

Научная статья

УДК 519.633

doi: 10.17223/19988621/76/6

Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в декартовых координатах при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений

Сергей Васильевич Бакушев

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, Пенза, Россия, bakuchsv@mail.ru

Аннотация. Рассматривается построение дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях в прямоугольных декартовых координатах для плоского деформирования сплошных сред при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений как без учета, так и с учетом геометрической нелинейности. Построение биквадратичных физических зависимостей основано на вычислении секущих модулей объемного и сдвигового деформирования. Исходя из предположения о независимости, вообще говоря, друг от друга диаграмм объемного и сдвигового деформирования, рассмотрено шесть основных случаев физических зависимостей, зависящих от взаимного расположения точек излома графиков диаграмм объемного и сдвигового деформирования, аппроксимированных каждый двумя параболой.

Ключевые слова: сплошная среда, плоская деформация, дифференциальные уравнения равновесия, биквадратичные замыкающие уравнения, геометрически линейная модель, геометрически нелинейная модель

Для цитирования: Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в декартовых координатах при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 70–86. doi: 10.17223/19988621/76/6

Original article

Differential equations of continuum equilibrium for plane deformation in cartesian axials at biquadratic approximation of closing equations

Sergey V. Bakushev

Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Russian Federation, bakuchsv@mail.ru

Abstract. The subject under analysis is construction of differential equations of equilibrium in displacements for plane deformation of physically and geometrically nonlinear

continuous media when the closing equations are biquadratically approximated in a Cartesian rectangular coordinate system. Proceeding from the assumption that, generally speaking, the diagrams of volume and shear deformation are independent from each other, six main cases of physical dependences are considered, depending on the relative position of the break points of biquadratic diagrams of volume and shear deformation. Construction of physical dependencies is based on the calculation of the secant module of volume and shear deformation. When approximating the graphs of volume and shear deformation diagrams using two segments of parabolas, the secant shear modulus in the first segment is a linear function of the intensity of shear deformations; the secant modulus of volume expansion–contraction is a linear function of the first invariant of the strain tensor. In the second section of the diagrams of both volume and shear deformation, the secant shear modulus is a fractional (rational) function of the intensity of shear deformations; the secant modulus of volume expansion–contraction is a fractional (rational) function of the first invariant of the strain tensor. The obtained differential equations of equilibrium in displacements can be applied in determining the stress-strain state of physically and geometrically nonlinear continuous media under plane deformation the closing equations of physical relations for which are approximated by biquadratic functions.

Keywords: continuous medium, plane deformation, differential equations of equilibrium, biquadratic closing equations, geometrically linear model, geometrically nonlinear model

For citation: Bakushev, S.V. (2022) Differential equations of continuum equilibrium for plane deformation in cartesian axials at biquadratic approximation of closing equations. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 70–86. doi: 10.17223/19988621/76/6

Качество моделирования напряженно-деформированного состояния сплошной среды определяется многими факторами, но ключевую роль при этом играет выбор закона состояния, или математической модели, описывающей связь между напряжениями и деформациями. Математическая модель сплошной среды, позволяющая определить напряженно-деформированное состояние деформированного тела, представляет собой, при определенном упрощении, совокупность двух математических зависимостей, одна из которых описывает связь между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций, а вторая – связь между вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций [1]. Для построения математических моделей используется либо экспериментальный, либо феноменологический подход. В первом случае математические зависимости между напряжениями и деформациями строятся на основании экспериментальных данных; во втором случае феноменологически построенные математические модели подтверждаются данными экспериментов. Вместе с тем в настоящее время прослеживается тенденция построения математических моделей сплошных сред без должного экспериментального обоснования [2]. В работах [2–4] обозначены пути совершенствования математических моделей сплошных сред и строительных конструкций с целью их максимального приближения к изучению реальных явлений. Приведены примеры построения расчетных и математических моделей на основе физических моделей и мотивированных гипотез, а также использования результатов корректно поставленных экспериментальных исследований.

Первой математической моделью для сплошной среды, не потерявшей своей актуальности и в настоящее время, является закон упругости, экспериментально установленный еще в 1678 г. Р. Гуком. Первыми законами состояния для нели-

нейно-упругого тела явились законы, предложенные B.R. Seth [5], Н.В. Зволинским и П.М. Ризом [6], A. Signorini [7], F.D. Murnaghan [8]. Математические модели в виде математических зависимостей, описывающих законы объемного и сдвигового деформирования, представлены в ряде работ профессора Г.А. Гениева [9–11]. Математические модели деформирования бетона и железобетона разрабатываются профессором Н.И. Карпенко [12, 13]. Для моделирования работы деформируемых тел, учитывающего как физическую, так и геометрическую нелинейность, предложен принцип эквивалентности формы записи замыкающих уравнений [14]. Согласно этому принципу форма записи зависимостей между инвариантами тензоров деформаций и напряжений в геометрически линейных средах и форма записи зависимостей между инвариантами тензоров нелинейных деформаций и обобщенных напряжений в геометрически нелинейных средах должна быть одной и той же [15].

