}) & 0 \\ \Delta_{12} & GL_2(\Gamma_{22}) \end{pmatrix}.$$

По теореме 4 группа  $B$  не определяется своей группой автоморфизмов в классе  $\mathbf{X}$ .

**IV.** Пусть  $B = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_2$ , причем  $\mathbf{t}(Y_1) > \mathbf{t}(Y_2)$ . Полагая  $\Delta_{21} = (\Gamma_{21}, \Gamma_{21})$ , имеем

$$E(B) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Delta_{21} \\ 0 & M(2, \Gamma_{22}) \end{pmatrix}, \quad \text{Aut } B = \begin{pmatrix} U(\Gamma_{11}) & \Delta_{21} \\ 0 & GL_2(\Gamma_{22}) \end{pmatrix}.$$

**V.** Если  $B = Y_1 \oplus Y_1 \oplus Y_1$ , то, очевидно,  $E(B) = M(3, \Gamma_{11})$  и  $\text{Aut } B = GL_3(\Gamma_{11})$ .

Пользуясь результатами работ [6, 9], соберем в следующей таблице некоторые свойства группы  $\text{Aut } B$  для каждого из рассматриваемых пяти случаев.

**Инварианты группы  $\text{Aut } B$**

| Тип группы $B \in \mathbf{X}$ ранга 3                                                                                                                 | I          | II | III | IV | V |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|----|-----|----|---|
| Наибольшая мощность содержащегося в $\text{Aut } B$ множества попарно коммутирующих инволюций, являющихся квадратами элементов группы $\text{Aut } B$ | 1          | 2  | 2   | 2  | 4 |
| Число центральных инволюций группы $\text{Aut } B$                                                                                                    | 2, 4 или 8 | 4  | 2   | 2  | 2 |

Из этой таблицы можно сделать два вывода:

- если группа  $B \in \mathbf{X}$  относится к типу IV и для группы  $B' \in \mathbf{X}$  имеет место изоморфизм  $\text{Aut } B' \cong \text{Aut } B$ , то группа  $B'$  относится к типу IV либо к типу III;
- если группа  $B \in \mathbf{X}$  относится к типу V и для группы  $B' \in \mathbf{X}$  имеет место изоморфизм  $\text{Aut } B' \cong \text{Aut } B$ , то группа  $B'$  может относиться только к типу V.

**Теорема 6.** Пусть  $B = Y_1 \oplus Y_1 \oplus Y_1$ , где  $Y_1$  – рациональная группа. Для группы  $B' \in \mathbf{X}$  эквивалентны следующие условия:

1)  $\text{Aut } B' \cong \text{Aut } B$ .

2)  $B' \cong Y_2 \oplus Y_2 \oplus Y_2$ , где  $Y_2$  – рациональная группа, такая, что  $E(Y_2) \cong E(Y_1)$ .

3)  $B' \cong Y_2 \oplus Y_2 \oplus Y_2$ , где  $Y_2$  – рациональная группа, обладающая тем свойством, что кольцо  $\Gamma_{22} = \{\alpha \in \mathbf{Q} \mid \alpha Y_2 \subset Y_2\}$  совпадает с  $\Gamma_{11}$ .

**Доказательство.** 2)  $\Rightarrow$  3). Если 2) выполнено, то  $\Gamma_{11} \cong E(Y_1) \cong E(Y_2) \cong \Gamma_{22}$ . Так как подкольца поля  $\mathbf{Q}$  изоморфны лишь тогда, когда они равны, то  $\Gamma_{22} = \Gamma_{11}$ .

3)  $\Rightarrow$  1). Если выполняется 3), то  $E(B') \cong M(3, \Gamma_{22}) = M(3, \Gamma_{11}) = E(B)$ , а значит,  $\text{Aut } B' = U(E(B')) \cong U(E(B)) = \text{Aut } B$ .