В настоящее время совершенствование законов состояния и математических моделей сплошных сред и деформируемых тел активно продолжается. В ряде работ, в частности в [16, 17], предложена дискретная модель сплошной среды, допускающая модификацию на случай задач в геометрически нелинейной постановке [18]. В работе [19] на примере модели многокомпонентной сплошной среды рассматриваются возможные пути перехода от традиционных моделей механики сплошных сред к математическим моделям нового поколения. В статье [20] сплошная среда моделируется эквивалентной по физико-механическим свойствам системой взаимодействующих частиц. Данный подход позволяет имитировать и упругость, и пластичность, и вязкоупругость, а также физическую и геометрическую нелинейность. В работе [21] рассматривается применение решений неевклидовой модели сплошной среды [22] для описания остаточных напряжений в деформированном теле, находящемся в условиях плоско-деформированного состояния. В статье [23] выполнено построение кинематических и физических соотношений для исследования конечных упругопластических деформаций, получены определяющие соотношения для скоростей и приращений истинных напряжений Коши. Публикация [24] посвящена описанию способа формирования физических соотношений для составных многофазных стержней, основанного на аппроксимации диаграмм деформирования фазовых материалов целыми рациональными полиномами произвольной степени. В работе [25], предложен простейший вариант разномодульной теории упругости, в основе которой лежат тензорно-линейные определяющие уравнения, базирующиеся на трехконстантных потенциалах, не зависящих от третьего инварианта: модуль сдвига является константой, а модуль объемного расширения (сжатия) зависит от знака первого инварианта тензора напряжений. В статье [26], основываясь на исследовании решения плоской задачи теории упругости об изгибе консольной полосы, делается вывод, что сингулярность решений задач теории упругости связана с постановкой этих задач, явно или неявно предполагающей нарушение симметрии тензора напряжений. В статье [27] представлено решение физически нелинейной (зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций принята в виде кубического полинома) плоской задачи теории упругости в перемещениях. Принимая для перемещений разложение по В.З. Власову, задача свелась к решению системы $(n + m)$ обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. В статье [28] для бетона, находящегося в плоском напряженном состоянии, предложен новый

подход к построению физических соотношений, основанный на инвариантах механики деформируемого твердого тела. Показано, что предлагаемые зависимости соответствуют реальному напряженному и деформируемому состоянию материала. В статье [29] предлагается математическая модель теории упругости непрерывно-неоднородных тел. Получены новые формы определяющих уравнений для двумерной задачи. В работе [30], в отличие от общей нелинейной постановки задачи [31, 32], рассматривается квадратичное приближение для нелинейной теории физически линейных упругих стержней Коссера–Тимошенко.

Следует отметить, что разработка новых и уточнение существующих математических моделей сплошной среды, проводимые с целью достоверно точного описания механического поведения деформируемых тел и конструкций под нагрузкой, практически всегда приводят к их усложнению. При этом существует предложение аппроксимировать замыкающие уравнения физических соотношений механики деформируемого твердого тела либо билинейными [33], либо биквадратичными [34] функциями, что может привести к значительному упрощению как расчетных соотношений, так и процедуры расчета. В работе [35] приведены расчетные дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для характерных случаев деформирования физически нелинейной сплошной среды: одномерного плоского, центрально-симметричного, осесимметричного, а также плоской деформации в прямоугольных и цилиндрических координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений для физических соотношений как без учета, так и с учетом геометрической нелинейности.

В данной работе рассматривается построение расчетных дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях для случая плоской деформации $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = 0$ физически нелинейной сплошной среды в прямоугольных декартовых координатах при аппроксимации замыкающих уравнений произвольного, вообще говоря, вида биквадратичными функциями как для геометрически линейной, так и для геометрически нелинейной модели сплошной среды.

Построение физических уравнений для геометрически линейной модели

В соответствии с работой [34] секущие модули объемного расширения (сжатия) $K = K(\varepsilon, \Gamma)$ и сдвига $G = G(\varepsilon, \Gamma)$ на первом криволинейном участке диаграмм $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ и $T = T(\Gamma)$ (рис. 1) будут определяться выражениями

$$K^I(\varepsilon) = \frac{1}{3}K_0 + K_{01}\varepsilon; \quad G^I(\Gamma) = G_0 + G_{01}\Gamma. \quad (1)$$

$$\text{Здесь } K_{01} = \frac{\sigma_1 - K_0\varepsilon_1}{3\varepsilon_1^2}; \quad G_{01} = \frac{T_1 - G_0\Gamma_1}{\Gamma_1^2}. \quad (2)$$

На втором криволинейном участке диаграмм $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ и $T = T(\Gamma)$ секущий модуль объемного расширения (сжатия) $K = K(\varepsilon, \Gamma)$ и секущий модуль сдвига $G = G(\varepsilon, \Gamma)$ будут вычисляться по формулам:

$$K^{II}(\varepsilon) = a_1\varepsilon + b_1 + \frac{c_1}{\varepsilon}; \quad G^{II}(\Gamma) = a_2\Gamma + b_2 + \frac{c_2}{\Gamma}. \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Здесь } a_1 &= \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}; \quad b_1 = \frac{1}{3} \left[K_1 - 2 \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \varepsilon_1 \right]; \\
 c_1 &= \frac{1}{3} \left[\sigma_1 - K_1 \varepsilon_1 - \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \varepsilon_1^2 \right]; \quad a_2 = \frac{(T_2 - T_1) - G_1(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2}; \\
 b_2 &= G_1 - 2 \frac{(T_2 - T_1) - G_1(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2} \Gamma_1; \quad c_2 = T_1 - G_1 \Gamma_1 - \frac{(T_2 - T_1) - G_1(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2} \Gamma_1^2.
 \end{aligned} \quad (4)$$

Параметры I и II , введенные в соотношениях (1) и (3), здесь и в дальнейшем используются для обозначения переменных модулей объемного расширения (сжатия) $K(\varepsilon)$ и сдвига $G(\Gamma)$, относящихся к первому и второму участкам диаграмм объемного и сдвигового деформирования соответственно.

В формулах (2) и (4) обозначено: K_0 – начальный модуль объемного расширения (сжатия); G_0 – начальный модуль сдвига; K_1 – начальный модуль упрочнения при объемном расширении (сжатии); G_1 – начальный модуль упрочнения при сдвиге; σ_1, ε_1 – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $\sigma = \sigma(\varepsilon)$; T_1, Γ_1 – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $T = T(\Gamma)$; σ_2, ε_2 – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $\sigma = \sigma(\varepsilon)$; T_2, Γ_2 – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $T = T(\Gamma)$. Здесь также σ – первый инвариант тензора напряжений; ε – первый инвариант тензора деформаций; T – интенсивность касательных напряжений; Γ – интенсивность деформаций сдвига.

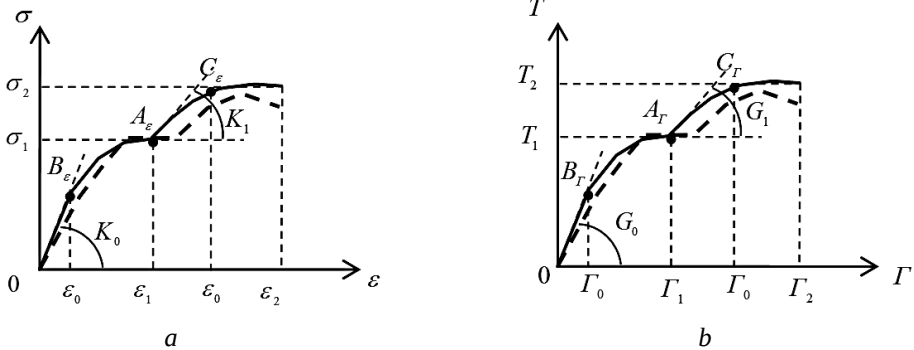


Рис. 1. Диаграммы объемного и сдвигового деформирования:

a – диаграмма $\sigma = \sigma(\varepsilon)$; b – диаграмма $T = T(\Gamma)$. Пунктирные толстые линии – исходные кривые объемного и сдвигового деформирования; сплошные толстые линии – аппроксимирующие отрезки парабол

Fig. 1. Diagrams of volumetric and shear deformation:

a – diagram $\sigma = \sigma(\varepsilon)$; b – diagram $T = T(\Gamma)$. Dotted thick lines are original curves of volume and shear deformation; solid thick lines are approximating segments of parabolas

При плоской деформации в декартовых координатах $\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$ и $\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3} \left((\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{xy}^2 \right)}$. Кроме того, $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$.

Физические уравнения запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= K^i(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^j(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3} \varepsilon \right); \quad \sigma_{yy} = K^i(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^j(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{yy} - \frac{1}{3} \varepsilon \right); \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = G^j(\Gamma) \cdot \varepsilon_{xy}; \quad \sigma_{zz} = \left[K^i(\varepsilon) - \frac{2}{3} G^j(\Gamma) \right] \varepsilon. \end{aligned} \quad (5)$$

Значения величин i и j определяются как взаимным расположением точек излома на диаграммах объемного и сдвигового деформирования, так и текущими значениями первого инварианта тензора деформации и интенсивности деформаций сдвига. При этом следует иметь в виду, что в результате нагружения тела его напряженно-деформированное состояние может быть таковым, что точки излома графиков на квадратичных диаграммах объемного и сдвигового деформирования при некотором значении параметра внешней нагрузки могут достигаться одновременно (состояние 1) или не одновременно: когда первый инвариант тензора деформации уже достиг величины, соответствующей точке излома диаграммы объемного деформирования, а интенсивность деформаций сдвига еще не достигла величины, соответствующей точке излома диаграммы сдвига (состояние 2); когда первый инвариант тензора деформации еще не достиг величины, соответствующей точке излома диаграммы объемного деформирования, а интенсивность деформаций сдвига уже достигла величины, соответствующей точке излома диаграммы сдвига (состояние 3); когда первый инвариант тензора деформации уже превысил величину, соответствующую точке излома диаграммы объемного деформирования, а интенсивность деформаций сдвига еще только достигла величины, соответствующей точке излома диаграммы сдвига (состояние 4); когда первый инвариант тензора деформации достиг величины, соответствующей точке излома диаграммы объемного деформирования, а интенсивность деформаций сдвига уже превысила величину, соответствующую точке излома диаграммы сдвига (состояние 5).

$$\text{Случай 1: } \left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1, \quad \left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1, \text{ т.е. диаграммы и объемного, и}$$

сдвигового деформирования, аппроксимированные двумя параболами каждая, имеют точки излома графиков. При этом возможны три состояния диаграмм объемного и сдвигового деформирования.

Состояние 1. На рис. 1 данное состояние соответствует точкам A_ε и A_Γ . При этом и первый инвариант тензора деформации, и интенсивность деформаций сдвига удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \quad \text{и} \quad 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1. \quad (6)$$

Состояние 2. На рис. 1 данное состояние соответствует точкам A_ε и B_Γ . При этом и первый инвариант тензора деформации, и интенсивность деформаций сдвига удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \quad \text{и} \quad 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_0 < \Gamma_1. \quad (7)$$

Здесь, интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что

$$|\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}| = |\varepsilon_1|. \quad (8)$$

Состояние 3. На рис. 1 данное состояние соответствует точкам B_ε и A_Γ . При этом и первый инвариант тензора деформации, и интенсивность деформаций сдвига удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_0| < |\varepsilon_1| \text{ и } 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1. \quad (9)$$

Здесь объемной деформации $|\varepsilon_0|$ соответствуют такие компоненты деформации, что

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{xy}^2} = \Gamma_1. \quad (10)$$

В этом случае в физических уравнениях (5) величины i и j будут равны

$$i = I, \quad j = I. \quad (11)$$

Случай 2: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1, \quad \left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, т.е. диаграммы и объемного, и

сдвигового деформирования, аппроксимированные двумя параболами каждая, имеют точки излома графиков. При этом возможно одно состояние диаграмм объемного и сдвигового деформирования.

Состояние 4. На рис. 1 данное состояние соответствует точкам C_ε и A_Γ . При этом и первый инвариант тензора деформации, и интенсивность деформаций сдвига удовлетворяют неравенствам

$$|\varepsilon_1| \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_0| \text{ и } \Gamma_0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1. \quad (12)$$

Здесь объемной деформации $|\varepsilon_0|$ соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (10), а интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (8).

В этом случае в физических уравнениях (5) величины i и j будут равны

$$i = II, \quad j = I. \quad (13)$$

Случай 3: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1, \quad \left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, т.е. диаграммы и объемного, и

сдвигового деформирования, аппроксимированные двумя параболами каждая, имеют точки излома графиков. При этом возможно одно состояние диаграмм объемного и сдвигового деформирования.