1)  $\Rightarrow$  2). Ввиду сказанного перед теоремой из условия 1) следует, что  $B'$  – группа типа V, т.е.  $B' \cong Y_2 \oplus Y_2 \oplus Y_2$ , где  $Y_2$  – рациональная группа. Так как выполнено  $GL_3(E(Y_2)) \cong \text{Aut } B' \cong \text{Aut } B \cong GL_3(E(Y_1))$  и при этом кольца  $E(Y_1)$  и  $E(Y_2)$  являются коммутативными областями целостности, то в силу [10, теорема 5.7.7] имеет место изоморфизм  $E(Y_2) \cong E(Y_1)$ , что и требовалось. ■

**Следствие 7.** Пусть  $B = Y_1 \oplus Y_1 \oplus Y_1$ , где  $Y_1$  – рациональная группа. Следующие условия эквивалентны:

- 1) Группа  $B$  определяется своей группой автоморфизмов в классе  $\mathbf{X}$ .
- 2) Слагаемое  $Y_1$  является почти делимым.

**Доказательство.** 1)  $\Rightarrow$  2). Предположим, что группа  $Y_1$  не является почти делимой. В этом случае существует рациональная группа  $Y_2$ , такая что  $\mathbf{t}(Y_2) > \mathbf{t}(Y_1)$  и  $E(Y_2) \cong E(Y_1)$ . Ввиду теоремы 6 имеем  $\text{Aut}(Y_2 \oplus Y_2 \oplus Y_2) \cong \text{Aut } B$ . Сами группы  $B$  и  $Y_2 \oplus Y_2 \oplus Y_2$  при этом не изоморфны, поскольку не изоморфны друг другу группы  $Y_1$  и  $Y_2$ , – получаем противоречие с условием 1).

2)  $\Rightarrow$  1). Предположим, что  $B' \in \mathbf{X}$  и  $\text{Aut } B' \cong \text{Aut } B$ . Применяя теорему 6, получаем, что  $B' \cong Y_2 \oplus Y_2 \oplus Y_2$ , где  $Y_2$  – рациональная группа, такая что  $E(Y_2) \cong E(Y_1)$ . Так как группа  $Y_1$  почти делима, то аддитивная группа кольца  $E(Y_1)$  изоморфна  $Y_1$ . Тогда аддитивная группа кольца  $E(Y_2)$  также изоморфна  $Y_1$ , что возможно лишь в случае  $Y_2 \cong Y_1$ . Таким образом,  $B' \cong B$ , т.е.  $B$  определяется своей группой автоморфизмов в классе  $\mathbf{X}$ . ■

Пусть теперь группа  $B$  относится к типу III или IV, т.е.  $B = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_2$ , где  $\mathbf{t}(Y_1)$  и  $\mathbf{t}(Y_2)$  – различные (но сравнимые) типы. Тогда имеем

$$E(B) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & M(2, \Gamma_{22}) \end{pmatrix}, \quad \text{Aut } B = \begin{pmatrix} U(\Gamma_{11}) & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & GL_2(\Gamma_{22}) \end{pmatrix};$$

при этом в точности одна из групп  $\Delta_{12}$  и  $\Delta_{21}$  равна 0, так как выполняется ровно одно из условий  $\Gamma_{12} = 0$  и  $\Gamma_{21} = 0$ . Через  $E_n$  далее обозначаем единичную матрицу порядка  $n$ , через  $G$  – группу  $\text{Aut } B$ .

**Лемма 8.** Пусть  $A = (a_{ij})$  – инволюция группы  $G$ , такая что  $a_{11} = 1$ ,  $a_{22} = a_{33} = -1$  и  $a_{23} = a_{32} = 0$ , и пусть  $\Lambda_A = \{T^{-1}ATA \mid T \in G\}$ . Следующие условия эквивалентны:

- 1) Множество  $\Lambda_A$  совпадает с множеством  $H = \begin{pmatrix} 1 & 2\Delta_{21} \\ 2\Delta_{12} & E_2 \end{pmatrix}$ .
- 2) Множество  $\Lambda_A$  является подгруппой группы  $G$ .
- 3) Множество  $\Lambda_A$  замкнуто относительно операции умножения.
- 4)  $a_{12}, a_{13} \in 2\Gamma_{21}$  и  $a_{21}, a_{31} \in 2\Gamma_{12}$ .
- 5) Инволюция  $A$  сопряжена в группе  $G$  с инволюцией  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix}$ .