Состояние 5. На рис. 1 данное состояние соответствует точкам A_ε и C_Γ . При этом и первый инвариант тензора деформации, и интенсивность деформаций сдвига удовлетворяют неравенствам

$$|\varepsilon_0| \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \text{ и } \Gamma_1 \leq \Gamma \leq \Gamma_0. \quad (14)$$

Здесь объемной деформации $|\varepsilon_0|$ соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (10), а интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (8).

В этом случае в физических уравнениях (5) величины i и j будут равны

$$i = I, \quad j = II. \quad (15)$$

Случай 4: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1, \quad \left. \frac{dT^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, то есть диаграммы и объём-

ного и сдвигового деформирования, аппроксимированные двумя параболоми каждая, имеют точки излома графиков. При этом возможны три состояния диаграмм объёмного и сдвигового деформирования.

Состояние 1. На рис. 1 это состояние соответствует точкам A_ε и A_Γ . При этом и первый инвариант тензора деформации, и интенсивность деформаций сдвига удовлетворяют неравенствам:

$$|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1| \quad \text{и} \quad \Gamma \geq \Gamma_1. \quad (16)$$

Состояние 4. На рис. 1 данное состояние соответствует точкам C_ε и A_Γ . При этом и первый инвариант тензора деформации, и интенсивность деформаций сдвига удовлетворяют неравенствам

$$|\varepsilon| \geq \varepsilon_0 \quad \text{и} \quad \Gamma \geq \Gamma_1. \quad (17)$$

Здесь объёмной деформации $|\varepsilon_0|$ соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (10).

Состояние 5. На рис. 1 данное состояние соответствует точкам A_ε и C_Γ . При этом и первый инвариант тензора деформации, и интенсивность деформаций сдвига удовлетворяют неравенствам

$$|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1| \quad \text{и} \quad \Gamma \geq \Gamma_0. \quad (18)$$

Здесь интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (8).

В этом случае в физических уравнениях (5) величины i и j будут равны

$$i = II, \quad j = II. \quad (19)$$

Случай 5: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} = K_1, \quad \left. \frac{dT^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, т.е. точка излома графика на

квадратичной диаграмме объёмного деформирования отсутствует, и второй участок графика $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ является продолжением первого участка. При этом если $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$, то физические уравнения для плоской деформации в декартовых координатах будут иметь вид (5) с коэффициентами (11); если $\Gamma \geq \Gamma_1$, то физические уравнения для плоской деформации в декартовых координатах будут иметь вид (5) с коэффициентами (15).

Случай 6: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1, \quad \left. \frac{dT^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} = G_1$, т.е. точка излома графика

на квадратичной диаграмме сдвигового деформирования отсутствует, и второй участок графика $T = T(\Gamma)$ является продолжением первого участка. При этом если $0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1|$, то физические уравнения для плоской деформации в декарто-

вых координатах будут иметь вид (5) с коэффициентами (11); если $|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1|$, то физические уравнения для плоской деформации в декартовых координатах будут иметь вид (5) с коэффициентами (13).

Построение дифференциальных уравнений для геометрически линейной модели

Подставляя физические уравнения (5) с коэффициентами (11), (13), (15), (19) в дифференциальные уравнения равновесия плоской деформации сплошной среды в декартовых координатах:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + F_x = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y = 0, \quad (20)$$

получим четыре вида разрешающих уравнений в перемещениях, имеющих одну и ту же структуру:

$$\begin{cases} A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + D_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + F_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + F_x = 0; \\ A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + F_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + F_y = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Коэффициенты $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ и $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$ в уравнениях (21) зависят от вида физических уравнений и определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} A_1 &= K^i(\varepsilon) + \frac{4}{3} G^j(\Gamma) + \alpha \varepsilon + \frac{4\beta}{3\Gamma} \left(\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3} \varepsilon \right) (2\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}); \quad B_1 = G^j(\Gamma) + \frac{\beta}{\Gamma} \varepsilon_{xy}^2; \\ C_1 &= \frac{4\beta}{3\Gamma} \varepsilon_{xy} (2\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}); \quad D_1 = \frac{2\beta}{\Gamma} \varepsilon_{xy} \left(\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3} \varepsilon \right); \quad E_1 = \frac{2\beta}{3\Gamma} \varepsilon_{xy} (2\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}); \\ F_1 &= K^i(\varepsilon) + \frac{1}{3} G^j(\Gamma) + \alpha \varepsilon + \frac{4\beta}{3\Gamma} \left(\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3} \varepsilon \right) (2\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}) + \frac{\beta}{\Gamma} \varepsilon_{xy}^2; \\ A_2 &= \frac{2\beta}{3\Gamma} \varepsilon_{xy} (2\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}); \quad B_2 = \frac{2\beta}{\Gamma} \varepsilon_{xy} \left(\varepsilon_{yy} - \frac{1}{3} \varepsilon \right); \\ C_2 &= K^i(\varepsilon) + \frac{1}{3} G^j(\Gamma) + \alpha \varepsilon + \frac{4\beta}{3\Gamma} \left(\varepsilon_{yy} - \frac{1}{3} \varepsilon \right) (2\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) + \frac{\beta}{\Gamma} \varepsilon_{xy}^2; \\ D_2 &= G^j(\Gamma) + \frac{\beta}{\Gamma} \varepsilon_{xy}^2; \quad E_2 = K^i(\varepsilon) + \frac{4}{3} G^j(\Gamma) + \alpha \varepsilon + \frac{4\beta}{3\Gamma} \left(\varepsilon_{yy} - \frac{1}{3} \varepsilon \right) (2\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}); \\ F_2 &= \frac{4\beta}{3\Gamma} \varepsilon_{xy} (2\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}). \end{aligned} \quad (22)$$

В формулах (22) для физических уравнений (5)

$$\text{— с коэффициентами (11): } i = I; \quad j = I; \quad \alpha = K_{01}; \quad \beta = G_{01}; \quad (23)$$

$$\text{— с коэффициентами (13): } i = II; \quad j = I; \quad \alpha = \left(a_1 - \frac{c_1}{\varepsilon^2} \right); \quad \beta = G_{01}; \quad (24)$$

$$\text{— с коэффициентами (15): } i = I; \quad j = II; \quad \alpha = K_{01}; \quad \beta = \left(a_2 - \frac{c_2}{\Gamma^2} \right); \quad (25)$$

– с коэффициентами (19): $i = II$; $j = II$; $\alpha = \left(a_1 - \frac{c_1}{\varepsilon^2}\right)$; $\beta = \left(a_2 - \frac{c_2}{\Gamma^2}\right)$. (26)

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для плоской деформации сплошной среды в прямоугольных декартовых координатах при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений для физических соотношений без учета геометрической нелинейности построены.