**Доказательство.** Импликации 1)  $\Rightarrow$  2)  $\Rightarrow$  3) очевидны.

Запишем  $A = \begin{pmatrix} 1 & A_{12} \\ A_{21} & -E_2 \end{pmatrix}$ , где  $A_{12} = (a_{12}, a_{13})$  и  $A_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ .

3)  $\Rightarrow$  4). Для произвольных  $u \in U(\Gamma_{11})$ ,  $U_{22} \in GL_2(\Gamma_{22})$  и двух матриц  $U_{12} \in \Delta_{21}$  и  $U_{21} \in \Delta_{12}$ , таких что  $U_{12} = 0$  или  $U_{21} = 0$ , рассмотрим матрицы

$$U = \begin{pmatrix} u & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad W = \begin{pmatrix} u^{-1} & -u^{-1}U_{12}U_{22}^{-1} \\ -u^{-1}U_{22}^{-1}U_{21} & U_{22}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Легко видеть, что  $UW = WU = E_3$  и, следовательно,  $W = U^{-1}$ . Тогда

$$U^{-1}AU = W \cdot AU = W \begin{pmatrix} u & U_{12} + A_{12}U_{22} \\ uA_{21} - U_{21} & -U_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & u^{-1}(A_{12}U_{22} + 2U_{12}) \\ U_{22}^{-1}(uA_{21} - 2U_{21}) & -E_2 \end{pmatrix}$$

(мы воспользовались тем, что  $A_{12} = U_{12} = 0$  или  $A_{21} = U_{21} = 0$ ).

Если  $JA \in \Lambda_A$ , то найдется матрица  $U \in G$  со свойством  $U^{-1}AU = J$ . Считая, что  $U$  имеет вид (1), можем записать  $A_{12}U_{22} + 2U_{12} = 0$  и  $uA_{21} - 2U_{21} = 0$ . Следовательно,  $A_{12} = -2U_{12}U_{22}^{-1} \in 2\Delta_{21}$  и  $A_{21} = 2u^{-1}U_{21} \in 2\Delta_{12}$ , т.е. условие 4) выполнено.

Предположим теперь, что  $JA \notin \Lambda_A$ . Рассмотрим матрицы

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } T_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

заметим, что  $T_{22} + U_{22} = T_{22}U_{22} = U_{22}T_{22} = E_2$ . С учетом проделанных ранее вычислений имеем

$$\begin{aligned} T^{-1}AT \cdot A \cdot U^{-1}AU &= T^{-1}AT \cdot A \begin{pmatrix} 1 & A_{12}U_{22} \\ U_{22}^{-1}A_{21} & -E_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & A_{12}T_{22} \\ T_{22}^{-1}A_{21} & -E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A_{12}(U_{22} - E_2) \\ (E_2 - U_{22}^{-1})A_{21} & E_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & A_{12}(T_{22} + U_{22} - E_2) \\ (T_{22}^{-1} + U_{22}^{-1} - E_2)A_{21} & -E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix} = J. \end{aligned}$$

Следовательно,  $JA$  есть произведение матриц  $T^{-1}ATA$  и  $U^{-1}AUA$ , принадлежащих множеству  $\Lambda_A$ . Ввиду условия 3) отсюда сразу вытекает  $JA \in \Lambda_A$ , что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство импликации.

4)  $\Rightarrow$  5). Матрица  $U$  вида (1) удовлетворяет соотношению  $U^{-1}AU = J$ , если выполнено  $A_{12}U_{22} + 2U_{12} = 0$  и  $uA_{21} - 2U_{21} = 0$ . Этого можно добиться, положив  $u = 1$ ,  $U_{22} = -E_2$  и выбрав матрицы  $U_{12}$  и  $U_{21}$  таким образом, чтобы  $A_{12} = 2U_{12}$  и  $A_{21} = 2U_{21}$  (ясно, что тогда  $U_{12} = 0$  или  $U_{21} = 0$ ).