Построение физических уравнений для геометрически нелинейной модели

Замыкающие уравнения для геометрически нелинейной модели сплошной среды [15, 35] описываются соотношениями, устанавливающими в самом общем случае перекрестные зависимости между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов обобщенных напряжений и нелинейных деформаций:

$$\sigma^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \cdot \varepsilon^*, \quad T^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \cdot \Gamma^*. \quad (27)$$

Здесь σ^* – первый инвариант тензора обобщенных напряжений; ε^* – первый инвариант тензора нелинейных деформаций; T^* – интенсивность обобщенных касательных напряжений; Γ^* – интенсивность нелинейных деформаций сдвига.

Аппроксимируя зависимости (27) биквадратичными функциями, нетрудно получить секущие модули объемного расширения (сжатия) $K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ и сдвига $G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ на первом и втором криволинейных участках диаграмм $\sigma^* = \sigma^*(\varepsilon^*)$ и $T^* = T^*(\Gamma^*)$, аналогичных соотношениям (1)–(4). При этом все величины, входящие в формулы (1)–(4) следует записывать со звездочками.

Таким образом, K_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля объемного расширения (сжатия); G_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля сдвига; K_1^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля упрочнения при объемном расширении (сжатии); G_1^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля упрочнения при сдвиге; σ_1^* , ε_1^* – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $\sigma^* = \sigma^*(\varepsilon^*)$; T_1^* , Γ_1^* – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $T^* = T^*(\Gamma^*)$; σ_2^* , ε_2^* – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $\sigma^* = \sigma^*(\varepsilon^*)$; T_2^* , Γ_2^* – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $T^* = T^*(\Gamma^*)$.

Физические соотношения для геометрически нелинейной модели сплошной среды для случая плоской деформации будут записываться в форме, аналогичной

соотношениям (5) (если у всех величин, входящих в эти формулы, проставить звездочки), с коэффициентами i и j , определяемыми соотношениями (11), (13), (15), (19).

Построение дифференциальных уравнений для геометрически нелинейной модели

Система дифференциальных уравнений равновесия для геометрически нелинейной модели сплошной среды для случая плоской деформации в прямоугольных декартовых координатах имеет вид [17, 40]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{xx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xy}^* \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{yx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{yy}^* \right] + DF_x = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{xx}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_{xy}^* \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{yx}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_{yy}^* \right] + DF_y = 0. \end{cases} \quad (28)$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

При плоской деформации в декартовых координатах с учетом геометрической нелинейности $\varepsilon^* = \varepsilon_{xx}^* + \varepsilon_{yy}^*$ и $\Gamma^* = \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*)^2 + \varepsilon_{xx}^{*2} + \varepsilon_{yy}^{*2} + \frac{3}{2} \varepsilon_{xy}^{*2}}}$, причём

$$\varepsilon_{xx}^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]; \quad \varepsilon_{yy}^* = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right];$$

$$\varepsilon_{xy}^* = \varepsilon_{yx}^* = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Подставляя физические уравнения для геометрически нелинейной модели сплошной среды в систему дифференциальных уравнений равновесия плоской деформации в декартовых координатах (28), получим четыре вида разрешающих уравнений в перемещениях, имеющих структуру уравнений (21).

Коэффициенты $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ и $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$ в геометрически нелинейном аналоге уравнений (21) зависят от вида физических уравнений и определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} A_1 &= \sigma_{xx}^* + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) F + \frac{\partial u}{\partial y} B; \quad B_1 = \sigma_{yy}^* + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) C + \frac{\partial u}{\partial y} G; \\ C_1 &= 2\sigma_{xy}^* + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) K + \frac{\partial u}{\partial y} C + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) B + \frac{\partial u}{\partial y} H; \quad D_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) L + \frac{\partial u}{\partial y} D; \\ E_1 &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) E + \frac{\partial u}{\partial y} M; \quad F_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) N + \frac{\partial u}{\partial y} E + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) D + \frac{\partial u}{\partial y} P. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{\partial v}{\partial x} F + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) B; \quad B_2 = \frac{\partial v}{\partial x} C + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) G; \\
 C_2 &= \frac{\partial v}{\partial x} K + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) C + \frac{\partial v}{\partial x} B + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) H; \\
 D_2 &= \sigma_{xx}^* + \frac{\partial v}{\partial x} L + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) D; \quad E_2 = \sigma_{yy}^* + \frac{\partial v}{\partial x} E + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) M; \\
 F_2 &= 2\sigma_{xy}^* + \frac{\partial v}{\partial x} N + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) E + \frac{\partial v}{\partial x} D + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) P.
 \end{aligned}$$