5)  $\Rightarrow$  1). Найдем сначала множество  $\Lambda_J = \{U^{-1}JUU \mid U \in G\}$ . Пусть  $U$  – произвольная матрица из  $G$ , заданная условием (1). С учетом выкладок в доказательстве импликации 3)  $\Rightarrow$  4) имеем соотношения

$$U^{-1}JUU = \begin{pmatrix} 1 & 2u^{-1}U_{12} \\ -2U_{22}^{-1}U_{21} & -E_2 \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} 1 & -2u^{-1}U_{12} \\ -2U_{22}^{-1}U_{21} & E_2 \end{pmatrix} \in H;$$

таким образом,  $\Lambda_J \subset H$ . Обратно, полагая  $u = -1$  и  $U_{22} = -E_2$ , мы видим, что всякая матрица из  $H$  принадлежит множеству  $\Lambda_J$ . Тем самым доказано, что  $\Lambda_J$  совпадает с группой  $H$ .

Ввиду условия 5) можно записать  $A = F^{-1}JF$ , где  $F \in G$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda_A &= \{T^{-1}F^{-1}JFTF^{-1}JF \mid T \in G\} = \{(FT)^{-1}J(FT)J \cdot JF^{-1}JF \mid T \in G\} = \\ &= \{U^{-1}JUU \mid U \in G\} \cdot JF^{-1}JF = \Lambda_J \cdot JF^{-1}JF. \end{aligned}$$

Поскольку матрица  $JF^{-1}JF = J^{-1}F^{-1}JFJJ = (FJ)^{-1}J(FJ)J$  принадлежит группе  $\Lambda_J$ , то  $\Lambda_A = \Lambda_J$ , что завершает доказательство. ■

**Замечание.** Если инволюция  $A \in G$  удовлетворяет эквивалентным условиям леммы 8, то легко видеть, что  $(\Lambda_A, \cdot)$  – абелева группа, изоморфная той из аддитивных групп  $\Delta_{12}$  и  $\Delta_{21}$ , которая отлична от 0. Итак, мультипликативная группа

$\Lambda_A$  изоморфна  $\Gamma_{12} \oplus \Gamma_{12}$  (соответственно  $\Gamma_{21} \oplus \Gamma_{21}$ ), если группа  $B$  относится к типу III (соответственно к типу IV).

Нетрудно найти *централизатор* инволюции  $J \in G$ , т.е. множество всех матриц из  $G$ , перестановочных с  $J$ :

**Лемма 9.** Централизатор матрицы  $J$  в группе  $G$  равен  $\begin{pmatrix} U(\Gamma_{11}) & 0 \\ 0 & GL_2(\Gamma_{22}) \end{pmatrix}$ . ■

Для подкольца  $R$  поля  $\mathbf{Q}$  обозначим через  $ML_2(R)$  подгруппу группы  $GL_2(R)$ , состоящую из всех матриц с определителем  $\pm 1$ . Из евклидовости кольца  $R$  можно вывести (см., напр.: [11]), что  $ML_2(R)$  является *вторым слоем* группы  $GL_2(R)$ , т.е. порождается множеством всех инволюций из  $GL_2(R)$ . Справедлив такой факт:

**Теорема 10 [2].** Для подколец  $R$  и  $S$  поля  $\mathbf{Q}$  эквивалентны условия:

- 1)  $GL_2(R) \cong GL_2(S)$ .
- 2)  $ML_2(R) \cong ML_2(S)$ .
- 3)  $R = S$ . ■

Предположим теперь, что в дополнение к группе  $B \in \mathbf{X}$  имеется группа  $B' \in \mathbf{X}$  типа IV, такая что существует изоморфизм  $\varphi: \text{Aut } B \rightarrow \text{Aut } B'$ . Можно считать, что  $B' = Y_3 \oplus Y_4 \oplus Y_4$ , где  $\mathbf{t}(Y_3) > \mathbf{t}(Y_4)$ . Обозначим через  $A$  ту инволюцию группы  $\text{Aut } B'$ , в которую  $J$  переходит при отображении  $\varphi$ . Запишем

$$\text{Aut } B' = \begin{pmatrix} U(\Gamma_{33}) & \Delta_{43} \\ 0 & GL_2(\Gamma_{44}) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix};$$

здесь  $\Delta_{43} = (\Gamma_{43}, \Gamma_{43})$ ,  $A_{12} \in \Delta_{43}$  и  $A_{22} \in GL_2(\Gamma_{44})$ . Ясно, что  $A_{22}$  — инволюция и  $a = \pm 1$ .