Здесь $A = \alpha \varepsilon^* + K^{*i}(\varepsilon^*) - \frac{2}{3} G^{*j}(\Gamma^*)$;

$$\begin{aligned}
 B &= \left[\beta \frac{2\varepsilon_{xy}^*}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \beta \frac{\varepsilon_{xy}^{*2}}{\Gamma^*} \frac{\partial u}{\partial y} + G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right]; \\
 C &= \left[\beta \frac{2\varepsilon_{xy}^*}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{yy}^* - \varepsilon_{xx}^*) \frac{\partial u}{\partial y} + \beta \frac{\varepsilon_{xy}^{*2}}{\Gamma^*} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \right]; \\
 D &= \left[\beta \frac{2\varepsilon_{xy}^*}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*) \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\varepsilon_{xy}^{*2}}{\Gamma^*} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \right]; \\
 E &= \left[\beta \frac{2\varepsilon_{xy}^*}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{yy}^* - \varepsilon_{xx}^*) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \beta \frac{\varepsilon_{xy}^{*2}}{\Gamma^*} \frac{\partial v}{\partial x} + G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right]; \\
 F &= \left[A \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{4}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{\varepsilon_{xy}^*}{\Gamma^*} \frac{\partial u}{\partial y} \right]; \\
 G &= \left[A \frac{\partial u}{\partial y} + 2G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{4}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{yy}^* - \varepsilon_{xx}^*) \frac{\partial u}{\partial y} + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{\varepsilon_{xy}^*}{\Gamma^*} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \right]; \\
 H &= \left[A \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{4}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2 \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{\varepsilon_{xy}^*}{\Gamma^*} \frac{\partial u}{\partial y} \right]; \\
 K &= \left[A \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{4}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{yy}^* - \varepsilon_{xx}^*) \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{\varepsilon_{xy}^*}{\Gamma^*} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \right]; \\
 L &= \left[A \frac{\partial v}{\partial x} + 2G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{4}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*) \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right) \beta \frac{\varepsilon_{xy}^*}{\Gamma^*} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M &= \left[A \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2G^{*j} \left(\Gamma^* \right) \cdot \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \beta \frac{4}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{yy}^* - \varepsilon_{xx}^*) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \beta \frac{\varepsilon_{xy}^*}{\Gamma^*} \frac{\partial v}{\partial x} \right]; \\
 N &= \left[A \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \beta \frac{4}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{yy}^* - \varepsilon_{xx}^*) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \beta \frac{\varepsilon_{xy}^*}{\Gamma^*} \frac{\partial v}{\partial x} \right]; \\
 P &= \left[A \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \beta \frac{4}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*) \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \beta \frac{\varepsilon_{xy}^*}{\Gamma^*} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right].
 \end{aligned}$$

В формулах (29) для геометрически нелинейного аналога физических уравнений (5)

– с коэффициентами (11): $i = I; \quad j = I; \quad \alpha = K_{01}^*; \quad \beta = G_{01}^*; \quad (30)$

– с коэффициентами (13): $i = II; \quad j = I; \quad \alpha = \left(a_1^* - \frac{c_1^*}{\varepsilon^{*2}} \right); \quad \beta = G_{01}^*; \quad (31)$

– с коэффициентами (15): $i = I; \quad j = II; \quad \alpha = K_{01}^*; \quad \beta = \left(a_2^* - \frac{c_2^*}{\Gamma^{*2}} \right); \quad (32)$

– с коэффициентами (19): $i = II; \quad j = II; \quad \alpha = \left(a_1^* - \frac{c_1^*}{\varepsilon^{*2}} \right); \quad \beta = \left(a_2^* - \frac{c_2^*}{\Gamma^{*2}} \right). \quad (33)$

Таким образом, дифференциальные уравнения в перемещениях для плоской деформации сплошной среды в прямоугольных декартовых координатах при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений для физических соотношений с учетом геометрической нелинейности построены.

Заключение

Построенные в статье дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях в прямоугольных декартовых координатах могут найти применение при определении напряженно-деформированного состояния сплошных сред как с учетом, так и без учета геометрической нелинейности, находящихся в условиях плоской деформации, замыкающие уравнения физических соотношений для которых аппроксимированы биквадратичными функциями.

Список источников

1. Новожиллов В.В. Теория упругости. М. : Судпромгиз, 1958. 370 с.
2. Колчунов В.И., Федоров В.С. Понятийная иерархия моделей в теории сопротивления строительных конструкций // Промышленное и гражданское строительство. 2020. № 8. С. 16–23. doi: 10.33622/0869-7019.2020.08.16-23
3. Lirola J.M. et al. A review on experimental research using scale models for buildings: application and methodologies // Energy and Buildings. 2017. V. 142. P. 72–110.
4. Li W. et al. In-plane strengthening effect of prefabricated concrete walls on masonry structures: shaking table test // Shock and Vibration. 2017. V. 2017. Art. 3178032. doi: 10.1155/2017/3178032

5. Seth B.R. Finite Strain in Elastic Problems // Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A. 1935. V. 234. P. 231–264.
6. Зволинский Н.В., Риз П.М. О некоторых задачах нелинейной теории упругости // Прикладная математика и механика. 1939. Т. 2, № 4. С. 417–426.
7. Signorini A. Trasformazioni termoelastiche finite // Ann. Mat. Pur. Appl. Ser. IV. 1943. V. 22. P. 33–143; 1948. V. 30. P. 1–72.
8. Murnaghan F.D. Finite Deformation of an Elastic Solid. New York : Wiley, 1951.
9. Гениев Г.А. К вопросу о деформационной теории пластичности сыпучей среды // Строительная механика и расчет сооружений. 1974. № 4. С. 8–10.
10. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. М. : Стройиздат, 1974. 316 с.
11. Гениев Г.А., Пятикрестовский К.П., Колчунов В.И., Ключева Н.В. Деформационные зависимости и определяющие уравнения для льда и ледовых массивов // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2004. № 3 (543). С. 14–19.
12. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М. : Стройиздат, 1996. 416 с.
13. Карпенко Н.И., Карпенко С.Н. Построение физических соотношений для расчета железобетонных конструкций при объемном напряженном состоянии с учетом физической нелинейности материалов // Жилищное строительство. 2016. № 6. С. 16–20.
14. Бакушев С.В. Вариант построения расчетных моделей геометрически-нелинейных сплошных сред // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1991. № 9. С. 24–29.
15. Бакушев С.В. Геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды: плоская задача. Изд. стереотип. М. : Либроком, 2020. 312 с.
16. Шамровский А.Д., Лымаренко Ю.А., Колесник Д.Н., Миняйло Т.А., Кривуляк В.В. Дискретные модели для плоских статических задач теории упругости // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2011. Т. 3, № 7 (51). С. 11–18.
17. Metrikine A.V., Askes H. One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 1: Generic formulation // European Journal of Mechanics A / Solids. 2002. V. 21. P. 555–572.
18. Шамровский А.Д., Колесник Д.Н. Роль нелинейных эффектов при решении одной плоской задачи теории упругости // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2011. Т. 5, № 7 (53). С. 59–62.
19. Куропатенко В.Ф. Новые модели механики сплошных сред // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84, № 1. С. 74–92.
20. Ошхунов М.М., Нагоев З.В. Моделирование свойств деформируемых сред взаимодействиями частицами // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика. 2014. № 19 (190). С. 155–163.
21. Гузев М.А., Горбунов А.В. Неевклидова модель сплошной среды и описание остаточных напряжений // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. 2020. № 2 (43). С. 3–12. doi: 10.24866/2227-6858/2020-2-1
22. Kröner E. Incompatibility, defects, and stress functions in the mechanics of generalized continua // International J. of Solids and Structures. 1985. V. 21 (7). P. 747–756. doi: 10.1016/0020-7683(85)90077-0
23. Султанов Л.У. Исследование конечных упругопластических деформаций. Кинематика среды и определяющие соотношения // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. 2015. Т. 157, № 4. С. 158–165.
24. Мищенко А.В. Способ формирования нелинейных физических соотношений в прямых и обратных задачах расчета многофазных стержней // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Строительство и архитектура. 2014. Т. 14, № 3. С. 12–16.
25. Цвелоуб И.Ю. О разномодульной теории упругости // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49, № 1 (287). С. 157–164.
26. Васильев В.В. Симметрия тензора напряжений и сингулярные решения в теории упругости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2010. № 2. С. 62–72.