Так как  $J$  есть квадрат элемента группы  $G = \text{Aut } B$ , то инволюция  $A$  должна быть квадратом некоторого элемента из  $\text{Aut } B'$ . Отсюда вытекает, что  $a = 1$  и что  $A_{22}$  является квадратом некоторой матрицы (в частности,  $|A_{22}|$  не может быть отрицательным числом). Из приведенного в [1] описания инволюций группы  $GL_2(R)$  для колец  $R \subset \mathbf{Q}$  можно сделать вывод, что из всех инволюций группы  $GL_2(\Gamma_{44})$  только  $E_2$  и  $-E_2$  имеют определитель, отличный от  $-1$ .

Если  $A_{22} = E_2$ , то  $A$  может быть инволюцией лишь при условии  $A_{12} = 0$ . Но тогда  $\varphi(J) = A = E_3 = \varphi(E_3)$ , что невозможно, так как  $\varphi$  — биекция. Значит,  $A_{22} = -E_2$ .

В силу леммы 8 множество  $\Lambda_J = \{U^{-1}J U \mid U \in G\}$  является группой. Отсюда следует, что множество  $\varphi(\Lambda_J) = \{T^{-1}ATA \mid T \in \text{Aut } B'\}$  есть группа, изоморфная  $\Lambda_J$ . С учетом замечания после леммы 8 получаем, что группа  $\Gamma_{43} \oplus \Gamma_{43}$  изоморфна той из групп  $\Gamma_{12} \oplus \Gamma_{12}$  и  $\Gamma_{21} \oplus \Gamma_{21}$ , которая не равна 0. Из этого можно заключить, что  $\Gamma_{43} \cong \Gamma_{12}$  ( $\Gamma_{43} \cong \Gamma_{21}$ ), если группа  $B$  относится к типу III (соответственно к типу IV).

Далее, применяя лемму 8 к инволюции  $A \in \text{Aut } B'$ , получаем, что  $A$  и  $J$  сопряжены в  $\text{Aut } B'$ , т.е. найдется внутренний автоморфизм группы  $\text{Aut } B'$ , переводящий матрицу  $A$  в  $J$ . Следовательно, существует изоморфизм  $G \rightarrow \text{Aut } B'$ , при котором  $J$  переходит в  $J$ . В связи с этим будем с самого начала считать, что  $\varphi(J) = J$ .

Заметим, что  $-E_3$  — это единственная отличная от  $E_3$  центральная инволюция как в  $G$ , так и в  $\text{Aut } B'$ , а следовательно,  $\varphi(-E_3) = -E_3$ . Отсюда вытекают равенства  $\varphi(-J) = \varphi(-E_3)\varphi(J) = -E_3J = -J$ . Далее,  $\varphi$  отображает централизатор матрицы  $J$  в группе  $G$  на ее же централизатор в группе  $\text{Aut } B'$ . Ввиду леммы 9 это означает, что  $\varphi$  индуцирует изоморфизм  $U(\Gamma_{11}) \times GL_2(\Gamma_{22}) \rightarrow U(\Gamma_{33}) \times GL_2(\Gamma_{44})$ .