27. Иванов С.П., Ахметшин М.Н. Решение физически нелинейной плоской задачи теории упругости и ее приложение к расчету балок, контактирующих со средой // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 2. С. 33–36.
28. Круглов В.М., Ерофеев В.Т., Ватин Н.И., Аль Д.С. Вариант деформационной теории пластичности бетона в плоском напряженном состоянии // Транспортные сооружения. 2019. Т. 6, № 4. С. 10. doi: 10.15862/11SATS419
29. Роганова Н.А., Шарафутдинов Г.З. Некоторые методы решения плоских задач теории упругости неоднородных тел // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4-5. С. 2460–2462.
30. Лалин В.В., Мякишкова Е.А. Квадратичное приближение в нелинейной теории стержней // AlfaBuild. 2018. № 3 (5). С. 20–32.
31. Simo J.C., Tarnow N., Doblare M. Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conservation algorithms // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1995. V. 38 (9). P. 1431–1473.
32. Antman S.S. Nonlinear problems of elasticity. Berlin–Heidelberg–New York : Springer, 2005. 835 p.
33. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования билинейными функциями // Строительная механика и расчет сооружений. 2019. № 2 (283). С. 2–11.
34. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования квадратичными функциями // Строительная механика и расчет сооружений. 2020. № 3 (290). С. 2–14. doi: 10.37538/0039-2383.2020.3.2.14
35. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения и краевые задачи механики деформируемого твердого тела. М. : ЛЕНАНД, 2020. 304 с.

References

1. Novozhilov V.V. (1958) *Teoriya uprugosti* [The theory of elasticity]. Leningrad: Sudpromgiz.
2. Kolchunov V.I., Fedorov V.S. (2020) Ponyatiynaya ierarkhiya modeley v teorii soprotivleniya stroitel'nykh konstruksiy. [Conceptual hierarchy of models in the theory of resistance of building structures]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo*. 8. pp. 16–23. doi: 10.33622/0869-7019.2020.08.16-23
3. Lirola J. M. et al. (2017) A review on experimental research using scale models for buildings: application and methodologies. *Energy and Buildings*. 142. pp. 72–110.
4. Li W. et al. (2017) In-plane strengthening effect of prefabricated concrete walls on masonry structures: shaking table. *Shock and Vibration*. 2017. pp. 1–13. doi: 10.1155/2017/3178032
5. Seth B.R. (1935) Finite strain in elastic problems, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 234. pp. 231–264.
6. Zvolinskiy N.V., Riz P.M. (1939). O nekotorykh zadachakh nelineynoy teorii uprugosti. [Some problems of nonlinear theory of elasticity] *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2(4). pp. 417–426.
7. Signorini A. (1943) Trasformazioni termoelastiche finite. *Annali di Matematica Pura ed Applicata. Serie Quarta*. 22. pp. 33–143; (1948) 30. pp. 1–72.
8. Murnaghan F. D. (1951) *Finite Deformation of an Elastic Solid*. New York: Wiley.
9. Geniev G.A. (1974) K voprosu o deformatsionnoy teorii plastichnosti sypuchey sredy. [To the question of granular medium plasticity deformation theory] *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 4. pp. 8–10.
10. Geniev G.A., Kissyuk V.N., Tyupin G.A. (1974) *Teoriya plastichnosti betona i zhelezobetona*. [Theory of plasticity of concrete and reinforced concrete]. Moscow: Stroyizdat.
11. Geniev G.A., Pyatikrestovskiy K.P., Kolchunov V.I., Klyuyeva N.V. (2004) Deformatsionnyye zavisimosti i opredelyayushchiye uravneniya dlya l'da i ledovykh massivov. [Deformation dependences and constitutive equations for ice and ice massifs]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Stroitel'stvo*. (3). pp. 14–19.