Ясно, что вторые слои групп  $U(\Gamma_{11}) \times GL_2(\Gamma_{22})$  и  $U(\Gamma_{33}) \times GL_2(\Gamma_{44})$  равны соответственно  $\{-1, 1\} \times ML_2(\Gamma_{22})$  и  $\{-1, 1\} \times ML_2(\Gamma_{44})$ . Таким образом,  $\varphi$  индуцирует изоморфизм  $\psi: \{-1, 1\} \times ML_2(\Gamma_{22}) \rightarrow \{-1, 1\} \times ML_2(\Gamma_{44})$ . Так как  $\varphi(-J) = -J$ , то  $\psi$  отображает двухэлементную циклическую группу, порожденную парой  $(-1, E_2)$ , на себя. Факторизуя по этой циклической группе, получаем, что  $\psi$  индуцирует изоморфизм  $ML_2(\Gamma_{22}) \rightarrow ML_2(\Gamma_{44})$ . В силу теоремы 10 отсюда следует  $\Gamma_{22} = \Gamma_{44}$ .

Если слагаемое  $Y_4$  не является почти делимым, то в силу следствия 3 группа  $B'$  не определяется своей группой автоморфизмов в классе  $X$ . Поэтому далее рассматриваем случай, когда группа  $Y_4$  почти делима. Ввиду неравенства  $t(Y_3) > t(Y_4)$  группа  $Y_3$  тоже почти делима, а значит,  $t(\Gamma_{43}) = t(Y_3) : t(Y_4) = t(Y_3)$ . Далее, так как  $\Gamma_{44} \cong E(Y_4)$ , то аддитивная группа кольца  $\Gamma_{44}$  изоморфна  $Y_4$ ; следовательно, аддитивная группа кольца  $\Gamma_{22}$  также изоморфна  $Y_4$ . Последнее возможно только при условии, что  $Y_2 \cong Y_4$  (в частности,  $Y_2$  – почти делимая группа).

Предположим, что группа  $B$  относится к типу III. Тогда имеем  $t(Y_1) < t(Y_2)$  и  $t(\Gamma_{12}) = t(Y_2) : t(Y_1) = t(Y_2)$ . С другой стороны, из соотношений  $\Gamma_{43} \cong \Gamma_{12}$  и  $Y_4 \cong Y_2$  следует  $t(\Gamma_{12}) = t(\Gamma_{43}) = t(Y_3) > t(Y_4) = t(Y_2)$  – получаем противоречие.

Предположим теперь, что группа  $B$  относится к типу IV. Тогда  $t(Y_1) > t(Y_2)$  и  $t(\Gamma_{21}) = t(Y_1) : t(Y_2) = t(Y_1)$ . Так как  $t(\Gamma_{43}) = t(Y_3)$ , то  $Y_1 \cong \Gamma_{21} \cong \Gamma_{43} \cong Y_3$ . Отсюда уже следует  $B \cong B'$ .

Мы показали, что группа  $B'$  определяется своей группой автоморфизмов в  $X$ , если слагаемое  $Y_4$  почти делимо. Объединяя этот факт со следствием 7, приходим к основному результату:

**Теорема 11.** Группа  $B \in X$  ранга 3 определяется своей группой автоморфизмов в классе  $X$  тогда и только тогда, когда выполняется  $B \cong Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_2$ , где  $Y_2$  – почти делимая группа ранга 1 и  $t(Y_1) \geq t(Y_2)$ . ■

#### Список источников

1. Гайдак В.А., Тимошенко Е.А. Инволюции полной линейной группы  $GL_2$  над подкольцом поля  $\mathbf{Q}$  // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 62. С. 19–26. doi: 10.17223/19988621/62/2
2. Вильданов В.К., Гайдак В.А., Тимошенко Е.А. Об определяемости вполне разложимой группы ранга 2 ее группой автоморфизмов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 23–32. doi: 10.17223/19988621/68/2
3. Вильданов В.К. Определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 3 (1). С. 174–177.
4. Vildanov V.K. Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group // J. Math. Sci. (New York). 2014. V. 197, No. 5. P. 590–594. doi: 10.1007/s10958-014-1739-9
5. Vildanov V.K. On determinability of a completely decomposable torsion-free Abelian group by its automorphism group // J. Math. Sci. (New York). 2018. V. 230, No. 3. P. 372–376. doi: 10.1007/s10958-018-3742-z
6. Вильданов В.К. Определяемость абелевой группы ее группой автоморфизмов и центром кольца эндоморфизмов : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород, 2014.
7. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М. : Мир, 1977. Т. 2.
8. Себельдин А.М. Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов // Математические заметки. 1972. Т. 11, № 4. С. 403–408.

9. Третьяков И.В., Тимошенко Е.А. Инволюции в группе автоморфизмов вполне разложимой группы // Всероссийская молодёжная научная конференция студентов «Все грани математики и механики»: сб. ст. Томск: НТЛ, 2021. С. 139–154.
10. О'Мира О. Лекции о линейных группах // Автоморфизмы классических групп. М.: Мир, 1976. С. 57–167.
11. Елфимова А.М., Тимошенко Е.А. О линейных группах над кольцами // Всероссийская молодёжная научная конференция «Все грани математики и механики»: сб. ст. Томск: НТЛ, 2020. С. 13–20.

### References

1. Gaidak V.A., Timoshenko E.A. (2019) Involyutsii polnoy lineynoy gruppy  $GL_2$  nad podkol'tsom polya  $\mathbf{Q}$  [Involutions of the general linear group  $GL_2$  over a subring of the field  $\mathbf{Q}$ ]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 62. pp. 19–26. doi: 10.17223/19988621/62/2
2. Vildanov V.K., Gaidak V.A., Timoshenko E.A. (2020) Ob opredelyaemosti vpolne razlozhimoy gruppy rang 2 ee gruppoy avtomorfizmov [On determinability of a completely decomposable rank 2 group by its automorphism group]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 23–32. doi: 10.17223/19988621/68/2
3. Vildanov V.K. (2011) Opredelyaemost' vpolne razlozhimoy abelevoy gruppy bez krucheniya rang 2 svoey gruppoy avtomorfizmov [Determinability of completely decomposable torsion-free Abelian group of rank 2 by its automorphism group]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod*. 3(1). pp. 174–177.
4. Vildanov V.K. (2014) Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 197(5). pp. 590–594. doi: 10.1007/s10958-014-1739-9
5. Vildanov V.K. (2018) On determinability of a completely decomposable torsion-free Abelian group by its automorphism group. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 230(3). pp. 372–376. doi: 10.1007/s10958-018-3742-z
6. Vildanov V.K. (2014) Opredelyaemost' abelevoy gruppy ee gruppoy avtomorfizmov i tsentrom kol'tsa endomorfizmov [Determinability of an Abelian group by its automorphism group and the center of its endomorphism ring]. Dissertation. Tomsk State University.
7. Fuchs L. (1973) *Infinite Abelian groups*. Vol. 2. New York; London: Academic Press.
8. Sebeldin A.M. (1972) Isomorphism conditions for completely decomposable torsion-free Abelian groups with isomorphic rings of endomorphisms. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*. 11(4). pp. 248–250. doi: 10.1007/BF01367498
9. Tretyakov I.V., Timoshenko E.A. (2021) Involyutsii v gruppe avtomorfizmov vpolne razlozhimoy gruppy [Involutions in the automorphism group of a completely decomposable group]. *All-Russia Youth Scientific Student Conference "Vse grani matematiki i mekhaniki" (sbornik statey)*. Tomsk: NTL. pp. 139–154.
10. O'Meara O.T. (1974) *Lectures on linear groups*. Providence: American Mathematical Society.
11. Elfimova A.M., Timoshenko E.A. (2020) O lineynykh gruppakh nad kol'tsami [On linear groups over rings]. *All-Russia Youth Scientific Conference "Vse grani matematiki i mekhaniki" (sbornik statey)*. Tomsk: NTL. pp. 13–20.

### Сведения об авторах:

**Тимошенко Егор Александрович** – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

**Третьяков Иван Владиславович** – магистрант механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ivantretyakov00@gmail.com

***Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.***

***Information about the authors:***

**Timoshenko Egor A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

**Tretyakov Ivan V.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ivantretyakov00@gmail.com

***Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.***

***The authors declare no conflicts of interests.***

*Статья поступила в редакцию 20.12.2021; принята к публикации 22.03.2022*

*The article was submitted 20.12.2021; accepted for publication 22.03.2022*