12. Karpenko N.I. (1996) *Obshchiye modeli mekhaniki zhelezobetona*. [General models of reinforced concrete mechanics]. Moscow: Stroyizdat.
13. Karpenko N.I., Karpenko S.N. (2016) Postroyeniye fizicheskikh sootnosheniy dlya raschëta zhelezobetonnykh konstruksiy pri ob"yëmnom napryazhënnom sostoyanii s uchëtom fizicheskoy nelineynosti materialov. [Construction of physical relationships for the calculation of reinforced concrete structures in a volumetric stress state, taking into account the physical nonlinearity of materials]. *Zhilishchnoye stroitel'stvo*. 6. pp. 16–20.
14. Bakushev S.V. (1991) Variant postroyeniya raschëtnykh modeley geometricheskii-nelineynykh sploshnykh sred. [Option for constructing computational models of geometrically nonlinear continuous media]. *Izvestiya VUZov. Stroitel'stvo i arkhitektura*. 9. pp. 24–29.
15. Bakushev S.V. (2020) *Geometricheski i fizicheski nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy: Ploskaya zadacha* [Geometrically and physically nonlinear mechanics of continuous media: Plane problem]. Moscow: Librokom.
16. Shamrovskiy A.D., Lymarenko Yu.A., Kolesnik D.N., Minyaylo T.A., Krivulyak V.V. (2011) Diskretnyye modeli dlya ploskikh staticheskikh zadach teorii uprugosti [Discrete models for plane static problems of theory of elasticity]. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy*. 3(7). pp. 11–18.
17. Metrikine A.V., Askes H. (2002) One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 1: Generic formulation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 21. pp. 555–572.
18. Shamrovskiy A.D., Kolesnik D.N. (2011) Rol' nelineynykh effektiv pri reshenii odnoy ploskoy zadachi teorii uprugosti. [Role of nonlinear effects in solving a plane problem of elasticity theory]. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy*. 5(7). pp. 59–62.
19. Kuropatenko V.F. (2011) New models of continuum mechanics. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 84(1). 77–99.
20. Oshkhunov M.M., Nagoev Z.V. (2014) Modelirovaniye svoystv deformiruyemykh sred vzaimodeystvuyushchimi chastitsami [Modeling the properties of deformable media by interacting particles]. *Nauchnyye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika*. 19. pp. 155–163.
21. Guzev M.A., Gorbunov A.V. (2020) Neyevklidova model' sploshnoy sredy i opisaniye ostatochnykh napryazheniy. [Non-Euclidean model of a continuous medium and description of residual stresses]. *Vestnik Inzhenernoy shkoly Dal'nevostochnogo federal'nogo universiteta*. (2). pp. 3–12. doi: 10.24866/2227-6858/2020-2-1
22. Kröner E. (1985) Incompatibility, defects, and stress functions in the mechanics of generalized continua. *International Journal of Solids and Structures*. 21(7): pp. 747–756. doi: 10.1016/0020-7683(85)90077-0
23. Sultanov L.U. (2015) Issledovaniye konechnykh uprugoplasticheskikh deformatsiy. Kinematika sredy i opredelyayushchiye sootnosheniya. [Study of finite elastoplastic deformations. Kinematics of the environment and constitutive relations]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskoye nauki*. 157 (4). pp. 158–165.
24. Mishchenko A.V. (2014) Sposob formirovaniya nelineynykh fizicheskikh sootnosheniy v pryamykh i obratnykh zadachakh rascheta mnogofaznykh stержney. [Method of forming nonlinear physical equations in the direct and inverse problems of multiphase rods analysis]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura*. 14(3). pp. 12–16.
25. Tselodub I.Yu. (2008) O raznomodul'noy teorii uprugosti. [On multimodulus elasticity theory]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 49(1). pp. 157–164.
26. Vasil'ev V.V. (2010) Stress tensor symmetry and singular solutions in the theory of elasticity. *Mechanics of Solids*. 45(2). 205–213.
27. Ivanov S.P., Akhmetshin M.N. (2012) Resheniye fizicheskii nelineynoy ploskoy zadachi teorii uprugosti i ee prilozheniye k raschetu balok, kontaktiruyushchikh so sredoy. [The solution of physically nonlinear flat problem of the theory of elasticity and its application to cal-

- culatation of beams contacting with the medium]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsey i sooruzheniy*. 2. pp. 33–36.
28. Kruglov V.M., Erofeev V.T., Vatin N.I., Al' D.S.D.S. (2019) Variant deformatsionnoy teorii plastichnosti betona v ploskom napryazhennom sostoyanii. [Version of the deformation theory of plastic ductility of concrete in a plane stress state]. *Transportnye sooruzheniya*. 6(4). p. 10. doi: 10.15862/11SATS419.
 29. Roganova N.A., Sharafutdinov G.Z. (2011) Nekotoryye metody resheniya ploskikh zadach teorii uprugosti neodnorodnykh tel. [Some methods of analyzing plane elasticity problems of inhomogeneous bodies]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta imeni N.I. Lobachevskogo*. 4-5. pp. 2460–2462.
 30. Lalin V.V., Myakshikova E.A. (2018) Kvadratischnoye priblizheniye v nelineynoy teorii sterzhney [Quadratic approximation in the nonlinear theory of rods]. *AlfaBuild*. 5. pp. 20–32.
 31. Simo J.C., Tarnow N., Doblare M. (1995) Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conservation algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 38(9). pp. 1431–1473.
 32. Antman S.S. (2005) *Nonlinear problems of elasticity*. Berlin–Heidelberg–New York: Springer.
 33. Bakushev S.V. (2019) Approksimatsiya diagramm deformirovaniya bilineynymi funktsiyami. [Approximations of deformation diagrams by bilinear functions]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. (2). pp. 2–11.
 34. Bakushev S.V. (2020) Approksimatsiya diagramm deformirovaniya kvadratsichnymi funktsiyami. [Approximation of deformation diagrams by quadratic functions]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 3. pp. 2–14. doi: 10.37538/0039-2383.2020.3.2.14.
 35. Bakushev S.V. (2020) *Differentsial'nye uravneniya i kraevyye zadachi mekhaniki deformiruyemogo tverdogo tela*. [Differential equations and boundary problems in the mechanics of a deformable solid] Moscow: LENAND.

Сведения об авторе:

Бакушев Сергей Васильевич – доктор технических наук, профессор кафедры механики строительного факультета Пензенского государственного университета архитектуры и строительства (Пенза, Россия). E-mail: bakuchsv@mail.ru

Information about the author:

Bakushev Sergey V. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Russian Federation). E-mail: bakuchsv@mail.ru

Статья поступила в редакцию 25.12.2021; принята к публикации 22.03.2022

The article was submitted 25.12.2021; accepted for publication 22.03.2022